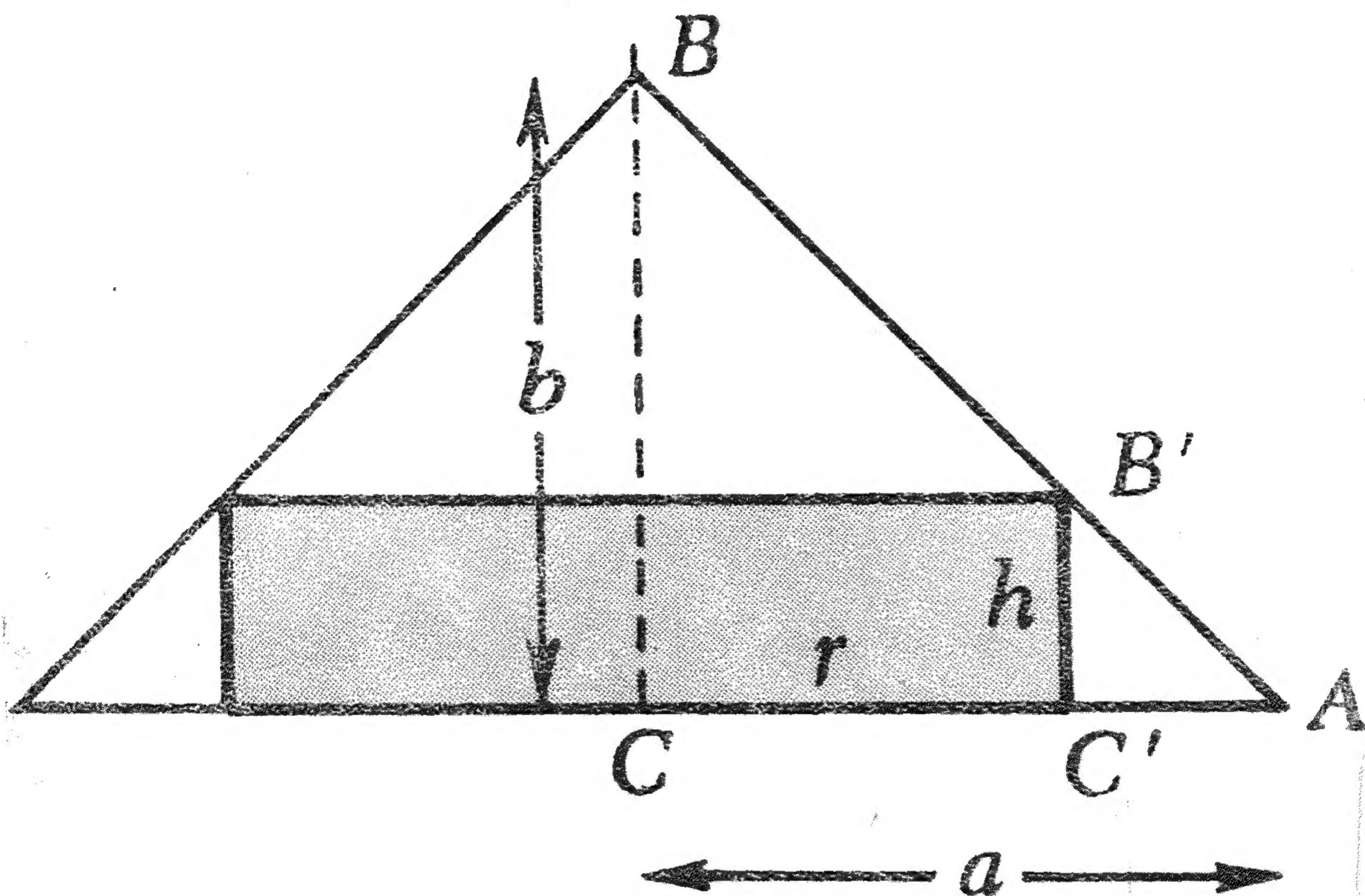
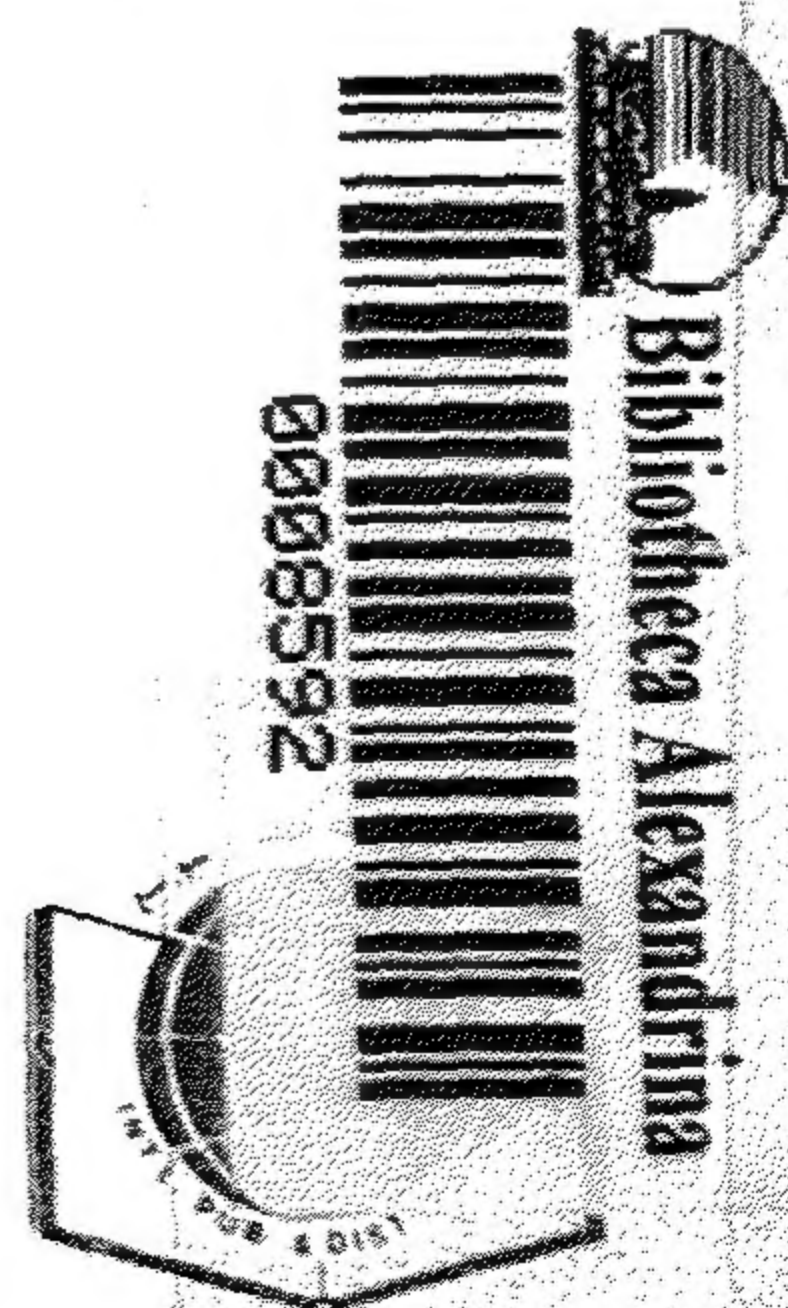


حساب الفاصل والنكامل والهندسة التحليلية

وليم ٥٠٥ ورفنى



الدار الدولية للنشر والتوزيع



حساب النفاضل والنكامل والهندسة التحليلية

بتأليف

وئيم هـ - دورفنى
كلية مونت-هوليوك

ترجمة

الدكتور محمد على محمد السمرى
أستاذ الرياضيات ووكيل كلية الهندسة والتكنولوجيا
جامعة حلوان
جمهورية مصر العربية

مراجعة

الأستاذ الدكتور راجى حليم مختار
رئيس قسم الرياضيات البحتة - كلية العلوم
جامعة عين شمس
جمهورية مصر العربية



الدار الدولية للنشر والتوزيع

القاهرة - الكويت - لندن

حقوق النشر

الطبعة الانجليزية : حقوق التأليف ١٩٧١ دار نشر كتب ماكجروهيل (المملكة المتحدة) ليمنت جميع الحقوق محفوظة .

Calculus And Analytic Geometry.

William H. Durfee

الطبعة العربية الأولى : حقوق الطبع والنشر © ١٩٨٢ ، دار ماكجروهيل للنشر ، جميع الحقوق محفوظة .

* أعد الترجمة العربية مركز الاهرام للترجمة العلمية بالقاهرة .

الطبعة العربية الثانية : حقوق الطبع والنشر © ١٩٩٢ ، جميع الحقوق محفوظة للناشر :

الدار الدولية للنشر والتوزيع

٢٨ شارع الاهرام - روكسى - مصر الجديدة

ض . ب : ٥٥٩٩ هليوبوليس غرب - القاهرة

ت : ٢٥٨٢٨٨٧

تلكس : ٢٠٠٧٠ / ٢٠٠٧١ PBCRB UN

فاكس : ٢٩١٨٠٥٩ / ٠٠٢٠٢

لايجوز نشر أى جزء من هذا الكتاب أو اختزان مادته بطريقة الاسترجاع أو نقله على أى نحو أو بأى طريقة ، سواء كانت اليكترونية أو ميكانيكية أو بالتصوير أو بالتسجيل أو خلاف ذلك الا بموافقة الناشر على هذا كتابة ومقما .

ISBN 084269 8

قوانين من الهندسة والجبر وحساب المثلثات

$$A = \text{المساحة}$$

$$B = \text{مساحة القاعدة}$$

$$V = \text{الحجم}$$

$$S = \text{المساحة الجانبية (لا تشمل القاعدة أو القمة)}$$

$$b = \text{طول القاعدة}$$

$$h = \text{الارتفاع (مقياس عموديا على القاعدة)}$$

$$r = \text{نصف القطر}$$

$$A = bh. \text{ متوازي الاضلاع}$$

$$A = \frac{1}{2}bh. \text{ المثلث}$$

$$A = \frac{a+b}{2}h \text{ (} a = \text{طول السمة) شبه المنحرف}$$

$$A = \pi r^2, C = 2\pi r \text{ (} C = \text{المحيط) الدائرة}$$

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta \text{ و (طول القوس } s = r\theta \text{) القطاع الدائري}$$

حيث θ الزاوية المركزية θ مقيسة بالتقدير الدائري.

$$V = Bh. \text{ الأسطوانة أو المنشور حيث القاعدة والقمة متوازيان}$$

$$V = \pi r^2 h, S = 2\pi rh. \text{ الأسطوانة الدائرية القائمة}$$

$$V = \frac{1}{3}Bh. \text{ المخروط أو الهرم}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h, S = \pi rt. \text{ (} t = \text{طول الراسم) المخروط الدائري القائم}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, A = 4\pi r^2. \text{ الكرة}$$

$$\text{حلا المعادلة} \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{هما} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

المتطابقات المثلثية

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cot \theta}, \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}.$$

$$\sin (-\theta) = -\sin \theta, \cos (-\theta) = \cos \theta, \tan (-\theta) = -\tan \theta.$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta, \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta, \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cot \theta, \cot \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \tan \theta.$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta, 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta.$$

$$\sin (\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta.$$

$$\cos (\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta.$$

$$\tan (\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}.$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta.$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1.$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta), \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta).$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[-\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)].$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)].$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)].$$

لتكن a, b, c أضلاع المثلث ، A, B, C الزوايا المقابلة .

قانون جيب التمام : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

قانون الجيب : $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

المحتويات

مقدمة	٣
الفصل الأول-الأوليات الجبرية	١٥
١ - ١ الفئات	١٧
١ - ٢ الاعداد	١٩
١ - ٣ المتباينات	٢٥
١ - ٤ حل المتباينات	٢٩
١ - ٥ القيمة المطلقة	٣٤
١ - ٦ كثيرات الحدود	٣٨
الفصل الثاني - الدوال والنهايات	٤٤
٢ - ١ الدوال	٤٤
٢ - ٢ الاشكال البيانية للدوال	٥١
٢ - ٣ أنواع الدوال والدوال الخاصة	٥٥
٢ - ٤ تركيبات الدوال	٥٩
٢ - ٥ مقدمة للنهايات	٦٢
٢ - ٦ الاتصال	٧٣
٢ - ٧ تعريف النهاية	٧٩
٢ - ٨ نظريات النهاية	٩٠
٢ - ٩ الدوال المتصلة	٩٦
٢ - ١٠ براهين نظريات النهاية	١٠٢
الفصل الثالث-المشتقات	١٠٨
٣ - ١ تعريف المشتقة	١٠٨
٣ - ٢ قاعدة القوة وحاصل الجمع	١٢٠
٣ - ٣ قاعدة حاصل الضرب وخارج القسمة	١٢٦
٣ - ٤ قاعدة السلسلة	١٣٧

الموضوع	صفحة
٣- ٥ الدوال الجبرية	١٤٢
٣- ٦ المشتقات الأعلى	١٤٧
٣- ٧ المعكوسات التفاضلية	١٤٩
٣- ٨ المعادلات التفاضلية	١٥٥
٣- ٩ التفاضل الضمني	١٦٠
الفصل الرابع - تطبيقات المشتقة	١٦٩
٤- ١ النهايات العظمى والنهايات الصغرى	١٦٩
٤- ٢ نظرية القيمة المتوسطة	١٧٨
٤- ٣ الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة	١٨٦
٤- ٤ تخطيط المنحنى	١٩٢
٤- ٥ النهايات العظمى والصغرى المحلية	١٩٨
٤- ٦ التفرع ونقط الانقلاب	٢٠٢
٤- ٧ اختبار المشتقة الثانية	٢٠٨
٤- ٨ الخطوط التقاربية والمماسات الرأسية	٢١٢
٤- ٩ النهايات العظمى والصغرى التطبيقية	٢١٩
٤- ١٠ الحركة على خط مستقيم	٢٣١
٤- ١١ الأجسام الساقطة	٢٤٢
٤- ١٢ المعادلات المرتبطة ببعضها	٢٤٧
٤- ١٣ تطبيقات في الاقتصاد	٢٥٤
٤- ١٤ العناصر التفاضلية	٢٥٩
٤- ١٥ المعادلات التفاضلية القابلة للفصل	٢٦٧
الفصل الخامس - التكامل المعين	٢٧٦
٥- ١ التكامل المعين	٢٧٦
٥- ٢ نظريات التكامل	٢٨٧
٥- ٣ النظرية الأساسية للتكامل	٢٩١
٥- ٤ المساحات	٣٠١
٥- ٥ قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمسون	٣١١
٥- ٦ حجوم الاجسام ذات المقاطع المنتظمة	٣١٨
٥- ٧ التاكامل بتغيير المتغير	٣٣١
٥- ٨ الحدود العليا الصغرى	٣٣٥
٥- ٩ وجود التكامل المعين	٣٣٨
٥- ١٠ مسائل متنوعة	٣٤٥

الموضوع	صفحة
الفصل السادس - الدوال المثلثية	٣٤٧
١ - ٦ الدوال المثلثية	٣٤٧
٢ - ٦ النهايات المثلثية	٣٥٥
٣ - ٦ مشتقات الدوال المثلثية	٣٥٩
٤ - ٦ الحركة التوافقية البسيطة	٣٦٩
٥ - ٦ نظرية القيمة الوسط	٣٧٤
٦ - ٦ الدوال المثلثية العكسية	٣٧٦
٧ - ٦ مشتقات الدوال المثلثية العكسية	٣٨٢
الفصل السابع - الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية	٣٩١
١ - ٧ الأسس والدوال الأسية	٣٩١
٢ - ٧ الدالة L	٣٩٦
٣ - ٧ مشتقة e^x	٤٠٢
٤ - ٧ اللوغاريتمات	٤٠٨
٥ - ٧ الدالة اللوغاريتمية	٤١٧
٦ - ٧ تطبيقات الدالة الأسية	٤٢٩
الفصل الثامن - الاحداثيات القطبية	٤٣٩
١ - ٨ الاحداثيات القطبية	٤٣٩
٢ - ٨ الأشكال البيانية لمعادلات الاحداثيات القطبية	٤٤٣
٣ - ٨ المساحات بالاحداثيات القطبية	٤٥١
٤ - ٨ القطوع المخروطية	٤٥٧
الفصل التاسع - المعادلات البارامترية	٤٦٤
١ - ٩ المعادلات البارامترية	٤٦٤
٢ - ٩ الميل	٤٧٣
٣ - ٩ طول القوس	٤٧٦
٤ - ٩ الحركة فى مستوى	٤٨٦
الفصل العاشر - طرق التكامل	٤٩٣
١ - ١٠ الطرق البسيطة للتكامل	٤٩٣
٢ - ١٠ التكامل بالتجزئ	٤٩٧
٣ - ١٠ التكاملات المثلثية	٥٠٢
٤ - ١٠ تكاملات التى تشتمل على $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ و $\sqrt{a^2 - x^2}$	٥٠٨
٥ - ١٠ تكامل الدوال الكسرية	

الموضوع	صفحة
١٠ - ٦ التكامل بتعويضات متنوعة	٥٢٣
مسائل متنوعة	
الفصل الحادى عشر - تطبيقات التكامل المعين	٥٢٧
١١ - ١ كتلة جسم	٥٢٧
١١ - ٢ مركز الكتلة لمجموعة محدودة	٥٣٠
١١ - ٣ مركز كتلة منطقة مستوية	٥٣٥
١١ - ٤ مركز كتلة منطقة مستوية (تابع)	٥٤٢
١١ - ٥ المركز المتوسط لجسم دورانى	٥٤٧
١١ - ٦ الشغل	٥٥١
١١ - ٧ ضغط السائل	٥٥٦
الفصل الثانى عشر - الصور غير المحدودة	٥٦٣
١٢ - ١ قاعدة لوبيتال	٥٦٣
١٢ - ٢ الصور غير المحددة $0 \cdot \infty$, 0^0 , 1^∞ , ∞^0 , $\infty - \infty$	٥٧٠
الفصل الثالث عشر - التكاملات المعتلة	٥٧٥
١٣ - ١ التكاملات بحدود لانهاية	٥٧٥
١٣ - ٢ التكاملات بدوال مكاملة لانهاية	٥٧٩
الفصل الرابع عشر - المتجهات المستوية	٥٨٣
١٤ - ١ المتجهات	٥٨٣
١٤ - ٢ حاصل الضرب الداخلى	٥٩١
١٤ - ٣ الدوال المتجهة	٥٩٧
الفصل الخامس عشر - المتسلسلات اللانهائية	٦٠٨
١٥ - ١ المتتابعات	٦٠٨
١٥ - ٢ المتسلسلات اللانهائية	٦١٧
١٥ - ٣ العمليات الجبرية على المتسلسلات	٦٢٦
١٥ - ٤ المتسلسلات ذات الحدود غير السالبة	٦٣٠
١٥ - ٥ المتسلسلات ذات الحدود غير السالبة (تابع)	٦٣٤
١٥ - ٦ المتسلسلات المتبدلة الإشارة	٦٤١
١٥ - ٧ التقارب المطلق	٥٤٦
١٥ - ٨ اختبار النسبة	٦٥٠
مسائل متنوعة	

الموضوع	صفحة
الفصل السادس عشر - متسلسلات القوى	٦٥٧
١٦ - ١ متسلسلات القوى	٦٥٧
١٦ - ٢ الدوال المعرفة بمتسلسلات القوى	٦٦٣
١٦ - ٣ متسلسلة تايلور	٦٦٨
١٦ - ٤ نظرية تايلور	٦٧٥
١٦ - ٥ تطبيقات متسلسلة تايلور	٦٨٠
١٦ - ٦ <u>نظرية ومتسلسلة ذات الحدين</u>	٦٩٠
تذييل - الهندسة التحليلية	٧٠٠
١ - مستوى الاحداثيات	٧٠٠
٢ - الأشكال البيانية للمعادلات والمتباينات	٧٠٧
٣ - الدوائر	٧١٣
٤ - ميل الخط المستقيم	٧٢١
٥ - معادلات المستقيمات	٧٢٩
٦ - الانعكاسات والتماثل	٧٤٠
٧ - القطع المكافئ	٧٤٣
٨ - القطع الناقص	٧٥٠
٩ - القطع الزائد	٧٥٦
١٠ - نقل المحاور	٧٦٣
١١ - دوران المحاور	٧٧١
ملحق أ - جدول التكاملات	٧٧٩
ملحق ب - الجداول العددية	
جدول I زوايا نصف قطرية الى درجات ودقائق وبالعكس	٧٨٥
جدول II الدوال المثلثية	٧٨٦
جدول III اللوغاريتمات للأساس 10	٧٨٨ ، ٧٨٧
جدول IV اللوغاريتمات الطبيعية	٧٨٩
جدول V الدالة الأسية	٧٩٠
جدول VI القوى والجذور والمقلوبات	٧٩١
أجوبة المسائل الفردية الترقيم	٧٩٢
قائمة المصطلحات العلمية	٨٤١
الفهرس الأبجدي	٨٦١

مقدمة

هذا الكتاب مدخل لحساب التفاضل والتكامل وللهندسة التحليلية . ورغم أن المقصود منه أساساً أن يكون منهاجاً لمدة عام واحد على مستوى الكليات إلا أنه يصلح لأن يكون منهاجاً متقدماً بالمدرسة الثانوية . يمكن أيضاً الاستفادة به لمنهاج لمدة فصل دراسي واحد إذا ما أعطيت البنود من ت - ١ الى ت - ٧ من التذييل الذي في آخر الكتاب عن الحقائق الأساسية في الهندسة التحليلية ، مع أجزاء من الفصول من واحد الى خمسة ، وأي أجزاء إضافية من الفصول من واحد الى سبعة أو من الهندسة التحليلية إذا وجد وقت لذلك .

تفهم حساب التفاضل والتكامل يعتمد على فهم بدهي للموضوع . برهان النظرية لايعنى كثيراً للطلاب الذي لايفهم النظرية . لقد حاولت أن أغذى هذا الفهم بتقديم الأفكار الجديدة بالتدرج ، موضحاً بأمثلة كثيرة . لقد أعطيت التفسير الهندسي للمفهوم أو النظرية كلما أمكن ذلك . إن الدارس يفقد الكثير في الرياضيات إذا كان غير مدرك لتركيبها وطبيعتها الاستنتاجية . فيما عدا حذف براهين قليلة تبدو أنها صعبة بالنسبة الى منهاج أولى في حساب التفاضل والتكامل ، فإن الكتاب يطور الموضوع بأسلوب منطقي ، مفترضاً فقط خواص الأعداد الحقيقية . ولمساعدة هؤلاء الذين يفضلون مدخلا سهلاً لحساب التفاضل والتكامل ، وضعنا براهين النظريات الأكثر صعوبة في نهاية البند أو في بند متفصل في نهاية الفصل . بهذه الكيفية يمكن حذفها بسهولة . ولقد حاولت جعل العرض واضحاً وبسيطاً بقدر الامكان . وقد اشتمل الكتاب فقط على التعريفات والنظريات الضرورية لتطور الموضوع بعناية وبدرجة معتدلة من الكمال . التطبيقات جزء هام من مقرر أولى في حساب التفاضل والتكامل فلم تهمل هنا . بالإضافة الى التطبيقات المعتادة من الفيزياء والعلوم الهندسية فإنه يوجد بند على التطبيقات في الاقتصاديات .

حيث أن كثيراً من الطلاب يأتون الآن الى الكليات وهم على معرفة ما أو حتى على إلمام كبير بالهندسة التحليلية ، فقد بدا أنه من الأفضل عدم إدماج هذه المادة مع الباقي بل وضعها في تذييل في آخر الكتاب . بهذه الصورة من السهل على المحاضر أن يغطي كثيراً أو قليلاً من المادة على حسب رغبته .

فقط البنود من ت - ١ الى ت - ٧ عن المستقيمات والدوائر والقطع المكافئ تلزمنا في حساب التفاضل والتكامل المقدم هنا . المادة عن القطوع المخروطية الأخرى وعن نقل ودوران المحاور يمكن قراءتها فيما بعد أو حتى حذفها إذا أنها تستخدم فقط عرضاً في الكتاب . وقد عولجت الهندسة التحليلية بتفصيل أكثر مما هي عليه في كثير من الكتب الحديثة حتى أن الطالب يمكنه أن يتعلم أو يراجع المادة بنفسه مع مساعدة بسيطة من المدرس . لقد استخدمنا هذه الطريقة بنجاح لسنوات عديدة في Mount Holyoke College . المادة عن الهندسة التحليلية في البنود من ت - ١ الى ت - ٧ قد استخدمت في الفصل الثاني . إذا كانت لتدرس في الفصل ، فالوقت الملائم لدراستها يمكن أن يكون بعد الفصل الأول مباشرة .

بدلاً من التعريف (epsilon - delta) للنهاية ، قد استخدمنا الجوار . من تجربتي ، الجوار يجعل تعريف النهاية أسهل للفهم ويبسط براهين بعض نظريات النهاية . المعكوس التفاضلي قدم مع التفاضل لكل نوع درس من الدوال . هذا يقوى فهم الطالب للأسلوب التكنولوجي للتفاضل ويسمح بمقدمة مبكرة عن المعادلات التفاضلية . هاته قد درست خلال الكتاب وليس في فصل مستقل . نوع من المعادلات التفاضلية قد عولج بمجرد أن أصبح الطالب لديه الكيفية اللازمة لحلها ، وهذا يعطيه خبرة عملية في تطبيق هام لحساب التفاضل والتكامل .

الفصل الأول مقدمة ويعالج موضوعات في الجبر قد لا تدرس في بعض المدارس الثانوية ، وهي لها أهميتها في حساب التفاضل والتكامل . معظم الفصل وصفي ويمكن الطالب فهمه بدون مساعدة . البند ١ - ٦ عن كثيرات الحدود يمكن تأجيله بدون فقد الاتصال ..

أولئك الذين يرغبون مقدمة مبكرة عن التكامل المعين يمكنهم قراءة الفصل الخامس عن التكامل قبل الفصل السابع عن تطبيقات المشتقة . إذا عمل ذلك ، فينبغي على الطالب أن يقرأ أولاً ذلك الجزء من البند ٤ - ١ عن القيمة العظمى للدالة المتصلة في فترة محدودة مغلقة . أيضاً الفصلان السادس والسابع عن الدوال المثلثية واللوغاريتمية يمكن قراءتهما بأي ترتيب ، بشرط أن نأخذ الحرص في اختيار المسائل . دراسة الخواص الأساسية لحساب التفاضل والتكامل أكملت في الفصل السابع . ابتداء من الفصل الثامن ، الفصول مستقلة عن بعضها إلى حد كبير ، ويمكن قراءتها بأي ترتيب ، وأي واحد منها يمكن حذفه بدون فقد خطير لاتصال المادة .

لكي يكون للمدرس مجال للاختيار ، قد أدخلت موضوعات أكثر مما يمكن تغطيته في منهاج لمدة عام دراسي واحد . المسائل المميزة بعلامة نجم تدرس نظريات تستخدم في مادة لاحقة .

أنا أشكر Mrs. William W. Zebrowski لمعاونتها في الكتابة على الآلة الكاتبة واعداد الأصول ، وأيضاً

Mr. Chin - hung Ching and Miss Katherine F. Bergmann

الذين أعدوا أجوبة المسائل ، وأيضاً

Miss Elizabeth T. Durfee and Mr. William K. Durfee

الذين عاونوا في الفهرست والتوضيحات .

وأخيراً ، من دواعي سروري أن أعبر عن تقديري لزوجتي لمعاونتها في الكتابة على الآلة الكاتبة ، وبالأكثر لتشجيعها وصبرها أثناء كتابة هذا الكتاب .

William H. Durfee

وليم هـ . دورفي

الفصل الأول

الأوليات الجبرية

حساب التفاضل والتكامل هو محور الرياضيات الأولية بسبب أفكاره وأساليبه وتطبيقاته . وقد اكتشفه في وقت واحد ، كل مستقلا عن الآخر ، الفيزيائي الإنجليزي إسحق نيوتن (١٦٤٢ - ١٧٢٧) والفيلسوف الألماني جوتفرد ليبنتز (١٦٤٦ - ١٧١٦) . واكتشافه في نهاية القرن السابع عشر كان بداية لعصر جديد في العلوم والرياضيات .

توصل نيوتن إلى حساب التفاضل والتكامل في بحثه عن حلول لمسائل في الفيزياء والفلك . ومنذ ذلك الوقت أصبح حساب التفاضل والتكامل وسيلة ضرورية لتلك العلوم ولعلوم أخرى ، ونموها السريع بعد نيوتن يرجع إلى حد كبير إلى حساب التفاضل والتكامل . تقدم حساب التفاضل والتكامل بسرعة خلال القرن التالي إلى ما هو عليه الآن تقريبا . وبعد ذلك اتجه الاهتمام إلى فحص شروط وبراهين نظرياته ودراسة امتداده ، التحليل الرياضي .

معظم المواقف الفيزيائية تشتمل على كميات تعتمد على كميات أخرى . المسافة التي يسقطها حجر تعتمد على الزمن الذي يستغرقه الحجر في السقوط . ضغط الغاز في إناء مغلق يعتمد على حجم الإناء . قوة الجذب بين الشمس وكوكب تعتمد على المسافة بينهما . عادة الكمية الثانية لا تكون ثابتة بل متغيرة . حساب التفاضل يوضح بدقة كيف يؤثر هذا التغير على الكمية الأولى ، ومن ثم يمكن الحصول على معلومات عن الكمية الأولى . فمثلا ، معدل تغير المسافة لجحر ساقط يعطى السرعة عند أى لحظة .

كثيرا ما يقابلنا الموقف العكسى . لانعلم العلاقة بين الكميتين ، لكن نعلم كم تتأثر الكمية الأولى بتغير في الثانية . حساب التفاضل يمكننا من استخدام هذه المعلومات لتحديد العلاقة بين الكميتين . مثال ذلك ، من المعروف أنه خلال فترات قصيرة من الزمن الزيادة في عدد السكان بدولة ما يتناسب مع عدد الأشخاص الموجودين عندئذ . من ذلك يمكننا أن نتنبأ بعدد السكان عند أى وقت في المستقبل .

هذه بعض استخدامات حساب التفاضل . الفرع الآخر للحساب ، أى حساب التكامل ، يتناول مسائل مثل إيجاد المساحات والحجوم ومركز ثقل مناطق مستوية ومصمتة . لكن أهمية حساب التكامل تذهب بعيدا عن هذه التطبيقات البسيطة . فهو يستخدم في الفيزياء والعلوم الهندسية لحساب القوة على سدوالشغل المبذول في تحريك شحنة كهربية خلال مجال كهربي ورفع جناح

طائرة . تعميمات حساب التكامل إلى نظرية القياس والتكامل لها أثر جوهري في الرياضيات الحديثة ، فهي تعطي الرياضيين رؤيا أعمق للموضوعات القديمة وتفتح مجالات جديدة للدراسة .

بالرغم من فائدة أجزاء من الرياضيات ، فإن معظم الرياضيات ليس لها تطبيق عملي . فقد درس الاغريق الرياضيات لتحدياتها الفكرية ، ولثراء المادة وجمالها . وهي تدرس الآن من كثيرين لنفس الأسباب .

رغم أننا نفترض أن القارئ قد درس الجبر الأولي ، فإنه توجد حقائق جبرية معينة لا تدرس دائما في المدرسة الثانوية وهي مفيدة لحساب التفاضل والتكامل . قبل البدء في حساب التفاضل والتكامل ندرس من الحقائق الجبرية ما هو أهمها .

١ - ١

الفئات

الفئة ليست أكثر من فصيلة أو تجمع من أشياء . الفكرة أساسية لدرجة أنه لاجدوى من محاولة تعريف المصطلح . أحسن ما يمكن عمله هو إعطاء بعض التوضيحات . بعض الأمثلة عن الفئات هي :

- ١ - فئة كل الكتب في المكتبة العامة بنيويورك .
 - ٢ - فئة كل الكتب في العلوم في المكتبة العامة بنيويورك .
 - ٣ - فئة كل الكتب ذات الغلاف الأحمر في المكتبة العامة بنيويورك .
 - ٤ - فئة كل الأعداد الصحيحة الموجبة ، أي الأعداد $1, 2, 3, \dots$
 - ٥ - فئة كل الأعداد بين 1, 2 شاملة العددين .
 - ٦ - فئة كل الدوائر التي نصف قطرها 5 في مستوى ما .
 - ٧ - فئة كل الولايات الأمريكية التي اسمها يبدأ بالحرف F .
 - ٨ - فئة كل الأعداد الصحيحة بين 27 و 4 وتقبل القسمة على 5 .
- الأشياء التي تكون الفئة تسمى عناصرها . الفئات في ٤ ، ٥ ، ٦ أعلاه تشتمل على عدد لانتهائي من العناصر وتسمى فئات لانتهائية . الفئات الأخرى فئات محدودة .
- الفئة في ٧ تحتوي على عنصر واحد فقط ، ولاية Florida سوف نختص في الغالب بفئات الاعداد مثل الفئتين ٤ ، ٨ .

الفئات يمكن وصفها بطرق كثيرة . غالبا ، ما يستخدم وصف كلامي ، كما سبق . اذا كانت الفئة بها عدد صغير من العناصر ، يمكن وصفها بكتابة عناصرها بين قوسين . مثال ذلك ، الفئة في ٨ يمكن أيضا وصفها بـ $\{ 5, 10, 15, 20, 25 \}$. طريقة معتادة لوصف الفئة A المكونة من جميع العناصر التي لها الخاصية P هي أن نكتب

$$(1) \quad A = \{x \mid P\}$$

وهذه تقرأ « A فئة جميع العناصر x التي لها الخاصية P » ، مثال ذلك ، إذا كانت A هي فئة كل الاعداد بين 2 و 1 ، شاملة العددين ، فإن A يمكن وصفها بـ

$$A = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$$

إذا كانت $N = \{1,2,3, \dots\}$ ، فإن الفئة

$$B = \{4,7,10,13, \dots\}$$

يمكن وصفها بـ

$$B = \{x \mid x = 3n + 1, n \in N\}$$

يمكننا أيضا كتابة

$$B = \{3n + 1 \mid n \in N\}$$

الفئة المحتواة في فئة أخرى تسمى فئة جزئية لتلك الفئة . هذا يحضرنا إلى تعريفنا الأول .
١ - ١ تعريف . الفئة A هي فئة جزئية من الفئة B إذا كان كل عنصر بالفئة A هو أيضا عنصر بالفئة B . الرمز لذلك هو $A \subseteq B$.

مثال ذلك ، إذا كانت X و Y و Z هي الفئات في ١ ، ٢ ، ٣ ، أعلاه ، فإن $Y \subseteq X$ و $Z \subseteq X$.
احدى النتائج لتعريفنا هي أن كل فئة A تكون فئة جزئية لنفسها ، أي أن $A \subseteq A$.
الفئة الخاوية هي الفئة التي ليس بها عناصر . يرمز لها بـ \emptyset وتعتبر فئة جزئية لكل فئة . فئة جميع البقرات الخضراء هي فئة خاوية . كذلك أيضا فئة كل الأعداد التي هي أكبر من 10 وأصغر من 7 .
أي أن

$$\{x \mid x > 10 \text{ and } x < 7\} = \emptyset$$

إذا كانت A و B فئتين ، فإن الفئة المكونة من جميع العناصر التي في الفئة A أو في الفئة B تسمى اتحاد الفئتين A و B ويرمز لها بـ $A \cup B$ أي أن

$$A \cup B = \{x \mid x \text{ in } A \text{ or } x \text{ in } B\} \bullet$$

الفئة المكونة من العناصر التي في كلتا الفئتين A و B تسمى تقاطع الفئتين A و B ويرمز لها بـ $A \cap B$. أي أن

$$A \cap B = \{x \mid x \text{ in } A \text{ and } x \text{ in } B\}$$

مثال ذلك ، إذا كانت $A = \{1, -2, 0, 4\}$ و $B = \{3, 1, 4, \frac{2}{3}\}$ فإن

$$A \cup B = \{1, -2, 0, 4, 3, \frac{2}{3}\} \text{ و } A \cap B = \{1, 4\}.$$

• تستخدم كلمة أو في الرياضيات بمعان مختلفة عنها في اللغة الانجليزية العادية . ففي الأخيرة تعني إمكانية واحدة أو الأخرى ولكن ليست كليهما . اما في الرياضيات فانها تشير إلى إمكانية كليهما . فعنلا العنصر في $A \cup B$ إذا كان في A أو في B أو في كليهما .

إذا كانت Y و Z الفئتين في ٢ ، ٣ أعلاه ، فإن $Y \cap Z$ هي فئة كثر الكتب في العلوم ، ذات الغلاف الأحمر ، في المكتبة العامة بنيويورك ، وأما $Y \cup Z$ فهي فئة كل الكتب في المكتبة العامة بنيويورك التي في العلوم أو ذات الغلاف الأحمر أو كلاهما .

يمكننا أيضا أن نتكلم عن الاتحاد والتقاطع ليس لفئتين فقط . بل لأي عدد من الفئات اتحاد أي عدد من الفئات هو الفئة التي تشتمل على العناصر التي هي على الأقل في إحدى الفئات المعطاة ، والتقاطع هو الفئة التي تشتمل على العناصر التي هي في كل الفئات المعطاة .

مسائل

صف كلا من الفئات الآتية بكتابة عناصرها داخل قوسين :

- ١ - فئة كل الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أقل من أو تساوي العدد 6 .
 - ٢ - فئة جميع القارات في نصف الكرة الأرضية الشرقي .
 - ٣ - فئة كل الأعداد التي مربعاتها هي العدد 9 .
 - ٤ - الفئة المكونة من مربعات جميع الأعداد الصحيحة بين 4 و 4 — بما فيها العددين .
 - ٥ - فئة جميع المثلثات المستوية التي حاصل جمع زواياها أقل من 180° .
- صف الفئات الآتية بالكلمات . أذكر عنصرين في الفئة ، إذا وجد ، وعنصرين ليسا في الفئة .
- R ترمز لفئة كل الأعداد ، Z ترمز لفئة كل الأعداد الصحيحة أي أن ،

$$Z = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

$$- ٦ \quad \{x \in R \mid x < -5\} \quad - ٧ \quad \{2^n \mid n \in Z, n > 0\}$$

$$- ٨ \quad \{(x, y) \mid x \text{ and } y \in Z\} \quad - ٩ \quad \{(x, y) \mid x \in R, y \in R, x \geq 0\}$$

$$- ١٠ \quad \{(x, y) \mid x \in R, y \in R, x - 2y = 0\} \quad - ١١ \quad \{y \in R \mid 2y^2 + y - 15 = 0\}$$

$$- ١٢ \quad \{x \in R \mid x^2 + 1 = 0\} \quad - ١٣ \quad \{z \in R \mid z^2 \leq 2\}$$

أكتب الفئات التالية برموز الفئات المستخدمة في (١) . أرمز لفئة كل الأعداد بـ R وفئة كل الأعداد الصحيحة بـ Z .

- ١٤ - فئة جميع الأعداد التي هي أكبر من $\frac{1}{2}$.
- ١٥ - فئة جميع الأعداد الصحيحة التي هي أكبر من $\frac{1}{2}$.
- ١٦ - فئة كل (x, y) ، حيث x, y عدنان يحققان $x^2 + y^2 = 25$.
- ١٧ - فئة كل الأعداد الصحيحة التي هي مضاعف للعدد 3 .
- ١٨ - $\{3, 7, 11, 15, 19, \dots\}$.
- ١٩ - فئة كل الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أقل من 100 وتقبل القسمة على 6 .

- ٢٠ - فئة كل الأعداد التي مكعباتها أكبر من 4 .
- ٢١ - اعط مثالين لفئة تحتوي عنصرا واحدا .
- ٢٢ - اعط مثالين لفئة خاوية .
- ٢٣ - اعط مثالا لفئة عناصرها فئات .
- ٢٤ - إذا كان $A = \{a, b, c\}$ ، اكتب الفئات الجزئية الثمانية الممكنة لـ A .
- ٢٥ - أثبت أنه إذا كانت A و B و C فئات وكانت $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ ، فإن $A \subseteq C$.
- ٢٦ - إذا كانت $A = \{1, 3, -4, 7, 8\}$ و $B = \{-7, 3, 1, 0, 8\}$ فأوجد $A \cap B$ و $A \cup B$.
- ٢٧ - إذا كانت $A = \{0, 1, 3\}$ و $B = \{2, -1, 4\}$ فأوجد $A \cap B$ و $A \cup B$.
- ٢٨ - إذا كانت $A = \{0, 6, -3, 1, 2\}$ و $B = \{0, 4, -3, 1\}$ و $C = \{1, 5, 3, -3\}$ فأوجد $A \cap B$, $A \cup C$, $(A \cup B) \cup C$, $(A \cup B) \cap C$, $(A \cap B) \cup C$, $A \cap B \cap C$.
- ٢٩ - إذا كانت $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{b, x, y\}$ و $C = \{x, a, c, z\}$ فأوجد $A \cup C$, $A \cap B$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$.
- ٣٠ - ماهو اتحاد وتقاطع الفئات في المسألتين ١ ، ٤ ؟
- ٣١ - إذا كانت $A \subseteq B$ ، فأثبت أن $A \cup B = B$ و $A \cap B = A$.
- ٣٢ - اثبت أنه لكل فئتين A و B يكون $A \cup (A \cap B) = A$ و $A \cap (A \cup B) = A$.
- ٣٣ - هل من الصحيح أن لكل ثلاث فئات A و B و C يكون $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ ؟
- ٣٤ - دع $N(X)$ ترمز لعدد العناصر في الفئة X ، فمثلا ، $N(C) = 4$ في المسألة ٢٨ . اعط مثالا فيه $N(A \cup B) \neq N(A) + N(B)$. متى يكون $N(A \cup B) = N(A) + N(B)$ ؟ أوجد صيغة لـ $N(A \cup B)$ بدلالة $N(A \cap B)$ و $N(A)$ و $N(B)$ تكون صحيحة لكل فئتين A و B .
- ٣٥ - احصائية لمائة عائلة أظهرت أن منهم 55 عائلة تملك سيارة ماركة شيفروليه ، 37 عائلة تملك سيارة فورد ، 33 عائلة لها سيارة بلايموث ، 12 عائلة لها سيارة شيفروليه وسيارة فورد ، 9 عائلات لها سيارة فورد وسيارة بلايموث ، 11 عائلة لها سيارة بلايموث وسيارة شيفروليه ، 4 عائلات لها كل السيارات الثلاث . كم من الـ 100 عائلة ليس لها سيارة من الأنواع الثلاثة ؟

٢ - ١

الأعداد

فئة الأعداد تقسم إلى تسلسل من الفئات الجزئية . رغم أن كل فئة جزئية لها أهميتها وقد درست بتوسع ، إلا أننا سنكتفي هنا بإعطاء موجز عنها لكي يعرف القارئ المصطلحات الخاصة بها . أبسط الأعداد هي التي استعملها الانسان أولا ، أعداد العد : 1, 2, 3, فهي تسمى الأعداد الطبيعية . إذا أضفنا الى هذا التجمع العدد صفرا والأعداد السالبة للأعداد الطبيعية ، فإننا نحصل على فئة هامة هي فئة الأعداد الصحيحة :

. . . , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,

أى عدد يمكن التعبير عنه كخارج قسمة عددين صحيحين يسمى عددا كسريا . بعض الأمثلة للأعداد الكسرية هي $\frac{1}{8}$ و $-\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{2}$. لكي يكون العدد كسريا ، ليس ضروريا أن تكون كل طريقة للتعبير عنه خارج قسمة عددين صحيحين . إذا كان يوجد أى خارج قسمة لعددين صحيحين يساوى العدد ، فهو عدد كسرى . الأعداد

$$\frac{8\sqrt{3}}{7\sqrt{12}}, \quad -\frac{3}{5}, \quad 6,$$

هي أعداد كسرية لأن كلا منها يمكن التعبير عنه كخارج قسمة عددين صحيحين وهي

$$\frac{4}{7}, \quad -\frac{3}{5}, \quad \frac{6}{1}.$$

بما أن كل عدد صحيح a يمكن التعبير عنه في الصورة $a/1$ فإن كل عدد صحيح هو عدد كسرى ، وعليه فإن فئة الأعداد الصحيحة هي فئة جزئية لفئة الأعداد الكسرية . الأعداد الممثلة بكسور عشرية محدودة أو بكسور عشرية لانتهائية متكررة هي أعداد كسرية . فمثلا ، 5.343 ترمز إلى $\frac{5343}{1000}$ و $0.666\dots$ ترمز إلى $\frac{2}{3}$. الكسور العشرية اللانتهائية غير المتكررة تمثل أعداد غير كسرية .

الأعداد التي ليست كسرية تسمى غير كسرية . . بعض الأعداد المعروفة بأنها غير كسرية هي $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\log 3$, $\sin 41^\circ$. في عام 1761 برهن على أن العدد π عدد غير كسرى ، لكن حديثا في عام 1934 فقط تبين أن $2^{\sqrt{3}}$ عدد غير كسرى ، ولا يزال غير معروف ما إذا كانت 3^e عددا كسريا أم غير كسرى .

الأعداد الكسرية والأعداد غير الكسرية معا تكون فئة الأعداد الحقيقية . بين أى عددين حقيقيين يوجد عدد كسرى (المسألة ١٩ ، بيند ١ - ٣) . هذا يتضمن وجود عدد لانتهائي من الأعداد الكسرية بين أى عددين حقيقيين (المسألة ١٢) . باستخدام هذه الحقيقة ، يمكن إثبات وجود أعداد كسرية أصغر وأكبر من أى عدد حقيقى معطى وقريبة منه قريبا اختياريا . التقريبات العشرية لعدد هي أمثلة لهذه الأعداد الكسرية . فمثلا ، الأعداد الكسرية

$$1, \quad 1.4, \quad 1.41, \quad 1.414, \quad 1.4142,$$

مربعاتها أقل من 2 ولذلك هي أقل من $\sqrt{2}$ ، وتقرب منها أكثر فأكثر . بمتابعة المتابعة وفقا للتقريب العشرى لـ $\sqrt{2}$ يمكن إيجاد أعداد كسرية قريبة قريبا اختياريا من $\sqrt{2}$.

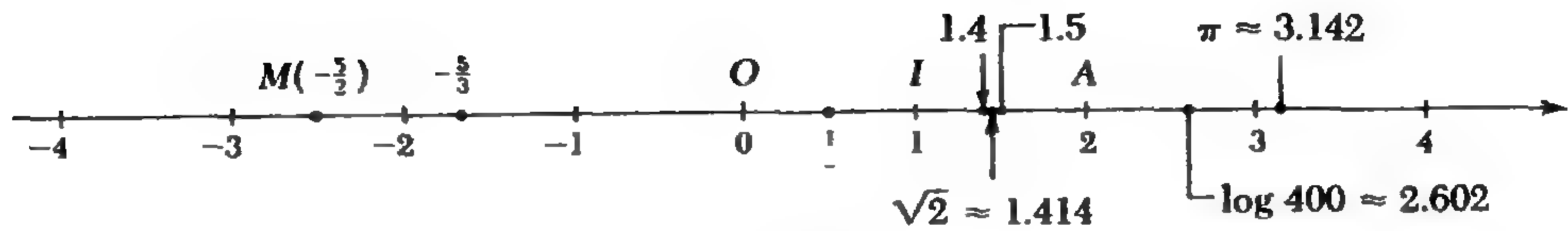
العدد المركب هو عدد على الصورة $a + bi$ ، حيث a و b عددان حقيقيان وحيث $i^2 = -1$. وحيث أن أى عدد حقيقى a يمكن كتابته على الصورة $a + 0i$ ، فإن كل عدد حقيقى هو أيضا عدد مركب . العدد المركب $a + bi$ يقال إنه تخيلى إذا كان $b \neq 0$. الأمثلة هي $5i$, $2 - \sqrt{3}i$.

العلاقات المتبادلة بين فئات الأعداد التي ذكرناها أعلاه يوضحها الرسم الآتي :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{الأعداد الطبيعية} \supseteq \text{الأعداد الصحيحة} \supseteq \text{الأعداد الكسرية} \\ \text{الأعداد غير الكسرية} \end{array} \right.$$

$$\supseteq \left\{ \begin{array}{l} \text{الأعداد الحقيقية} \\ \text{الأعداد التخيلية} \\ \text{الأعداد المركبة} \end{array} \right.$$

سنختص أساسا بالأعداد الحقيقية ،



شكل ١-١
خط الأعداد

وعندما نستخدم الكلمة غير المميزة « عدد » فإننا نقصد عددا حقيقيا .

الأعداد الحقيقية يمكن تمثيلها تصويريا . خذ خطا مستقيما ، من المناسب أن يوضع أفقيا (شكل ١ - ١) . لتكن I و O نقطتين على الخط المستقيم حيث I على يمين O . ندع العددين صفر ، والواحد الصحيح يناظران I و O ونكتب 0 و 1 تحت هاتين النقطتين . النقطة O تسمى نقطة الأصل . للنقطة A الواقعة على يمين I بمسافة مثل مسافة I من O نخصص العدد 2 . للنقطة على يمين A مرة أخرى بنفس المسافة نخصص العدد 3 وهكذا . العدد 1 - يتعين بالنقطة الواقعة بنفس البعد ليسار O مثل I على اليمين ، والأعداد الصحيحة السالبة الأخرى تتعين كما هو موضح بالشكل . العدد 1/2 يتعين بنقطة في منتصف المسافة بين I و O ، العدد 5/3 - يتعين بنقطة في ثلثي المسافة بين 2 - ، 1 - وأقرب إلى الثاني ، وبالمثل مع الأعداد الكسرية الأخرى .

الأعداد غير الكسرية يمكن أيضا تخصيصها لنقط على الخط المستقيم . إذا كان العدد a أقل من العدد b ، فإن النقطة المناظرة لـ a تكون على يسار النقطة المناظرة لـ b . هذا يعني أن النقطة المناظرة لـ $\sqrt{2}$ ستقع بين النقطتين المناظرتين لـ 1, 2 . المفكوك العشري لـ $\sqrt{2}$ صحيحا لست أرقام عشرية هو 1.414214 . يمكننا استخدام هذا لتحديد موضع النقطة بدقة أكثر بملاحظة أنها ستقع بين النقطتين المناظرتين لـ 1.4 و 1.5 إذ أن $\sqrt{2}$ يقع بين هذين العددين الكسريين . يمكن وضعها أكثر ضبطا بين النقطتين المناظرتين للعددين 1.41 و 1.42 . بالاستمرار بهذه الكيفية ، النقطة المناظرة لـ $\sqrt{2}$ يمكن تحديد موضعها لأي درجة من الدقة .

نفترض ، كما يمكن إثبات ، أن كل عدد حقيقي يمكن تخصيصه لنقطة وحيدة وبالعكس .

إذا كانت a العدد المناظر للنقطة P ، فإن a تسمى احداثى P وتشير إلى ترابطهما بالرمز $P(a)$.
 الإشارة إلى النقطة $M(-\frac{5}{2})$ ، مثلا، تعنى النقطة M التى احداثيها هو $-\frac{5}{2}$.

الخط المستقيم بأعداد حقيقية مخصصة له بالكيفية التى سبق شرحها، يسمى خط الأحداثيات أو الخط الحقيقى. بسبب التناظر بين الأعداد والنقط، فإن الأعداد كثيرا ما يشار إليها كنقط، وتكلم عن «النقطة 5» بمعنى «النقطة التى احداثيها 5».

إذا كانت b و a عددين، وكانت $b \neq 0$ ، فإن a/b هو حل المعادلة $b x = a$.
 فمثلا $\frac{12}{5}$ هو حل المعادلة $5x = 12$. إذا كانت $a \neq 0$ ، فلا يوجد عدد x بحيث أن $0x = a$ ،
 ولذلك الرمز $a/0$ منطقيا لا يمثل أى عدد حقيقى. بما أن أى عدد x هو حل للمعادلة $0x = 0$ ،
 فلذلك الرمز $0/0$ سيمثل أى عدد، فهو مبهم. وعليه فمقام الكسر لا يمكن أن يكون صفرا.

المعادلة تصريح بأن التعبيرين على طرفى المتساوية يمثلان نفس العدد. كإى تصريح، يمكن أن يكون صحيحا أو غير صحيح. إذا كانت المعادلة تحوى حروفا فإن صحتها أو عدمه تعتمد على القيم المخصصة للحروف. فهى قد تكون صحيحة لبعض، لكل، أو للقيمة للحروف. المعادلة

$$a^2 - 2a = 8$$

صحيحة عندما a تكون 4 أو -2 وغير صحيحة عندما a تكون واحدا صحيحا. المعادلة

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

صحيحة لكل عدد x المعادلة

$$2x + 3 = (3x + 5) - x$$

غير صحيحة لأى x . من المصطلح عليه فى الكتابات الرياضية أنه إذا كانت معادلة تحتوى حروفا، فيفهم أن الكاتب يقصد أن المعادلة صحيحة لكل قيم الحروف التى تجعل الحدود معروفة إذا لم ينص عكس ذلك. فمثلا، عند رؤية النص البسيط

$$(1) \quad \frac{x^2 - 25}{x - 5} = x + 5$$

نفترض أن الكاتب يصرح بأنها صحيحة لكل $x \neq 5$ لأنه لم يذكر شيئا عكس ذلك. مع أن القيد $x \neq 5$ لم يذكر صراحة، فهو مفهوم ضمنا إذ أن الطرف الأيسر من (1) غير معرف عند $x = 5$.
 التعبير «حل المعادلة $3x - 7 = 9$ » يشير إلى أن المعادلة $3x - 7 = 9$ لا يعتبر أنها صحيحة لكل قيم x . فى الواقع، المسألة هى إيجاد قيم x التى تجعل المعادلة صحيحة.

من الواضح أنه إذا كانت $a = 0$ أو $b = 0$ ، فإن $ab = 0$. العكس أيضا مهم: إذا كانت $ab = 0$ ، فإما $a = 0$ أو $b = 0$. لأنه إذا كانت $a \neq 0$ ، فإن $1/a$ تكون موجودة ويمكننا ضرب طرفى المعادلة $ab = 0$ فى $1/a$

$$\frac{1}{a} (ab) = \frac{1}{a} 0$$

ونستنتج أن $b = 0$. بالمثل ، إذا كانت $b \neq 0$ ، فيجب أن يكون $a = 0$. العكس يساعد في حل المسائل . فمثلا واضح أن 3 و 1 حلان للمعادلة

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) = 0$$

هذان هما الحلان الوحيدان ، لأنه إذا كانت c أى حل ، فإن

$$(c - 1)(c - 3) = 0$$

العكس يكون ، $c - 1 = 0$ أو $c - 3 = 0$. أى أن 1 أو $c = 3$ النتيجة يمكن تعميمها لأكثر من عاملين .

١ - ٢ نظرية . إذا كانت a_1, a_2, \dots, a_n أعدادا ، بحيث أن $a_1 a_2 \dots a_n = 0$ ، فإن $a_i = 0$ على الأقل لعدد واحد a_i ، حيث $i = 1, 2, \dots, n$.

البرهان متروك للقارئ (المسألة ٣٠) .

الكسر يكون صفرا فقط إذا كان بسطه صفرا ، لأنه إذا كان

$$\frac{a}{b} = 0,$$

$$\frac{a}{b} = a \frac{1}{b}$$

فبما أن

وأيضا $1/b \neq 0$ (لماذا ؟) ، فإن بالنظرية ١ - ٢ ، يجب أن يكون $a = 0$. يستخدم ذلك في حل المعادلات المحتوية على خوارج قسمة ، مثل

$$\frac{3(2x - 5)}{x^2 - 1} = 0$$

أى قيمة لـ x تجعل الطرف الأيسر للمعادلة (2) صفرا يجب أن تجعل البسط صفرا . واذن علينا فقط أن نبحث عن قيمة x حيث $3(2x - 5) = 0$ ، وهى $x = \frac{5}{2}$. لكن يجب الحرص أن قيمة x هذه لا تجعل أيضا المقام صفرا . إذا كانت كذلك ، فهى ليست حلا للمعادلة (2) .

مسائل

الفئة S من الأعداد يقال إنها مقفلة بالنسبة إلى الجمع إذا كان لكل عنصرين a, b بالفئة S حاصل جمعهما $a + b$ يكون أيضا بالفئة S . بالمثل ، S تكون مقفلة بالنسبة إلى الضرب إذا كان لكل عنصرين a, b بالفئة حاصل ضربهما ab يكون أيضا بالفئة . أى الفئات الآتية مقفلة بالنسبة إلى الجمع ؟ مقفلة بالنسبة إلى الضرب ؟

١ - فئة جميع الأعداد الصحيحة .

٢ - فئة جميع الأعداد الصحيحة الزوجية . (العدد الصحيح الزوجى هو عدد على الصورة $2n$.

حيث n عدد صحيح .)

٣ - فئة جميع الأعداد الصحيحة الفردية . (العدد الصحيح الفردى هو عدد على الصورة $2n + 1$ ، حيث n عدد صحيح .)

٤ - فئة جميع الأعداد الصحيحة السالبة .

٥ - فئة جميع الأعداد الصحيحة التى هى مضاعف للعدد 6 .

٦ - فئة جميع الأعداد 2^n ، حيث n عدد صحيح .

٧ - فئة جميع الأعداد الحقيقية التى على الصورة $a + b\sqrt{2}$ ، حيث a, b عدداً صحيحان .

٨ - أعط مثالا لعددین غير كسريين مجموعهما (a) عدد كسرى ، (b) غير كسرى . أعط مثالا لعددین غير كسريين حاصل ضربهما عدد كسرى .

٩ - اثبت أن أى عدد كسرى يمكن كتابته على الصورة m/n ، حيث m و n عدداً صحيحان وحيث n موجبة .

١٠ - اثبت أن حاصل جمع وحاصل ضرب وخارج قسمة عددین كسريين تكون أعدادا كسرية

[إرشاد : إذا كانت r_1 و r_2 عددین كسريين ، فانه توجد أعداد صحيحة m_1, n_1, m_2, n_2

بحيث أن $r_1 = m_1/n_1$ ، $r_2 = m_2/n_2$ ويكون $[r_1 + r_2 = (m_1 n_2 + m_2 n_1) / n_1 n_2]$.

١١ - أثبت أنه بين أى عددین كسريين يوجد عدد كسرى آخر . من الأصعب إثبات أنه يوجد عدد

كسرى بين أى عددین حقيقيين (المسألة ١٩ بيند ١-٣)

١٢ - بفرض أنه يوجد على الأقل عدد واحد كسرى بين أى عددین حقيقيين ، اثبت أنه يجب أن

يوجد عدد لانهاى من الأعداد الكسرية بين أى عددین حقيقيين .

١٣ - المفكوك العشرى للعدد $\sqrt{3}$ صحيحا لستة أرقام عشرية هو 1.732051 . أوجد متتابعة من ستة

أعداد كسرية كل منها أقل من $\sqrt{3}$ بحيث أن الأول يختلف عن $\sqrt{3}$ بأقل من 0.1 والثانى بأقل

من 0.01 ، والثالث بأقل من 0.001 ، وهكذا . أوجد متتابعة مماثلة كل حد فيها أكبر من

$\sqrt{3}$.

أوجد كل الحلول للمعادلات الآتية :

$$\frac{7x-3}{x} = 0$$

- ١٥

$$3x + 5 = 7 - x$$

- ١٤

$$3x^2 + x + 6 = 2x^2 - 7x - 10$$

- ١٧

$$2x^2 - 3x = x^2 + 7x - 21$$

- ١٦

$$\frac{x^2 + 10x + 25}{x + 4} = 0$$

- ١٩

$$3x + 8 = x + 2 + 2x - 6$$

- ١٨

$$2x + \frac{x}{x-3} = x + 3 + \frac{x}{x-3}$$

- ٢١

$$\frac{x^2 + 10x + 25}{x + 5} = 0$$

- ٢٠

$$x^3 + 10x = -7x^2$$

- ٢٢

حل معادلات الدرجة الثانية الآتية بإكمال المربع . [إرشاد : تذكر أن لإكمال المربع على

$x^2 + bx$ ننضيف $(b/2)^2$ إذ أن $(x + b/2)^2 = x^2 + bx + (b/2)^2$. قبل إكمال المربع يجب

قسمة المعادلة على معامل x^2 .)

$$x^2 - 6x + 2 = 0 \quad - ٢٤$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \quad - ٢٣$$

$$3x^2 + x - 10 = 0 \quad - ٢٦$$

$$4x^2 + 28x + 49 = 0 \quad - ٢٥$$

٢٧ - (أ) يكمال المربع على الطرف الأيسر للمعادلة $ax^2 + bx + c$ اشتق الصيغة التربيعية

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

لجذرى المعادلة من الدرجة الثانية . أى نظرية أنت تستخدمها هنا ؟ (إرشاد : قبل إكمال المربع اقسّم المعادلة على a) . (ب) أثبت أنه وفقا لكون المقدار $b^2 - 4ac$ موجبا أو صفرا أو سالبا ، المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ يكون لها جذران حقيقيان وغير متساويين أو جذر حقيقى واحد أو جذران تخيليان .

٢٨ - أثبت أنه لا يوجد أصغر عدد حقيقى موجب .

٢٩ - أثبت أن $1/b \neq 0$ لأى b .

٣٠ - أثبت النظرية ١-٢ . [إرشاد : اكتب a_1, a_2, \dots, a_n فى الصورة $(a_1, a_2, \dots, a_n - 1)$] .

٣ - ١

المتباينات

العدد a يقال إنه موجب إذا كان $a > 0$ وإنه سالب إذا كان $a < 0$. وهو غير سالب إذا كان $a \geq 0$ وغير موجب إذا كان $a \leq 0$. الصفر ليس موجبا ولا سالبا . العددان يقال أن لهما نفس الإشارة إذا كان كلاهما موجبين أو كلاهما سالبين . ويقال إن لهما إشارتين مختلفتين إذا كان أحدهما موجبا والآخر سالبا . لا تخلط بين « العدد السالب » و « سالب العدد » . الأخير ربما يكون موجبا ، مثل سالب العدد 8 — .

المتباينات تتبع القواعد الآتية :

١ - ٣ لأى عددين حقيقيين a و b يكون واحد فقط مما يأتى صحيحا : $a < b$ أو $a = b$ أو $a > b$.

١ - ٤ إذا كان $b > c$ و $a > b$ ، فإن $a > c$.

١ - ٥ إذا كان $a > b$ ، فإن $a \pm c > b \pm c$ لأى عدد c .

فمثلا ، بما أن $7 > 2$ ، فإننا نعرف حتى بدون حساب حاصل الجمع أن $7 + 6 > 2 + 6$.

١ - ٦ لتكن $a > b$. فيكون $a/c > b/c$ و $ac > bc$ إذا كانت $c > 0$ ، لكن $ac < bc$ و

$ac < bc$ إذا كانت $c < 0$.

فمثلا ، بما أن $7 > 2$ ، فإن $\frac{7}{3} > \frac{2}{3}$ و $7(6) > 2(6)$ لكن $7(-6) < 2(-6)$.

توجد عبارات مماثلة مع \geq بدلا من $>$. قاعدة ١ - ٦ تنص على أن الضرب فى عدد موجب يحفظ اتجاه المتباينة لكن الضرب فى عدد سالب يعكس الاتجاه .

القوانين أعلاه هي مسلمات ، أى فروض أساسية عن المتباينات . من هذه الفروض يمكن اشتقاق خواص أخرى ، أهمها ما يأتى :

- ٦ - ١ إذا كانت $a > b$ ، فإن $a - b > 0$ ، وبالعكس .
 - ٨ - ١ إذا كانت $a > b$ ، فإن $-a < -b$ ، وبالعكس .
 - ٩ - ١ حاصل الضرب ab يكون موجبا إذا وإذا فقط كان a و b كلاهما موجبين أو كلاهما سالبين .
 - ١٠ - ١ إذا كان a و b كلاهما موجبين أو كلاهما سالبين وكان $a < b$ ، فإن $1/a > 1/b$.
 - ١١ - ١ ليكن a و b موجبين . إذا كان $a < b$ ، فإن $a^2 < b^2$ ، وبالعكس . ليكن a و b سالبين ، إذا كان $a < b$ ، فإن $a^2 > b^2$ ، وبالعكس .
- براهين هذه الخواص تترك للقارىء .

إذا كانت $c < b$ و $a < c$ ، فإن المتباينتين كثيرا ما تضمنان الى المتباينة الكاملة

$$(1) \quad a < c < b$$

بما أن c لا تساوى a أو b ، فيقال أنها تقع بين a, b . الكتابة $a < c \leq b$ تعنى أن c تقع بين a و b أو تساوى b .

فئة كل الأعداد بين a و b ، حيث $a < b$ ، تسمى فترة . إذا كان a و b لا يشملان فى الفترة ، فالفترة تسمى مفتوحة ويرمز لها بالرمز (a, b) . إذا كان a, b يشتملان ، فالفترة مقفلة ويرمز لها بالرمز $[a, b]$. إذا كانت a مشتملة لكن b غير مشتملة ، فالرمز هو $[a, b)$. مثل هذه الفترة لا تكون مفتوحة ولا مقفلة لكن هى فترة نصف مفتوحة أو فترة نصف مقفلة . باستخدام الرموز لوصف الفئات ، يمكننا أن نقول

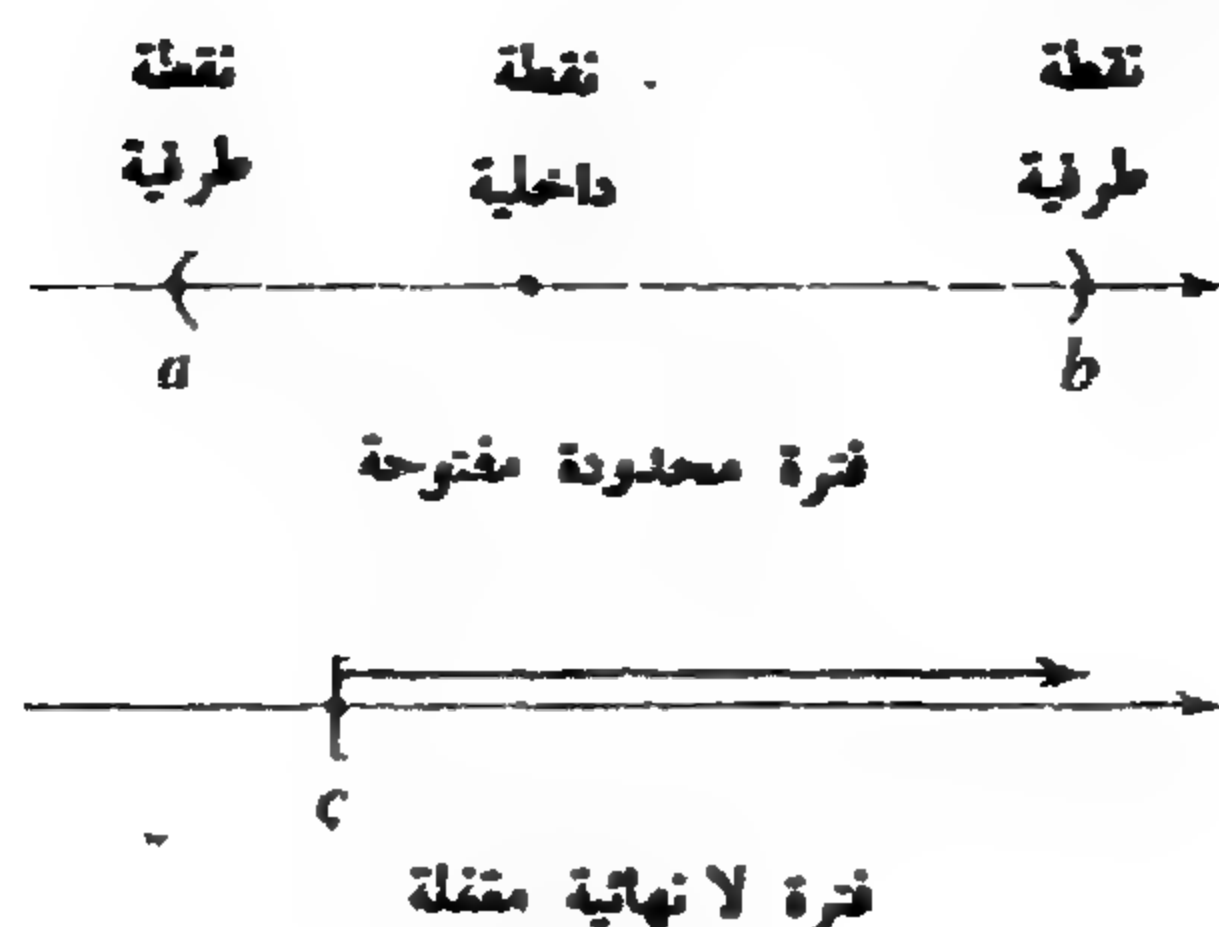
$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\} \quad \text{و} \quad (a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

العددان a و b ، سواء كانا فى الفترة أم لا ، يسميان النقطتين الطرفيتين للفترة . الأعداد التى تقع بين a و b ، أى الأعداد x حيث $a < x < b$ تسمى النقط الداخلية للفترة . فئة النقط الداخلية تكون فترة جزئية مفتوحة (a, b) تسمى داخل الفترة . داخل الفترة المفتوحة هو الفترة نفسها .

فئة جميع الأعداد التى هى أكبر من أو تساوى a أيضا تسمى فترة ويرمز لها بالرمز $[a, \infty)$. بالمثل فئة جميع الأعداد التى هى أقل من a يرمز لها بالرمز $(-\infty, a)$ ، وفئة جميع الأعداد الحقيقية يرمز لها بـ $(-\infty, \infty)$. هذه هى فترات لانهاية . رمز اللانهاية ∞ لا يمثل عددا حقيقيا ولا يمكن أن يضاف إلى أو يضرب فى أعداد أخرى . التعبيرات مثل $2 + \infty$ أو $1/\infty$ ليس لها معنى . سنستخدم الرمز ∞ بكيفية محدودة وسنشرح معناه مع كل استعمال جديد . الفترتان اللانهائيتان $[a, \infty)$ و $(-\infty, a]$ تعتبران مقفلتين والفترة $(-\infty, \infty)$ تعتبر مفتوحة ومقفلة .

كلمة فترة غير المميزة تعنى فترة محدودة أو فترة لانهاية . الرمز (a, b) أو $[a, b]$ للفترة ، حيث لا a ولا b رمز اللانهاية ، سيعنى أن الفترة محدودة وأن $a < b$.

الفترة يمكن تصويرها على خطوط احداثيات . في الشكل ١ - ٢ موضح الفترة المحدودة المفتوحة (a و b) والفترة اللانهائية المغلقة $[c, \infty)$.



مسائل

- ١ - أثبت أن المتوسط الحسابي لعددتين حقيقيين يقع بينهما . أي أن ، إذا كانت $a < b$ ، فإن $a < (a + b) / 2 < b$.
- ٢ - إذا كانت x, y موجبتين ، أثبت أن $x + y \geq 4xy / (x + y)$.
- ٣ - أثبت أن القاعدة ١ - ٥ تتضمن عكسها . أي أن ، إذا كانت $a \pm c > b \pm c$ فإن $a > b$.
- ٤ - وضح الخواص ١ - ٧ ، ١ - ٨ ، ١ - ١٠ ، ١ - ١١ بأمثلة . (العبارتان المحتويتان على الكلمة «وبالعكس» هما نظريتان وتتطلبان توضيحين) .
- ٥ - أثبت أنه إذا كانت $a > 0$ ، فإن $-a < 0$.
- ٦ - أثبت الخاصية ١ - ٧ .
- ٧ - أثبت الخاصية ١ - ٨ .
- ٨ - أثبت الخاصية ١ - ٩ .
- ٩ - أثبت الخاصية ١ - ١٠ (ارشاد : أقسم على ab) .
- ١٠ - استخدم القاعدة ١ - ٦ لاثبات أن $a^2 > 0$ لكل $a \neq 0$. (ارشاد : اعتبر الحالتين $a < 0$ و $a > 0$) .
- ١١ - اثبت أن $a^2 < a$ إذا كان $0 < a < 1$.
- ١٢ - بافتراض جزء القاعدة ١ - ٦ الذي ينص على أن $a > b$ تستلزم $ac > bc$ إذا كانت $c > 0$ ، أثبت الجزء الذي ينص على أن $a > b$ تستلزم $a/c > b/c$ إذا كانت $c > 0$.
- ١٣ - أثبت الجزء الأول من الخاصية ١ - ١١ : لتكن a, b موجبتين . إذا كانت $a < b$ ، فإن $a^2 < b^2$ ، وبالعكس .
- *١٤ - أثبت أنه إذا كانت $y > 0$ و $x > 0$ ، فإن $x^2 = y^2$ تستلزم $x = y$. أين في البرهان استخدم الشرط $y > 0$ و $x > 0$ ؟ هل النتيجة صحيحة بدون هذا الشرط ؟ .
- *١٥ - أثبت أن أي متبايتين يمكن «جمعهما» . أي أن ، إذا كان $c \leq d$ و $a \leq b$ فإن $a + c \leq b + d$ (ارشاد : اثبت أولاً أن $a + c \leq b + c$) .

١٦- أثبت أنه إذا كانت جميع الكميات موجبة ، فإن أى متبايتين يمكن « ضربهما » . أى أن ، إذا كانت $0 < c < d$ و $0 < a < b$ ، فإن $ac < bd$. أعط توضيحا يبين أن النتيجة قد لا تكون صحيحة إذا كانت بعض الكميات سالبة .

١٧- أثبت أنه إذا كانت $a < b$ ، فإن $a^3 < b^3$ (ارشاد : اعتبر أولا الحالة $0 < a < b$ وأثبت أن $ab < b^2$ و $a^2 < ab$. الحالة $a < b < 0$ يمكن اختزالها إلى هذه الحالة بملاحظة أن $-a < -b < 0$. الحالة $a < 0 < b$ سهلة ، وإذا كانت a أو b صفرا ، فإن النتيجة تكاد تكون تافهة) .

١٨- طريقة عامة لاثبات أن عددا يظهر فى حل مسألة يساوى صفرا هى أن نثبت أنه ليس سالبا وأنه أصغر من كل عدد موجب . اثبت أن هذا برهان صحيح . أى اثبت أنه إذا كان $0 \leq a < \epsilon$ لكل $\epsilon > 0$ ، فإن $a = 0$ (ارشاد : افرض أن $a > 0$ واحصل على تناقض) .
١٩- (أ) أثبت أنه يوجد عدد كسرى بين أى عددين حقيقيين . (ارشاد : ليكن a و b العددين الحقيقيين وافرض أن $a < b$. اختر عددا صحيحا موجبا n بحيث أن $n(b - a) > 1$. فيكون $1/n < b - a$. لتكن أول عدد صحيح اكبر من na . فيكون $m - 1 \leq na < m$. اثبت أن

(ب) إذا أعطينا عددا حقيقيا a ، أثبت أنه يوجد عدد كسرى اقل من a وقريب من a قربا اختياريا . (ارشاد : دع ϵ أى عدد حقيقى موجب واعتبر العددين a و $a - \epsilon$) .

ماهى النقط الداخلية للفترات التالية ؟

٢٠- $(-2, 3)$. ٢١- $[-3, -2]$. ٢٢- $[1, 4]$. ٢٣- $[a, b]$.

وضح على خط أحداثيات الفئات $A \cap B$ و $A \cup B$ للفترات الآتية :

٢٥- $A = (0,1)$, $B = [1,2]$

٢٤- $A = [-1,4)$, $B = [3,7]$

٢٧- $A = [-4,4]$, $B = (-4,2)$

٢٦- $A = [-4,-2]$, $B = [0,6]$

٢٨- $A = (-2,3)$, $B = (3,5)$

٢٩- إذا كانت $C = (0,5)$ و $B = (-2, 2)$ و $A = (-5, -1)$ فترات ، وضح على خط أحداثيات الفئات $A \cap (B \cup C)$ و $(A \cap B) \cup C$ و $A \cup B \cup C$.

٣٠- إذا كانت c أى نقطة فى فترة مفتوحة ، اثبت أنه يوجد دائما نقط فى الفترة على يمين وعلى يسار النقطة c . هل يوجد أكثر من نقطة مثل هذه على يمين c ؟ كم ؟ ما هى أكبر نقطة فى فترة مفتوحة ؟

• المسائل المميزة بالعلامة النجمية هى نظريات ستستخدم فيما بعد .

حل المتباينات

إذا شملت معادلة أو متباينة متغيراً أو مجهولاً ، فأى قيمة لذلك المتغير تجعل المعادلة أو المتباينة صحيحة هي حل أو جذر للمعادلة أو المتباينة ويقال إنها تحققها . مثلاً ، 10 هي حل للمتباينة

$$3x - 5 > 1 + x$$

لأن العبارة

$$3(10) - 5 > 1 + 10$$

صحيحة . العدد 2 ليس حلاً لأن

$$3(2) - 5 > 1 + 2$$

ليس صحيحاً . فئة الحل لمعادلة أو متباينة في متغير واحد هي فئة جميع حلولها . حل معادلة أو متباينة هو إيجاد جميع حلولها ، أى إيجاد فئة الحل لها . أى معادلتين أو متباينتين في متغير واحد تكونان متكافئتين إذا وإذا فقط كان لهما نفس فئة الحل . فمثلاً المعادلتان $x - 2 = 0$ و $2x - 3 = 1$ متكافئتان . من الواضح أنه إذا كانت معادلة أو متباينة تكافئ أخرى التى بدورها تكافئ ثالثة ، فإن الأولى والثالثة تكونان متكافئتين . النظرية القادمة ، المنصوص عنها بدون برهان ، أساسية في حل المعادلات .

١ - ١٢ نظرية

(أولاً) إذا أضيف نفس العدد إلى ، أو طرح من ، كلا طرفي معادلة في x ، فالمعادلة الناتجة تكون مكافئة للأولى . العدد يمكن أن يكون مقداراً ثابتاً مثل 7 أو تعبيراً يحتوى على x ، لكن إذا كان الأخير ، فالمقدار يجب أن يكون معرّفاً لكل x التى تكون حلاً لأى من المعادلتين .

(ثانياً) إذا ضرب طرفاً معادلة في x فى عدد يختلف عن الصفر أو قسماً عليه ، فالمعادلة الناتجة تكون مكافئة للأولى . العدد يمكن أن يكون مقداراً ثابتاً غير الصفر أو تعبيراً يحتوى على x ، لكن إذا كان الأخير ، فيجب أن يكون معرّفاً ومختلفاً عن الصفر لكل x التى هي حل لأى من المعادلتين .

$$5x - 6 = 4 \quad \text{و} \quad 7x - 6 = 2x + 4 \quad \text{المعادلتان}$$

متكافئتان ، لأن المعادلة الثانية يمكن الحصول عليها بطرح $2x$ من طرفي المعادلة الأولى .

$$2x = x + 3 \quad \text{و} \quad 2x - \frac{x}{x-3} = x + 3 - \frac{x}{x-3} \quad \text{المعادلتان}$$

غير متكافئتين ، إذ أن 3 هي حل للمعادلة الثانية لكنها ليست حلاً للأولى . المقدار $x / (x - 3)$ ، الذي أضيف هنا إلى طرفي المعادلة الأولى للحصول على المعادلة الثانية ، غير معرف لقيمة x التي هي حل للمعادلة الثانية . الجزء (ثانياً) من النظرية ١ - ١٢ ، يبين أن المتعادلتين

$$(1) \quad \frac{2(x^2 - 1)}{x + 3} = 4(x - 1)$$

$$(2) \quad \frac{x^2 - 1}{x + 3} = 2(x - 1)$$

متكافئتان . المعادلة (2) ، بدورها ، تكافئ المعادلة

$$(3) \quad x^2 - 1 = 2(x - 1)(x + 3)$$

إذ أن $x + 3$ ، المقدار الذي ضربت فيه (2) ، يساوى صفراً فقط عند -3 ، وهذه ليست حلاً لـ (2) أو (3) . لكن المعادلة (1) لا تكافئ المعادلة

$$(4) \quad \frac{2(x + 1)}{x + 3} = 4$$

لأن 1 هو الحل للمعادلة (1) لكن ليس حلاً للمعادلة (4) . هنا قسمنا على المقدار $x - 1$ ، الذي هو صفر لحل للمعادلة (1) .

طريقة أساسية لحل معادلة أو متباينة هي استخدام النظرية ١ - ١٢ ، لتكوين متتابعة من المعادلات أو المتباينات ، مبتدئة بالمعطى ، بحيث أن كلا تكون مكافئة لسابقتها لكن أسهل منها ، إلى أن نحصل أخيراً على واحدة فئة الحل لها واضحة .

مثال ١ . حل المعادلة $3x / (x - 6) - 1 = 0$ كل معادلة في المتتابعة أدناه تكافئ سابقتها للسبب المعطى .

$$(5) \quad \frac{3x}{x - 6} - 1 = 0$$

$$(6) \quad \frac{3x}{x - 6} = 1 \quad \text{بإضافة 1 إلى كلا الطرفين}$$

$$(7) \quad 3x = x - 6 \quad \text{بضرب كلا الطرفين في } x - 6$$

$$2x = -6 \quad \text{ب طرح } x \text{ من كلا الطرفين}$$

$$x = -3 \quad \text{بقسمة كلا الطرفين على 2}$$

المعادلة الأخيرة لها الحل الوحيد -3 واذن -3 هي الحل الوحيد للمعادلة (5) . الخطوة الوحيدة التي قد تكون موضع سؤال هي الانتقال من (6) إلى (7) . بما أن $x - 6$ يساوى صفراً فقط عند $x = 6$ ، وبما أن 6 ليست حلاً للمعادلة (6) أو المعادلة (7) ، فإن المتعادلتين متكافئتان .

القواعد للحصول على متباينات متكافئة هي نفس القواعد المعطاة في النظرية ١ - ١٢ للمعادلات ، ماعدا أن في (ثانياً) يجب ملاحظة ما إذا كان العدد الذي يضرب فيه أو يقسم عليه موجبا أم سالبا . إذا كان موجبا ، فإن علامة المتباينة تبقى كما هي ، أما إذا كان سالبا فإن علامة المتباينة تعكس ، طبقا للقاعدة ١ - ٦ المتباينتان في كل من الأزواج الآتية : متكافئتان .

$$\begin{array}{lll} 3x + 7 > x + 2 & \text{و} & 3x > x - 5 \\ 4x - 12 < -20 & \text{و} & x - 3 < -5 \\ \frac{x^2 - 6x}{-5} > 2 & \text{و} & x^2 - 6x < -10 \\ \frac{x}{x-2} < 4 & \text{و} & x < 4(x-2) \quad \text{إذا كان } x > 2 \\ \frac{x}{x-2} < 4 & \text{و} & x > 4(x-2) \quad \text{إذا كان } x < 2 \end{array}$$

مثال ٢. حل المتباينة

$$(8) \quad 6x - 5 > 4x + 1$$

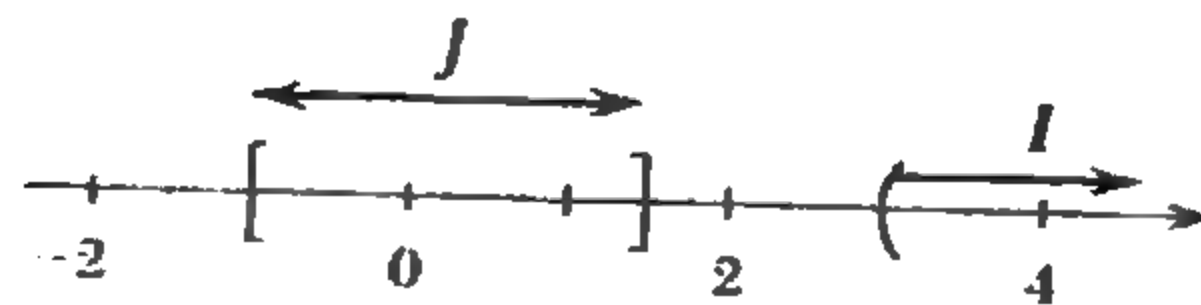
علينا أن نوجد جميع قيم x التي تجعل المتباينة صحيحة . باستخدام النظرية ١ - ١٢ (أولا) مرتين ، أولا طرح x 4 ثم اضافة 5 الى كلا الطرفين ، يكون لدينا المتباينة المكافئة

$$2x > 6$$

بقسمة كل طرف على 2 ، نحصل بالنظرية ١ - ١٢ (ثانياً) على المتباينة المكافئة

$$(9) \quad x > 3$$

فئة الحل لهذه المتباينة الأخيرة هي الفترة اللانهائية $I = (3, \infty)$. بما أن (9) و (8) متكافئتان ، فهذه الفترة هي أيضا فئة الحل للمتباينة (8) وهي موضحة على خط الاحداثيات في الشكل ٣-١ على القارىء أن يقنع نفسه أن I هي فئة الحل للمتباينة (8) بالتعويض عن x باعداد أكبر من 3 وأقل من 3 . العدد اللانهائي لحلول (8) هو نمطى للمتباينات



شكل ٣-١

مثال ٣. أوجد جميع قيم x التي تجعل

$$-4 \leq -4x + 2 \leq 6$$

علينا أن نوجد جميع قيم x التي تحقق زوج المتباينات

$$(10) \quad -4x + 2 \leq 6 \quad \text{و} \quad -4 \leq -4x + 2$$

بما أنه تجرى نفس العمليات في حل المتبايتين ، فاننا نجريها في آن واحد ، مرتبين العمل في عمودين متوازيين :

$$-4 \leq -4x + 2 \quad -4x + 2 \leq 6$$

نطرح 2 من طرفي كل متباينة ، فنحصل على المتبايتين المكافئتين

$$-6 \leq -4x \quad -4x \leq 4$$

الآن نقسم طرفي كل على -4 . بما أن العدد الذي نقسم عليه سالب ، فعلمنا المتبايتين يجب عكسهما ونحصل على

$$\frac{3}{2} \geq x \quad x \geq -1$$

حل المتباينة الأولى في (10) هو كل $x \leq \frac{3}{2}$. وحل الثانية هو كل $x \geq -1$. واذن الأعداد x التي تحقق كلا المتبايتين هي تلك حيث $\frac{3}{2} \geq x \geq -1$. بما أن نفس العملية قد أجريت في كل خطوة على كلا المتبايتين ، فهذه العمليات يمكن تنفيذها في آن واحد والعمل يرتب كما يأتي :

$$-4 \leq -4x + 2 \leq 6$$

نطرح 2 من كل الأجزاء الثلاثة للمتباينة ، فنحصل على

$$-6 \leq -4x \leq 4$$

نقسم على -4 ، فنحصل على

$$\frac{3}{2} \geq x \geq -1$$

ونكون قد حصلنا على الحل مباشرة . فئة الحل هي الفترة المغلقة $J = [-1, \frac{3}{2}]$. وهي موضحة في الشكل ٣-١ .

مثال ٤ حل المتباينة

$$(11) \quad t^2 + 2t - 3 > 0$$

هذه المتباينة تحل بسهولة إذا حللنا أولا الطرف الأيسر الى عوامله

$$(t+3)(t-1) > 0$$

حاصل الضرب يكون موجبا إذا وإذا فقط كانت t عددا بحيث أن العاملين يكونان موجبين معا أو سالبين معا . واذن t يجب أن تكون عددا بحيث أن اما

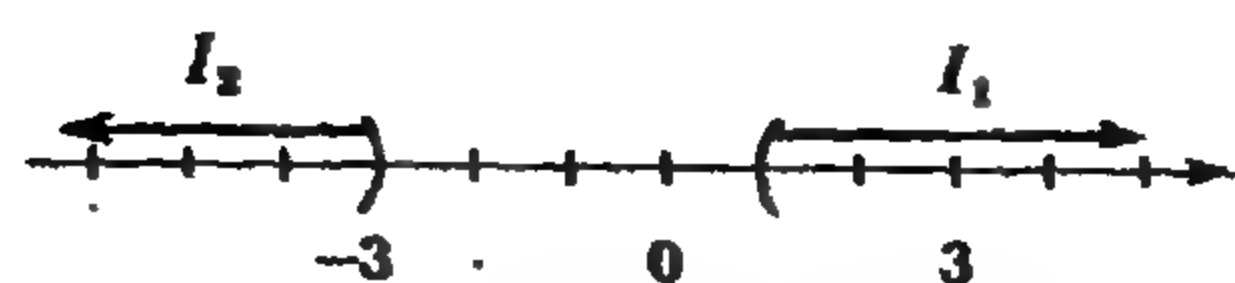
$$(12) \quad t-1 > 0 \quad \text{و} \quad t+3 > 0$$

وأما

$$(13) \quad t-1 < 0 \quad \text{و} \quad t+3 < 0$$

حل المتباينة الأولى في (12) هو $t > -3$ ، وحل الثانية هو $t > 1$. واذن أي t حيث $t > 1$ هي حل لكلا المتبايتين في (12) . بالمثل ، الحل للزوج في (13) هو أي t حيث

$t < -3$. وبالتالي أى t حيث $t > 1$ أو $t < -3$ هو حل للمتبينة (II) . فئة الحل هي الاتحاد I_1
 $I_2 \cup I_1$ للفترتين $I_1 = (1, \infty)$ و $I_2 = (-\infty, -3)$ ، وهي موضحة فى الشكل ٤-١ .



شكل ٤-١

مسائل

أى من الأزواج الآتية من المعادلات أو المتباينات متكافئة ؟

- ٢ $t - 3 = 0, t^2 - 6t + 9 = 0$

- ١ $x + 7 = 3x - 2, -2x = -9$

- ٤ $3 < -2x - 5 < -1, -4 < x < -2$

- ٣ $-3 \leq x < 6, -1 \leq 2x + 5 < 17$

- ٦ $\frac{x^2 + 7x + 12}{x + 3} = 0, x + 4 = 0$

- ٥ $\frac{x + 5}{x - 1} = 0, x + 5 = 0$

∴

حل المعادلات الآتية :

- ٨ $3x + 2 - \frac{x - 3}{x^2 - 9} = 2x + 5 - \frac{1}{x + 3}$

- ٧ $t + \frac{7}{t + 2} = 3t + 4 + \frac{7}{t + 2}$

- ٩ $x^2 + \frac{7x + 1}{x^2 - x - 6} = 4 + \frac{7x + 1}{x^2 - x - 6}$

حل المتباينات الآتية ووضح فئة الحل ، إذا لم تكن خاوية ، على خط احداثيات :

- ١٠ $1 - 3t > 5t - 2$ - ١١ $ax + 3 < 2$ حيث $a < 0$ - ١٢ $\frac{2x - b}{3} \leq 0$

- ١٣ $\frac{2x + 6}{3} - \frac{x}{5} < 4$ - ١٤ $1 < 4x - 3 < 7$ - ١٥ $5 > -\frac{u}{2} + 2 \geq 0$

- ١٦ $-0.001 \leq \frac{5 - 3x}{2} \leq 0.001$ - ١٧ $-\epsilon < 3(x - d) < \epsilon$ - ١٨ $\frac{1}{z} - 6 > 2$

- ١٩ $\frac{3}{4y - 6} > 0$ - ٢٠ $x^2 - 1 < 0$ - ٢١ $(w - 2)^2 \geq 7$

- ٢٢ $x^2 - 4x > 0$ - ٢٣ $x^2 - x - 12 > 0$ - ٢٤ $(x + 3)^2 \leq 0$

- ٢٥ $-1 + 2s - 3s^2 < 0$ - ٢٦ $2x^2 + x + 3 < 0$ - ٢٧ $0 \leq x^2 + 1 \leq 5$

- ٢٨ $4 < u^2 + 2 \leq 18$ - ٢٩ $(x - 1)^3 \geq 0$ - ٣٠ $t^3 + 4t^2 + 4t < 0$

حل أزواج المتباينات الآتية :

- ٣٢ $x + 2 > 0, x - 4 > 0$

- ٣١ $2x - 3 \geq 0, 2x - 7 < 0$

- ٣٤ $0 < \frac{1}{2}x < 8, 16 < 2x - 4 < 34$

- ٣٣ $2x - 3 \geq 5 + x, 3 - 4x > -40$

- ٣٥ $3 < 5r < 10, 15 < 3r + 3 < 21$

لأى قيم x تكون التعبيرات الآتية حقيقية

$$36 - \sqrt{5x+4} \quad 37 - \sqrt[3]{1-2x} \quad 38 - \sqrt[3]{ax} \quad \text{حيث } a \text{ حقيقيه} \quad 39 - \sqrt{x^2-x-2}$$

- ٤٠ - أوجد جميع القيم الحقيقية لـ c التي تجعل المعادلة $x^2 + 3x + c = 0$ لها جذران حقيقيان .
 ٤١ - أوجد جميع القيم الحقيقية لـ k التي تجعل المعادلة $x^2 + kx + 6 = 0$ لها جذران حقيقيان .
 ٤٢ - أوجد جميع القيم الحقيقية لـ k التي تجعل المعادلة $4x^2 + 8x + 9 - k^2 = 0$ لها جذران تخيليان .

٥ - ١

القيمة المطلقة

لأى عدد $a \neq 0$ أحد العددين $a, -a$ يكون موجبا . الرمز $|a|$ ، ويقرأ « القيمة المطلقة لـ a » يستخدم ليشير الى هذا العدد الموجب . نعرف $|a| = 0$. واضح مما سبق أن $|a| = a$ اذا كانت $a \geq 0$ وأن $|a| = -a$ اذا كانت $a < 0$ ، من المناسب أن نعبر عن تعريف القيمة المطلقة بالكيفية الآتية .

$$13 - ١ \text{ تعريف } |a| = \begin{cases} a & \text{اذا كانت } a \geq 0 \\ -a & \text{اذا كانت } a < 0 \end{cases}$$

فمثلا ، $|0| = 0$ و $|-9| = -(-9) = 9$ و $|4| = 4$. من الواضح أن ، $|a| \geq 0$ لكل a . لايجاد قيمة $|a|$ لعدد a . يجب أن نعين أولا ما إذا كانت a موجبة ، أم سالبة ، أم صفرا .

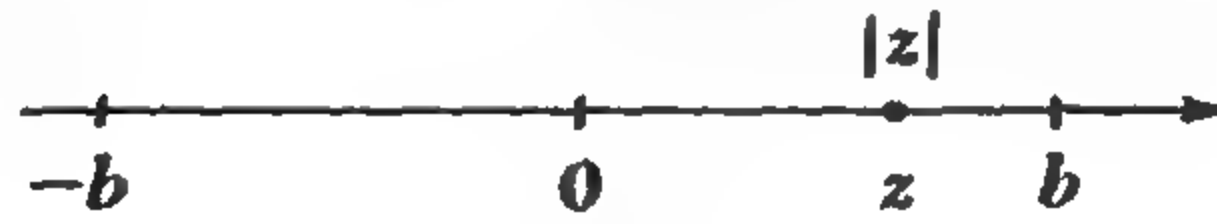
مثال ١

$$(أ) \quad |4| = 4 \quad , \quad \text{لأن } 4 > 0$$

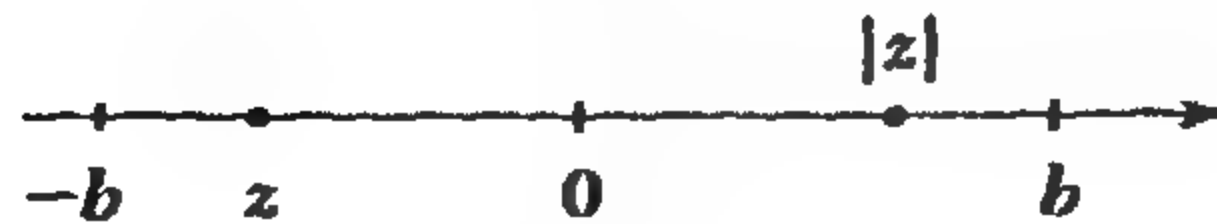
$$(ب) \quad |\sqrt{6} - 2| = \sqrt{6} - 2 \quad , \quad \text{لأن } \sqrt{6} - 2 > 0$$

$$(ج) \quad |3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3 \quad , \quad \text{لأن } 3 - \pi < 0$$

في كل من جزئي الشكل ١ - ٥ العدد z يقع بين b و $-b$. لاحظ أن في الحالتين $|z| < b$. هذا يوضح النظرية الآتية ، التي نذكرها بدون برهان .



(أ)



(ب)

شكل ١ - ٥

اذا كانت $-b < z < b$ فإن $|z| < b$ ، وبالعكس .

١ - ١٤ نظرية . لتكن $b > 0$. اذا كانت $b < z < -b$ فان $z < b$ ، وبالعكس .
 لتكن a عدداً حقيقياً ، لتكن n عدداً صحيحاً موجباً . العدد b ، إذا وجد ، بحيث أن $b^n = a$ يسمى جذراً نونياً لـ a . إذا كانت n فردية ، فإنه يوجد جذر نوني حقيقى واحد ، وواحد فقط ، a . ويرمز له بالرمز $\sqrt[n]{a}$ أو $a^{1/n}$ ، ويكون موجبا ، أو سالبا أو صفرأ تبعاً لكون a . اذا كانت n زوجية وكانت a موجبة ، فانه يوجد جذران نونيان حقيقيان لـ a . وكل منهما السالب للآخر . الجذر النونى الموجب ، وهو واحد فقط ، يرمز له بالرمز $\sqrt[n]{a}$ (إذا كانت $n = 2$) أو $a^{1/n}$. مثلاً $\sqrt{49}$ هو رمز للعدد الموجب الذى مربعه هو 49 ويكون 7 ، وليس ± 7 . الجذر التربيعى الآخر لـ 49 ويرمز له بـ $-\sqrt{49}$ أو -7 . اذا كانت n زوجية وكانت a سالبة ، فلا يوجد جذر نوني حقيقى لـ a . فمثلاً لا يوجد جذر تربيعى حقيقى للعدد 49 - . عندما يوجد الجذر النونى لـ a ، فمن ذات التعريف يكون

$$(\sqrt[n]{a})^n = (a^{1/n})^n = a$$

الرمز $a^{1/n}$ - يعنى $(a^{1/n})$ - العبارة $\sqrt{a^2} = a$ ليست دائماً صحيحة . فمثلاً ، إذا كانت $a = -6$ ، $\sqrt{a^2} = \sqrt{36} = 6 = -a$. العبارة الصحيحة هى $\sqrt{a^2} = |a|$.
 الاستفادة من رمز القيمة المطلقة ينجم عن النظرية الآتية التى تربط القيمة المطلقة لحاصل ضرب أو حاصل جمع بالقيم المطلقة لعوامله أو حدوده .

١ - ١٥ نظرية .

$$(أولاً) |ab| = |a||b|$$

$$(ثانياً) |a + b| \leq |a| + |b|$$

يمكن تعميم النظرية لحواصل الضرب أو لحواصل الجمع لأكثر من حدين (المسألة ٣٦) .
 برهان النظرية يترك للقارئ (المسألتان ٣٤ ، ٣٥) . يمكنه أن يقنع نفسه بصوابها بتحقيقها عندما $b = 10$ و $a = -2$ و $b = -3$ ، $a = -5$ و $b = 9$ و $a = 6$. خواص بسيطة أخرى لرمز القيمة المطلقة معطاة فى المسائل فى نهاية هذا البند .

$$\text{مثال ٢. حل المعادلة } |x - 3| = 13$$

بما أن $|x - 3| = x - 3$ أو $-(x - 3)$ ، فإن العدد x يكون حلاً اذا واذا فقط كان عدداً بحيث أن $x - 3 = 13$ و $-(x - 3) = 13$. واذن الحلان الوحيدان هما $10 -$ و 16 .

$$\text{مثال ٣. حل المتباينة } |3x - 2| < 4$$

بالنظرية ١ - ١٤ ، المتباينة تكافئ

ويحل هذه يكون

$$-4 < 3x - 2 < 4$$

$$-2 < 3x < 6$$

$$-\frac{2}{3} < x < 2$$

فئة الحل هي الفترة المفتوحة $(-\frac{2}{3}, 2)$.

مثال ٤ حل المتباينة $|4y + 3| > 1$.

العدد y يكون حلاً للمتباينة إذا وإذا فقط كان عددا بحيث أن إما

$$4y + 3 < -1 \quad \text{أو} \quad 4y + 3 > 1$$

أي أن ، اما

$$y < -1 \quad \text{أو} \quad y > -\frac{1}{2}$$

١٦-١ تعريف . لتكن A و B نقطتين على خط الاعدائيات احداثييهما a و b . المسافة بين B و A (أى طول القطعة المستقيمة AB) يرمز لها بـ $|AB|$ وتعرف بكونها $|AB| = |b - a|$.
فى الشكل ١-٦ ، $|DC| = |-2 - 3| = |-5| = 5$ و $|CD| = |3 - (-2)| = 5$ ،
بما أن $|b - a| = |a - b|$ (المسألة ٣٣) ، المسافة بين A و B تعطى أيضا بـ $|BA| = |a - b|$.



شكل ١-٦

$$|GD| = |3 - (-2)| = 5$$

العدد x يكون فى حدود t من الوحدات من العدد a إذا وإذا فقط كانت المسافة بين x ، a أقل من أو تساوى t ، أى ، إذا وإذا فقط كان

$$(1) \quad |x - a| \leq t$$

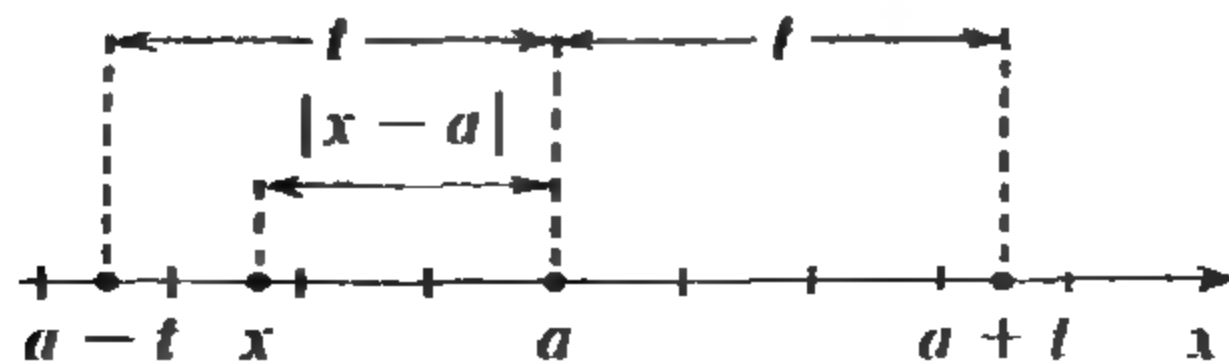
وهذا يكافئ

$$-t \leq x - a \leq t$$

واذن ، بجمع a إلى كل من الأجزاء الثلاثة ، يكافئ

$$(2) \quad a - t \leq x \leq a + t$$

وبالتالى (2) و (1) تكونان متكافئتين . وهذا معقول ، لأنه إذا كانت x فى حدود t من الوحدات من a ، فيجب وقوعها بين $a - t$ و $a + t$ وبالعكس (شكل ١-٧) .



شكل ١-٧

إذا كانت $|x - a| \leq t$ ، فإن $a - t \leq x \leq a + t$ ، وبالعكس

مسائل
عبر عن الآتي بدون علامات القيمة المطلقة :

$$-1 \quad |17| \quad -2 \quad |-12| \quad -3 \quad |-12| \quad -4 \quad |-12| \quad -5 \quad |-12| \quad -6 \quad |-12| \quad -7 \quad |-12| \quad -8 \quad |-12| \quad -9 \quad |-12| \quad -10 \quad |-12|$$

$$-6 \quad \left| \frac{3 + \frac{1}{2} - 4}{12} \right| \quad -7 \quad |7\pi - \sqrt{2}| \quad -8 \quad |2\pi - \frac{4}{\pi}| \quad -9 \quad |(1 - \sqrt{6})^2 - 1|$$

حل المعادلات الآتية :

$$|x^2 + 2x| = 1 - 14 \quad |x^2 - 20| = 5 - 13 \quad |z - \frac{1}{2}| = -7 - 12 \quad |-3s + 4| = 1 - 11 \quad |x| = 2 - 10$$

١٥ - أثبت أنه إذا كانت $|x| > a$ ، وكانت $a > 0$ ، فإن x تقع خارج الفترة المغلقة $[-a, a]$.
حل المتباينات الآتية ووضح فئة الحل ، إذا لم تكن خاوية ، على خط للاحداثيات .

$$-16 \quad |x| \geq 3 \quad -17 \quad |x - 1| < 4 \quad -18 \quad |3x - 4| \leq 0.01$$

$$-19 \quad |2 - x| \leq 1 \quad -20 \quad |4x + 8| < \epsilon \quad -21 \quad \left| \frac{y - 1}{-8} \right| \leq 4$$

$$-22 \quad |ax + b| < \epsilon, a > 0 \quad -23 \quad |7y - 1| \geq 6 \quad -24 \quad |-3x| > 12$$

$$-25 \quad \left| \frac{1}{x} - 7 \right| < 2 \quad -26 \quad |2w - 4| \geq -2 \quad -27 \quad |x^2 - x - 1| < 5$$

٢٨ - أوجد كل x حيث $x > 2$ و $|x - 3| \leq 7$.

٢٩ - أوجد كل y حيث $|y - 4| \geq 2$ و $|y - 3| \leq 3$.

٣٠ - أوجد كل t حيث $|t - 2| > 4$ و $|t - 5| \leq 3$.

٣١ - إذا كانت $|c| = |d|$ ، ماهى علاقة c و d ؟

*٣٢ - أثبت أن $| -a | = | a |$.

*٣٣ - أثبت أن $| a - b | = | b - a |$.

٣٤ - أثبت النظرية ١ - ١٥ (أولا) . (ارشاد : اعتبر أربع حالات تبعا لكون a, b غير سالبة أو سالبة واستخدم التعريف ١ - ١٣) .

٣٥ - أثبت النظرية ١ - ١٥ (ثانيا) . (ارشاد : بما أن $a = |a|$ أو $-|a|$ ، فمن الصحيح أن نكتب $|a| \leq a \leq |a|$. بالمثل ، $-|b| \leq b \leq |b|$. اجمع هاتين المتباينتين) .

*٣٦ - أثبت أن :

$$(أ) \quad |a + b + c| \leq |a| + |b| + |c| \quad ، \quad (ب) \quad |abc| = |a||b||c|$$

٣٧ - أثبت أن $|a - b| \leq |a| + |b|$. [ارشاد : $(a - b) = a + -(-b)$]

٣٨ - إذا كانت $|y - b| < 0.01$ و $|x - a| < 0.01$ ، فاثبت أن $|(x + y) - (a + b)| < 0.02$.

٣٩ - أثبت أنه إذا كانت $|a - y| < \frac{1}{5}$ و $|x - a| < \frac{1}{5}$ ، فإن $|x - y| < \frac{2}{5}$ [ارشاد : أكتب

$x - y$ في الصورة $[(x - a) + (a - y)]$. علم الكميات a, x, y على خط للاحداثيات وأعط تفسيرا هندسيا للمسألة .

٤٠. * أثبت أن $|a|/|b| = |a/b|$ إذا كانت $b \neq 0$. (ارشاد : أثبت أولاً أن $|1/b| = 1/|b|$).
٤١. * أثبت أن $|a| - |b| \leq |a - b|$. [ارشاد : أكتب a في الصورة $(a - b) + b$].
٤٢. * ليكن $\max(a_1, a_2)$ يشير إلى أكبر العددين a_1 و a_2 أو أيهما إذا كان $a_1 = a_2$. فمثلاً ، $\max(-4, \frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$. (أ) أثبت أن $\max(a_1, a_2) = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + |a_1 - a_2|)$. (ب) أوجد تعبيراً مماثلاً لـ $\min(a_1, a_2)$.
٤٣. * إذا كان $a < x < b$ وكان $a < y < b$ ، فاثبت أن $|x - y| < b - a$. [ارشاد : اثبت أن $x - y < b - a$ وأن $-(b - a) < x - y$]. علم الكميات a, b, x, y على خط للاحداثيات. لاحظ المعنى الهندسي لكل من $b - a$ و $|x - y|$ وعبر عن النتيجة هندسياً.
٤٤. * إذا كانت D و C و B و A نقط على خط للاحداثيات إحداثياتها -6 و -2 و 5 و 2 على الترتيب ، أوجد المسافات $|AD|$ و $|DA|$ و $|CD|$ و $|CA|$ و $|BA|$ و $|AB|$.

١ - ٦ كثيرات الحدود *

التعبير الذي على الصورة

$$(1) \quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث a_0 و \dots و a_{n-1} و a_n أعداد مركبة وحيث n عدد صحيح غير سالب ، يسمى كثيرة حدود في x أو للاختصار ، كثيرة حدود . فئة الأعداد المركبة تحتوي الأعداد الحقيقية ، لذلك أَل a_i يمكن أن تكون حقيقية . أمثلة لكثيرات الحدود في x هي

$$(2) \quad 5x^2 + \frac{1}{3}x + 10, \quad 2x + 8, \quad 6,$$

$$(3) \quad x^4 + \frac{3}{2}ix^2 - \sqrt{2}x + (8 + 3i),$$

$$(4) \quad 0x^6 - x^5 + 2x^2 + \frac{1 + \sqrt{3}}{7}x + \log 24.$$

التعبيرات الآتية ليست كثيرات حدود

$$x^3 - 3\sqrt{x} + 6, \quad x^2 - 7x + \frac{2}{x} - 13, \quad \frac{2x + 5}{x^2 + x - 10}$$

يمكن استخدام حروف أخرى غير x . فمثلاً ، $at^2 + bt + c$ و $t - 5$ كثيرتا حدود في t ، والتعبير

$$(4) \quad 2(x + 1)^3 - 4(x + 1) + 16$$

هو كثيرة حدود في $x + 1$. بفك الحد الأول وتجميع القوى المتماثلة في x ، يمكن التعبير عن (4) ككثيرة حدود في x هي $2x^3 + 6x^2 + 2x + 14$.

• هذا البند يمكن تأجيله دون مأسر باستمرارية الكتاب .

العدد a_i في الحد x^i في (1) يسمى معامل x^i . العدد الصحيح n هناك هو درجة كثيرة الحدود إذا كان $a_n \neq 0$. في (2) معامل x هو $-\sqrt{2}$ ، ومعامل x^3 هو 0 . درجة كثيرة الحدود هي 4 . كثيرة الحدود في (3) هي من الدرجة الخامسة. كثيرة الحدود المحتوية على عدد واحد a_0 درجتها صفرا إذا كان $a_0 \neq 0$. أي أن كثيرات الحدود من درجة صفر هي مجرد الأعداد المركبة غير الصفرية. كثيرة الحدود 0 لا يعتبر لها درجة. سنختص بالأكثر بكثيرات الحدود التي معاملاتها حقيقية ، وعندما لا نذكر شيئا عن معاملات كثيرة حدود سنفترض أنها أعداد حقيقية.

سنستخدم $p(x)$ أو $q(x)$ كرموز لكثيرات الحدود. العدد الناتج من تعويض العدد r لـ x في كثيرة الحدود $p(x)$ سيرمز له بـ $p(x)$. فمثلا ، إذا كانت

$$(5) \quad p(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 3$$

فإن

$$p(2) = 2^3 + 4(2^2) + 2(2) - 3 = 25$$

$$(6) \quad p(-3) = (-3)^3 + 4(-3)^2 + 2(-3) - 3 = 0$$

$$p(y+3) = (y+3)^3 + 4(y+3)^2 + 2(y+3) - 3$$

و

قيمة x ، سواء كانت حقيقية أم تخيلية ، التي تجعل كثيرة الحدود صفرا تسمى جذرا أو صفرا لكثيرة الحدود. المعادلة (6) توضح أن -3 هي صفر لكثيرة الحدود في (5). ليس كل المعادلات لها جذور. المعادلة $4^x = 0$ ليس لها جذر. حتى إذا لم يكن يوجد تعبير صريح للجذر ، فعادة يكون من المفيد أن نعرف ما إذا كانت المعادلة لها جذر. لكثيرات الحدود هذا معروف.

١٧-١ النظرية الأساسية في الجبر. كل كثيرة حدود معاملاتها أعداد مركبة ودرجتها أعلى من صفر لها على الأقل جذر مركب واحد.

هذا مثال لما يسمى بنظرية وجود. هي تقول إن شيئا ما ، في هذه الحالة جذر ، يوجد ، بدون إعطاء أي معلومات أخرى عنه أو توضيح كيف نوجده. مثل هذه النظريات ليست مفيدة كما يبدو ، وعادة ، كما هنا ، ما تكون الخطوة الأولى لاشتقاق نتائج عملية. براهين هذه النظرية والنظريات الأخرى بهذا البند سوف لاتعطى.

نتيجة للنظرية هي أن كل كثيرة حدود من الدرجة n يمكن تحليلها كحاصل ضرب عوامل خطية عددها n وبالإضافة الى ذلك فإن هذا يمكن إجراؤه أساسا بكيفية واحدة فقط.

١٨-١ نظرية. إذا كانت $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ كثيرة حدود من درجة n معاملاتها أعداد مركبة ، فإنه يوجد n من الأعداد المركبة r_1, r_2, \dots, r_n ، ليست بالضرورة مختلفة بحيث أن

$$(7) \quad p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$$

بالإضافة الى ذلك ، فيما عدا بالنسبة لترتيب العوامل ، فإن هذا التحليل وحيد. مثال ذلك

$$4x^4 + 20x^3 + 29x^2 - 46x + 13$$

$$= 4(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})(x + 3 + 2i)(x + 3 - 2i)$$

هذه أيضا نظرية وجود ، فهي لاتعطي أى إشارة الى كيفية إيجاد قيم r_i 's . وإيجادها يمكن أن يكون صعبا حتى لكثيرات الحدود البسيطة .

١ - ١٩ نظرية الأعداد المركبة r_1, r_2, \dots, r_n التي تظهر في صورة التحليل (7) لكثيرة الحدود $p(x)$ هي فقط جذورها .

نتيجة مباشرة للنظرية ١ - ١٩ هي النظرية الآتية .

١ - ٢٠ نظرية كثيرة الحدود من درجة n ذات المعاملات المركبة لايمكن أن يكون لها أكثر من n من الجذور المركبة .

عدد مرات ظهور العامل $x - r_i$ في (7) يسمى عدد مرات تكراره . الجذر الذى عدد مرات تكراره 2 يسمى أيضا جذرا مزدوجا . كثيرة الحدود $q(x)$ التي تحليلها الى عوامل هو

$$(8) \quad q(x) = -3(x - \frac{1}{2})(x + 5)x(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})x$$

لها جذر 5 — عدد مرات تكراره 1 ، وجذر $\frac{1}{2}$ عدد مرات تكراره 3 ، وجذر صفر كجذر مزدوج . عادة تكتب (8) في الصورة الموجزة

$$q(x) = -3(x - \frac{1}{2})^3(x + 5)x^2$$

هذه تعتبر مكافئة لـ (8) ولاتعتبر تحليلا مختلفا لـ $q(x)$.

١ - ٢١ نظرية العامل . العدد r ، سواء كان حقيقيا أم تخيليا ، يكون جذرا لكثيرة الحدود $p(x)$ ، التي معاملاتها أعداد مركبة ، اذا واذا فقط كان $x - r$ عاملا لـ $p(x)$.

مثال ١ . لتكن $p(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$. بما أن $p(2) = 0$ ، فإن $x - 2$ يجب أن تكون عاملا وفي الواقع

$$p(x) = (x - 2)(x^3 + 3x^2 + x + 3)$$

العدد المركب i هو جذر للعامل الثانى . واذن $x - i$ هو عامل لهذا العامل ، ويكون

$$x^3 + 3x^2 + x + 3 = (x - i)[x^2 + (3 + i)x + 3i]$$

النظرية الآتية تبسط ايجاد جذور كثيرة الحدود التي معاملاتها أعداد صحيحة .

١ - ٢٢ نظرية الجذر الكسرى . اذا كانت كثيرة الحدود

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

التي معاملاتها أعداد صحيحة لها عدد كسرى b/c كجذر ، حيث c و b عددان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك سوى ± 1 ، فإن b تقسم a_0 ، c تقسم a_n . فمثلا $\frac{2}{3}$ جذر لكثيرة الحدود

$$3x^3 - 11x^2 - 24x + 20$$

لاحظ أن 2 تقسم 20 وأن 3 تقسم معامل x^3 . عند استخدام النظرية ، الجذر b/c يجب أن يكون لأصغر حديه .

مثال ٢ حل المعادلة

$$p(x) = 2x^5 + 7x^4 - 5x^3 - 17x^2 - x + 6 = 0$$

نبحث أولاً عن الجذور الكسرية . بالنظرية ١ - ٢٢ ، أى جذر كسرى ، لأصغر حديه ، بسطه يجب أن يقسم 6 ، ومقامه يجب أن يقسم 2 . الاحتمالات الوحيدة هي $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 6$ وسوالبها . قد لا يكون أى واحد منها جذراً . النظرية لاتقول أن كثيرة الحدود يجب أن يكون لها جذر كسرى ، بل هى فقط نصف أى جذور كسرية تكون لها . بالتعويض المباشر نرى أن -1 هو جذر . بنظرية العامل ، $x + 1$ تكون عاملاً لكثيرة الحدود $p(x)$. العامل الآخر يمكن إيجاده بالمحاولة والخطأ أو بقسمة $p(x)$ على $x + 1$ ونجد أن

$$p(x) = (x + 1)(2x^4 + 5x^3 - 10x^2 - 7x + 6)$$

الأصفار الباقية لكثيرة الحدود $p(x)$ يجب أن تكون أصفاراً للعامل الثانى ، الاحتمالات الكسرية الوحيدة هى المدونة أعلاه . هذا العامل أيضاً له الجذر -1 . واذن $x + 1$ هو عامل له ، ونجد أن

$$p(x) = (x + 1)(x + 1)(2x^3 + 3x^2 - 13x + 6)$$

العامل الثالث له $\frac{2}{3}$ كجذر ومن ثم يكون

$$p(x) = (x + 1)(x + 1)(x - \frac{2}{3})(2x^2 + 6x - 4)$$

الجذران الباقيان لـ $P(x)$ هما جذرا $2x^2 + 6x - 4$ ، ويمكن إيجادهما بسهولة بالصيغة التربيعية . وهما $(-3 + \sqrt{17})/2$ و $(-3 - \sqrt{17})/2$. لو كانت المعادلة ليس لها جذور كسرية ، فربما لم يكن فى استطاعتنا حلها .

نتيجة للنظرية ١ - ٢٢ هى أنه إذا كانت $a_n = 1$ ، فإن أى جذر كسرى يجب أن يكون عدداً صحيحاً يقسم a_0 .

الجذور الكسرية لكثيرة الحدود التى معاملاتها أعداد كسرية يمكن إيجادها أيضاً بنظرية الجذر الكسرى . اضرب كثيرة الحدود فى مضاعف مشترك لمقامات المعاملات . كثيرة الحدود الناتجة ستكون معاملاتها أعداداً صحيحة وسيكون لها نفس الجذور .

مسائل

تحقق أن كل كثيرة حدود لها العدد المعطى كصفر وأوجد أصفارها الأخرى :

- | | |
|--|--------------------------------------|
| ١ - $u^4 - u^2 - u + 1, -1$ | ٢ - $3x^4 - 7x^2 + 4, 1$ |
| ٣ - $y^4 - 9y^3 + 30y^2 - 44y + 24, 2, 3$ | ٤ - $x^4 + 5x^2 - 3x - 15, \sqrt{3}$ |
| ٥ - $3t^4 - t^2 - t - 4, \frac{4}{3}$ | ٦ - $x^4 - 3x^2 - 28, 2i$ |
| ٧ - $2x^4 + (9 - 2i)x^2 - (5 + 9i)x + 5i, i$ | |

حل المعادلات الآتية :

$$\begin{aligned} x^3 + 9x^2 + 24x = -16 & - ١٠ & z^3 - 6z^2 - 9z + 14 = 0 & - ٩ & x^2 + 2x + 6 = 0 & - ٨ \\ -x^3 + 2x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} = 0 & - ١٣ & x^3 - 4x^2 + 16x - 16 = 0 & - ١٢ & 2s^3 - s^2 + 2s = 1 & - ١١ \\ w^4 + \frac{11}{10}w^3 - \frac{13}{5}w^2 - \frac{11}{5}w + \frac{6}{5} = 0 & - ١٤ \end{aligned}$$

عبر عن كثيرات الحدود الآتية كحاصل ضرب عوامل خطية معاملاتها أعداد مركبة :

$$\begin{aligned} 2y^3 - 3y^2 + 1 & - ١٧ & t^3 + 6t^2 - 7t - 42 & - ١٦ & x^2 + 4x - 5 & - ١٥ \\ x^2 + 3 & - ٢٠ & t^4 + 2t^3 - 16t^2 - 32t & - ١٩ & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 & - ١٨ \\ x^3 + x^2 - 3x + 1 & - ٢٣ & y^2 + 4y - 1 & - ٢٢ & x^4 - x^3 - 2x - 4 & - ٢١ \\ x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 8x + 4 & - ٢٦ & u^3 - 1 & - ٢٥ & x^2 - 6x + 13 & - ٢٤ \end{aligned}$$

حل المتباينات الآتية (إرشاد : حلل كثيرة الحدود) :

$$\begin{aligned} x^3 + 5x^2 + 5x + 4 \leq 0 & - ٢٩ & y^2 + y + 4 > 0 & - ٢٨ & x^4 + 10 < 0 & - ٢٧ \\ 2x^3 - x^2 - 5x < 2 & - ٣٢ & x^3 - x^2 - 5x - 3 < 0 & - ٣١ & z^4 - 9 \geq 0 & - ٣٠ \end{aligned}$$

٣٣ - أثبت أن المعادلة $2x^3 - 6x^2 + 12x - 16 = 0$ لا يمكن أن يكون لها أكثر من جذر واحد حقيقي .

٣٤ - أثبت أن المعادلة $x^3 - a = 0$ لها جذر حقيقي واحد فقط إذا كانت a حقيقية .

٣٥ - اثبت أن $6b + (4b^2 + 6)y + 5by^2 + 3y^3$ تقبل القسمة على $y + b$.

٣٦ - أوجد كثيرة حدود من الدرجة الثالثة أصغرها هي $-1 - \frac{3}{2}$ و 4 .

٣٧ - أوجد كثيرة حدود من الدرجة الثانية صغرها هما $8 - 2\sqrt{3}$ و $8 + 2\sqrt{3}$.

٣٨ - أوجد كثيرة حدود من الدرجة الثالثة معاملاتها حقيقية وجذران من جذورها هما $2i$ و 3 .

٣٩ - ماهي الأعداد الصحيحة الموجبة n التي تجعل كثيرة الحدود $x^n + a^n$ تقبل القسمة على

$$x + a$$

٤٠ - التعبير $5(x-1)^2 + 2(x-1) - 6$ كثيرة حدود في $x-1$. عبر عنه ككثيرة حدود في x .

٤١ - عبر عن كثيرة الحدود $2x^2 + 4x + 1$ ككثيرة حدود في (أ) $x-1$ ، (ب) $x+2$.

٤٢ - عبر عن كثيرة الحدود $x^3 + x^2 - 2x + 4$ ككثيرة حدود في $x+1$.

٤٣ - أثبت الجزء من النظرية ١ - ١٨ الخاص بوجود الأعداد r_1, r_2, \dots, r_n وتحليل $p(x)$ كحاصل ضرب

$$p(x) = a_n(x-r_1)(x-r_2) \cdots (x-r_n)$$

(إرشاد : بالنظرية الأساسية في الجبر ، $p(x)$ لها على الأقل جذر واحد . بتسميته r_1 ، يكون بنظرية العامل ، $P(x) = (x-r_1)q_1(x)$ حيث $q_1(x)$ كثيرة حدود معاملاتها أعداد مركبة . أعمل الآن مع $q_1(x)$.

٤٤ - أثبت النظرية ١ - ١٩ (إرشاد : دع c أى جذر لكثيرة الحدود $p(x)$. عوض بـ c عن x فى (7) ، فتحصل على

$$p(c) = a_n(c - r_1)(c - r_2) \cdots (c - r_n) = 0$$

٤٥ - لتكن $p(x)$ و $q(x)$ كثيرتى حدود فى x درجة كل منهما أقل من أو تساوى n . أثبت أنه اذا كانت $p(r) = q(r)$ لأكثر من n من الأعداد المختلفة r ، فان كثيرتى الحدود تكونان متطابقتين . (إرشاد : خذ فى الاعتبار كثرة الحدود $p(x) - q(x)$.

الفصل الثاني

الدوال والنهيات

٢ - ١

الدوال •

حساب التفاضل يركز على مفهومين أساسيين للدالة والنهية . في هذا الفصل سنتلقى بكليهما .

لتكن X هي فئة الأعداد $\{1, -3, 0, 2, \sqrt{3}\}$. لكل من هذه الأعداد نخصص عددا آخر كما هو موضح في جدول ١ . هذا التناظر ، الذي يخصص عددا لكل في X . هو مثال لدالة .

الأعداد المختارة لتكون المناظرة للأعداد في X اختيارية تماما ، وكان بالإمكان استخدام أي أعداد أخرى . فمثلا ، لكل من الأعداد في X كان بالإمكان تخصيص عدد كما هو موضح في جدول ٢ . هذا التناظر هو أيضا دالة . تناظر آخر موضح في جدول ٣ . مع أن الفئة Y من الأعداد المناظرة في جدول ٣ هي نفس الفئة في جدول ١ ، إلا أن التناظر ليس نفس التناظر ، والدالة تعتبر مختلفة عن الدالة الأولى .

٢ - ١ تعريف . الدالة هي تناظر يخصص لكل عدد x في فئة معطاة X ، من الأعداد ، عددا واحدا وواحدا فقط .

الشرط أن كل عدد في X يناظره عدد واحد وواحد فقط ، هو شرط أساسي . التناظر في جدول ٤ ليس دالة لأن كلا العددين ١ و ٣ يناظران ٥ . لكن من المسموح أن نفس العدد يناظر أكثر من عدد واحد في X . التناظر في جدول ٥ هو دالة حيث العدد ٩ هو المناظر للأعداد $\sqrt{2}$ و ٧ و ٤ .

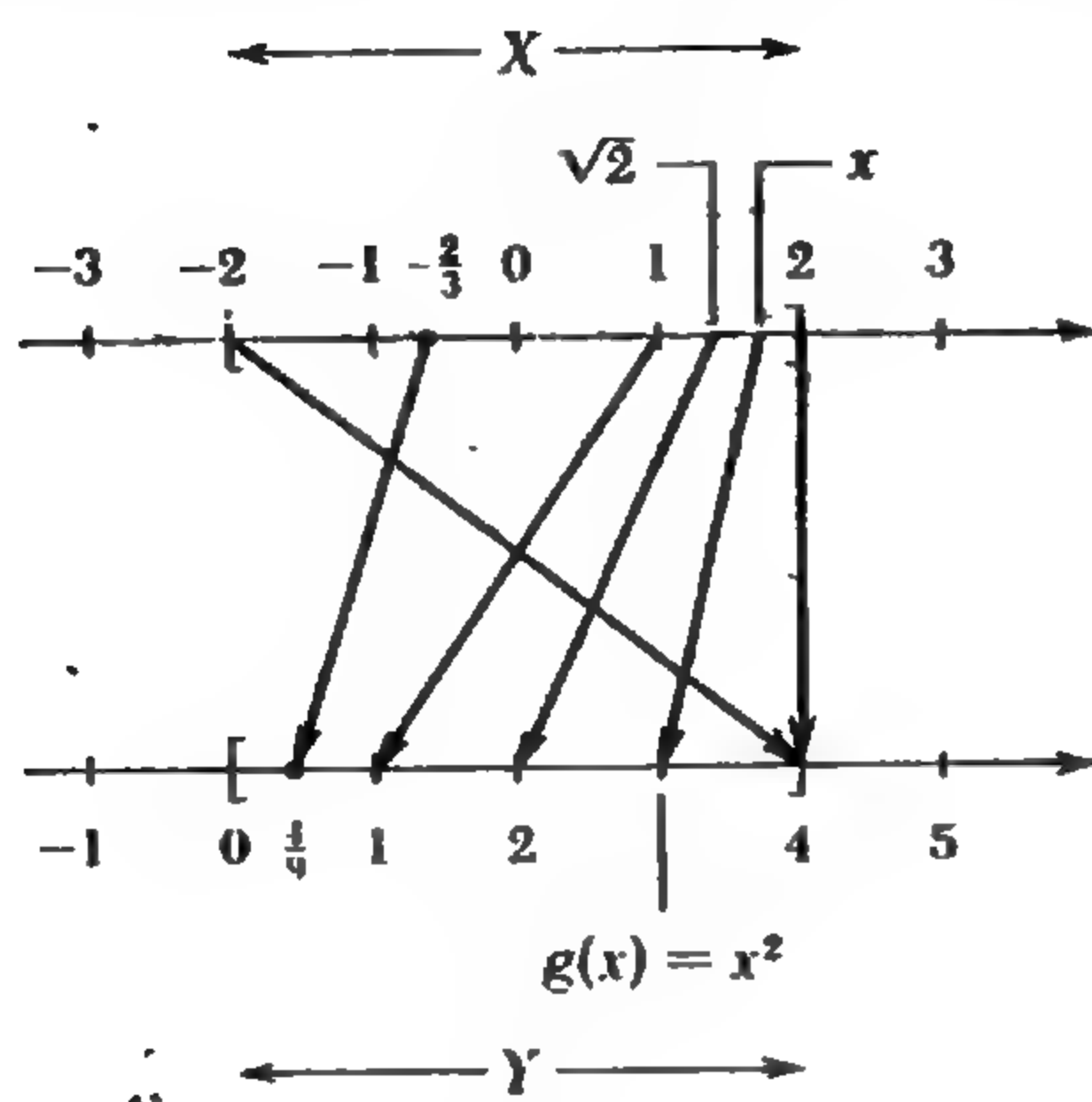
جدول ١		جدول ٢		جدول ٣		جدول ٤		جدول ٥	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	4	1	-7	1	2	4	2	4	9
-3	2	-3	π	-3	$\sqrt{3}$	5	3	-6	4
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	-4	-8	7	9
2	0	2	586	2	0	5	1	$\sqrt{2}$	9
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$4 + \sqrt{10}$	$\sqrt{3}$	4			0	-2

الفئتان Y و X قد يكون فيهما عناصر مشتركة وفي الواقع كثيرا ما يكونان نفس الفئة .

• القارئ يجب أن يعرف المادة عن الهندسة التحليلية في البنود من ١ إلى ٧ بالتدليل ، قبل الشروع في دراسة هذا الفصل .

أيضا عدد قد يناظر نفسه . عادة Y و X يكونان لانهايتين لأن الدوال الأكثر أهمية تكون تناظرات بين الفئات اللانهائية لابين الفئات المنتهية .

مثال ١ . لتكن الفترة المغلقة $[-2, 2]$. لكل x في X ، ندع المناظر هو مربع x . أي $-\frac{1}{2}$ في X يناظرها $\frac{1}{4}$ ، والعدد 1 في X يناظره 1 . هذا التناظر يحقق تعريف الدالة ، وهو موضح تخطيطياً في شكل ١-٢ . الفئة X يمكن تمثيلها كقطة جزئية من الخط الأعلى والفئة Y للأعداد المناظرة كقطة جزئية من الخط الأسفل . يرسم سهم من كل عدد في X الى مناظرة .



شكل ١-٢
كل عدد في $X = [-2, 2]$
ينظر x^2 .

الحروف هي وسائل مناسبة للدلالة عن الدوال . الدالة في جدول ١ ، مثلاً ، يمكن الإشارة إليها بالحرف f . وعند استخدامها بهذا المعنى فإن الحرف f لا يمثل عدداً لكن يمثل التناظر الموصوف في جدول ١ . إذا أردنا أن نعتبر دالة أخرى في نفس الوقت ، مثل تلك التي في مثال ١ ، فإنه يجب أن نستخدم حرفاً آخر وليكن g ، منعا للبس .

لوصف الدالة تماماً ، ليس فقط يجب اعطاء التناظر بل أيضاً الفئة . الدالة g في مثال ١ لم توصف تماماً بالنص « الدالة g هي التي تخصص لكل عدد حقيقي مربعه » حيث أن هذا لا يعين الفئة X . إذا قلنا g هي الدالة التي تخصص لكل عدد حقيقي في الفترة $[-2, 2]$ مربعه X تكون معينة والدالة g موصوفة تماماً . الدالة h المعرفة بـ « لكل x في $[-1.3, 7]$ يناظرها x^2 » هي دالة مختلفة عن g ، رغم أن طبيعة التناظر هي نفسها كما في حالة الدالة g .

إذا كانت f هي دالة ، فإن العدد الذي يناظر x محددة في X يرمز له بالرمز $f(x)$ (يقرأ « f لـ x ») ويسمى قيمة f عند x . فمثلاً إذا كانت f هي الدالة في جدول ١ ، فإن $f(\sqrt{3}) = 3$ و $f(-3) = 2$ و $f(0) = \frac{1}{2}$ أي أن ، قيمة f عند 0 هي $\frac{1}{2}$ ، وقيمة f عند -3 هي 2 ، وهكذا . إذا كانت g هي الدالة الموصوفة في مثال ١ ، فإن $g(-2) = 4$ ، $g(0) = 0$ ، $g(\frac{5}{3}) = \frac{25}{9}$ وبوجه أعم $g(x) = x^2$ لكل x في $[-2, 2]$. لاحظ أن $g(-3)$

ليست معرفة إذ أن 3 ليست في الفترة $[-2, 2]$ ، أى أنه لا توجد قيمة لـ g عند 3 . من المهم التمييز بين الدالة f ، التى هى تناظر ، وقيمتها $f(x)$ التى هى عدد .

الفترة X تسمى نطاق الدالة ، والفترة Y للمناظرات تسمى مدى الدالة . إذا كانت الدالة يرمز لها بـ f ، فإن المدى هو فترة جميع $f(x)$ لـ x فى X . نطاق الدالة فى جدول ١ هى الفترة $X = \{1, -3, 0, 2, \sqrt{3}\}$ ، والمدى هو الفترة $Y = \{4, 2, \frac{1}{2}, 0, \sqrt{3}\}$. الدالة فى جدول ٣ لها نفس النطاق والمدى . فى جدول ٥ النطاق هو $\{4, -6, 7, \sqrt{2}, 0\}$ والمدى هو $\{9, 4, -2\}$. نطاق الدالة g فى مثال ١ هو الفترة المقفلة $[-2, 2]$ ، ومداهما هو فترة جميع $g(x)$ ، أى الفترة المقفلة $[0, 4]$.

توجد طرق كثيرة لوصف الدوال . إذا كانت X فترة محدودة ، التناظر يمكن أن يبين بجدول ، كما فى الجداول ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ . أحيانا التناظر يوصف بالكلام ، كما فى مثال ١ كثيرا ما تستخدم الرموز والمعادلات . الدالة فى مثال ١ يمكن أيضا وصفها بالنص « لتكن g الدالة المعرفة بـ $g(x) = x^2$ ، لكل x فى $[-2, 2]$ » أو بإيجاز أكثر « لتكن g الدالة المعرفة بـ $g(x) = x^2$ ، $-2 \leq x \leq 2$ » . معظم الدوال الخاصة التى تدرس فى حساب التفاضل يمكن وصفها بهذه الطريقة .

مثال ٢. لتكن h الدالة المعرفة بـ

$$(1) \quad h(x) = \begin{cases} x^2, & -2 \leq x \leq 2, \\ x-7, & x > 2. \end{cases}$$

أسلوب الكتابة فى (١) يفسر كالآتى ، إذا كانت x أى عدد فى الفترة $[-2, 2]$ فإن العدد الذى يناظر x هو x^2 ، إذا كانت x أكبر من 2 ، فإن العدد الذى يناظر x هو $x-7$. لايجاد $h(-1)$ ، يجب أولا أن نحدد فى أى نوع تقع -1 حيث أن -1 تقع فى $[-2, 2]$ فإن $h(-1) = (-1)^2 = 1$. وحيث $5 > 2$ فإن $h(5) = 5-7 = -2$. نطاق h هو الفترة $(-2, \infty)$ ، والمدى هو الفترة $(-\infty, 5)$. لا توجد قيمة لـ $h(-\frac{5}{2})$ لأن $-\frac{5}{2}$ ليست فى النطاق .

إذا كان النطاق لدالة f غير موصوف ، سيفهم بأنه يحتوى كل الأعداد الحقيقية حيث يكون التعبير المعروف للدالة له معنى والقيم $f(x)$ تكون حقيقية . مثال ذلك ، نطاق الدالة f المعرفة بـ $f(x) = 5/(x-2)$ سيفهم بأنه فترة كل الأعداد الحقيقية ماعدا 2 إذ أن x ليست مقيدة بغير ذلك . الدالة F المعرفة بـ $F(x) = \sqrt{9-x^2}$ سيفهم أنها معرفة فقط عند x فى الفترة $[-3, 3]$ إذ أن $F(x)$ لا تكون حقيقية لجميع الأعداد x الأخرى .

كثيرا ما تستخدم حروف أخرى غير x عند وصف الدوال . الدالة F المعرفة بـ $-3 < x \leq 7$ و $f(x) = x^2 - 3x + 5$ يمكن بالمثل تعريفها بـ $-3 < t \leq 7$ و $f(t) = t^2 - 3t + 5$. أ لـ x فى التعبير المعروف $f(x) = x^2 - 3x + 5$ تسمى المتغير المستقل ، والمعدان 5 و -3 يسميان ثابتين . عند ظهور أكثر من حرف واحد فى التعبير المعروف ، كما فى $g(x) = 3/(2x+a)$ يمكن فعلا ، أن

نتبين أن x وليست a هي المتغير المستقل بالإشارة إلى g كدالة في x . العدد a هو ثابت إذ أن قيمته تعتبر ثابتة أثناء النقاش.

مثال ٣. لتكن f الدالة المعرفة بـ $f(t) = 3t^2 - 2$.

$$f(-4) = 46, \quad f(5-2) = f(3) = 25,$$

$$f(a) = 3a^2 - 2, \quad f(5) - f(2) = 73 - 10 = 63,$$

$$f(2+h) = 3(2+h)^2 - 2 = 3h^2 + 12h + 10,$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{[3(x+h)^2 - 2] - (3x^2 - 2)}{h}$$

$$= \frac{6xh + 3h^2}{h} = 6x + 3h, \quad h \neq 0.$$

مثال ٤. لتكن h الدالة المعرفة بـ $h(x) = -6$. فيكون

$$h(2) = -6, \quad h(-6) = -6, \quad h(3\sqrt{2} + 1) = -6, \quad h(c^2) = -6$$

الدالة مثل h في مثال ٤ التي قيمها هي نفس القيمة لجميع x تسمى دالة ثابتة.

مثال ٥. خذ في الاعتبار جميع الأسطوانات الدائرية التي ارتفاعها 10 in . الحجم V لأي من هذه هو $10\pi r^2$ ، حيث r هي نصف قطر القاعدة. هذا التعبير يعرف دالة f هي $f(r) = 10\pi r^2$ ، أي أن $f(r)$ هي حجم الأسطوانة. نطاق الدالة f هو الفترة $(0, \infty)$. نقول إن المعادلة $V = 10\pi r^2$ تعبر عن حجم الأسطوانة كدالة في r أو بدلالة r .

الدالة يمكن أن توصف بأكثر من طريقة واحدة، مثال ذلك، لتكن u هي الدالة المعرفة بـ

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1, \end{cases}$$

ولتكن v الدالة المعرفة بـ

$$v(x) = x + 1$$

كلتا الدالتين لهما النطاق فئة جميع الأعداد الحقيقية. إذا كانت $x \neq 1$ فإن

$$u(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 = v(x)$$

والعدد 1 لدينا $v(1) = 2 = u(1)$. أي أن $V(x) = u(x)$ لكل x والتناظر u هو نفس التناظر v . فنقول إن $u = v$ ، بمعنى أن u و v تكونان مجرد رمزين مختلفين لنفس الدالة.

بوجه عام، الدالتان g و f تكونان نفس الدالة. إذا كانتا تعملان نفس الشيء. هذا يعني أنه يجب أن يكون لهما نفس النطاق X وأن العدد المناظر لكل x بتعريف f يجب أن يكون نفس العدد المناظر إلى x بتعريف g .

٢-٢ تعريف . الدالتان g و f تكونان نفس الدالة ، ويشار الى ذلك بكتابة $f = g$ ، اذا كان لهما نفس النطاق X واذا كانت $f(x) = g(x)$ لكل x في X . *

تبعاً لهذا التعريف ، g و f تمثلان دالتين مختلفتين اذا وجدت ولو x واحدة حيث $f(x) \neq g(x)$ ، رغم أن لهما نفس القيم x الأخرى .

في مناقشة الدوال ، العبارة مثل « الدال f المعرفة بـ $f(x) = 3x^2 - 2$ » مستختصر عادة الى « الدالة $f(x) = 3x^2 - 2$ » . لكن يجب أن يتذكر القارئ ، أن $f(x)$ هي عدد ، وفي الواقع أن f وليست $f(x)$ هي الدالة .

إذا كانت f دالة ، فإن أى قيمة لـ x حيث $f(x) = 0$ تسمى صفرًا أو جذراً للدالة . مثال ذلك ، اذا كانت $f(x) = 3x - 2$ فإن $\frac{2}{3}$ هو صفر للدالة f لأن $f(\frac{2}{3}) = 0$. كل من 0 ، -2 صفر للدالة $r(x) = x(x+2)$.

مسائل

- ١ - خذ في الاعتبار الدالة في مثال ١ . (أ) ما هو العدد الذي يناظر $\frac{7}{3}$ في X ؟ (ب) أوجد عددين في X مناظرهما هما $\frac{1}{4}$. (ج) ما هو العدد الذي يناظر $1,732$ في X ؟ أى عدد موجب في X تكون 3 المناظر له ؟ (د) ما هو العدد الذي يناظر $5 -$ في X ؟
- ٢ - لتكن X هي فئة جميع الأعداد الحقيقية ولتكن f الدالة التي تخصص لكل x في X العدد المتكون بضرب x في 3 ثم طرح 2 من حاصل الضرب هذا . (أ) أوجد $f(x)$ و $f(a)$ و $f(-8)$ و $f(0)$ و $f(2)$. (ب) ماهي الأعداد في X التي تناظرها 10 ؟ (ج) ما هما النطاق والمدى لـ f ؟ (د) أوجد x بحيث يكون $f(x) = -1$ ، (هـ) . أوجد x بحيث يكون $F(x) = x$. (و) ارسم شكلاً تخطيطياً لـ f ممثلاً لشكل ١-٢ .
- ٣ - اذا كانت h هي الدالة المعرفة بـ $h(z) = 5 - z/2, z \geq 0$ فأوجد $h(1), h(0), h(-a)$ حيث $a \leq 0$. هل توجد قيمة لـ h عند $6 -$ ؟ ما هما النطاق والمدى لـ h ؟
- ٤ - لتكن u هي الدالة المعرفة بـ $u(x) = x^2 + 4x - 12$. أوجد $u(0), u(2), u(-5)$. أوجد $u(1/x), u(c), u(-\frac{1}{2})$. أوجد x ، اذا وجدت ، حيث $u(x) = 9$. أوجد أصفار u ، اذا وجدت . ارسم شكلاً تخطيطياً لـ u ممثلاً لشكل ١-٢ .
- ٥ - اذا كانت $f(x) = 2$ فأوجد $f(a+b)$ و $f(-\sqrt{3})$ و $f(0)$ ، $f(2)$ ، $f(1)$. ما هما النطاق والمدى لـ f ؟
- ٦ - اذا كانت f هي الدالة بحيث أن كل $x \geq 0$ يناظرها \sqrt{x} ، فأوجد $f(a-b)$ و $f(-2)$ و $f(3)$ و $f(2 + \sqrt[3]{5})$ و $f(1)$. ما هما نطاق ومدى f ؟ ارسم شكلاً تخطيطياً لـ f ممثلاً لشكل ١-٢ .

* من المؤلف في الأسلوب الرياضى أنه عند استعمال كلمة اذا في تعريف ما يكون لها قوة اذا واذا فقط .

٧ - إذا كانت f هي الدالة المعرفة بـ $f(t) = 3 / (t^2 - 1)$, $t = \pm 1$ فاوجد $f(y + 2)$ و $f(-5)$ و $f(0)$ و $f(2)$. هل f لها جذر؟ ما هو نطاق f ؟

٨ - لتكن u هي الدالة المعرفة بـ $u(x) = (7x + b) / 2$, حيث b ثابت. أوجد $u(b)$ و $u(0)$ و $u(-q)$. أوجد أصفار u .

٩ - لتكن F هي الدالة المعرفة بـ

$$F(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$$

(أ) أوجد $F(\frac{1}{2})$ و $F(3)$ و $F(0)$ و $F(-6)$. (ب) ما هما النطاق والمدى لـ F ؟ (ج) أوجد وصفا مختصرا للدالة F .

١٠ - لتكن f هي الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & -3 \leq x < 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

(أ) أوجد $f(-5)$ و $f(-3)$ و $f(2)$ و $f(0)$ و $f(6)$. (ب) ما هو نطاق f ؟

١١ - لتكن g هي الدالة المعرفة بـ

$$g(t) = \begin{cases} t^2, & t > 0 \\ \frac{1}{t}, & t = -2 \end{cases}$$

(أ) أوجد $g(-1)$ و $g(0)$ و $g(2)$ و $g(\frac{1}{2})$ و $g(-2)$ و $g(1)$. (ب) لأي t تتكون $\frac{1}{2}$ ؟ -7 ؟ $g(t) = 2$ ؟ (ج) ما هما نطاق ومدى g ؟ (د) ارسم شكلا تخطيطيا لـ g مماثلا لشكل ٢ - ١.

١٢ - لتكن f هي الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

(أ) أوجد $f(0)$ و $f(-\frac{1}{2})$ و $f(\frac{1}{2})$ و $f(-3)$ و $f(3)$. (ب) وضع أن $f(x) \geq 0$ لكل x . (ج) ما هما نطاق ومدى الدالة f ؟ (د) أوجد جميع x حيث $f(x) = 6$. (هـ) أوجد وصفا مختصرا للدالة f .

١٣ - إذا كانت $F(x) = x^2$, حيث x كسرية في الفترة نصف المفتوحة $[-2, 2)$, فاوجد $F(-4)$ و $F(2)$ و $F(-2)$ و $F(-1)$ و $F(\sqrt{3})$ و $F(\frac{1}{2})$. ما هو نطاق F ؟

١٤ - لتكن g هي الدالة بحيث أن كل عدد حقيقي x يناظره أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x . فمثلا $g(-\frac{9}{4}) = -2$, $g(5) = 5$, $g(\frac{3}{2}) = 2$. (أ) أوجد $g(-\frac{7}{4})$ و $g(\pi)$ و $g(\sqrt{2})$ و $g(-4)$ و $g(0)$ و $g(\frac{3}{2})$. (ب) ما هما نطاق ومدى g ؟ (ج) أوجد كل x حيث: $g(x) = 4$.

١٥ - لتكن p هي الدالة المعرفة بـ $p(x) = 2x^2 - 5x + 2$. (أ) أوجد $p(1/x)$ و $p(-4)$ و $-p(4)$ و $p(1+6)$ و $p(1) + p(6)$ و $p(a)$ و $p(6)$ و $p(0)$. (ب) اشرح الفرق بين الرمز $p(a+b)$ و $p(a) + p(b)$. (ج) هل $p(4) + p(3) = p(4+3)$ ؟ (د) اشرح

- انفرق بين الرمزین $2p(a)$ و $p(2a)$. هل $p(2a) = 2p(a)$ لكل a ؟ (هـ) أوجد أصفار p .
 (و) لای أعداد x يكون $p(x) = p(3x)$ ؟
 ١٦- (أ) هل من الصحيح أن $f(-3) = -f(3)$ ؟ لجميع الدوال f ؟ (ب) أوجد دالة g . بحيث يكون $g(-x) + -g(x)$ لجميع الأعداد x .
 ١٧- إذا كانت $f(x) = mx$ ، حيث m ثابت ، أثبت أن $f(a+b) = f(a) + f(b)$ لكل a, b . هل هذا صحيح لكل الدوال ؟
 ١٨- إذا كانت $f(x) = 2^x$ ، فأوجد $f(-2)$ و $f(0)$ و $f(4)$. اثبت $f(u)f(v) = f(u+v)$ لكل u و v .

١٩- إذا كانت $f(x) = 3x^2 - x + 2$ ، فأوجد :
 (أ) $f(0), f(\sqrt{2}), f(r), f(m/n), f(x) - f(a), f(x-a)$
 (ب) $f(2+h), f(-3+h), f(0+h), f(a+h)$
 (ج) $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ (د) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (هـ) $\frac{f(x) - f(4)}{x-4}$

٢٠- إذا كانت $g(x) = \frac{x}{x-1}$ ، فأوجد :

(أ) $g(-4), g(2), g(1), g(a), g(u) - g(x)$ (ب) $g(1+h), g(-4+h), g(x+h)$
 (ج) $\frac{g(-4+h) - g(-4)}{h}$ (د) $\frac{g(a+h) - g(a)}{h}$ (هـ) $\frac{g(u) - g(-4)}{u+4}$

إذا كانت $f(x) = -x^2 + 2x$ ، فأوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بكل زوج من النقاط الآتية :

٢١- $(1, f(1))$ و $(2, f(2))$

٢٢- $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ و $(-2, f(-2))$

٢٣- $(4, f(4))$ و $(4+h, f(4+h)), h \neq 0$

٢٤- $(-1, f(-1))$ و $(-1+h, f(-1+h)), h \neq 0$

٢٥- $(a_1, f(a_1))$ و $(a_2, f(a_2)), a_1 \neq a_2$

٢٦- $(a, f(a))$ و $(a+h, f(a+h)), h \neq 0$

أوجد نطاق كل من الدوال الآتية :

٢٧- $G(x) = x\sqrt{x^2-16}$ ٢٨- $f(u) = \sqrt{-u^2+9u-18}$ ٢٩- $u(x) = (x^2-x)^{1/3}$

٣٠- أوجد الدالة التي قيمتها عند كل عدد r هي مساحة دائرة نصف قطرها r .

٣١- أوجد دالة تعبر عن المساحة السطحية لمكعب (أ) بدلالة طول الحرف ، (ب) بدلالة حجم المكعب .

٣٢- صندوق مكعب جوانبه وقاعدته من الخشب يتكلف 4 Cents لكل قدم مربع وسقفه معدني .

يتكلف 9 cents لكل قدم مربع . أوجد تكاليف الصندوق بدلالة طول حرفه وعبر عن هذه العلاقة كدالة .

٣٣- أوجد بدلالة x المسافة بين النقطة $(1,2)$ ونقطة اختيارية (x,y) على القطع المكافئ $y = \frac{1}{4}x^2$. عبر عن هذه العلاقة كدالة .

٣٤- أوجد المساحة الجانبية لاسطوانة حجمها 10 كدالة (أ) لنصف القطر ، (ب) للارتفاع

٣٥- مستطيل تقع رؤوسه على محيط دائرة . أوجد مساحة المستطيل كدالة لطول نصف القاعدة .

كل عضو من أزواج التعبيرات الآتية يعرف دالة . حدد ما إذا كان العضوان يعرفان نفس الدالة .

$$f(x) = 2x - 1; g(x) = (x^2 + x) + (x - x^2 - 1) \quad - ٣٦$$

$$f(x) = 3x; g(x) = 3x^2/x \quad - ٣٨ \quad h(u) = 2u; H(u) = \begin{cases} 2u, & u \neq 0 \\ 1, & u = 0 \end{cases} \quad - ٣٧$$

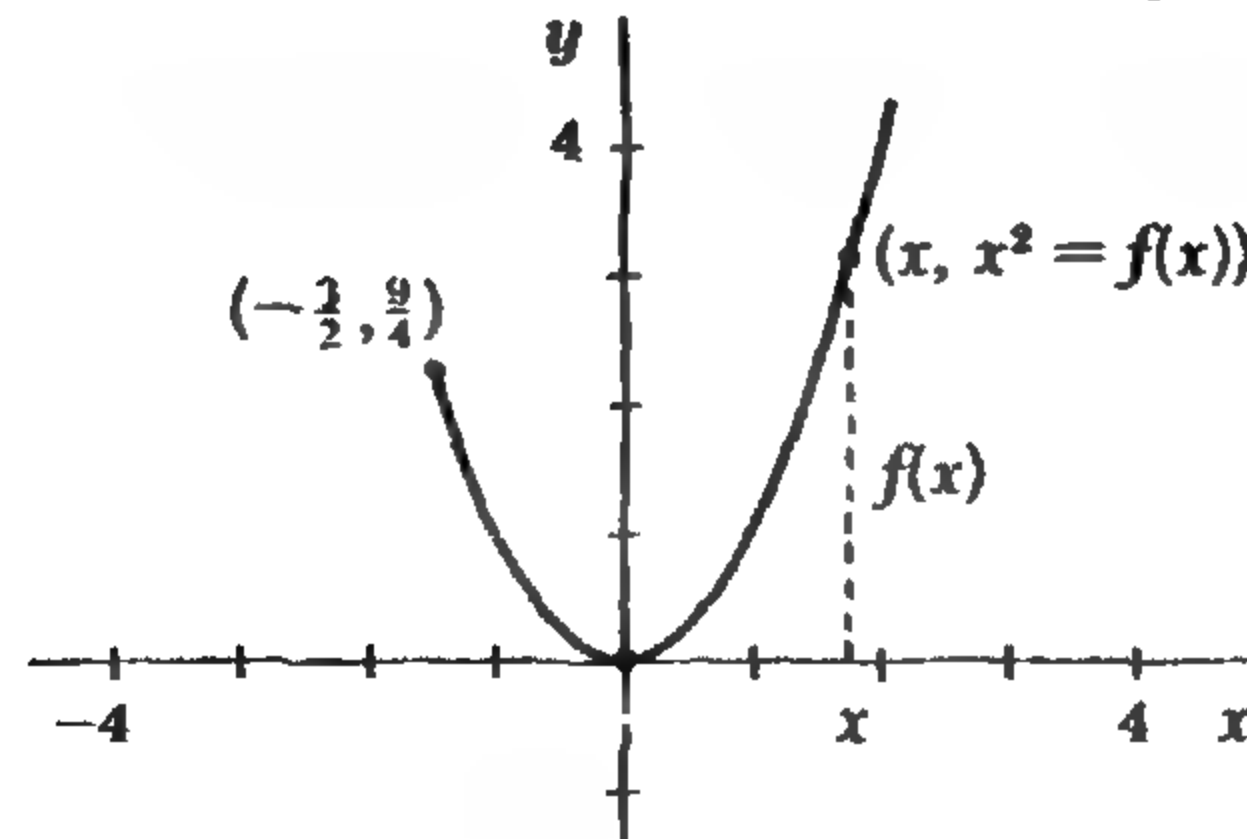
$$f(x) = x + 5; g(t) = \begin{cases} t + 5, & t \neq 0, \\ 5, & t = 0. \end{cases} \quad - ٤٠ \quad f(x) = 3x; G(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad - ٣٩$$

$$f(z) = z - 1; g(z) = \begin{cases} \frac{z^2 - 1}{z + 1}, & z \neq -1, \\ -2, & z = -1. \end{cases} \quad - ٤١$$

$$u(s) = s^2, -5 \leq s \leq 0; v(s) = s^2, -4 \leq s \leq 1 \quad - ٤٢$$

الأشكال البيانية للدوال

كل دالة f يناظرها معادلة $y = f(x)$. مثال ذلك إذا كانت f هي الدالة المعروفة : $f(x) = x^2, x \geq -\frac{3}{2}$ فإن المعادلة المناظرة هي $y = x^2, x \geq -\frac{3}{2}$ إحدى طرق تصوير الدالة هي رسم تخطيطي مماثل لذلك في شكل ٢-١ ، لكن طريقة أخرى ، عادة أكثر فائدة ، هي تخطيط الشكل البياني للمعادلة المرتبطة . هذا الشكل البياني يسمى الشكل البياني للدالة .



شكل ٢-٢ الشكل البياني للدالة $f(x) = x^2, x \geq -\frac{3}{2}$.

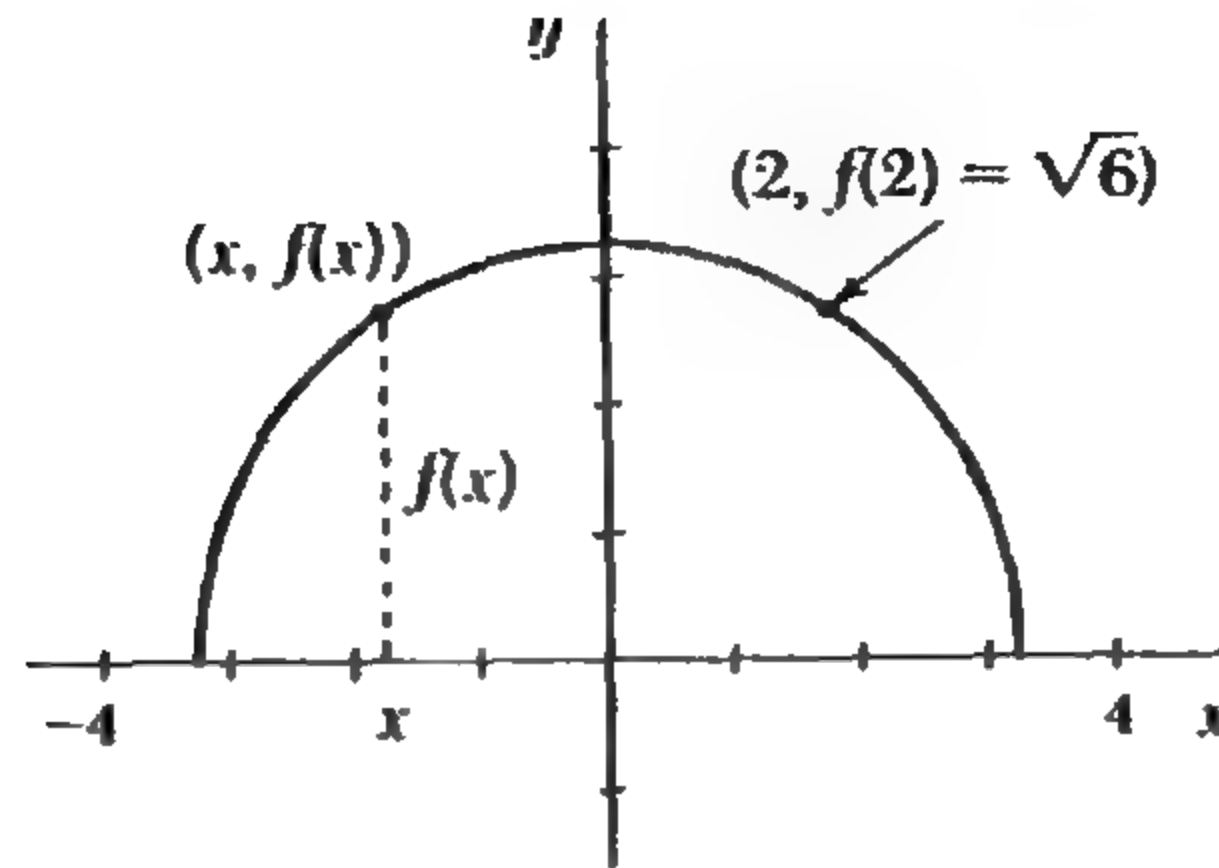
٢-٣ تعريف . الشكل البياني للدالة f هو الشكل البياني للمعادلة $g = f(x)$ لجميع x في نطاق f :

فهو إذن فئة جميع النقط $(x, f(x))$.

الشكل البياني للدالة f المعرفة بـ $f(x) = x^2, x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ ، موضح في شكل ٢-٢ . هو ذلك الجزء من القطع المكافئ $y = x^2$ الواقع على يمين النقطة $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

مثال ١ . خطط الشكل البياني للدالة f المعرفة بـ $f(x) = \sqrt{10 - x^2}$. نطاق الدالة f هو الفترة المغلقة

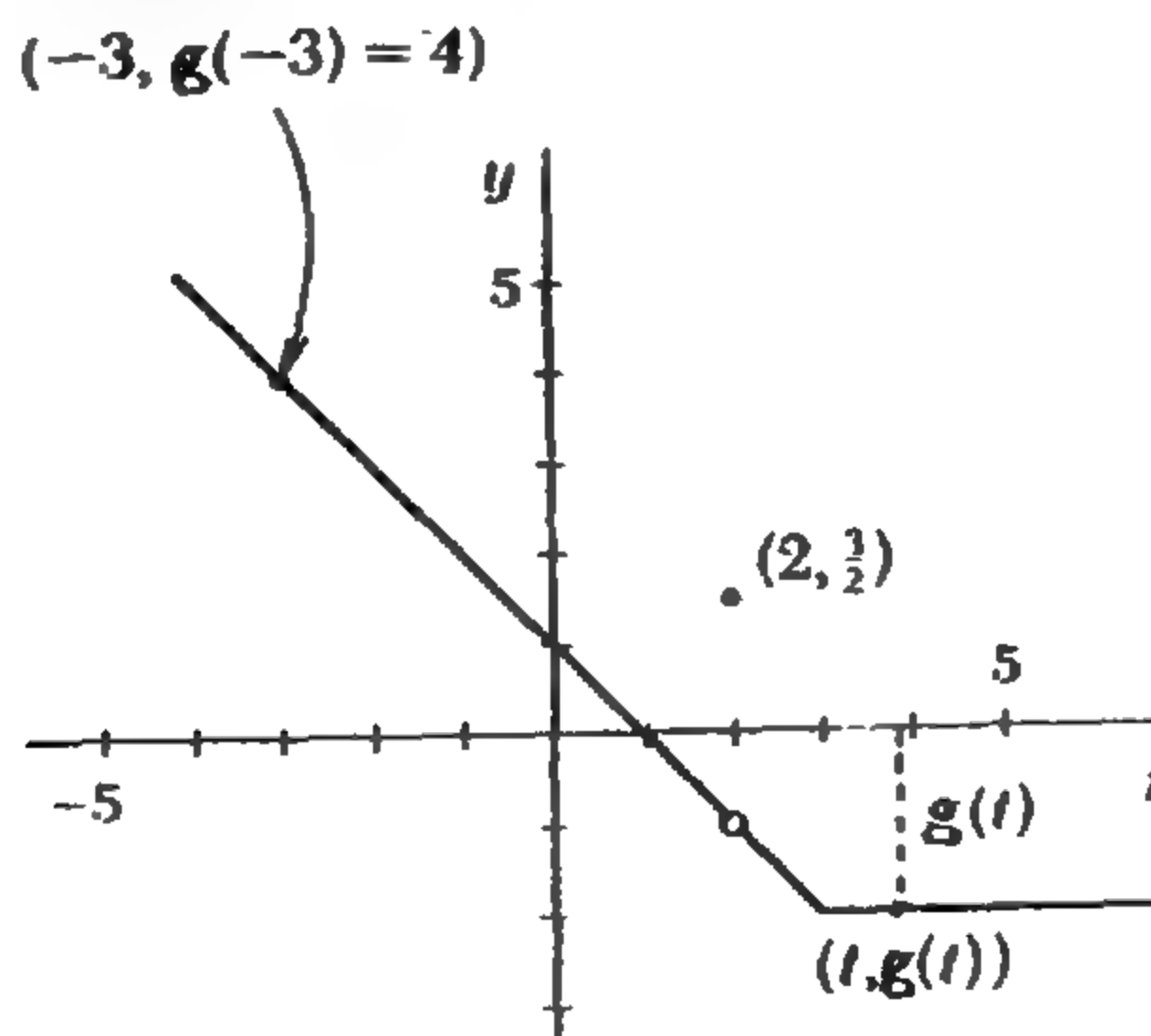
$[-\sqrt{10}, \sqrt{10}]$ وعلينا أن نخطط الشكل البياني للمعادلة



شكل ٢-٢ الشكل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{10 - x^2}$.

(1) $y^2 = 10 - x^2$
لجميع x في النطاق . أى نقطة (a, b) تحقق هذه المعادلة تستلزم أن $b \geq 0$ وتحقق المعادلة

(2) $y^2 = 10 - x^2$
وبالعكس ، أى نقطة (a, b) ، حيث $b \geq 0$ ، وتحقق (2) ، متحقق أيضا (1) . واذن الشكل البياني لـ (1) هو النصف الأعلى من الدائرة التي معادلتها (2) لكن (شكل ٢-٣) .



شكل ٢-٤ الشكل البياني للمعادلة .

$$g(t) = \begin{cases} -t + 1, & t \leq 3, \text{ لكن } t \neq 2, \\ \frac{3}{2}, & t = 2, \\ -2, & t > 3. \end{cases}$$

مثال ٢ . خطط الشكل البياني للدالة g حيث

$$g(t) = \begin{cases} -t + 1, & t \leq 3, \quad t \neq 2, \\ \frac{3}{2}, & t = 2, \\ -2, & t > 3. \end{cases}$$

عند $t \leq 3$ باستثناء 2 ، الشكل البياني g ينطبق على الشكل البياني لـ $y = -t + 1$ واذن هو جزء من خط مستقيم (شكل ٢ - ٤) . قد وضعنا دائرة صغيرة عند النقطة $(2, -1)$ لنشير الى أن هذه النقطة ، بينما هي على الخط المستقيم ، فهي ليست على الشكل البياني لـ g . عند $t > 3$ ، الشكل ينطبق على الشكل البياني لـ $y = -2$ ، الخط الأفقى على بعد وحدتين تحت المحور t . النقطة $(2, \frac{3}{2})$ هي أيضا جزء من الشكل البياني .

مثال ٣ . خطط الشكل البياني للدالة F ، حيث $F(x)$ هي المسافة بين x وأقرب عدد صحيح .

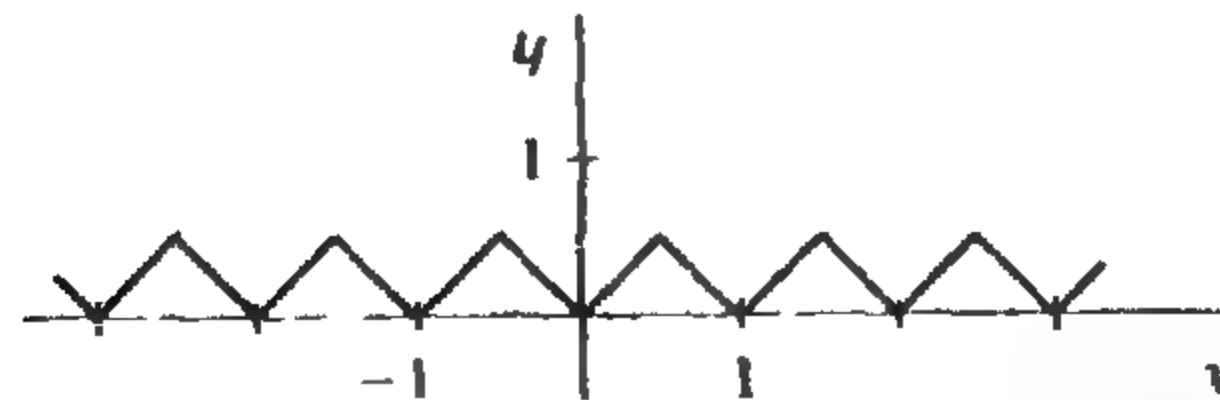
دع $y = F(x)$. فيكون

$$y = F(x) = \begin{cases} \dots\dots\dots \\ |x - 0| & \text{if } -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}, \\ |x - 1| & \text{if } \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}, \\ |x - 2| & \text{if } \frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{2}, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

أوعند ما تكتب بدون علامات القيم المطلقة

$$y = F(x) = \begin{cases} \dots\dots\dots \\ -x & \text{if } -\frac{1}{2} < x \leq 0, \\ x & \text{if } 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - x & \text{if } \frac{1}{2} < x \leq 1, \\ x - 1 & \text{if } 1 < x \leq \frac{3}{2}, \\ 2 - x & \text{if } \frac{3}{2} < x \leq 2, \\ x - 2 & \text{if } 2 < x \leq \frac{5}{2}, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

الشكل البياني هو منحنى سن المشار في شكل ٢ - ٥ .



شكل ٢ - ٥ الشكل البياني للدالة F حيث $F(x)$ هي المسافة بين x وأقرب عدد صحيح .

الشكل البياني للدالة f المعرفة بـ $f(x) = 1/x$ هو الشكل البياني للمعادلة $y = 1/x$. هذا سيناقش في الجزء الإضافي في مثال ٣ بيند ٢ ، وسيخطط في شكل بند ١٣ . وهو قطع زائد بمحور

x ومحور y كخطين تقاربين . هذه الدالة تظهر كثيرا في الأمثلة التوضيحية ، وعلى القارىء أن يتذكر شكلهما البياني .

في الشكل البياني للمعادلة $y = f(x)$ لاحظ أن $f(x)$ هي المسافة الموجهة من المحور x الى المنحنى .

مسائل

خطط الشكل البياني لكل من الدوال المعروفة أدناه .

$$f(x) = 3 - 2x \quad - \quad ٢ \quad f(x) = x + 4 \quad - \quad ١$$

$$g(s) = \frac{s}{4}, s \geq 0 \quad - \quad ٤ \quad g(x) = \begin{cases} 3 - 2x, & x \neq -1, \\ 2, & x = -1. \end{cases} \quad - \quad ٣$$

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad - \quad ٦ \quad g(x) = 3, x \neq 1 \quad - \quad ٥$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases} \quad - \quad ٨ \quad f(x) = \begin{cases} 3, & x < -2, \\ 1, & -2 \leq x < 2, \\ -3, & x \geq 2. \end{cases} \quad - \quad ٧$$

$$g(x) = 4 - x^2 \quad - \quad ١٠ \quad F(u) = \begin{cases} u + 1, & u \leq 1, \\ -u + 1, & u > 1. \end{cases} \quad - \quad ٩$$

$$g(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}t^2, & t < 0, \\ \frac{1}{2}t^2, & t \geq 0. \end{cases} \quad - \quad ١٢ \quad G(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2, \\ \frac{1}{2}, & x = 4. \end{cases} \quad - \quad ١١$$

$$f(x) = x^3 \quad - \quad ١٤ \quad f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x, & x \leq 0, \\ 0, & 0 < x < 3, \\ -x + 3, & x \geq 3. \end{cases} \quad - \quad ١٣$$

$$g(t) = -\sqrt{t} \quad - \quad ١٦ \quad f(r) = -\frac{4}{r} \quad - \quad ١٥$$

$$u(x) = \sqrt{2-x} \quad - \quad ١٨ \quad h(t) = \begin{cases} \frac{4}{t^2}, & t \neq 0, \\ 3, & t = 0. \end{cases} \quad - \quad ١٧$$

١٩ - أوجد نطاق الدالة $f(x) = -\sqrt{9-x^2}$ وأثبت أن الشكل البياني هو نصف دائرة .

٢٠ - خطط الشكل البياني للدالة A ، حيث $A(r)$ هي مساحة الدائرة التي نصف قطرها r .

٢١ - مزارع لدية 600 yd من سياج ويرغب في عمل سور بها حول حقل مستطيل . عبر عن مساحة الحقل كدالة لطول ضلع واحد وخطط الشكل البياني للدالة .

٢٢ - خطط الشكلين البيانيين للدالتين اللتين تعبران عن المساحة الجانبية لاسطوانة حجمها 10 كدالة (أ) لنصف القطر ، (ب) للارتفاع .

٢٣ - ارسال الخطاب بالبريد درجة أولى يتكلف 6 cents للخطابات التي تزن أقل من 1 oz ، 12 cents للتي وزنها 1 oz أو يزيد لكن أقل من 2 oz ، 18 cents للتي وزنها 2 oz أو أكثر لكن أقل من 3 oz ، وهكذا . إذا كانت $p(x)$ هي التكاليف بال cents لارسال خطاب وزنه x ، فإن p هي دالة . أعط نطاق ومدى الدالة p وخطط شكلها البياني .

٢٤ - شركة اضاءة كهربية لها قائمة الأسعار الآتية :

8 cents لكل كيلو وات ساعة ل 30 كيلو وات ساعة الأولى ،

4 cents لكل كيلو وات ساعة ل 50 كيلو وات ساعة التالية ،

2 cents لكل كيلو وات ساعة لكل كيلو وات ساعة زيادة عما سبق .

يوجد حد أدنى للحساب هو 2 \$.

عبر عن التكاليف الكلية كدالة لعدد الكيلو وات ساعة وخطط الشكل البياني للدالة .

٢٥ - المسافة s miles من Boston لقطار مسافر من هذه المدينة إلى New York هي دالة f للزمن

$s = f(t)$ ، t hr . والشكل البياني للدالة موضح في شكل ٢ - ٦ . ماذا يفعل القطار أثناء

الفترتين الزمنيةتين $3 < t < 3.25$ ، $2 \leq t \leq 2.5$ ؟ متى يكون سائرا أسرع ؟ ما هي سرعته

المتوسطة أثناء الساعتين الأوليين ؟

٢٦ - إذا كانت f دالة وكانت g هي الدالة المعرفة بـ $g(x) = f(-x)$ ، اثبت أن الشكل البياني

للدالة g هو الانعكاس في المحور y للشكل البياني للدالة f . ما هي معادلة الانعكاس للدالة

f في المحور x ؟ في نقطة الأصل ؟ وضح بالدالة $f(x) = 2x + 2$.

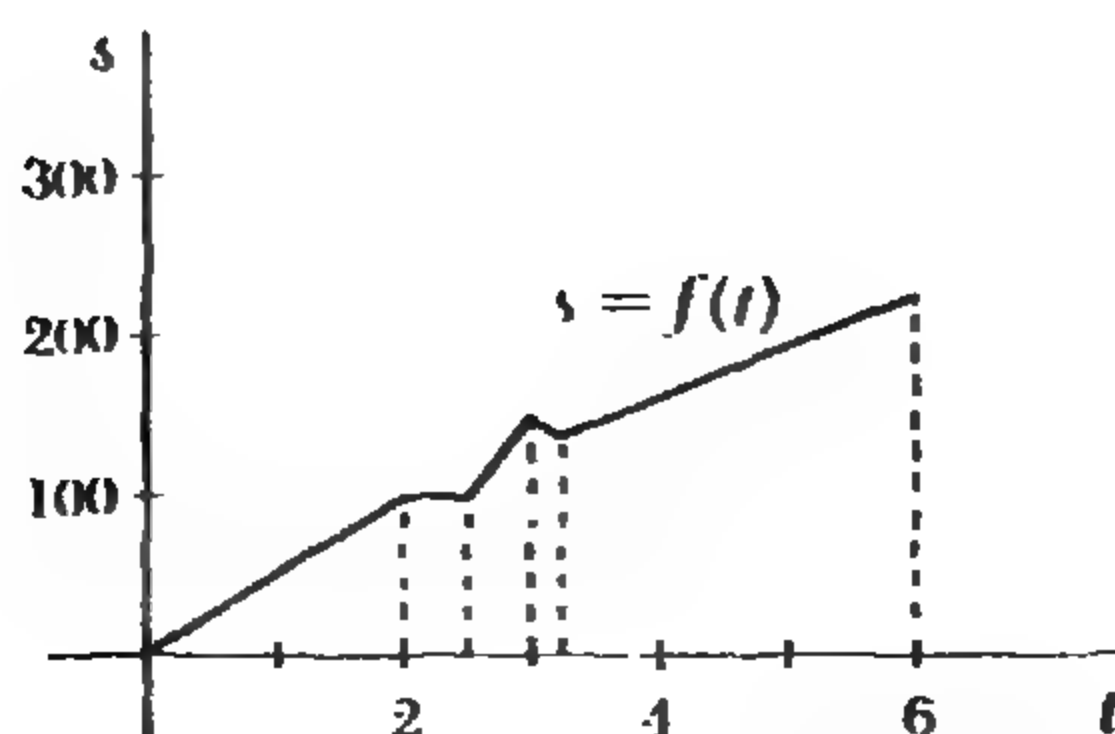
٢ - ٣

أنواع الدوال والدوال الخاصة

الدالة f التي تعرف بكثيرة حدود ذات معاملات حقيقية ،

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

تسمى دالة كثيرة حدود . الدالة g المعرفة بـ $g(x) = -x^3 + \sqrt{5}x + 3$ هي دالة كثيرة حدود .



شكل ٢ - ٦

دالة كثيرة الحدود f المعرفة بـ $f(x) = c$ ، حيث c عدد حقيقي ، تسمى عامة دالة ثابتة . هي تخصص لكل x نفس العدد c . الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ دالة ثابتة .
الدالة المعرفة بخارج قسمة كثيرتي حدود ، مثل

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + \sqrt{6}}{2x + 10}$$

تسمى دالة كسرية . اذا لم يحدد نطاقها ، فانه يصطلح عن أنه فئة جميع الأعداد الحقيقية التي تجعل المقام يختلف عن الصفر . أى كثيرة حدود يمكن كتابتها هي نفسها مقسومة على الواحد ، مثال ذلك

$$3x^2 - 5x + 6 = \frac{3x^2 - 5x + 6}{1}$$

اذن كل دالة كثيرة حدود هي أيضا دالة كسرية .

الدالة المعرفة بتعبير مركب من كثيرات حدود بعمليات متكررة من جمع وطرح وضرب وقسمة وبأخذ الجذور ، مثل $x^2 + \sqrt{3x-7}$ أو

$$13x^8 + (x^2 + 5)^{3/2} - \left[\frac{x^4 - \sqrt{7}x - 1}{(2x + 1)\sqrt{8-x}} \right]^{1/5}$$

هي دالة جبرية . كل كثيرة حدود وكل دالة كسرية هي أيضا دالة جبرية . طائفة الدوال الجبرية تحتوى أيضا على دوال لايمكن تعريفها بهذه الطريقة ، لكن سوف لا نتعرض لها .

الدوال غير الجبرية تسمى دوال متسامية أو دوال مسترسلة . على سبيل الأمثلة $\sin x, \log x, 2^x$.

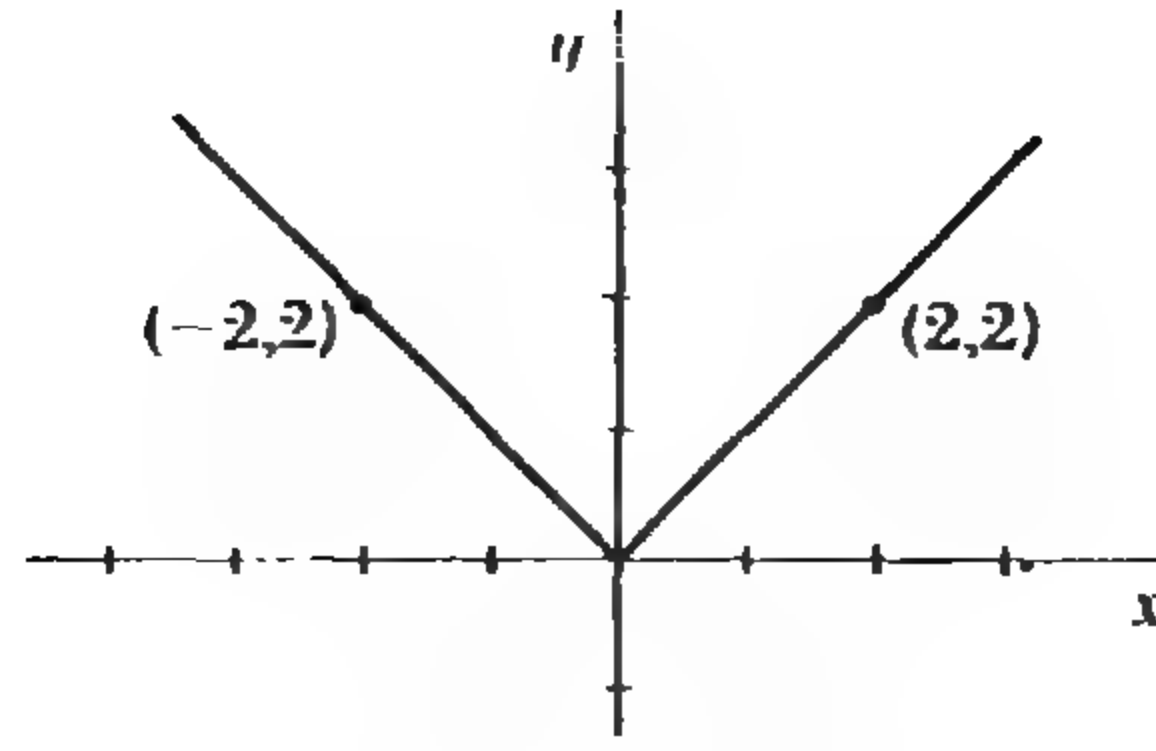
هذه ستناقش في الفصلين السادس والسابع .

التناظر الذى يخصص لكل عدد x قيمته المطلقة هو دالة :

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0. \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

الشكل البياني لدالة القيمة المطلقة هو الشكل البياني للمعادلة $y = |x|$ ، الموضح فى شكل ٢ - ٧ . الشكل يتكون من ذلك الجزء للخط المستقيم $y = x$ الواقع على يمين محور y وذلك الجزء للخط المستقيم $y = -x$ الواقع على يسار محور y .

دالة مفيدة أخرى هي تلك التى تدع كل x يناظرها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوى x . هذه الدالة تسمى دالة أكبر عدد صحيح ، والرمز لها هو $[x]$ (يقرا «قوس x ») ، أى أن ، $[x] =$ أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوى x .

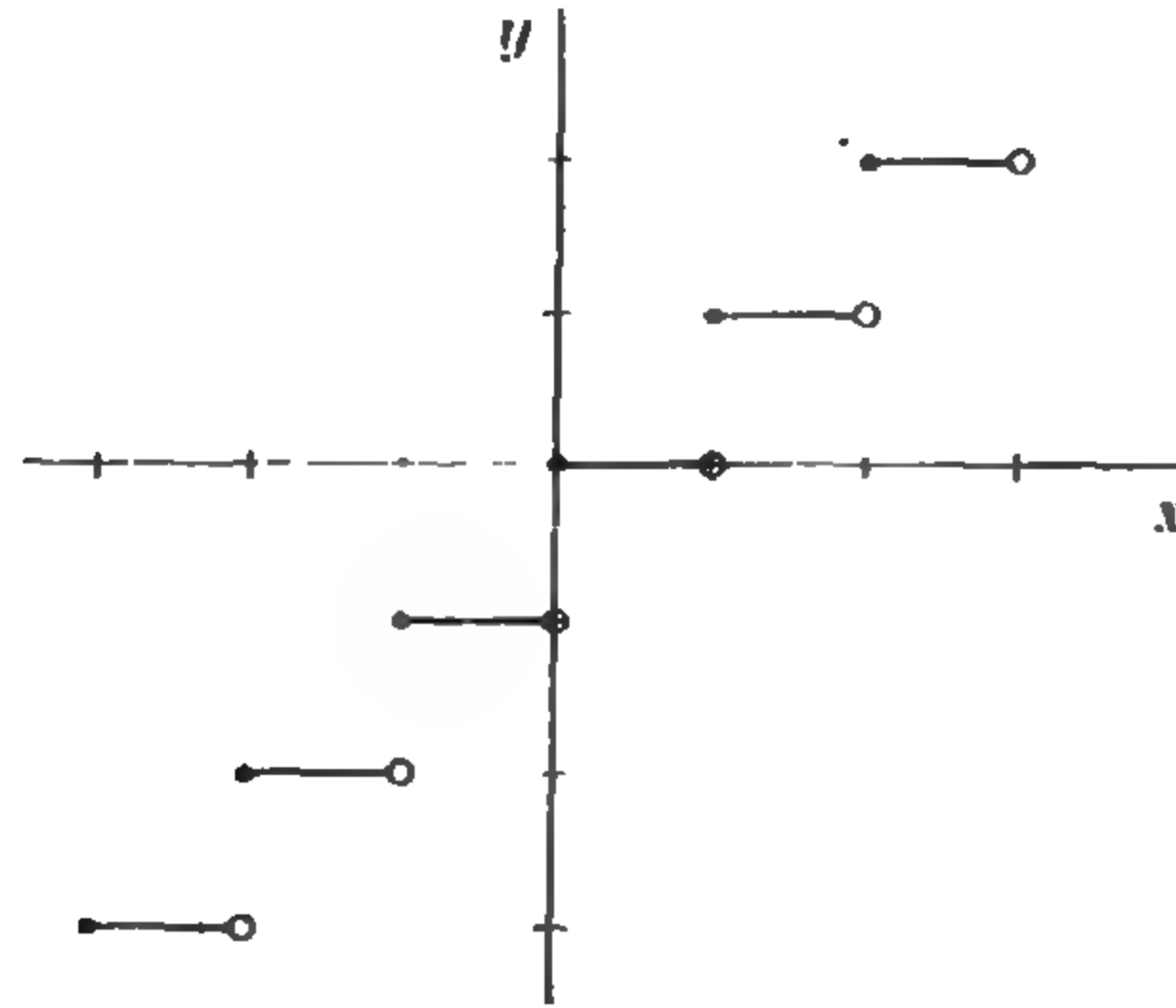


شكل ٧-٢ الشكل البياني للمعادلة $y = |x|$

فمثلاً ، $[-\pi] = -4$ ، $[11] = 11$ ، $[7.4] = 7$. لتخطيط الشكل البياني لـ $y = [x]$ ، نرى أن

$$y = [x] = \begin{cases} -1 & \text{if } -1 \leq x < 0, \\ 0 & \text{if } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{if } 1 \leq x < 2, \\ 2 & \text{if } 2 \leq x < 3, \end{cases}$$

الشكل البياني هو متسلسلة من قطع مستقيمة أفقية مرتبة كسلالم (شكل ٨ - ٢) . النقاط والدوائر تشير إلى أن النقطة الطرفية اليسرى لكل قطعة هي جزء من الشكل البياني لكن النقطة الطرفية اليمنى لا تكون جزءاً من الشكل .



شكل ٨-٢ الشكل البياني لـ $y = [x]$

مسائل

١ - أثبت أن الشكل البياني لدالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى هي خط مستقيم .

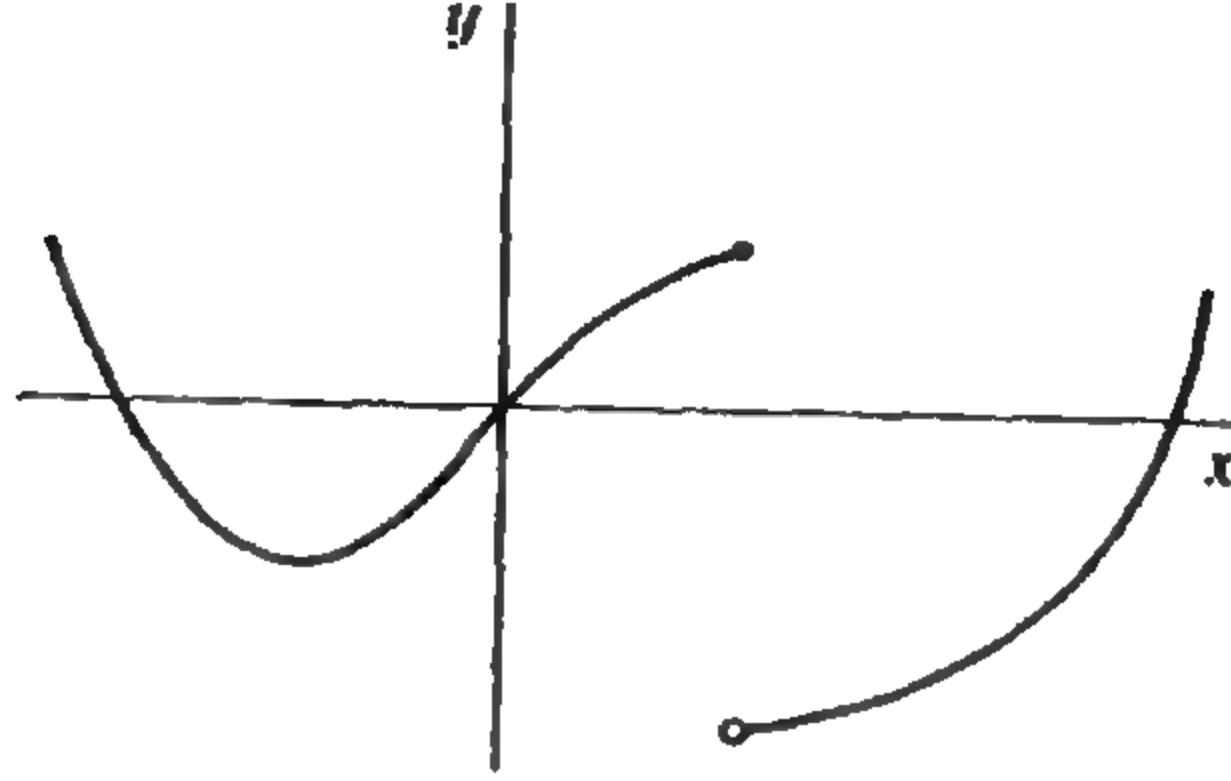
٢ - ماهو الشكل البياني لدالة ثابتة ؟ لدالة من الدرجة الثانية ؟

خطط الشكل البياني لكل من الدوال الآتية :

٣ - $f(x) = |-x/2|$ ٤ - $f(x) = |x-3|$ ٥ - $u(x) = |x+4| + 2$ ٦ - $p(x) = |1/x|$

٧ - $G(t) = t/|t|$ ٨ - $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$ ٩ - $f(x) = x - |x|$ ١٠ - $h(x) = x|x|$

- ١١ - إذا كانت $f(x) = -\frac{1}{2}(x+3)$ ، خطط الشكل البياني لكل من $y = f(x)$ ، $y = |f(x)|$.
- ١٢ - إذا كانت $f(x) = x^2 - 3$ ، خطط الشكل البياني لكل من $y = f(x)$ ، $y = |f(x)|$.
- ١٣ - إذا كانت f هي الدالة التي شكلها البياني هو المرسوم في شكل ٢-٩ ، فارسم المنحنى $y = |f(x)|$.



شكل ٢-٩

- ١٤ - أوجد دالة f حيث العلاقة $|f(x)| = f(|x|)$ لا تكون صحيحة لكل x .
- ١٥ - أوجد دالة f حيث $|f(x)| = f(|x|)$ لكل x .
- ١٦ - خطط الشكل البياني لـ $|y| = x^2$. إذا كانت $f(x) = x^2$ أو كانت $f(x) = -x^2$ ، فإن $|f(x)| = x^2$. أوجد دالة أخرى f بحيث أن $|f(x)| = x^2$.
- ١٧ - حل المعادلة $[x] = 6$.
- ١٨ - حل المعادلة $x - [x] = \frac{1}{2}$.
- ١٩ - أثبت أن $0 \leq x - [x] < 1$ لكل x .

خطط الشكل البياني لكل من الدوال الآتية :

$$g(x) = [2x] \quad ٢٠ \quad g(x) = 2[x] \quad ٢١ \quad f(x) = x - [x] \quad ٢٢$$

$$g(t) = t + [t] \quad ٢٣ \quad g(x) = [x]^{-1} \quad ٢٤$$

- ٢٥ - إذا كانت $p(x)$ هي أجرة البريد المطلوبة لارسال خطاب وزنه x oz (أنظر مسألة ٢٣ ، بند ٢-٢) ، أوجد صيغة لـ $p(x)$ بدلالة x .

- ٢٦ - دالة الإشارة يرمز لقيمتها عند x بالرمز $\text{sgn } x$ وتعرف بـ

$$\text{sgn } x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

خطط الشكل البياني للدالة ووضح أن $|x| = x \text{sgn } x$. (إرشاد : اعتبر الحالات

$$x > 0, x = 0, x < 0$$

- ٢٧ - العدد الصحيح a يقال إنه عامل قسمة للعدد الصحيح b إذا كان يوجد عدد صحيح c بحيث أن $b = ac$. فمثلا عوامل القسمة للعدد 6 ، هي $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ لكل عدد صحيح موجب

x ، دع $d(x)$ عدد عوامل القسمة الموجبة لـ x . مثال ذلك ، $d(6) = 4$ ، $d(7) = 2$. ما هو نطاق الدالة d ؟ خطط الشكل البياني لـ d عند $1 \leq x \leq 16$.

٢٨ - أى عدد صحيح p لا يساوى صفرا يختلف عن ± 1 وعوامل القسمة له هي فقط $\pm 1, \pm p$ يسمى عددا أوليا . لكل عدد حقيقي $x \geq 0$ ، دع $\pi(x)$ ترمز إلى عدد الأعداد الأولية الموجبة الأقل من أو تساوى x . مثال ذلك $\pi(12.7) = 5$ ، $\pi(5) = 3$. خطط الشكل البياني للدالة π عند $0 \leq x \leq 25$.

٢-٤

تركيبات الدوال

لتكن f, g الدالتين المعرفتين بـ

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 3x + 1$$

العبارة $x^2 + 3x + 1$ المكونة من حاصل جمع $f(x), g(x)$ تعرف دالة ثالثة F .

$$F(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x + 1$$

ولدينا

$$F(2) = f(2) + g(2) = 4 + (6 + 1) = 11,$$

$$F(-1) = 1 + (-3 + 1) = -1,$$

$$F(a) = f(a) + g(a) = a^2 + 3a + 1.$$

الدالة F تسمى حاصل جمع الدالتين f, g ويرمز لها بالرمز $f + g$

بنفس الطريقة يمكن تعريف حاصل جمع أى دالتين f, g . الفرق والضرب والقسمة للدالتين f, g تعرف كالدوال G, P, Q حيث

$$G(x) = f(x) - g(x),$$

$$P(x) = f(x)g(x),$$

$$Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

أيضا نكتب $G = f - g, P = fg, Q = f/g$. فى كل حالة نطاق الدالة المكونة هو تقاطع نطاقى f, g اذ أن كلا من الدالتين f, g يجب أن تكون معرفة . وعلاوة على ذلك ، دالة خارج القسمة لا تكون معرفة لأى x حيث المقام $g(x)$ يساوى صفرا . عندما $g(x) = 3x + 1, f(x) = x^2$ ، قيم هذه الدوال عند x هي

$$F(x) = (f + g)(x) = x^2 + (3x + 1),$$

$$G(x) = (f - g)(x) = x^2 - (3x + 1),$$

$$P(x) = (fg)(x) = x^2(3x + 1),$$

$$Q(x) = \frac{f}{g}(x) = \frac{x^2}{3x + 1}, \quad x \neq -\frac{1}{3}.$$

اعتبر ثمانية الدالتين $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x + 1$ بما أن $g(2) = 7$ فإن

$$f(g(2)) = f(7) = 49$$

$$f(g(-1)) = f(-2) = 4, \quad \text{بالمثل،}$$

$$f(g(a)) = f(3a + 1) = (3a + 1)^2. \quad \text{و}$$

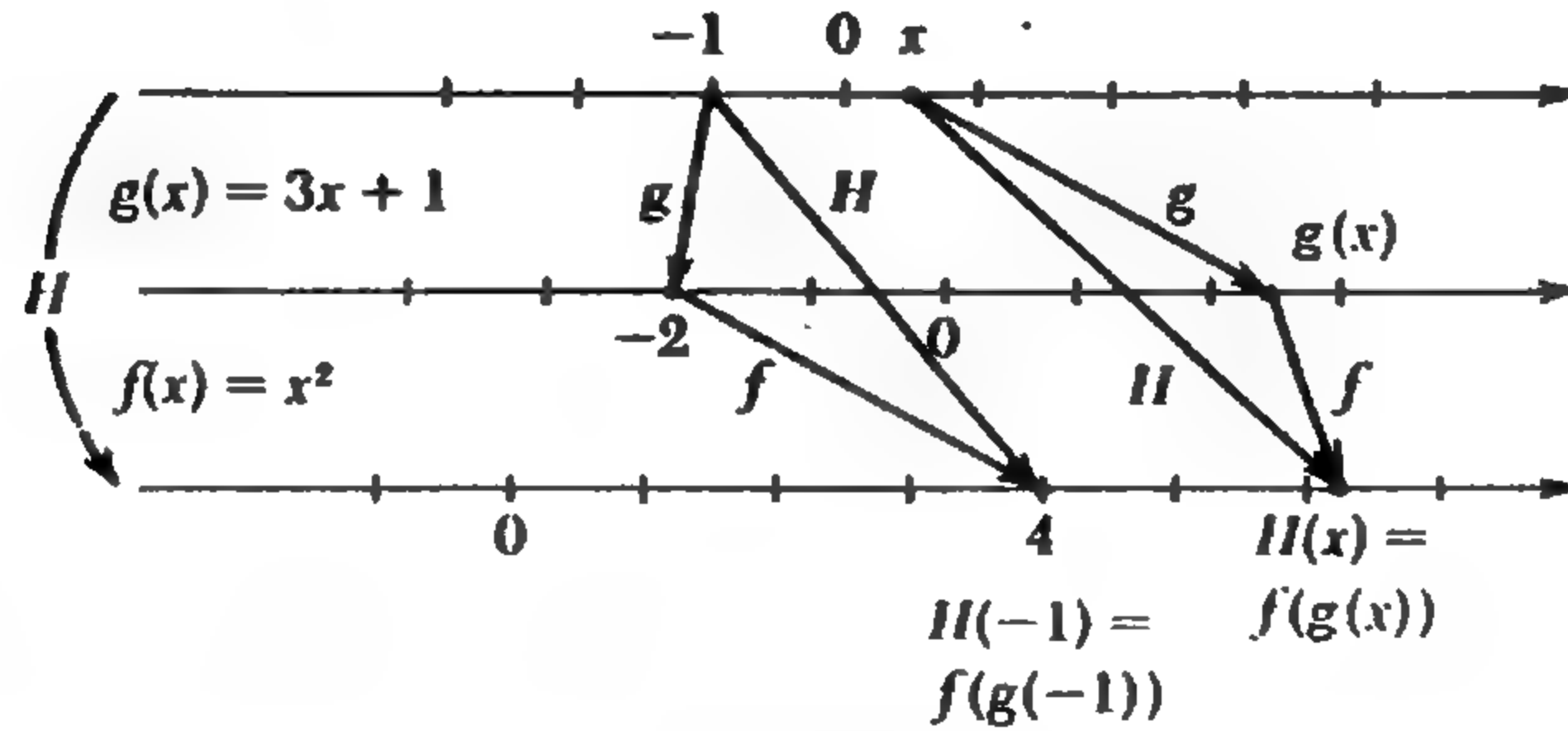
ويكون من المعقول أن نتحدث عن الدالة H المعرفة بـ

$$H(x) = f(g(x)) = f(3x + 1) = (3x + 1)^2$$

هذه الدالة تسمى مزيج الدالة f بالدالة g . مزيج الدالة g بالدالة f هو الدالة K المعرفة بـ

$$K(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 3x^2 + 1$$

الشكلان للدالتين g و f الممثلان لشكل ٢ - ١ يمكن الجمع بينهما للحصول على شكل لدالة المزيج H . الخطان الأول والثاني في شكل ٢ - ١٠ يكونان الرسم البياني لـ g ، والثاني والثالث الرسم البياني لـ f . الخطان الأول والثالث يكونان الرسم البياني للمزيج $H(x) = f(g(x))$.



شكل ٢ - ١٠

الرسمان البيانيان لـ f و g يركبان لتكوين الرسم البياني لـ $H: H(x) = f(g(x))$

بوجه عام، يمكن تكوين المزيج H لـ f بـ g لأي دالتين g و f أي $H(x) = f(g(x))$. لكن H ستكون معرفة فقط لقيم x حيث العبارة $f(g(x))$ يكون لها معنى تلك x هي الـ x 's في نطاق g التي تجعل $g(x)$ بدورها تقع في نطاق f . مثال ذلك، إذا كانت

و $g(x) = x - 3$ و $f(x) = \sqrt{3}$ ، فإن $H(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x-3}$ ويكون نطاق H هو فئة جميع $x \geq 3$.

لقد ناقشنا خمس طرق هامة لتكوين دوال جديدة من دوال قديمة . ويتكرر استخدامها يمكن بناء دوال معقدة من عدد قليل من الدوال البسيطة . مثال ذلك ، العبارة

$$\left[\frac{x(6x-1)}{3} + 5 \right] (x^2 + \sqrt{2}x)$$

يمكن اعتبارها مكونة من ثوابت و x بتكرار الجمع والطرح والضرب والقسمة . لكن الاستخدام الرئيسي لهذه العمليات هو العكس تماما . يمكننا اعتبار دالة معقدة كأنها مركبة من دوال أبسط . فيما بعد سنرى في هذا الفصل كيف تبسط وجهة النظر هذه عملنا .

مسائل

- ١- إذا كانت $g(x) = x^2 + 1$ و $f(x) = 3 - 2x$ فأوجد $(f+g)(2)$ ، $(f-g)(2)$ ، $(fg)(2)$ ، $\frac{f}{g}(2)$ ، $f(g(2))$ ، $g(f(2))$
- ٢- إذا كانت $g(x) = x^2 - 5x + 1$ و $f(x) = 4x - 3$ فأوجد :
(أ) $f + g$ ، (ب) $f - g$ ، (ج) fg ، (د) f/g (هـ) مزيج f بـ g ، (و) مزيج g بـ f .
- ٣- كرر مسألة ٢ حيث $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2 - 2$
- ٤- كرر مسألة ٢ حيث $f(x) = 1/(x+1)$ و $g(x) = (1-x)/x$
- ٥- كرر مسألة ٢ حيث $f(x) = x/(3x+2)$ و $g(x) = 1/x^2$
- ٦- إذا كانت $f(x) = x^2 - 3x$ ، فأوجد كلا من الدوال الآتية واعط نطاقها
(أ) $G(x) = \sqrt{f(x)}$ (ب) $F(u) = \frac{f(u) - f(6)}{u - 6}$ (جـ) $g(x) = f(f(x))$
- ٧- دع $g(x) = x^2 - 1$ و $f(x) = \sqrt{1+x}$. أثبت أن $g(f(x)) = x$ لكل x في نطاق f . هل $f(g(x)) = x$ لكل x في نطاق g ؟
- ٨- إذا كانت $f(x) = x^3$ ، فأوجد دالة g . بحيث أن $f(g(x)) = x$ لجميع x .
- ٩- إذا كانت $f(z) = (z+1)/(z-3)$ ، فأوجد دالة g بحيث أن $f(g(z)) = z$ لما يكاد يكون جميع قيم z . ما قيم z التي يجب استبعادها ؟
لكل مما يأتي ، أوجد دالتين g و f بحيث أن F يمكن التعبير عنها كحاصل جمع g و f . هل يمكن اجراء ذلك بأكثر من طريقة واحدة ؟

$$F(x) = x^4 + 1/x - 3x^2 + 5 \quad - ١١$$

$$F(x) = x^3 + 3x \quad - ١٠$$

$$F(x) = x \quad - ١٣$$

$$F(t) = t^2 + 6 \quad - ١٢$$

لكل مماياتي ، أوجد دالتين g و f بحيث أن F يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب أو خارج قسمة g و f . هل يمكن اجراء ذلك بأكثر من طريقة واحدة ؟

$$F(x) = x\sqrt{x^2+1} \quad - ١٤ \quad F(t) = (t-1)/t \quad - ١٥ \quad F(x) = 1/\sqrt{2x^3-1} \quad - ١٦$$

$$F(x) = x^3 + 5x^2 \quad - ١٧ \quad F(u) = u^2 + 8u + 15 \quad - ١٨ \quad F(x) = x + 1/x \quad - ١٩$$

$$F(x) = 6. \quad - ٢٠$$

لكل مما يأتى ، أوجد دالتين g و f بحيث أن F يمكن التعبير عنها كمزيج f بـ g .

$$F(x) = \sqrt{2x+8} \quad - ٢١ \quad F(z) = \left(\frac{z}{9-z^2}\right)^3 \quad - ٢٢$$

$$F(x) = 2(x+1)^2 - 3(x+1) + 5 \quad - ٢٣ \quad F(x) = \frac{3}{x^3} + \frac{\sqrt{2}}{x^2} - \frac{7}{x} \quad - ٢٤$$

٢٥ - إذا كانت

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ \frac{1}{2}, & t = 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

فخطط الشكل البيانى للدالة G المعرفة بـ $G(t) = H(t) - H(t-1)$ أثبت أن :
 $H(x) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} x)$ (أنظر المسألة ٢٦ ، بند ٢ - ٣) .

٢٦ - اثبت أن $x^3 + 3x^2 - 7x + 5$ يمكن تكوينها من ثوابت و x بتكرار الجمع والطرح والضرب .

٢٧ - اثبت أن $\left(x + \frac{x^2 - \sqrt{2}}{x+1}\right)^2 + 6x$ يمكن تكوينها من ثوابت و x بتكرار الجمع والطرح والضرب والقسمة .

٢٨ - إذا كانت $f(x+y) = f(x) + f(y)$ و $f(x) = bx + c$ لكل x و y ، هل يمكن أن تكون c و b اختياريتين ؟

٢ - ٥

مقدمة للنهايات

خذ فى الاعتبار الدالة $f(x) = 2x + 1$ نسأل سؤاليين :

١ - ما قيمة f عندما $x = 1$ ؟

٢ - هل يوجد عدد تكون $f(x)$ قريبة منه لكل x قريبة من ، ولكن لاتساوى ، 1 ؟

الإجابة عن السؤال الأول سهلة . هي $f(1) = 3$. للحصول على اجابة للسؤال الثانى ، سنحسب $f(x)$ لقيم متعددة لـ x قريبة من ، ولكن لاتساوى ، 1 ثم نحاول تخمين العدد . الجدول يوحى بأنه عندما تكون قريبة من ، 1 سواء أكانت أقل قليلا أو أكبر قليلا من 1 ، فإن $f(x)$ تكون قرب 3 ، وأن كلما كانت x أقرب الى 1 ، فإن $f(x)$ تكون أقرب إلى 3 . وفى الواقع إذا كانت x قريبة من 1 فإن

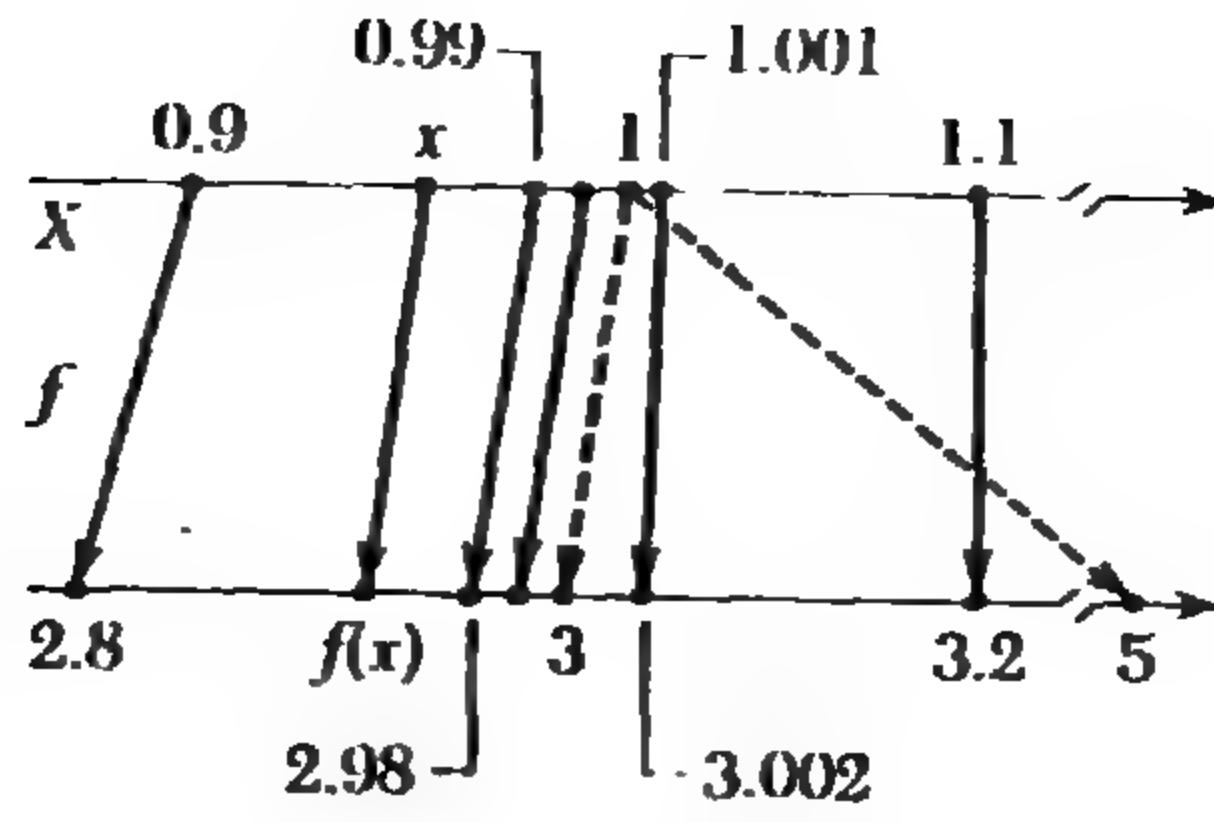
$2x$ يجب أن تكون قريبة من 2 ، $2x + 1$ قريبة من 3 . علاوة على ذلك ، نشعر بديها أن باختيار x قريبة قريبا كافيا من 1 ، يمكننا أن نجعل $f(x)$ قريبة من 3 كيفما نشاء ، وليكن الى واحد من مليون أو واحد من بليون أو حتى أقرب من ذلك .

x	$f(x)$
0.5	2
0.9	2.8
0.99	2.98
0.999	2.998
1.5	4
1.1	3.2
1.001	3.002
1.00001	3.00002

بسبب هذه الملاحظات الثلاثة ، وربما بالأكثر بسبب الملاحظة الأخيرة ، سنكون متأكدين تماما أن 3 هو العدد الذي نتطلع اليه . لنشير الى ذلك نكتب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ (تقرأ نهاية f عند 1 هي 3 أو نهاية f عندما x تقترب من 1 هي 3) . أيضا عادة نكتب " $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$ " كطريقة مختصرة للقول $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$ ، حيث f هي الدالة المعرفة بـ $f(x) = 2x + 1$.

x	x^2
2.6	6.76
2.9	8.41
2.99	8.9401
2.997	8.982009
3.3	10.89
3.05	9.3025
3.01	9.0601
3.0001	9.00060001

كمثال آخر ، دعنا نوجد $\lim_{x \rightarrow 3} x^2$. هذا يعنى أننا نوجد العدد ، إذا وجد ، الذى تكون x^2 قريبة منه عندما تكون x قريبة من ، لكن لاتساوى ، 3 ، بصرف النظر عما إذا كانت x أقل قليلا من 3 أو أكبر قليلا من 3 . من الطبيعى ، عندما $x = 3$ تكون $x^2 = 9$ ، وقد تكون 9 هى أيضا الجواب لسؤالنا ، لكن بما أنه ليس صحيحا أن لكل دالة تكون التيجتان هما نفس النتيجة ، فأننا نعود ونعمل جدولاً ، حاسين x^2 لقيم x القريبة من ، ولكن لاتساوى ، 3 . نرى أن عندما x تكون قريبة من 3 ، سواء كانت أقل قليلا أو أكبر قليلا من 3 ، فإن x^2 تكون قرب 9 وأنه طالما كانت x أقرب الى 3 ، فإن x^2 تكون اقرب الى 9 . أيضا يبدو من القول أنه باختيار x قريبا قريبا كافيا من 3 ، يمكننا أن نجعل x^2 قريبة من 9 كيفما نشاء . رغم أن الشواهد تشير بشدة إلى أن $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$ إلا أنه لا يمكننا التأكيد المطلق بذلك . لقد حسبنا x^2 لقيم قليلة فقط لـ x ، وإذا واصلنا حساباتنا ، فأننا ندرك ، رغم أنه من الصعب التخيل ، أن قيم x^2 قد لاتأتى مطلقا قرب 9 الى أكثر من واحد من مليون . بهذا التحفظ فى الذاكرة ، دعنا نقل أن $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$. نفس التحفظ ينطبق أيضا على استنتاجنا السابق . $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$.



شكل ١١-٢

عندما تكون x قريبة من 1 تكون $f(x)$ قريبة من 3

في شكل ١١-٢ رسمنا الشكل التخطيطي للدالة $f(x) = 2x + 1$ في القرب من $x = 1$ (أهمل حاليا الخط المنقط من 1 الى 5). لاحظ كيف تتجمع أطراف الأسهم التي تبدأ من النقطة القريبة من $x = 1$ حول النقطة 3. هذا يوضح بالصورة أن $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$

دعنا ننظر إلى بعض الأمثلة الأخرى عن النهايات .

مثال ١ . إذا كانت g هي الدالة المعرفة بـ

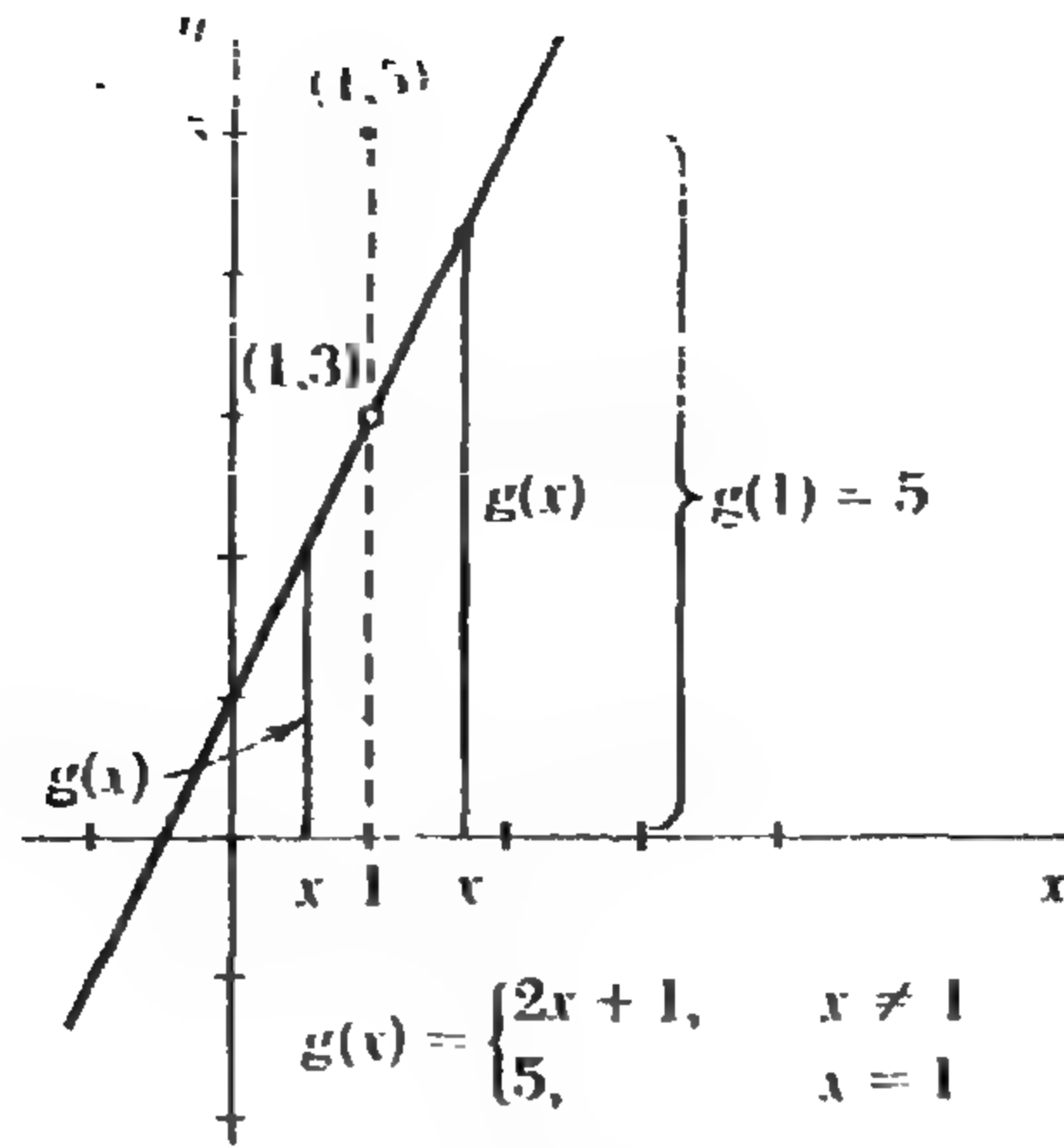
$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \neq 1, \\ 5, & x = 1, \end{cases}$$

فأوجد $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

نلاحظ أن $g(1) = 5$ ، لكن نتذكر أن هذا لا يعني شيئا بالنسبة إلى إيجاد $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$. لايجاد $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ يجب أن نحسب $g(x)$ لقيم x القريبة من 1 ، لكن لا تساوي 1 . لقيم $x \neq 1$ ، $g(x)$ لها نفس القيم مثل $f(x) = 2x + 1$ ، ولذلك فالجدول الذي حسبناه لـ $f(x)$ يستخدم على حد سواء لـ $g(x)$.

أيضا ، كما سبق ، يمكننا الاستدلال على أنه عندما تكون x قرب 1 ، تكون $2x$ قرب 2 وتكون $2x + 1$ قرب 3 . علاوة على ذلك ، نشعر بالبداية أنه باختيار x قريبة قريبا كافيا من 1 ، يمكننا أن نجعل $g(x)$ قريبة من 3 كيفما نشاء . واذن ، لكن مع التحفظات الخاصة بتأكيدنا المطلق للنتيجة يمكننا أن نقول أن $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$. من الطبيعي أنه إذا كانت $g(x)$ قريبة من 3 فهي أيضا قريبة من 3,00001 . لكن نشعر أن $g(x)$ ستأتي أخيرا أكثر قربا إلى 3 عن 3,00001 أو أي عدد آخر . هذه المرة $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) \neq g(1)$ والسؤالان ١ و ٢ بالنسبة للدالة g لهما جوابان مختلفان . الشكل التخطيطي لـ g يكون مثل الشكل لـ f (شكل ١١-٢) مع الاختلاف في أن السهم من 1 إلى 3 يستبدل من 1 إلى 5 . تحرك هذا السهم الواحد لا يؤثر على تجمع الأسهم قرب 3 . وهذا يوضح أن نهاية الدالة لا تعتمد على قيمة الدالة عند العدد موضع السؤال .

الشكل البياني لـ $g(x)$ مرسوم في شكل ١٢-٢ . لاحظ أن لقيم x القريبة من 1 ، تكون أطوال الخطوط الرأسية ، التي تمثل قيم $g(x)$ ، قريبة من 3 وهذا يكون صحيحا سواء أكانت x أقل أو أكبر



شكل ١٢-٢

عندما تكون x قريبة من 1 تكون $g(x)$ قريبة من 3 ، ولو أن $g(1) = 5$

من 1 . طول الخط الرأسى الى (1,5) ، الذى هو $g(1)$ ، ليس له تأثير على ذلك . هذا يوضح هندسيا أن نهاية الدالة لاتعتمد على قيمة الدالة عند العدد موضع السؤال .

مثال ٢ . إذا كانت $h(x) = 2x + 1, x \neq 1$ فأوجد $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$

حيث أننا فى ايجاد $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ نهتمنا قيم $h(x)$ عند x القريبة من ، لكن لاتساوى ، 1 ، فان حقيقة أن $h(x)$ غير معرفة عند 1 لاتقلقنا . مرة أخرى يمكن استعمال جدول g ونستدل كما سبق أنه عندما تكون x قريبة من تكون $2x$ ، $2x$ قريبة من 2 وتكون $2x + 1$ قريبة من 3 ، ونستنتج أن $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 3$. الشكل البيانى لـ h يكون مثل الشكل البيانى لـ g فى شكل ١٢-٢ لكن بدون النقطة عند (1,5) . واضح أن تحريك هذه النقطة الى أعلى أو أسفل أو حتى ازالتها كلية كما فعلنا هنا ، لا يؤثر على أطوال الخطوط الرأسية لـ x القريبة من 1 . النهاية تكون مستقلة عن قيمة الدالة عند العدد موضع السؤال وقد توجد حتى إذا كانت الدالة ليس لها قيمة هنالك .

مثال ٣ . أوجد $\lim_{x \rightarrow -2} 3x^2/(1 - 2x)$

عندما تكون x قريبة من -2 ، تكون x^2 قريبة من 4 وتكون $3x^2$ قريبة من 12 . أيضا تكون $2x$ قريبة من -4 . واذن تكون $3x^2/(1 - 2x)$ قريبة من $12/[1 - (-4)] = \frac{12}{5}$ علاوة على ذلك ، نشعر أن باختيار x قريبة قريبا كافيا من -2 يمكننا جعل $3x^2/(1 - 2x)$ قريبة من $\frac{12}{5}$ كيفما نشاء ، مثلا الى واحد من مليون أو حتى أكثر قريبا ، رغم أننا نواجه مشكلة تحديد الى أى قرب من -2 يجب أن تكون x لانجاز ذلك . إذن

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2}{1 - 2x} = \frac{12}{5}$$

الشكل البياني للدالة u ، حيث

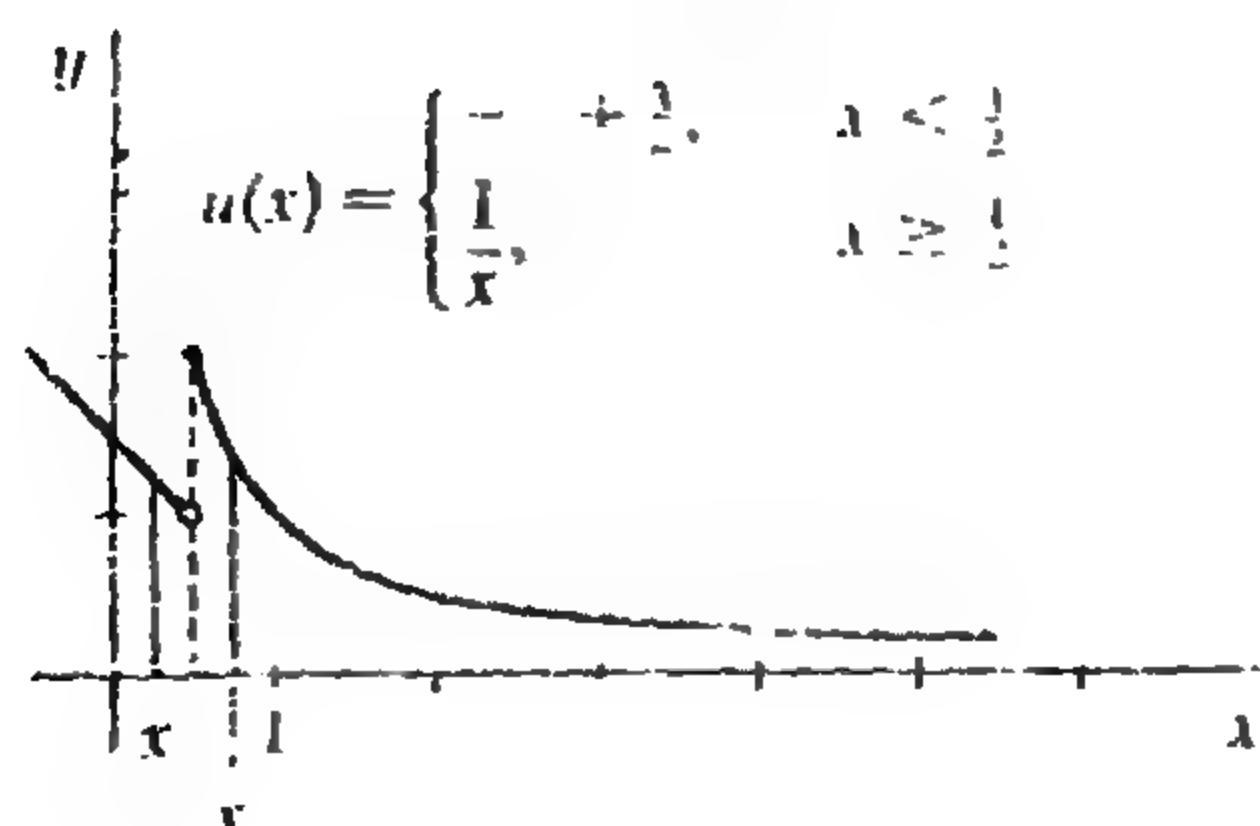
$$u(x) = \begin{cases} -x + \frac{3}{2}, & x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{x}, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

موضح في شكل ٢-١٣ ، وقيم $u(x)$ لـ x في المنطقة المجاورة لـ $\frac{1}{2}$ معطاة في الهامش .
عندما تكون x قريبة وأقل من $\frac{1}{2}$ فإن $u(x) = -x + \frac{3}{2}$ وتكون قريبة من $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$. لكن
عندما تكون x قريبة وأكبر من $\frac{1}{2}$ فإن $u(x) = 1/x$ وتكون قريبة من $1/\frac{1}{2} = 2$. الشكل البياني
أيضا يوضح سلوك الدالة . لكي تكون u لها نهاية ، يجب أن يوجد عدد واحد بحيث أن $u(x)$
تكون قريبة منه لكل x قرب $\frac{1}{2}$. حيث أن هذه ليست الحالة فإن u ليس لها نهاية عندما تقترب x
من $\frac{1}{2}$ ، أي أن $\lim_{x \rightarrow 1/2} u(x)$ لا توجد . لجميع الأعداد الأخرى a ، $\lim_{x \rightarrow a} u(x)$ توجد (أنظر شكل ٢-١٣) .

x	$u(x)$
0.4	1.1
0.49	1.01
0.4999	1.0001
0.6	1.667
0.51	1.961
0.5001	1.9996

إذا كانت x مقيدة بالقيم التي هي أقل من $\frac{1}{2}$ ، فإن u سيكون لها I كنهية . هذه معلومات
مفيدة ، ونقول « نهاية u عندما x تقترب من $\frac{1}{2}$ من أسفل (أو من اليسار) هي I ، أو « النهاية
اليسرى لـ u عند $\frac{1}{2}$ هي I » ونكتب $\lim_{x \rightarrow 1/2^-} u(x) = 1$ لنشير إلى هذا . بالمثل ، إذا كانت x مقيدة
بالقيم التي هي أكبر من $\frac{1}{2}$ ، فإن u سيكون لها العدد 2 كنهية . ونكتب $\lim_{x \rightarrow 1/2^+} u(x) = 2$ لنشير إلى
أن النهاية اليمنى لـ u عند $\frac{1}{2}$ هي 2 ، أو « النهاية لـ u عندما x تقترب من $\frac{1}{2}$ من أعلى (أو من
اليمين) هي 2 » . مثالنا يوضح أن الدالة يمكن أن يكون لها نهاية بمعنى ونهاية يسرى لكن ليس له
نهاية . بالرجوع إلى الأمثلة السابقة في هذا البند ، نرى أن

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 &= 9, & \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 &= 9, \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) &= 3, & \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) &= 3. \end{aligned}$$



شكل ٢-١٣

$$\lim_{x \rightarrow 1/2^-} u(x) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1/2^+} u(x) = 2$$

لكن $\lim_{x \rightarrow 1/2} u(x)$ لا توجد .

لاى دالة f ، اذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجودة ، فانه بالمثل أيضا تكون النهاية اليمنى والنهاية اليسرى وكلاهما يساويان $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. بالعكس ، اذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ كلاهما موجودتين ومتساويتين فان $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ تكون موجودة ولها نفس القيمة . عمليا ثبت عادة وجود النهايات بهذه الطريقة .

مثال ٤ اوجد $\lim_{s \rightarrow 0} F(s)$ ، حيث

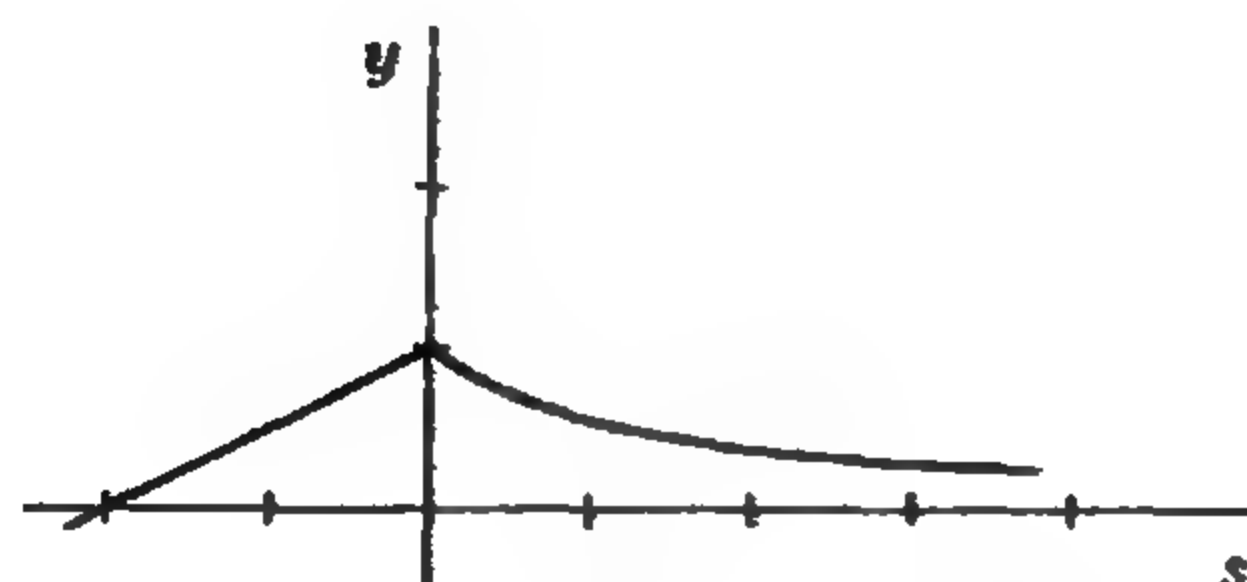
$$F(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}s + 1, & s < 0, \\ \frac{1}{s+1}, & s \geq 0. \end{cases}$$

حيث أن وصف F يتغير عند العدد حيث النهاية مطلوب ايجادها ، فاننا منحدها ما اذا كانت F لها نهاية بايجاد نهايتها اليمنى واليسرى . لدينا

$$\lim_{s \rightarrow 0^-} F(s) = \lim_{s \rightarrow 0^-} (\frac{1}{2}s + 1) = 1,$$

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} F(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{s+1} = 1.$$

النهاية اليمنى والنهاية اليسرى متساويتان ، وعليه فالنهاية موجودة وتساوى 1 . الشكل البياني لـ F مرسوم فى شكل ٢ - ١٤ .

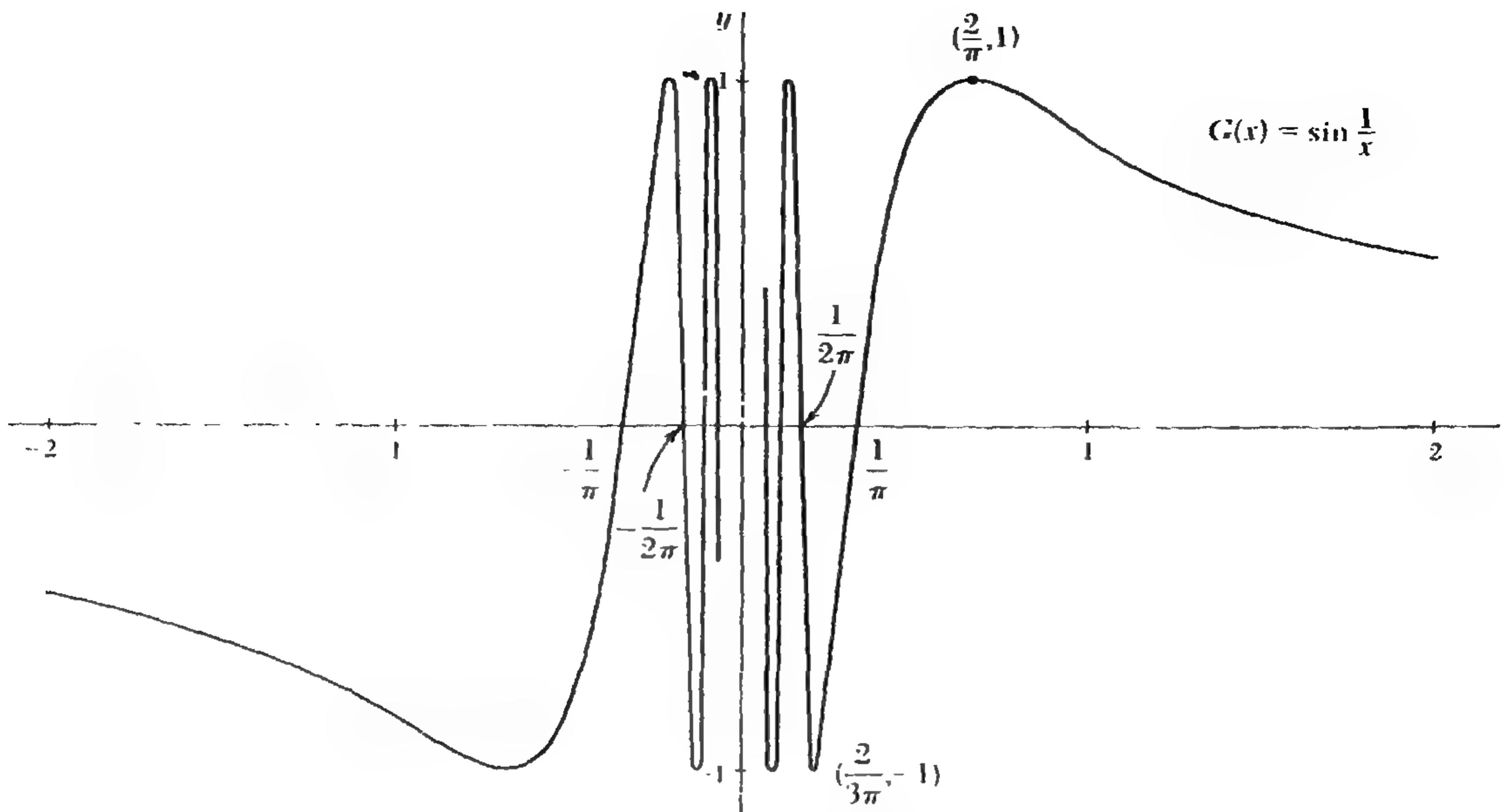


$$F(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}s + 1, & s < 0 \\ \frac{1}{s+1}, & s \geq 0 \end{cases}$$

شكل ٢ - ١٤

$$\lim_{s \rightarrow 0} F(s) = 1 \quad \text{وإن} \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} F(s) = 1 = \lim_{s \rightarrow 0^+} F(s)$$

توجد كيفيات عديدة لفشل الدالة أن يكون لها نهاية عند عدد ما . الشكل البياني للدالة G المعرفة بـ $G(x) = \sin(1/x)$ مخطط فى شكل ٢ - ١٥ . الشكل البياني يتذبذب بسرعة أكثر فأكثر بين 1 و -1 عندما تقترب x من 0 . حتى للشخص غير الملم بحساب المثلثات واضح من الشكل البياني أن G ليس لها نهاية عند 0 . فى أى فترة مفتوحة تحتوى نقطة الأصل ، مهما كانت صغيرة ، توجد x 's يكون عندها $\sin(1/x)$ أى عدد بين 1 و -1 ، إذن لا يوجد عدد واحد حيث $\sin(-1/x)$ تكون دائماً قريبة منه . الدالة ليس لها حتى نهاية يمينى أو نهاية يسرى عند 0 .



شكل ١٥-٢

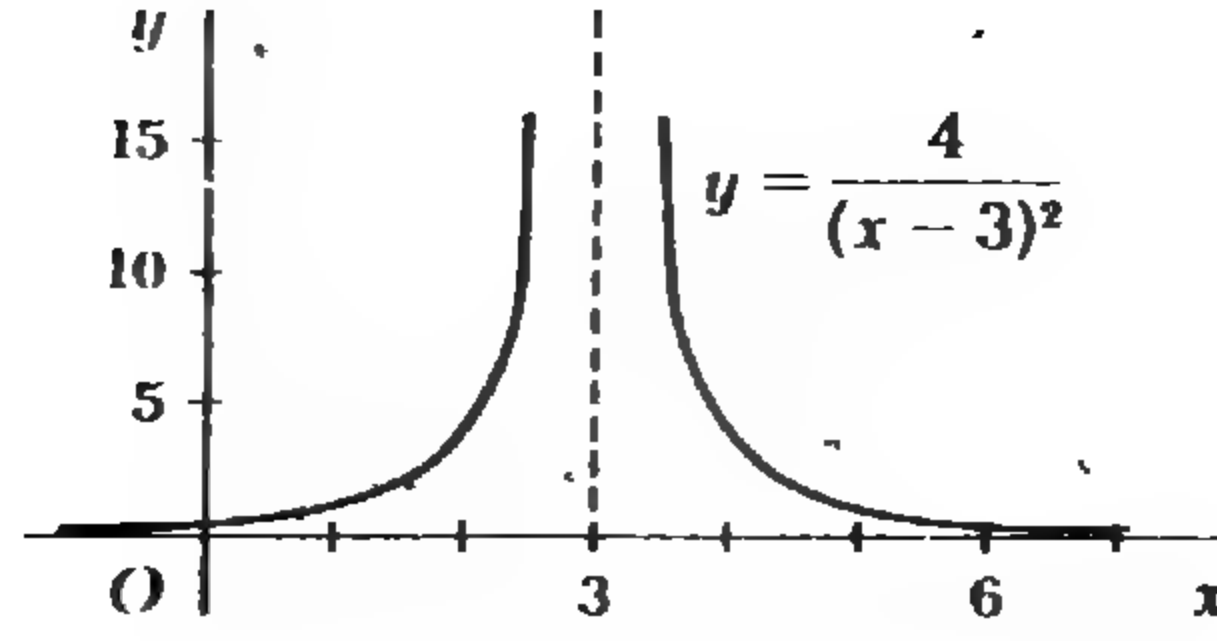
$\sin(1/x)$ ليس لها لانهائية يمنية ولا نهائية يسرى عند نقطة الأصل

عندما تكون x قريبة من 3 ، فان $4/(x-3)^2$ تكون كسرا مقامه قريب من 0 لكن بسطه ليس كذلك . هذه الكسور تكون موجبة وكبيرة ، فمثلا $4/(3.01-3)^2 = 40,000$. عندما تقترب x من 3 فان $4/(x-3)^2$ تصبح أكبر فأكثر . علاوة على ذلك ، بأخذ أى عدد $N > 0$ ، يمكننا باختيار x قريبة قريبا كافيا من 3 أن نجعل $4/(x-3)^2 > N$ أى أنه لا يوجد عدد حيث $4/(x-3)^2$ تكون دائما قريبة منه عندما تكون x قريبة من 3 ، وإذن $\lim_{x \rightarrow 3} 4/(x-3)^2$ لا توجد . للدلالة على أن $4/(x-3)^2$ تصير أكبر من أى عدد معطى عندما تقترب x من 3 نقول « نهاية $4/(x-3)^2$ عندما تقترب x من 3 لانهاية » ونكتب $\lim_{x \rightarrow 3} 4/(x-3)^2 = \infty$. بالرغم من وجود رمز النهاية ، فان الدالة المعروفة بـ $4/(x-3)^2$ ليس لها نهاية عند 3 . رمز اللانهائية ∞ لا يمكن اعتباره كعدد متميز . استخدامه فى التعبير لا يعنى أكثر مما ذكرنا ، وهو أن $4/(x-3)^2$ تصبح كبيرة عندما تقترب x من 3 . بالمثل $\lim_{x \rightarrow 0} (-1/x^2) = -\infty$ تعنى أن $-1/x^2$ تكون سالبة وكبيرة لقيم x القريبة من 0 . الشكل البياني $4/(x-3)^2$ مخطط فى شكل ١٦-٢ . المنحنى له خطان تقاربان ، هما المحور السينى والخط المستقيم $x = 3$.

مثال ٥ . أوجد $\lim_{z \rightarrow 4} [(1/z - 1)/(z - 4)]$.

$$v(z) = \frac{1/z - 1}{z - 4}$$

دع



شكل ٢-١٦

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4}{(x-3)^2} = \infty$$

عندما تكون z قريبة من 4 ، المقام يكون قريباً من صفر ، لكن الحال هنا ليس كما هو مع $4/(x-3)^2$ إذ أن $v(z)$ لا يمكن أن يقال إنها كبيرة لهذه الـ z 's ، لأن هذه المرة البسط هو أيضاً قريب من الصفر . عدد صغير ما مقسوم على عدد صغير آخر يمكن أن يكون صغيراً (فمثلاً ، $0.0001 / 0.1 = 0.001$) أو كبيراً (فمثلاً ، $0.1 / 0.0001 = 1000$) أو عدداً معتدلاً (فمثلاً ، $0.05 / 0.005 = 10$) . من غير الممكن أن البسط والمقام كلاهما صغير . لايجاد $\lim_{z \rightarrow 4} v(z)$ نغير عن $v(z)$ بصورة تتجنب هذه الصعوبة . لدينا

$$v(z) = \frac{1/z - 1/4}{z - 4} = \frac{(4-z)/4z}{z - 4} = \frac{-(z-4)}{4z(z-4)}$$

وحيث أننا نهتم بقيم $v(z)$ عندما تكون z قريبة من ولكن لا تساوي 4 ، فالعامل $z - 4$ يمكن شطبه ، ويكون $v(z) = -1/4z$ حيث $z = 4$. من السهل ايجاد النهاية لـ $v(z)$ في هذه الصورة ، لأنه عندما تكون z قريبة من 4 ، تكون $4z$ قريبة من 16 وتكون $-1/4z$ قريبة من $-1/16$. إذن

$$\lim_{z \rightarrow 4} \frac{1/z - 1/4}{z - 4} = \lim_{z \rightarrow 4} \left(-\frac{1}{4z} \right) = -\frac{1}{16}$$

نهايات الكسور حيث البسط والمقام كلاهما يقتربان من الصفر تظهر كثيراً في حساب التفاضل .

مثال ٦ إذا كان $f(y) = (\sqrt{y} - 3)/(y - 9)$ فأوجد $\lim_{y \rightarrow 9} f(y)$

مرة أخرى كل من البسط والمقام يقترب من الصفر ، لكن حيلة تستحق الاستذكار تبسط التعبير بحيث يمكن إيجاد النهاية . نزيل الجذر في البسط بضرب البسط والمقام في $\sqrt{y} + 3$:

$$f(y) = \frac{\sqrt{y} - 3}{y - 9} = \frac{\sqrt{y} - 3}{y - 9} \frac{\sqrt{y} + 3}{\sqrt{y} + 3}$$

$$\text{إذا كانت } y \neq 9 \text{ ،} \quad = \frac{y - 9}{(y - 9)(\sqrt{y} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{y} + 3}$$

عندما تكون y قريبة من 9 ، \sqrt{y} تكون قريبة من 3 ويكون

$$\lim_{y \rightarrow 9} f(y) = \lim_{y \rightarrow 9} \frac{\sqrt{y} - 3}{y - 9} = \lim_{y \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{y} + 3} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}$$

بسبب أن المسألة تستلزم أن $y \neq 9$ أمكننا إيجاد $\lim_{y \rightarrow 9} f(y)$ من العبارة $1 / (\sqrt{y} + 3)$

في هذا المثال ، كما في مسائل كثيرة على النهايات من الصواب أنه يمكننا التعويض بـ 9 عن y في $1 / (\sqrt{y} + 3)$ أو نحصل على نفس النتيجة $\frac{1}{6}$. إلا أننا نحذر القارئ أن موضوع إيجاد النهاية أكبر من أن نعوض بـ a عن x لإيجاد $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. إن إدراك المفارقة بين $f(a)$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ أمر ضروري لفهم حساب التفاضل .

لبعض الدوال لا يكون واضحاً مطلقاً وجود النهاية ، وقد نحتاج إلى براعة فائقة لتحديد الموقف . إحدى هذه النهايات هي $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x$ عندما تكون x قريبة من الصفر ، فإن $\log x$ تكون كبيرة وسالبة ، ومن الصعب تقدير مقدار $x \log x$ بدون دراسة أعمق (مسألة ٦٩) . إحدى أكثر النهايات أهمية في الرياضيات هي $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}$ مرة أخرى ، ليس من الواضح مباشرة ما إذا كانت توجد نهاية . جدول لقيم x قرب 0 معطى في الهامش . الشواهد تشير إلى وجود نهاية قيمتها تقع بين 2.717 و 2.720 ، هذا التخمين صحيح ، لكن البرهان ليس سهلاً . سنعطى برهاناً في الفصل السابع وفي الفصل السادس عشر مثبت أن القيمة التقريبية للنهاية 2.71828.

x	$(1 + x)^{1/x}$
-0.1	2.868
-0.01	2.732
-0.001	2.720
0.1	2.594
0.01	2.705
0.001	2.717

مسائل :

- ١- بدون أن تبسط جبرياً عبارة $v(x)$ في مثال ٥ ، كون جدولاً لقيم $v(z)$ عند $z = 3.9, 3.99, 4.1, 4.01$ لتحقيق استدلالنا العقلاني أن $\lim_{z \rightarrow 4} v(z) = -\frac{1}{16}$
- أوجد النهايات الآتية بعمل جدول للقيم (جدول الجذور والمقلوبات يمكن استخدامها لتبسيط الحسابات) .

$$\lim_{t \rightarrow \sqrt{2}} (t^2 - 2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} (1 - 3x) = -11$$

$$\lim_{u \rightarrow 4^+} \sqrt{u + 2} = \sqrt{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x - 3}{x + 4} = -\frac{7}{6}$$

- ٨- إذا كانت $f(x) = 6$ ، فاوجد $\lim_{x \rightarrow 3} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

أوجد النهايات الآتية

$$\begin{array}{llll}
 \lim_{y \rightarrow 2} (y^3 - 10y - 8) & - ١١ & \lim_{x \rightarrow 3} (1 + 4x - \frac{1}{2}x^2) & - ١٠ \\
 \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 4)(x - \frac{1}{2}) & - ١٤ & \lim_{x \rightarrow c} (3x + 1) & - ١٣ \\
 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{3z + 2}{z^2 - 2z - 5} & - ١٧ & \lim_{x \rightarrow a} (ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4) & - ١٦ \\
 \lim_{x \rightarrow 13} \sqrt{x - 10} & - ٢٠ & \lim_{x \rightarrow b} \left(\frac{x}{x - 4} + b \right) & - ١٩ \\
 \lim_{x \rightarrow -1} (3x + \frac{2}{3}) \sqrt{x + 10} & - ٢٣ & \lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{5 - 3y - y^2} & - ٢٢ \\
 \lim_{u \rightarrow x} \frac{u - 1}{u^3 - xu + b} & - ٢٦ & \lim_{x \rightarrow 5} \left[x^3 \frac{\sqrt{2x - 6}}{2(x + 3)} + (x - 1) \right] & - ٢٥ \\
 & & \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x \sqrt{x + 1}} & - ٢٤
 \end{array}$$

أوجد كلا من النهايات الآتية ، اذا كانت موجودة ، وخطط الشكل البياني للدالة المناظرة .
 اذا لم تكن النهاية موجودة ، فأوجد النهاية اليسرى والنهاية اليمنى إذا وجدت . هل النهاية تساوى
 قيمة الدالة عند العدد موضع السؤال ؟

$$f(x) = \begin{cases} -x + 6, & x \leq 3, \\ x, & x > 3; \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad - ٢٧$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x < -1, \\ x^2, & x \geq -1; \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad - ٢٨$$

$$g(t) = \begin{cases} t^2, & t < 1, \\ -2t, & t \geq 1; \end{cases} \quad \lim_{t \rightarrow 1} g(t), \lim_{t \rightarrow 0} g(t) \quad - ٢٩$$

$$h(x) = \begin{cases} x^3, & x < 2, \\ 8, & x \geq 2; \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 2} h(x), \lim_{x \rightarrow 4} h(x) \quad - ٣٠$$

$$F(x) = \begin{cases} x^3, & x < 2, \\ 0, & x \geq 2; \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 2} F(x) \quad - ٣١$$

$$f(x) = \begin{cases} -x + 6, & x < 3, \\ -1, & x = 3, \\ x, & x > 3; \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \quad - ٣٢$$

$$u(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ \frac{1}{x}, & x > 0; \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} u(x) \quad - ٣٣$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x/|x|) \quad - ٣٥ \quad \lim_{t \rightarrow 0} |t| \quad - ٣٤$$

$$- ٣٦ \quad \lim_{x \rightarrow 3/2} [x] \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} [x] \text{ ، حيث } [x] \text{ هي دالة أكبر الأعداد الصحيحة .}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - [x]) \quad - ٣٧$$

أوجد النهايات الآتية :

$$\lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^2 + 1}{(t + 3)^2} \quad - ٤٠ \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} \quad - ٣٩ \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad - ٣٨$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{(x - 1)(x + 8)^2} \quad - ٤٣ \quad \lim_{y \rightarrow 3} \frac{y + 3}{y^2 - 9} \quad - ٤٢ \quad \lim_{y \rightarrow -3} \frac{y + 3}{y^2 - 9} \quad - ٤١$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{1/x + 1}{x + 5} \quad - ٤٦ \quad \lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{(s + 1)(s - 2)} \quad - ٤٥ \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{m}{x - 1} \quad - ٤٤$$

$$\lim_{z \rightarrow 4} \frac{z^2 + 3z - 4}{z - 4} \quad - ٤٩ \quad \lim_{u \rightarrow x} \frac{u^2 - 3u - x^2 + 3x}{u - x} \quad - ٤٨ \quad \lim_{y \rightarrow c} \frac{\sqrt{y} - \sqrt{c}}{y - c}, c > 0 \quad - ٤٧$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x - 3} - 2}{x - 7} \quad - ٥٢ \quad \lim_{t \rightarrow -3} \frac{1/(t + 2) + 1}{t + 3} \quad - ٥١ \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(2x - 1)(x + 3)^2}{(x^2 - 9)(x^2 + 4x + 3)} \quad - ٥٠$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{x^3 - a^3} \quad - ٥٥ \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} \quad - ٥٤ \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x^2 - a^2} \quad - ٥٣$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \quad \text{فأوجد } f(x) = 5 + 3x - x^2 \quad - ٥٦$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} \quad \text{فأوجد } h(x) = \frac{x}{x + 2} \quad \text{إذا كانت } - ٥٧$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \quad \text{فأوجد } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{إذا كانت } - ٥٨$$

$$- ٥٩ \quad \text{إذا كانت } f(x) = x^2 - 3x \quad \text{فأوجد :}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \quad (\text{أ})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad (\text{د}) \quad \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \quad (\text{ج})$$

$$- ٦٠ \quad \text{إذا كانت } f(x) = 1/x \quad \text{فأوجد}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \quad (\text{أ})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad (\text{د}) \quad \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \quad (\text{ج})$$

$$- ٦١ \quad \text{إذا كانت } g(x) = \sqrt{x} \quad \text{فأوجد}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(6 + h) - g(6)}{h} \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow 6} \frac{g(x) - g(6)}{x - 6} \quad (\text{أ})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h}, a > 0 \quad (\text{د}) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}, a > 0 \quad (\text{ج})$$

٦٢ - أوجد فترة مفتوحة I تحتوي العدد 3 بحيث أنه لكل x في الفترة I تكون $3x + 2$ داخل حدود $(\text{أ}) \frac{1}{2}$ من 11 ، $(\text{ب}) \frac{1}{4}$ من 11 ، $(\text{ج}) \epsilon$ من 11 ، حيث ϵ عدد موجب .

- ٦٣ - أوجد فترة مفتوحة I تحتوي العدد 5 بحيث عندما تكون x في I ، تكون x^2 داخل حدود (أ) ϵ من 25 ، (ب) 0.1 من 25 ، (ج) ϵ من 25 ، حيث $\epsilon > 0$.
- ٦٤ - أوجد فترة I تحتوي العدد 2 بحيث أن عندما تكون z في I ، تكون $\frac{1}{z}$ داخل حدود (أ) 0.1 من $\frac{1}{2}$ ، (ب) 0.01 من $\frac{1}{2}$ ، (ج) ϵ من $\frac{1}{2}$ ، حيث $\epsilon > 0$.
- ٦٥ - أوجد فترة I تحتوي العدد 3 بحيث أنه لكل x في I يكون
- (أ) $\frac{4}{(x-3)^2} > 100$ ، (ب) $\frac{4}{(x-3)^2} > 10,000$ ، (ج) $\frac{4}{(x-3)^2} > N$ ، حيث $N > 0$.
- ٦٦ - أعط مثالا لدالة أو أرسم الشكل البياني لدالة ممكنة بحيث أن قيمها تصبح أكبر فأكثر عندما تقترب x من 2 ولكن لاتصبح كبيرة جدا .
- ٦٧ - أعط مثالا لدالة لها نهاية يمينى لكن ليس نهاية يسرى عند نقطة الأصل .
- ٦٨ - (أ) استخدم جدولا للـ sines لايجاد $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$ (الجدول المثلثية موجودة فى التذييل B) .
الآن احسب قيم $\sin x / x$ عند x القريبة من 0 ، حيث x مقيسه بالزاوية نصف القطرية . هل تظن أن $\lim_{x \rightarrow 0} [(\sin x)/x]$ موجودة ؟ (ب) استخدم جدولا للـ cosines لايجاد $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$ الآن احسب قيم $(1 - \cos x) / x$ عند x القريبة من 0 ، حيث x مقيسة بالزاوية نصف القطرية . هل تظن أن $\lim_{x \rightarrow 0} [(1 - \cos x)/x]$ موجودة ؟ (ج) استخدم جدولا للـ tangents و cotangents لتعين ما اذا كانت $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x$ موجودتان . اذا لم توجدا ، هل نهاياتهما لجانب واحد موجودة ؟
- ٦٩ - أوجد قيم $x \log x$ عند $x = 1, 0.1, 0.01, 0.001, 10^{-4}, 10^{-10}$ (ربما أن $\log 10^m = m$) فان جدول اللوغاريتمات ليس لازما) هل تظن أن $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x$ موجودة ؟ أوجد شواهد أخرى لتخمينك بايجاد قيم $x \log x$ عند $x = 10^{-n}$ ، حيث n عدد صحيح موجب . عندما تصبح n كبيرة ماذا يحدث لـ $x \log x$ ؟
- ٧٠ - خطط الشكل البياني لدالة غير ثابتة قيمتها تساوى نهايتها عددا لانهايتا من المرات عندما تقترب x من a .

٢ - ٦

الاتصال

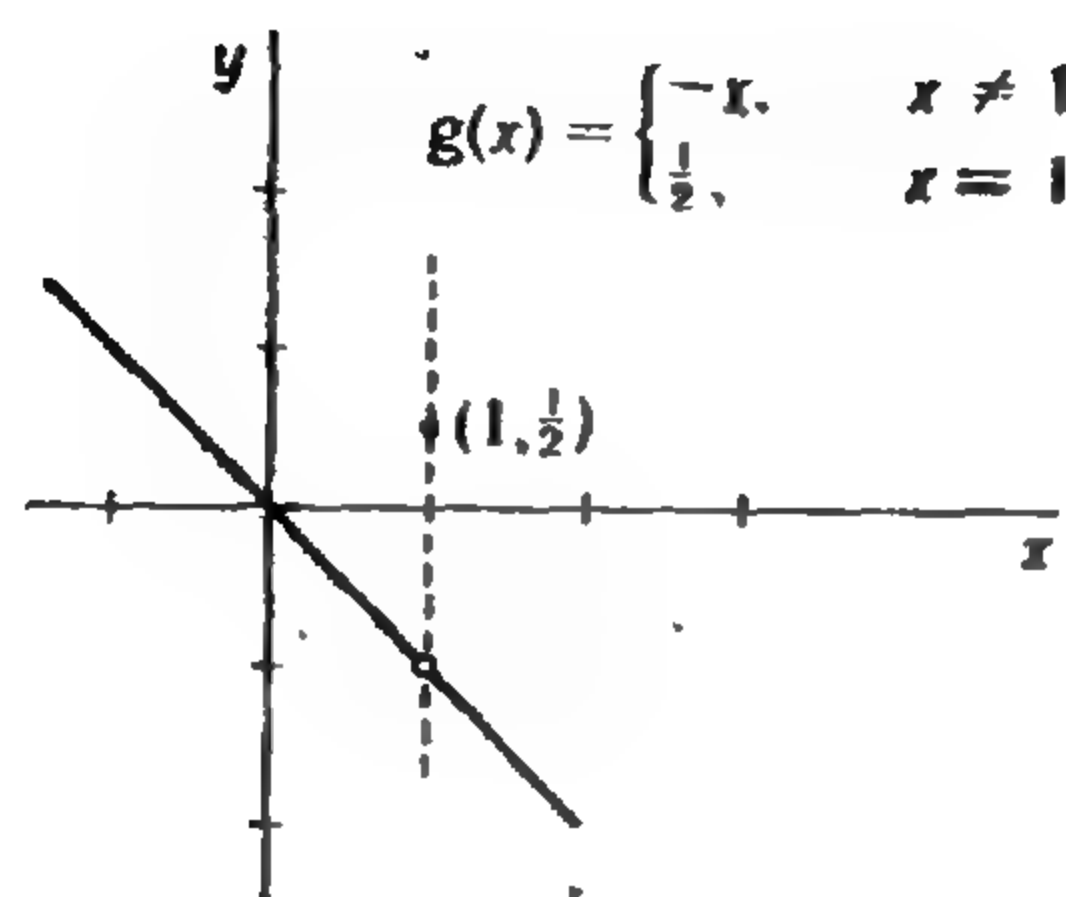
قد أكدنا أن النهاية وقيمة الدالة هما مفهومان مختلفان ، وقد رأينا أن هذين العددين ، $f(a)$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ليسا بالضرورة متساويين . عندما يكونان متساويين ، كما يحدث غالبا ، فانه يكون لدينا حالة جديرة بالاهتمام من الناحية الرياضية . خذ فى الاعتبار الدالة g المعرفة بـ

$$(1) \quad g(x) = \begin{cases} -x, & x \neq 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \end{cases}$$

والتي شكلها البياني مخطط في شكل ١٧-٢. لدينا $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -1$ و $g(1) = \frac{1}{2}$ ، وعليه فإن $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) \neq g(1)$ الشكل البياني به ثقب عند $(1, -1)$. لأن $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) \neq g(1)$ فالتنا نقول أن الدالة g ليست متصلة عند 1 . الدالة h المعرفة بـ

$$h(x) = \begin{cases} -x, & x \neq 1, \\ -1, & x = 1, \end{cases}$$

لها شكل بياني مثل الشكل البياني لـ g فيما عدا أن النقطة عند $(1, \frac{1}{2})$ قد تحركت إلى تحت وملأت الثقب عند $(1, -1)$. بسبب أن $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = h(1)$ نقول أن الدالة h متصلة عند 1 . تعريف أبسط لـ h هو $h(x) = -x$ لكل x .

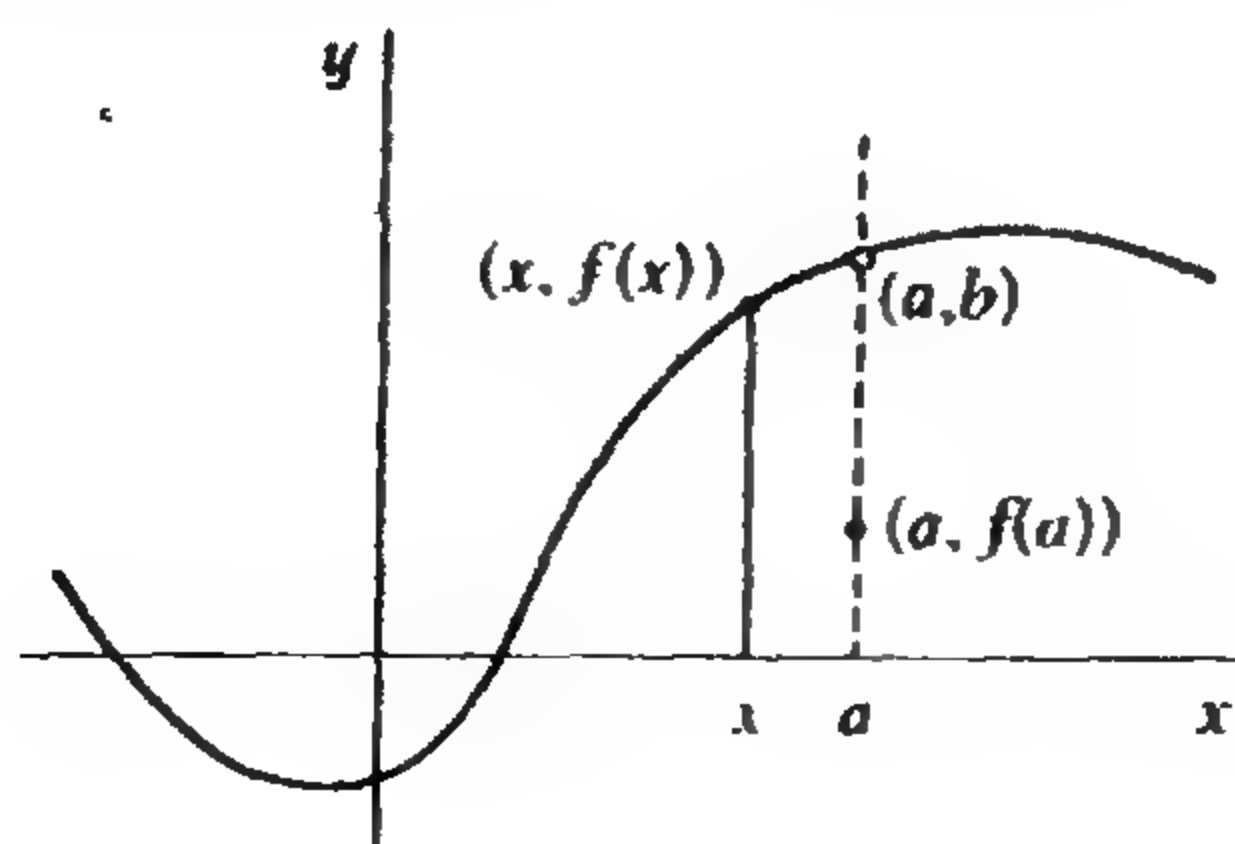


شكل ١٧-٢
g ليست متصلة عند 1

٢-٤ تعريف. الدالة f تكون متصلة عند a إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ومتصلة عند a إذا كانت معرفة عند a وغير متصلة هناك.

الشرط $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ في هذا التعريف يشمل ضمناً ثلاثة شروط، يجب أن تتحقق جميعها لكي تكون f متصلة عند a : (١) $f(a)$ موجودة، (٢) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجودة، (٣) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. إذا لم يتحقق أى واحد من هذه الشروط، فإن f لا تكون متصلة عند a . مثال ذلك، الدالة u المعرفة بـ $u(x) = -x - 1, x \neq 1$ ليست متصلة عند 1 لأن $u(1)$ لا توجد.

خذ في الاعتبار الدالة f التي شكلها البياني مخطط في شكل ١٨-٢. لتكن (a, b) احدائى النقطة الممثلة بدائرة صغيرة. فيكون $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ إذا كانت $f(a) \neq b$ ، فإن f لا تكون متصلة



شكل ١٨-٢
f متصلة عند a فقط
إذا كان $f(a) = b$

عدد a والشكل البياني يكون به ثقب عند (a, b) . الطريقة الوحيدة التي يمكن بها ملء الثقب هي أن $f(a) = b$ ، أى أن f يجب أن تكون متصلة عند a بمعنى التعريف . بالحديث الدارج ، الدالة تكون متصلة عند عدد ما إذا كان شكلها البياني ليس به ثقب أو له قفزة عند النقطة المناظرة ، من الممكن تتبع الشكل بالقرب من هذه النقطة من أحد جانبي النقطة الى الجانب الآخر بدون رفع القلم من الورقة . الدالة قد لا تكون متصلة عند عدد ما ومتصلة عند عدد آخر . الدالة g في شكل ٢ - ١٧ متصلة عند كل عدد ماعدا 1 .

يوجد فارق بين غير متصلة ومنفصلة . الدالة $1/x$ غير متصلة عند 0 لكن غير منفصلة هناك لأنها غير معرفة عند 0 . الدالة g في (1) ليست فقط غير متصلة عند 1 بل أيضا منفصلة هناك .

مثال ١ . اثبت أن $f(x) = 3x^2 - x + 1$ متصلة عند -1 .

طبقا لتعريف الاتصال ، يجب أن نتحقق من أن $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $f(-1)$ موجودتان ومتساويتان . لدينا $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 5$, $f(-1) = 5$ إذن f متصلة عند -1 .

مثال ٢ . اثبت أن الدالة

$$F(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq -1, \\ x^2, & x > -1, \end{cases}$$

غير متصلة عند -1 .

واضح الشكل البياني لـ F في شكل ٢ - ١٩ أن

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 = 1.$$

بما أن هذين ليسا متساويين ، فإن $\lim_{x \rightarrow -1} F(x)$ لا توجد ، F غير متصلة عند -1 بسبب أن الدالة معرفة عند -1 ، فهي أيضا منفصلة هناك . الدالة متصلة عند كل عدد آخر . لاحظ أن الشكل البياني له قفزة عند -1 .

هذا المثال الأخير يوحى بأن فكرة الاتصال اليميني واليسارى عند نقطة قد تكون مفيدة .

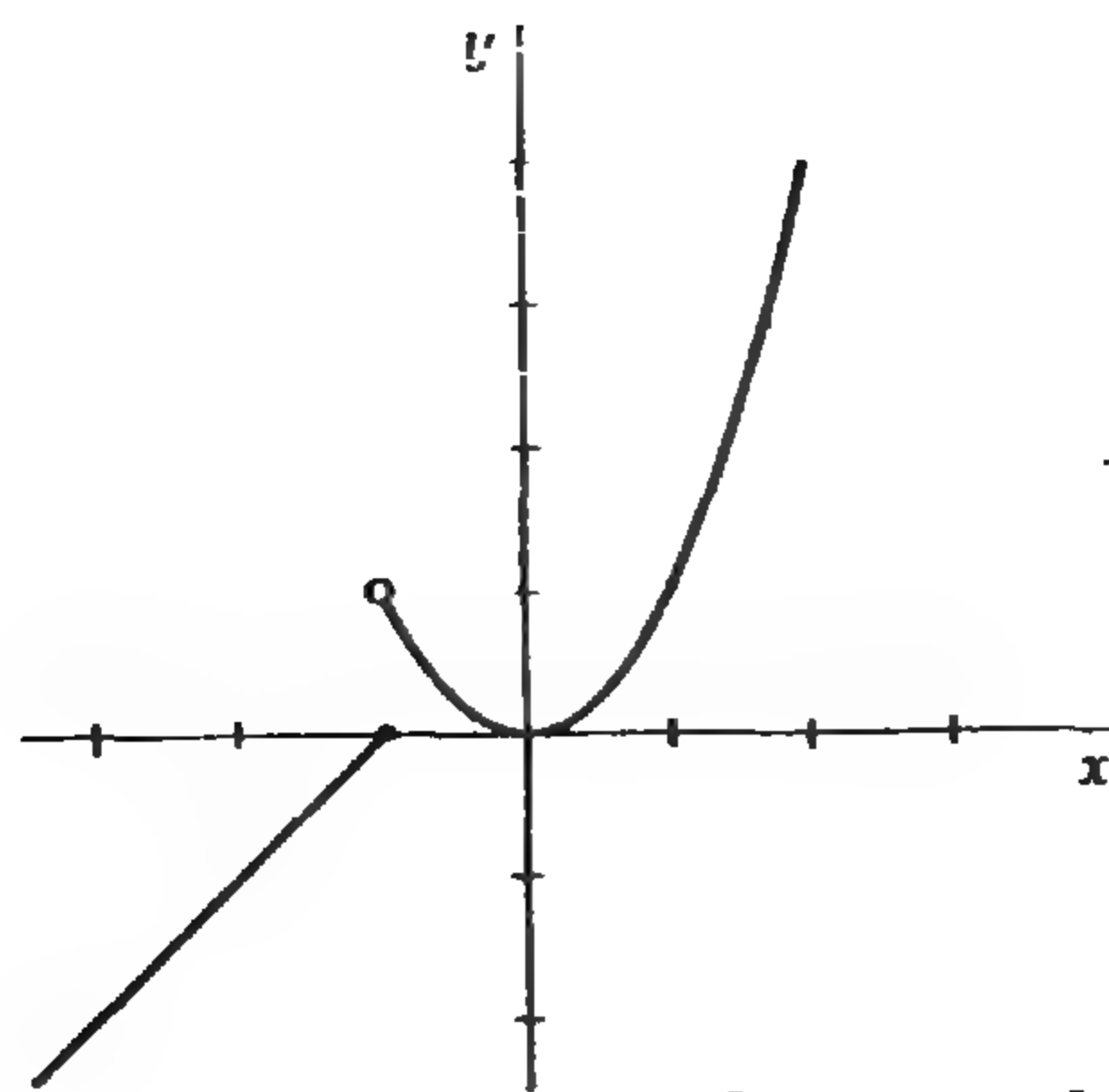
٢ - ٥ . تعريف . الدالة f متصلة على اليسار عند a (أو متصلة يسارا عند a) إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

ومتصلة على اليمين عند a (أو متصلة يمينا عند a) إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

الدالة F في مثال ٢ (شكل ٢ - ١٩) متصلة على اليسار لكن غير متصلة على اليمين عند -1 . الدالة تكون متصلة عند عدد ما إذا وإذا فقط كانت متصلة يمينا ويسارا هناك .



$$F(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq -1 \\ x^2, & x > -1 \end{cases}$$

شكل ٢-١٩ F متصلة عند -1

مثال ٣ . هل الدالة المعرفة بـ

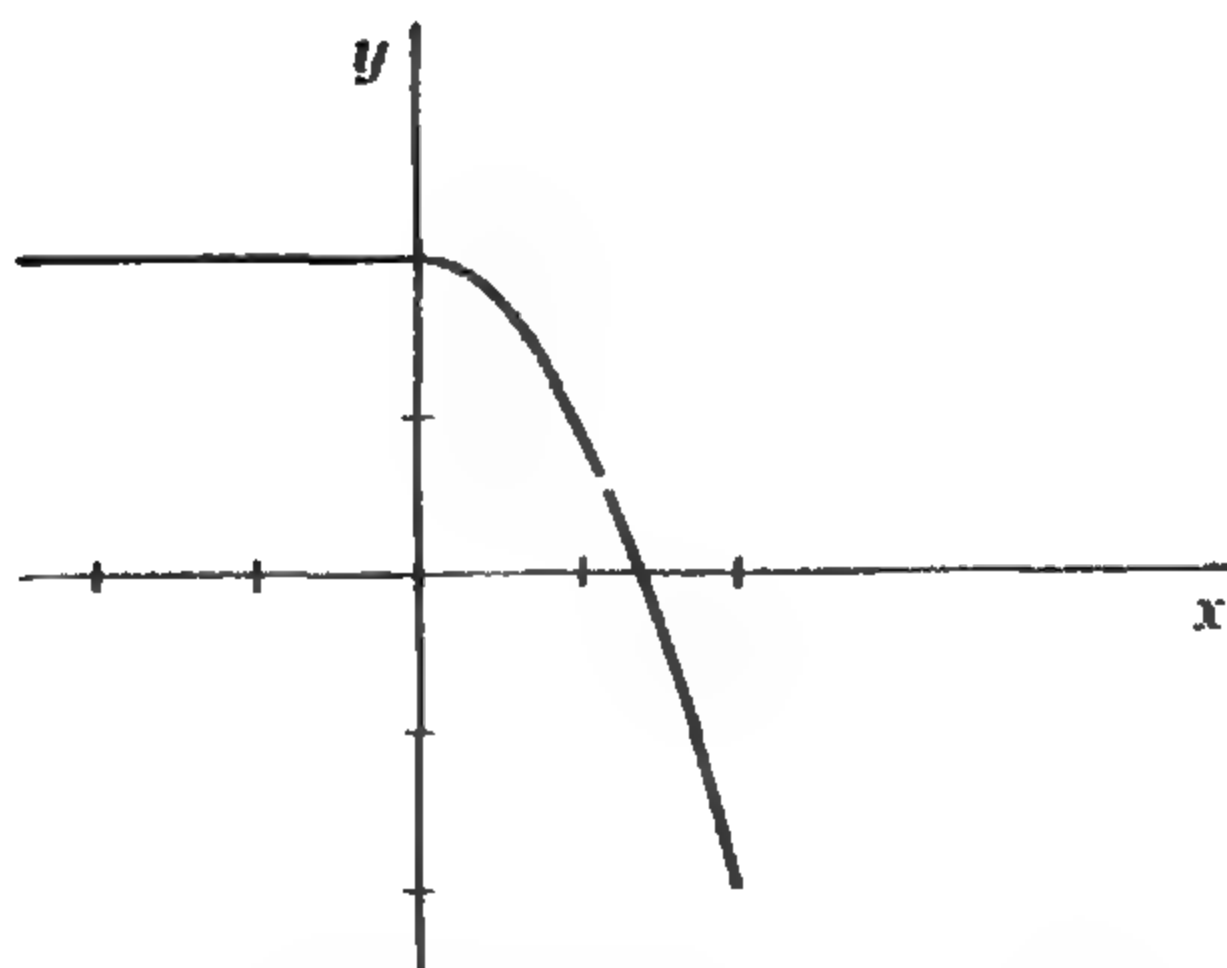
$$w(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0, \\ -x^2 + 2, & x > 0, \end{cases}$$

منفصلة عند 0 ؟
من الشكل البياني لـ w المخطط في شكل ٢-٢٠ يبدو أن الجواب نعم ، لكن للتأكد نستخدم التعريف . لدينا

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} w(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} w(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + 2) = 2$$

واذن $\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = 2$. بما أن $w(0) = 2 = \lim_{x \rightarrow 0} w(x)$ ، w تكون متصلة عند 0 . هي أيضا متصلة يمينا ويسارا هناك .



$$w(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0 \\ -x^2 + 2, & x > 0 \end{cases}$$

شكل ٢-٢٠ w متصلة عند 0 .

يقال أن الدالة متصلة في فترة مفتوحة إذا كانت متصلة عند كل نقطة بالفترة . الدالة تكون متصلة في فترة مغلقة إذا كانت متصلة عند كل نقطة داخل الفترة ، ومتصلة يميناً عند النقطة الطرفية اليسرى ، ومتصلة يساراً عند النقطة الطرفية اليمنى . بتعديلات واضحة ، يمكن الحديث عن الاتصال في فترة مغلقة عند طرف واحد ومفتوحة عند الآخر . الدالة F في مثال ٢ (شكل ٢ - ١٩) متصلة في الفترات $[-1, 1]$ ، $[-2, -1]$ ، $(-1, 0)$ لكن هي غير متصلة في الفترة $[-1, 0]$. الدالتان f و g في مثالي ١ ، ٣ متصلتان عند كل عدد ومن ثم في كل فترة . بالحديث الدارج ، الدالة تكون متصلة في فترة إذا أمكننا تتبع شكلها البياني خلال الفترة بدون رفع القلم من الورقة . الدالة المتصلة في كل مكان يقال عنها عادة مجرد متصلة .

سنبرهن في بند ٢ - ٨ أن دالة كثيرة الحدود تكون متصلة عند كل عدد وأن الدوال الكسرية والدوال الجبرية تكون متصلة أينما كانت معرفة . حيث أن هذه هي الدوال العامة ، فليس غريباً أن الدوال المألوفة لنا متصلة وأن توضيحاتنا للدوال غير المتصلة تبدو أنها مدبرة .

مسائل

حدد ما إذا كانت كل من الدوال الآتية متصلة عند العدد المعطى أو الأعداد المعطاة . وإذا لم تكن كذلك فحدد ما إذا كانت متصلة يميناً أو يساراً هناك . خطط الشكل البياني للدالة .

$$1 - f(x) = 3x + 2; 1, 0 \quad 2 - h(x) = 1; \frac{1}{2}$$

$$3 - g(z) = z^2; -2 \quad 4 - f(x) = 9 - x^2; 3$$

$$5 - f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x-1, & x > 0; 0. \end{cases} \quad 6 - f(x) = \begin{cases} 2x+4, & x < 2, \\ 8, & x = 2, \\ -2x+12, & x > 2; 2 \end{cases}$$

$$7 - f(t) = \frac{1}{t}; 2 \quad 8 - f(x) = \frac{1}{x-6}; 0, 6$$

$$9 - g(x) = \sqrt{x}; 8 \quad 10 - u(x) = \frac{x^2-4}{x+2}; -2$$

$$11 - f(x) = |x-3|; 3$$

عند أي أعداد تكون كل من الدوال الآتية غير متصلة ؟ هل هي متصلة يميناً أو يساراً هناك ؟ ليس ضرورياً أن تبرهن إجابتك

$$12 - g(x) = 5x - 10 \quad 13 - g(x) = mx + b$$

$$14 - f(u) = 1 + \frac{1}{2}u - 4u^2 \quad 15 - g(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 1, \\ 3, & x > 1. \end{cases}$$

$$16 - g(t) = \begin{cases} t^2 - 1, & t \neq 0, \\ -1, & t = 0. \end{cases} \quad 17 - f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x-5}, & x \neq 5, \\ 0, & x = 5. \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2} \quad - ١٩ \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5}, & x \neq 5, \\ 10, & x = 5. \end{cases} \quad - ١٨$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x - 5}, & x \neq 5, \\ 3, & x = 5. \end{cases} \quad - ٢١ \quad g(x) = \frac{x}{x - 5} \quad - ٢٠$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}, \quad a > 0 \quad - ٢٣ \quad h(z) = \frac{z + 2}{z^2 - 5z + 4} \quad - ٢٢$$

$$v(x) = \frac{|x|}{x} \quad - ٢٥ \quad F(s) = |s| \quad - ٢٤$$

$$s(x) = [x] \quad - ٢٧ \quad F(z) = \frac{1}{2}(z + |z|) \quad - ٢٦$$

الصحيحة

$$29. f(x) = \frac{|x|}{x} (x^2 - 1) \quad - ٢٩ \quad h(x) = [x + 1] - [x] \quad - ٢٨$$

٣٠ - اختر b بحيث تكون الدالة f المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x \neq -1, \\ b, & x = -1, \end{cases}$$

متصلة عند -1 .

٣١ - اختر b بحيث تكون الدالة u المعرفة بـ

$$u(t) = \begin{cases} \frac{2t^2}{t} - 4, & t \neq 0, \\ b, & t = 0, \end{cases}$$

متصلة عند 0 .

٣٢ - هل من الممكن اختيار c بحيث تكون الدالة g المعرفة بـ

$$g(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0, \\ c, & x = 0, \end{cases}$$

متصلة عند 0 ؟ متصلة يمينا عند 0 ؟ متصلة يسارا عند 0 ؟

٣٣ - اذا كانت $x \neq 0$ ، $x^2 / |x|$ ، $G(x) = x^2 / |x|$ ، $G(0)$ فعرّف G بحيث تكون G متصلة عند 0 .

٣٤ - (أ) هل $\cos x$ و $\sin x$ متصلتان عند 30° ؟ عند 0 ؟ ليس ضروريا اثبات اجابتك . (ارشاد :

استخدم الجداول المثلثية في التذييل ب)

(ب) هل من الممكن اختيار b بحيث تكون الدالة f المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ b, & x = 0, \end{cases}$$

حيث x مقيسة بالزاوية نصف القطرية ، متصلة عند 0 ؟ (ارشاد : استخدم جدولا للـ \sin)
 ٣٥ - خطط وناقش الشكل البياني للدالة

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ عدد كسري} \\ 1, & x \text{ عدد غير كسري} \end{cases}$$

إين تكون f غير متصلة ؟
 ٣٦ - خطط وناقش الشكل البياني للدالة

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ عدد كسري} \\ x, & x \text{ عدد غير كسري} \end{cases}$$

هل g متصلة عند 0 ؟ هل g متصلة عند أى عدد آخر .
 ٣٧ - اذا كانت $\pi(x)$ ترمز الى عدد الأعداد الأولية الموجبة التى هى أقل من أو تساوى x حيث $x \geq 0$ ، ناقش اتصال الدالة π (أنظر المسألة ٢٨ بيند ٢ - ٣) .

٢ - ٧

تعريف النهاية

فى بند ٢-٥ ناقشنا النهايات من وجهة النظر العقلانية . رغم أن هذا يكفى لتطبيقات كثيرة لحساب التفاضل الا أنه يلزمنا تعريف أدق اذا كنا نستخدم النهايات بفاعلية وثقة . سنقدم التعريف بمثال .

نقول أن $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1) = 7$ بمعنى أن $2x + 1$ تكون قريبة من 7 لجميع x القريبة من ، لكن لا تساوى ، 3 لكن كيف يمكننا أن نكون متأكدين من هذا عندما لانملك معيارا نقدر به ما يقصد « بقريب من » . الأشخاص المختلفون لهم مفاهيم مختلفة عن القرب ، والقريب عند شخص يعتبره شخص آخر بعيدا جدا . الرياضى لا يحاول تعريف قريب من لكن يقول لكل شخص « أنت تخبرنى ماذا تقصد بالقرب من وأنا سأوضح لك أن $2x + 1$ تكون أقرب من 7 عن ذلك ، وليس فقط لبعض لكن لكل x قريبة من 3 قريبا كافيا » .

لكى نوضح هذا عمليا من المناسب أن نأخذ فكرة عن الجوار . الجوار لعدد a هو فترة مفتوحة تحتوى a . الفترات $(-533, 76)$, $(1.99, 2.1)$, $(1, 4)$ هى جوارات للعدد 2 . الفترة الأولى هى أيضا جوار لـ 2.5, 3 الجوار المنقوص لـ a هو جوار لـ a مستبعد منه العدد a . الفترة $(1, 2) \cup (2, 4)$ التى تتكون من اتحاد الفترتين $(1, 2)$ و $(2, 4)$ هى جوار منقوص لـ 2 . مع أننا نفكر عادة أن الجوار يكون صغيرا لكن ذلك ليس ضروريا . اذا كانت U جوار لـ a ، سنشير الى الجوار المنقوص المناظر لـ a بالرمز \bar{U} .

الآن نرجع الى مسألة اثبات أن $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1) = 7$ دع $F(x) = 2x + 1$. نفرض أن Mr. White يعتبر أن $2x + 1$ تكون قريبة من 7 اذا كانت على مسافة أقل من 0.1 من ذلك العدد . سنقول أن 0.1 هو تفاوته المسموح به . الشكل التخطيطي لـ F بالقرب من $x = 3$ موضح في شكل ٢ - ٢١ . على الخط الأسفل توجد علامة على الجوار $V_1(6.9, 7.1)$. يجب أن نوضح لـ Mr. White أنه لكل x قريبة قريبا كافيا من 3 ، لكن لاتساوى $2x + 1$ ، تكون على مسافة أقل من 0.1 من 7 نفعل ذلك بتوضيح أنه يوجد جوار منقوص U_1 لـ 3 بحيث أن لكل x في \bar{U}_1 ، $F(x)$ (أي $2x + 1$) تكون في V_1 . [الجوار \bar{U}_1 منقوص لأن قيمة $F(3)$ ليس لها تأثير على المسألة] . نتطلب أن \bar{U}_1 المناسب يكون الفترة المفتوحة $(2.95, 3.05)$ بدون 3 . بدون اعتبار كيف أوجدنا \bar{U}_1 ، دعنا نحقق مطلبنا أنه عندما تكون x في \bar{U}_1 فإن $F(x)$ تكون في V_1 . الآن x تكون في \bar{U}_1 اذا كان

$$(1) \quad 3 - 0.05 < x < 3 + 0.05, \quad x \neq 3$$

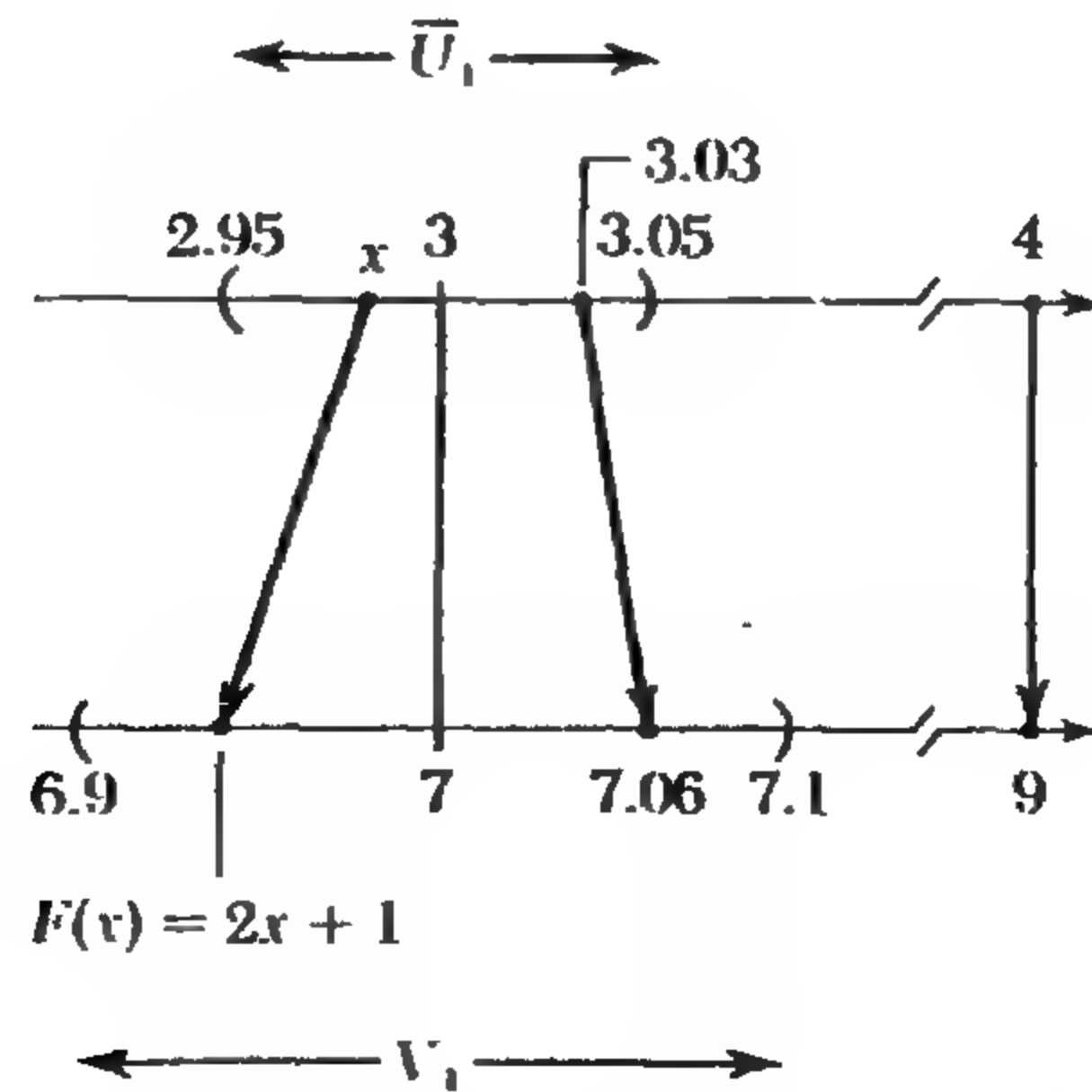
$F(x)$ تكون في V_1 اذا كان

$$(2) \quad 7 - 0.1 < 2x + 1 < 7 + 0.1$$

يجب علينا توضيح أن (1) تتضمن (2) . اذا كانت x تحقق (1) ، فإنه بضرب الأجزاء الثلاثة لـ (1) في 2 ، نرى أن x تحقق

$$(3) \quad 6 - 0.1 < 2x < 6 + 0.1$$

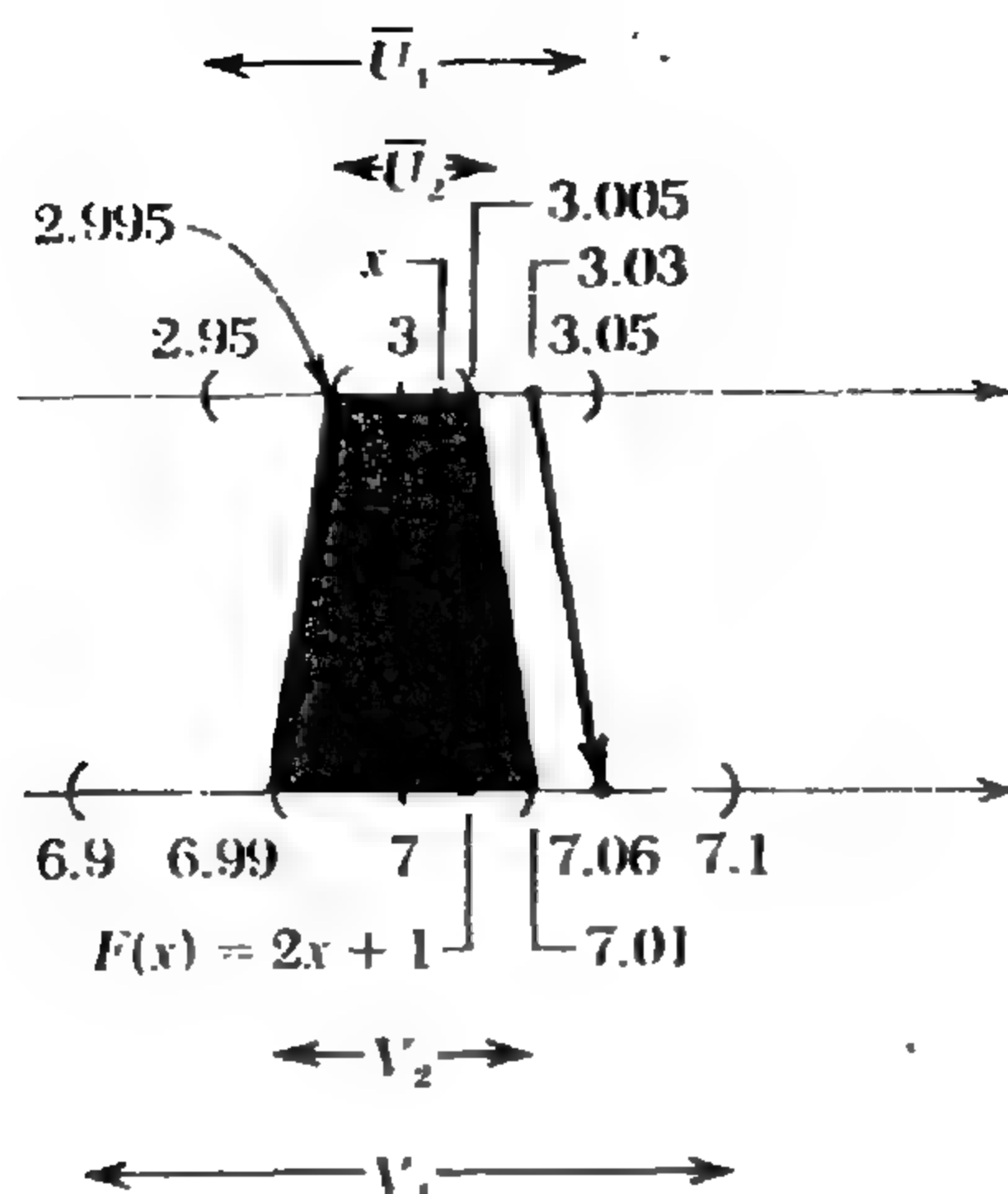
وبإضافة 1 الى ذلك ، نرى أن x تحقق (2) . لقد أثبتنا أن لكل x في \bar{U}_1 ، $F(x)$ تكون في V_1 . بالطبع ، صحيح أيضا أن عندما $x = 3$ ، $F(x)$ تكون في V_1 ، لكن هذا لا يناقض النص الذي ذكرناه . لذلك معنى العبارة « لكل x قريبة من 3 قريبا كافيا ، لكن لاتساوى 3 » يكون مضبوطا بالقول « لكل x في \bar{U}_1 » .



شكل ٢ - ٢١

$F(x)$ هي في V_1 لكل x في U_1 (ليست بمقياس)

كيف أوجدنا \bar{U}_1 ؟ بدأنا ببساطة بالنتيجة المطلوبة (٢) وأوجدنا حل المتباينة بالنسبة الى x . الخطوات هي (١) و (٢) و (٣) ، بهذا الترتيب . من الواضح أن أى جوار منقوص لـ 3 ، أصغر من الجوار السابق مثل $\bar{U}_1' = (2.97, 3.04)$ يكون أيضا مقبولا لأنه اذا كانت x فى \bar{U}_1' ، فهي ايضا تكون فى \bar{U}_1 ومن ثم $F(x)$ تكون فى V_1 هي أكبر جوار منقوص لـ 3 نعمل به .



شكل ٢-٢٢
 $F(x)$ تكون فى V_2 لكل x فى \bar{U}_2

نفرض الآن أن Mr. Brown يتخذ معايير أضيق ويعتبر أن $2x + 1$ تكون قريبة من 7 فقط اذا كانت تختلف عن 7 بأقل من 0.01 . تفاوته المسموح به يكون عندئذ 0.01 . يجب أن نثبت له أن لكل x قريبة من 3 قريبا كافيا ، لكن لانسوى 3 ، $2x + 1$ تختلف عن 7 بأقل من 0.01 . كما سبق ، نفعل ذلك باثبات أنه يوجد جوار منقوص \bar{U}_2 لـ 3 بحيث أن لكل x فى \bar{U}_2 ، تكون $F(x)$ فى الفترة :

$V_2 = (6.99, 7.01)$ (شكل ٢-٢٢) . نتوقع الآن أن الـ x 's يجب أن تكون أكثر قربا من 3 عما قبل ، وفى الواقع أن الجوار المنقوص القديم \bar{U}_1 لايمكن استخدامه إذ أن 3.03 تكون فى \bar{U}_1 لكن :

$F(3.03) = 7.06$ لا تكون فى V_2 . توجد بعض الـ x 's فى \bar{U}_1 حيث $F(x)$ تكون فى V_2 ، لكن يجب ايجاد جوار منقوص بحيث يكون لجميع الـ x 's التى فيه تكون $F(x)$ فى V_2 . $F(x)$ تكون فى V_2 اذا كان

$$(4) \quad 7 - 0.01 < 2x + 1 < 7 + 0.01$$

احدى الطرق لايجاد جوار منقوص مناسب \bar{U}_2 هي أن نحل هذه المتباينة بالنسبة الى x بطرح ١ من (٤) نرى أن (٤) تكون صحيحة اذا واذا فقط كان

$$6 - 0.01 < 2x < 6 + 0.01.$$

التى بدورها ، بقسمتها على 2 ، تكون صحيحة اذا واذا فقط كان

$$(5) \quad 3 - 0.005 < x < 3 + 0.005$$

لذلك يمكن اختيار \bar{U}_2 لتكون الفترة (2.995, 3.005) بدون 3 ، وأى جوار منقوص أصغر من هذا الجوار سيحقق أيضا متطلبات Mr. Brown .

إذا واجهنا شخص ثالث بتفاوت مسموح به 0.004 فإننا يمكننا إيجاد جوار منقوص \bar{U}_3 لـ 3 بحيث أن لكل x في \bar{U}_3 تكون $f(x)$ في الفترة (6.996, 7.004) بطريقة مماثلة ، لأى تفاوت مسموح به $\epsilon > 0$ ، يمكننا إيجاد جوار منقوص \bar{U} لـ 3 بحيث أن لكل x في \bar{U} ، $F(x)$ تكون على مسافة أقل من ϵ من 7 أى أن $F(x)$ تكون في الفترة $V = (7 - \epsilon, 7 + \epsilon)$ (شكل ٢ - ٢٣) . نوجد \bar{U} كما أوجدنا \bar{U}_1, \bar{U}_2 . $F(x)$ تكون في $(7 - \epsilon, 7 + \epsilon)$ إذا كان

$$(6) \quad 7 - \epsilon < 2x + 1 < 7 + \epsilon.$$

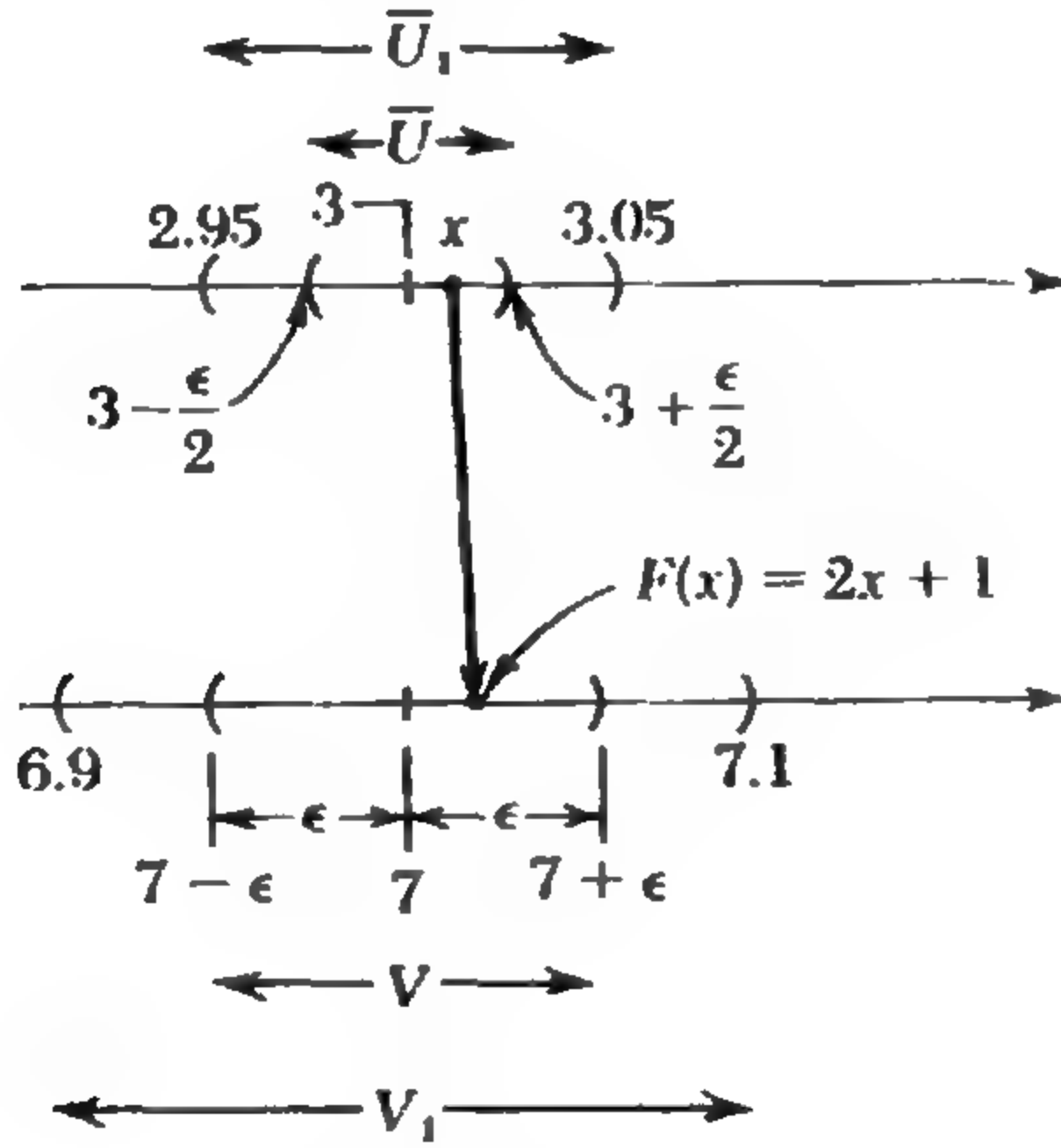
وهذا يكون صحيحا إذا- وإذا فقط كان $6 - \epsilon < 2x < 6 + \epsilon$ أى إذا فقط كان

$$(7) \quad 3 - \frac{\epsilon}{2} < x < 3 + \frac{\epsilon}{2}.$$

يمكننا اختيار \bar{U} الفترة

$$(8) \quad \left(3 - \frac{\epsilon}{2}, 3 + \frac{\epsilon}{2}\right) \text{ بدون } 3$$

ونكون متأكدين أن لكل x في \bar{U} ، $F(x)$ تكون في V .



شكل ٢ - ٢٣

$F(x)$ تكون في V عندما تكون x في U

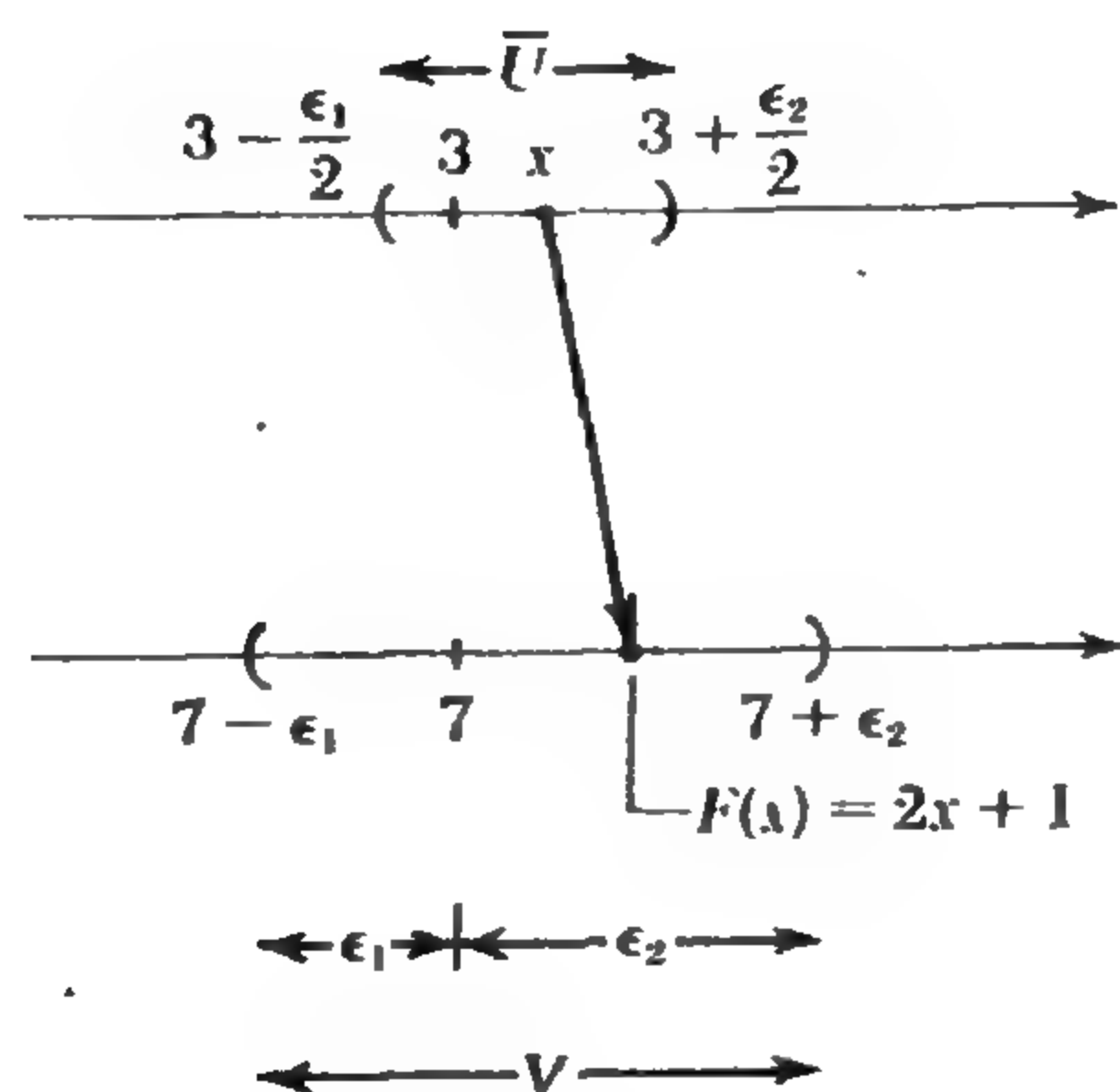
هذه الحالة الأخيرة هي كل مانحتاج اليه اذ أنها تشمل جميع الحالات الأخرى . فى حالة $\epsilon = 0.1$ Mr. White ، (٦) ، (٧) تعطيان (١) و (٢) . فى حالة $\epsilon = 0.01$ Mr. Brown ، (٦) و (٧) تعطيان (٤) و (٥) . اذا كان لدينا مطالب كثيرة لتحقيقها فيكفى أن نعمل فقط الحالة العامة . حينئذ لكل تفاوت مسموح به ϵ يقدم لنا ، يمكننا من (٨) إيجاد الجوار المنقوص \bar{U} بسرعة . فى الواقع ، اذا كنا سنتناول كل التفاوتات الممكنة ، وقد زعمنا أنه فى امكاننا ذلك فاننا يجب أن نعمل الحالة العامة لتثبت صدق زعمنا .

هذا هو جوهر مفهوم النهاية الدالة F عند 3. لكل تفاوت مسموح به $\epsilon > 0$ ، يوجد جوار منقوص \bar{U} لـ 3 بحيث لكل x في \bar{U} ، تكون $F(x)$ على بعد أقل من ϵ من 7 بسبب ذلك نشعر الآن بالتأكيد أن $2x + 1$ تأتي قريباً جداً من 7 ويسوغ لنا أن نكتب $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1) = 7$.

ليس من الضروري أن يكون التفاوت المسموح به نفس المقدار على كلا الجانبين لـ 7. فقد يكون ϵ_1 على اليسار ويكون ϵ_2 على اليمين، وبذلك تكون الفترة V هي $(7 - \epsilon_1, 7 + \epsilon_2)$ (شكل ٢ - ٢٤). $F(x)$ تكون في V إذا كان

$$7 - \epsilon_1 < 2x + 1 < 7 + \epsilon_2$$

نفس التعليل المستخدم سابقاً لايجاد \bar{U} يوضح أن جواراً منقوصاً مناسباً \bar{U} هو الفترة $(3 - \epsilon_1 / 2, 3 + \epsilon_2 / 2)$ بدون 3 كل زوج ϵ_1, ϵ_2 من التفاوتات المسموح بها يساراً ويميناً يحدد جواراً $(7 - \epsilon_1, 7 + \epsilon_2)$ لـ 7. وبالعكس، كل جواراً لـ 7 يحدد عددين موجبين ϵ_1 و ϵ_2 ، هما المسافتان بين 7 والنقطتين الطرفيتين. واذن يلزمنا تغيير طفيف لاعادة صياغة الجملة الثانية في الفقرة السابقة حتى تقرأ « لكل جوار V لـ 7، يوجد جوار منقوص \bar{U} لـ 3 بحيث أن $F(x)$ تكون في V لكل x في \bar{U} ».

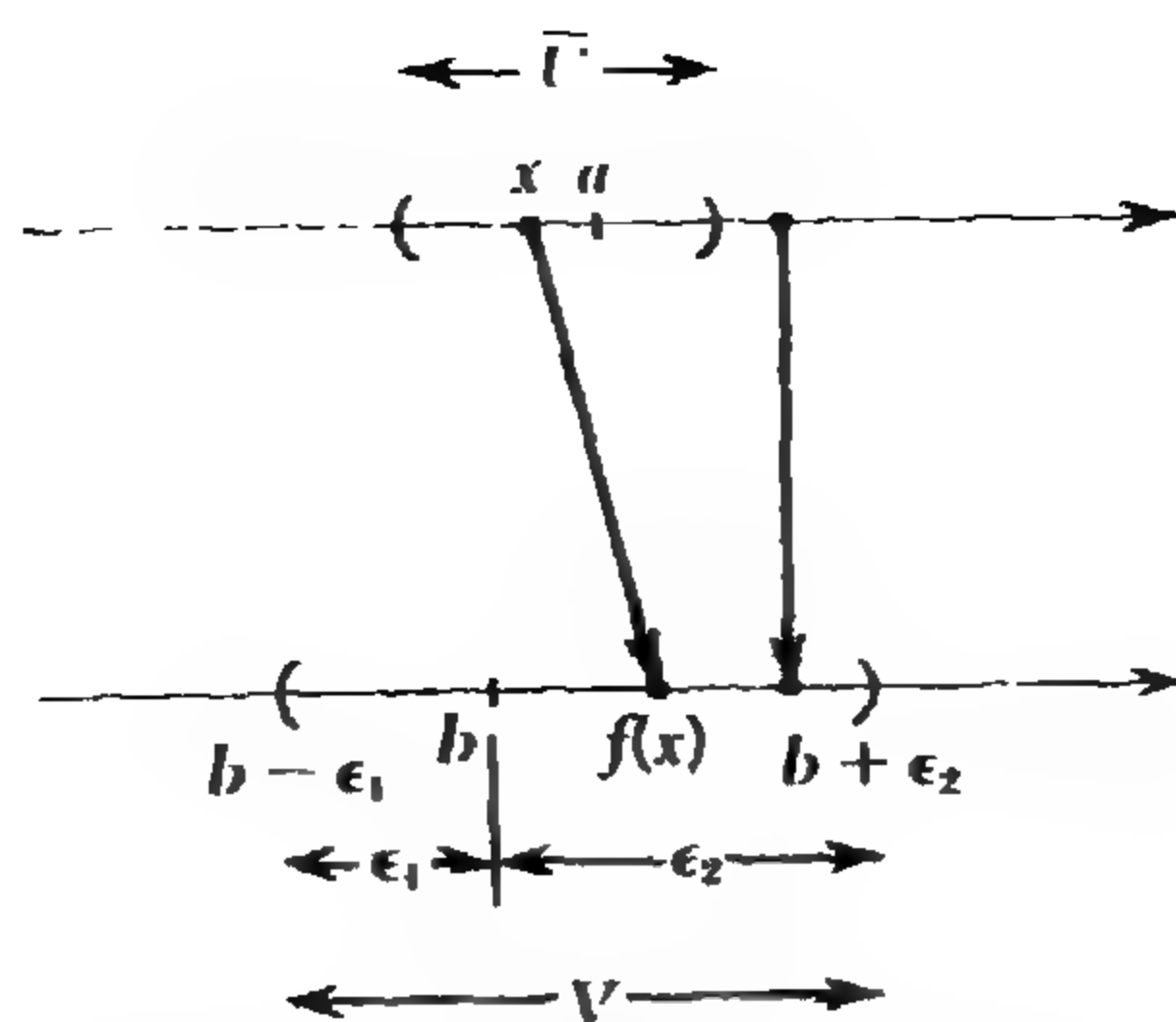


شكل ٢ - ٢٤

الجوار V لا يلزم أن يكون متماثلاً حول 7

المبادئ الأساسية التي نوقشت هنا تطبق على نهاية أي دالة. نقول أن الدالة f لها نهاية عند a إذا وإذا فقط كان يوجد عدد b بحيث أن $f(x)$ تكون قريبة منه لكل x قريبة كافياً من a ، لكن لا تساوي a . هذا يفسر بأنه يعني أن لكل جوار V لـ b ، يوجد جوار منقوص \bar{U} لـ a بحيث أن $f(x)$ تكون في V لكل x في \bar{U} (شكل ٢ - ٢٥). نعطي ذلك رسمياً في تعريف.

٢ - ٦ تعريف. الدالة f يكون لها نهاية عند a إذا كان يوجد عدد b يتحقق له ما يأتي: لكل جوار V لـ b ، يوجد جوار منقوص \bar{U} لـ a بحيث أن $f(x)$ تكون في V لكل x في \bar{U} . إذا وجدت النهاية، فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

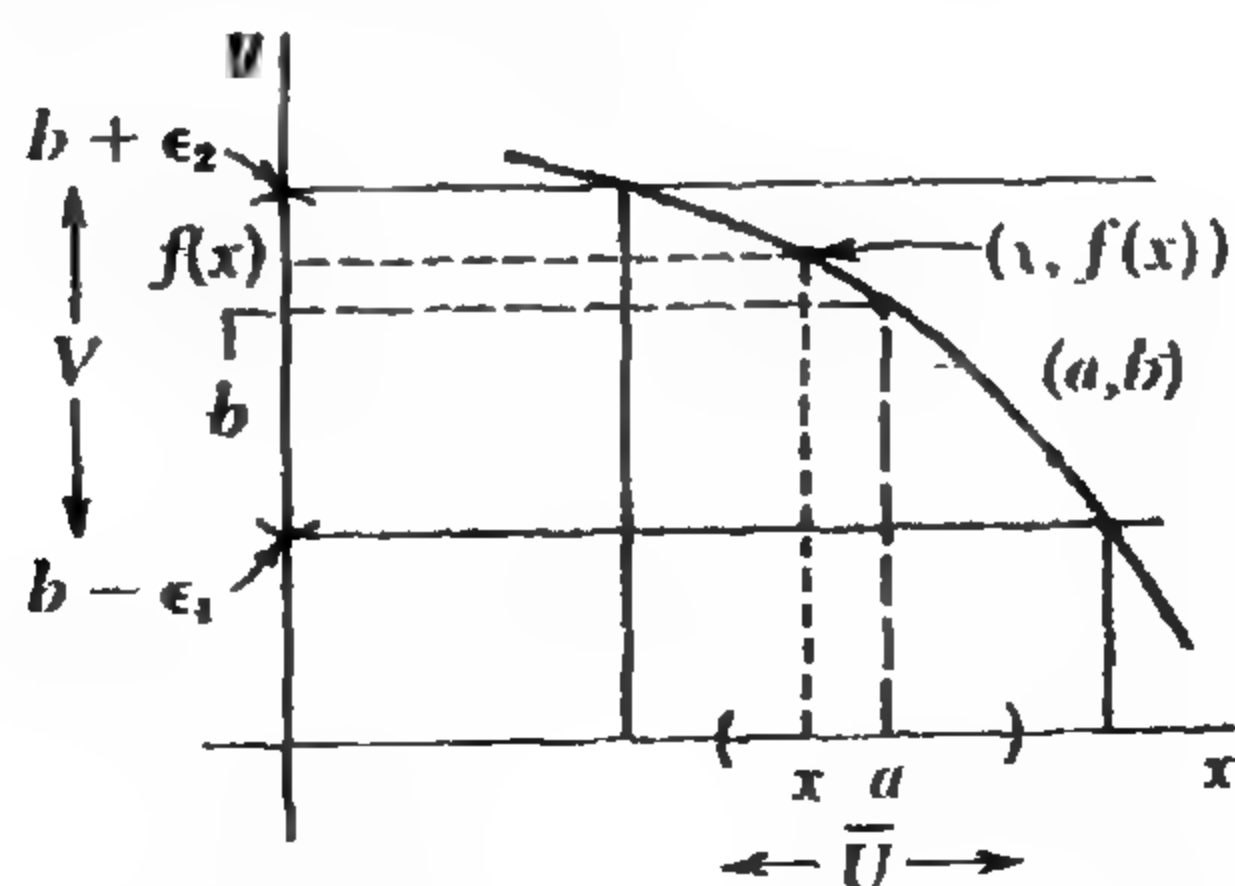


شكل ٢٥-٢ تكون في V لكل x في \bar{U}

حيث أن V يمكن تعيينه بالمسافتين ϵ_1 و ϵ_2 بين b والنقطتين الطرفيتين ، فإن اختيار V يكون مكافئاً للتفاوتين المسموح بهما يسارا ويمينا $\epsilon_1 > 0$ و $\epsilon_2 > 0$ المعطيين . أحيانا يكون من المناسب التعبير عن V في الصورة (c, d) أفضل من الصورة $(b - \epsilon_1, b + \epsilon_2)$.

الجوار المنقوص \bar{U} يعتمد على V . لا نتوقع أن جوارا واحدا \bar{U} يصلح لجميع الجوارات \bar{U}, V . يختار بعد أن يعطى الجوار V . إذا أعطينا فيما بعد جوارا آخر V ، فلنا الحق في اختيار جوار جديد \bar{U} ، قد يكون من الضروري أصغر . لأجل وجود النهاية ، يجب أن يوجد \bar{U} يساير كل V ، ولو أن من المسموح استخدام نفس الجوار \bar{U} لعدة أو حتى لجميع V . إذا فشل أى V في أن يكون له \bar{U} مناظر ، فإن النهاية لا توجد . لاحظ أن \bar{U} لا يلزم أن يكون متماثلا حول a . في مناقشتنا لـ $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1)$ الجوارات المختارة \bar{U} 's كانت متماثلة ، لكن لدوال كثيرة ، الجوارات المنقوصة غير المتماثلة تكون أكثر ملاءمة . التعريف لا يتطلب أن تكون كبيرة ما أمكن ذلك . أى جوار منقوص \bar{U} لـ a يحقق شروط التعريف يكون مقبولا ، حتى ولو كان هناك x 's ليست في \bar{U} حيث $f(x)$ تكون بالرغم من ذلك في V . شكل ٢٥-٢ يوضح هذا الاحتمال .

نهاية الدالة يمكن تمثيلها تصويريا على شكلها البياني . افرض أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. الشكل البياني لـ f مخطط في شكل ٢٦-٢ . الجوار V موضح كفترة على المحور y تحتوى \bar{U}, b مناسب هو الجوار المنقوص لـ a الموضح على المحور x . لكل x في \bar{U} ، تكون $f(x)$ في V . هذا يعنى هندسيا أنه لكل x في \bar{U} ، النقطة المناظرة على المنحنى تقع بين الخطين الأفقيين اللذين تحددهما



شكل ٢٦-٢ لكل x في \bar{U} ، $f(x)$ تكون في V

النقطتان الطرفيتان لـ V . أى جوار منقوص آخر لـ a محتوى فى \bar{U} يؤدى نفس الغرض . الجوار \bar{U} الموضح ليس هو أكبر جوار كان يمكن اختياره .

مثال ١ . أثبت أن $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$.

دع $f(x) = x^3$. من تعريف ٢-٦ ، يجب أن نثبت أن لكل جوار V لـ 8 ، يوجد جوار منقوص \bar{U} لـ 2 بحيث تكون $f(x)$ فى \bar{U} فى V . نفرض أن V هى الفترة $(8 - \epsilon_1, 8 + \epsilon_2)$ حيث $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0$. الشكل البياني لـ f موضح فى شكل ٢٧-٢ حيث الفترة V مشار إليها على المحور

y . $f(x)$ تكون فى V إذا وإذا فقط كان

$$(9) \quad 8 - \epsilon_1 < x^3 < 8 + \epsilon_2$$

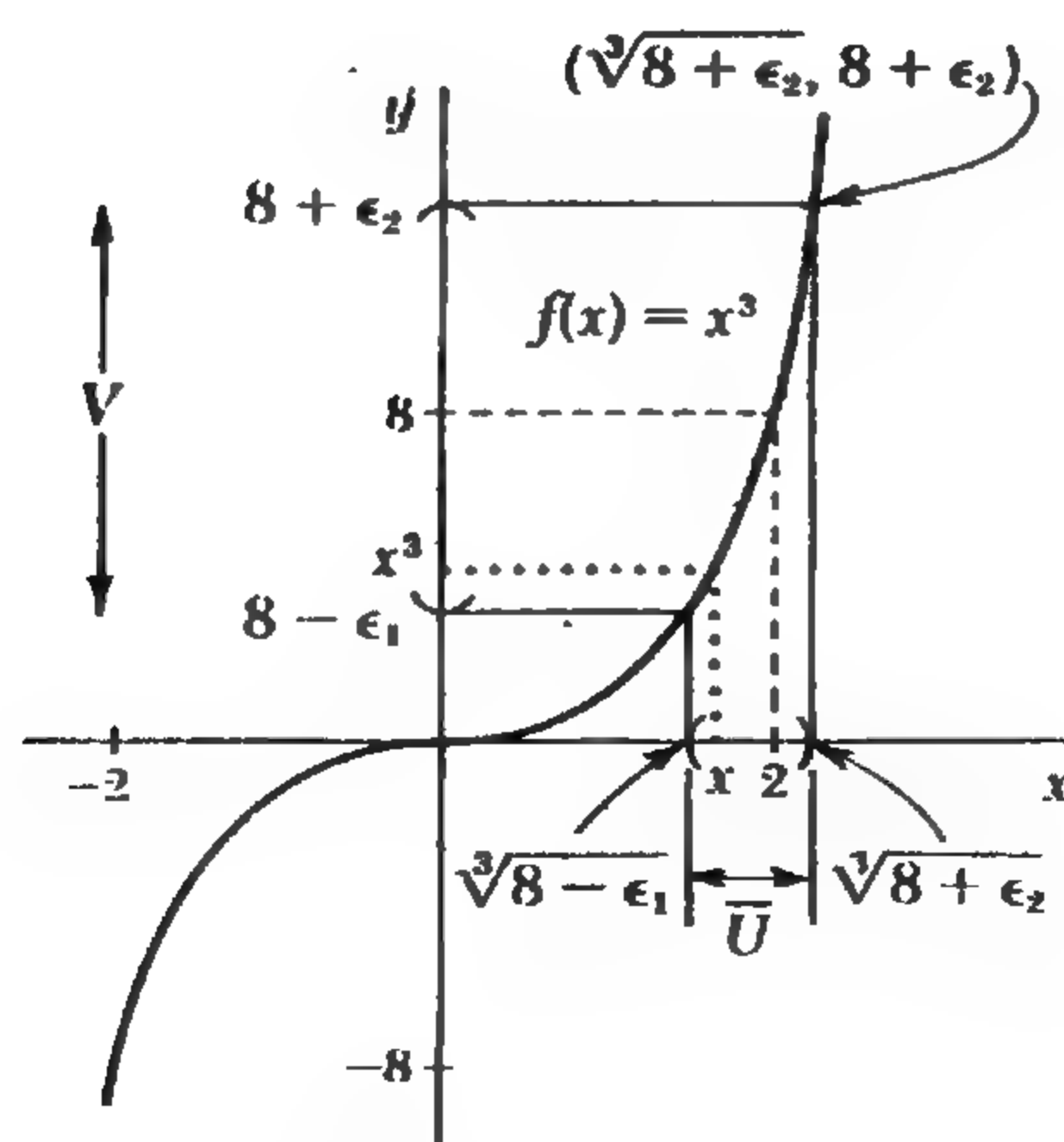
بحل هذه المتباينة لـ x ، نرى أن $f(x)$ تكون فى V إذا وإذا فقط

$$\sqrt[3]{8 - \epsilon_1} < x < \sqrt[3]{8 + \epsilon_2}$$

لذلك يمكننا اختيار \bar{U} لتكون الفترة $(\sqrt[3]{8 - \epsilon_1}, \sqrt[3]{8 + \epsilon_2})$ بدون 2 . واضح أن U جوار لـ 2 لأن $\sqrt[3]{8 - \epsilon_1}$ و $\sqrt[3]{8 + \epsilon_2}$ وهذه تتضمن

$$\sqrt[3]{8 - \epsilon_1} < 2 < \sqrt[3]{8 + \epsilon_2}$$

لقد حققنا شروط التعريف ويمكننا أن نقول أن $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$ حل المتباينة (9) يناظر هندسيا رسم خطين أفقيين من $8 - \epsilon_1, 8 + \epsilon_2$ الى المنحنى ثم خطين رأسيين من نقطتى التقاطع الى المحور x . الخطان الراسيان يقطعان محور x عند النقطتين $(\sqrt[3]{8 - \epsilon_1}, \sqrt[3]{8 + \epsilon_2})$ اللتين تحددان الفترة $U = (\sqrt[3]{8 - \epsilon_1}, \sqrt[3]{8 + \epsilon_2})$.



شكل ٢٧-٢

لجميع x فى \bar{U} ، x^3 تكون فى V

مثال ٢ . أثبت أن $\lim_{x \rightarrow a} (mx + b) = ma + b$ حيث m, b ثابتان .

سنبرهن فقط الحالة $m > 0$ ونترك الحالات الأخرى للقارئ (مسألة ٢٢) . ليكن V أى جوار $ma + b$ لـ

$$V = ((ma + b) - \epsilon_1, (ma + b) + \epsilon_2)$$

العدد $mx + b$ يكون فى V إذا وإذا فقط كان

$$(ma + b) - \epsilon_1 < mx + b < (ma + b) + \epsilon_2$$

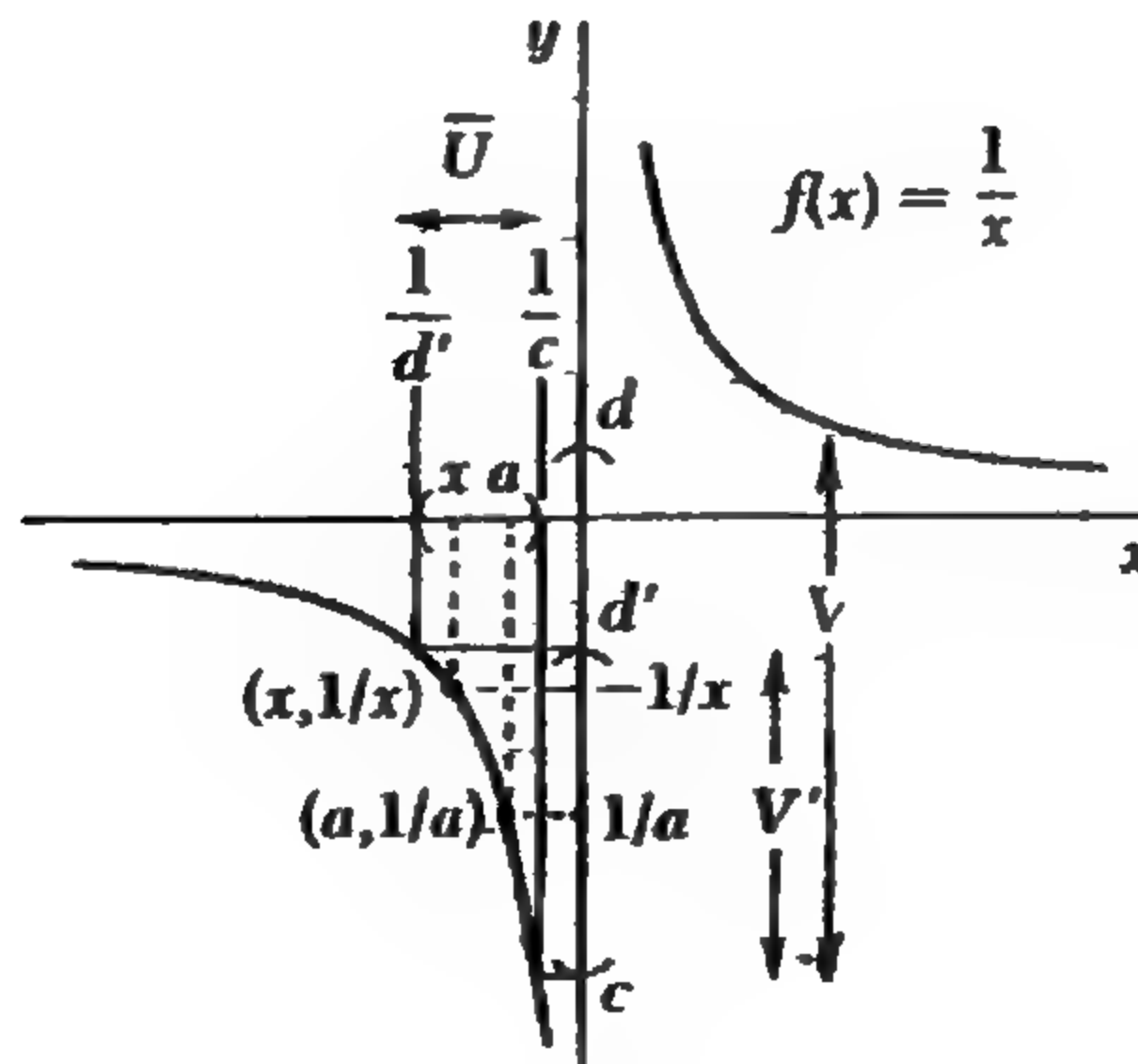
بحل هذه المتباينة لـ x ، نرى أن $mx + b$ يكون فى V إذا وإذا فقط كان

$$a - \frac{\epsilon_1}{m} < x < a + \frac{\epsilon_2}{m}$$

أى إذا وإذا فقط كانت x فى الفترة $(a - \epsilon_1/m, a + \epsilon_2/m)$ وبناء على ذلك يمكننا أن نأخذ : $\bar{U} = (a - \epsilon_1/m, a + \epsilon_2/m)$ بدون a .

مثال ٣ . أثبت أن $\lim_{x \rightarrow a} (1/x) = 1/a$ موجودة لكل $a \neq 0$.

نخمن أن $\lim_{x \rightarrow a} (1/x) = 1/a$ وسنحاول برهنتها . الحالتان $a > 0$ و $a < 0$ يجب معالجتهما كل على حدة . سنعالج الأخيرة ، تاركين الأولى للقارئ (مسألة ٢٣) . نفرض أن $a < 0$. ليكن V أى جوار لـ $1/a$. من المناسب أن نشير الى نقطتيه الطرفيتين بـ d و c أفضل من $1/a + \epsilon_1$ ، $1/a - \epsilon_2$ ، واذن $V = (c, d)$ (شكل ٢ - ٢٨) . إذا كانت $d > 0$ ، نختار جواراً جديداً $V' = (c, d')$ لـ $1/a$ بحيث أن $d' > 0$ ، $V \subseteq V'$. إذا كانت $d \leq 0$ ، فإن V' يمكن اختياره ليكون ذاته . سنوجد جواراً \bar{U} بحيث أن $f(x)$ تكون فى V' طالما كانت x فى \bar{U} . عندئذ بالتأكيد ستكون $f(x)$ فى V . الآن $1/x$ تكون فى V' . وبالتالي تكون فى V ، إذا وإذا فقط كان $c < 1/x < d'$ (بخاصية ١ - ١٠)



شكل ٢ - ٢٨

لكل x فى \bar{U} ، $1/x$ تكون فى V

$$\frac{1}{c} > x > \frac{1}{d'}$$

يمكننا حينئذ أن نأخذ $\bar{U} = (1/d', 1/c)$ بدون a ، بشرط أن نتأكد أن U تحتوي a . لكن هذا بالفعل ، لأن $1/a < d' < c$ تتضمن $1/c > a > 1/d'$.

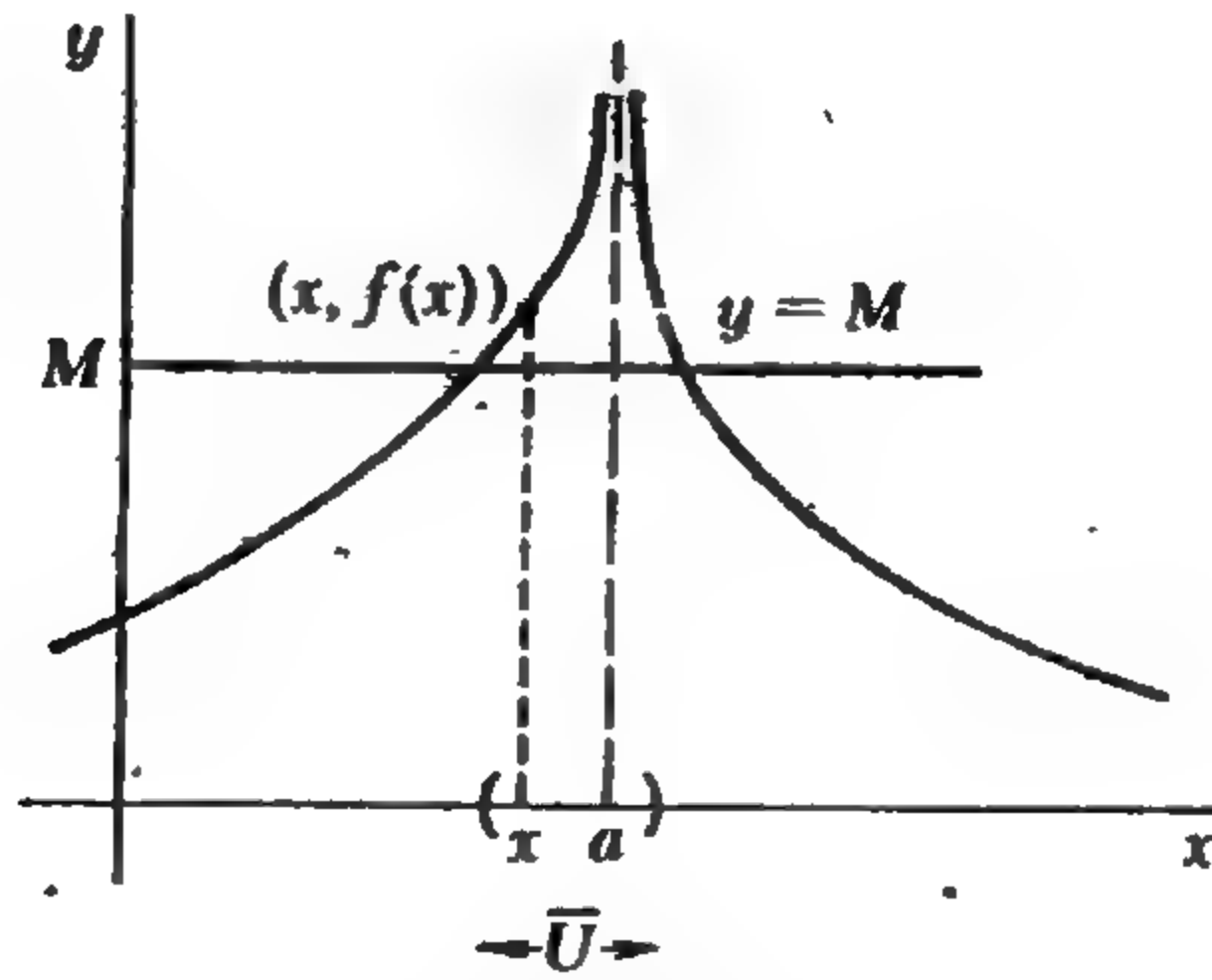
بإرشاد المناقشة السابقة عن النهاية ، يمكننا بسهولة نقل أفكارنا العقلانية عن النهايات من جهة واحدة إلى تعريف رسمي . هو مثل تعريف النهاية ، لكن نحتاج الآن أن نأخذ في الاعتبار ، فقط أعدادا عن يمين أو يسار a .

٢-٧ تعريف . الدالة f لها نهاية يمنية عند a إذا كان يوجد عدد b يحقق ما يأتي : لكل جوار V لـ b ، توجد فترة مفتوحة $I = (a, c)$ ممتدة إلى يمين a بحيث أن $f(x)$ تكون في V لكل x في I .

التعريف للنهاية اليسرى يكون مشابها ، لكن يأخذ فترة مفتوحة (c, a) ممتدة إلى يسار a . نعطي تعريفا رسميا للنهاية اللانهائية . وهو يطابق أفكارنا العقلانية عن ضرورة $f(x)$ كبيرة عندما تكون x قريبة من a .

٢-٨ تعريف . $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ إذا كان لكل عدد M يوجد جوار منقوص \bar{U} لـ a بحيث أن $f(x) > M$ لكل x في \bar{U} .

التعريف موضح في شكل ٢-٢٩ . لكل عدد معطى M مهما كان كبيرا ، يوجد جوار منقوص \bar{U} لـ a بحيث أن لكل x في \bar{U} ، النقطة المناظرة على المنحنى تقع فوق الخط المستقيم $y = M$.
نترك تعريف $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ للقارئ .



شكل ٢-٢٩

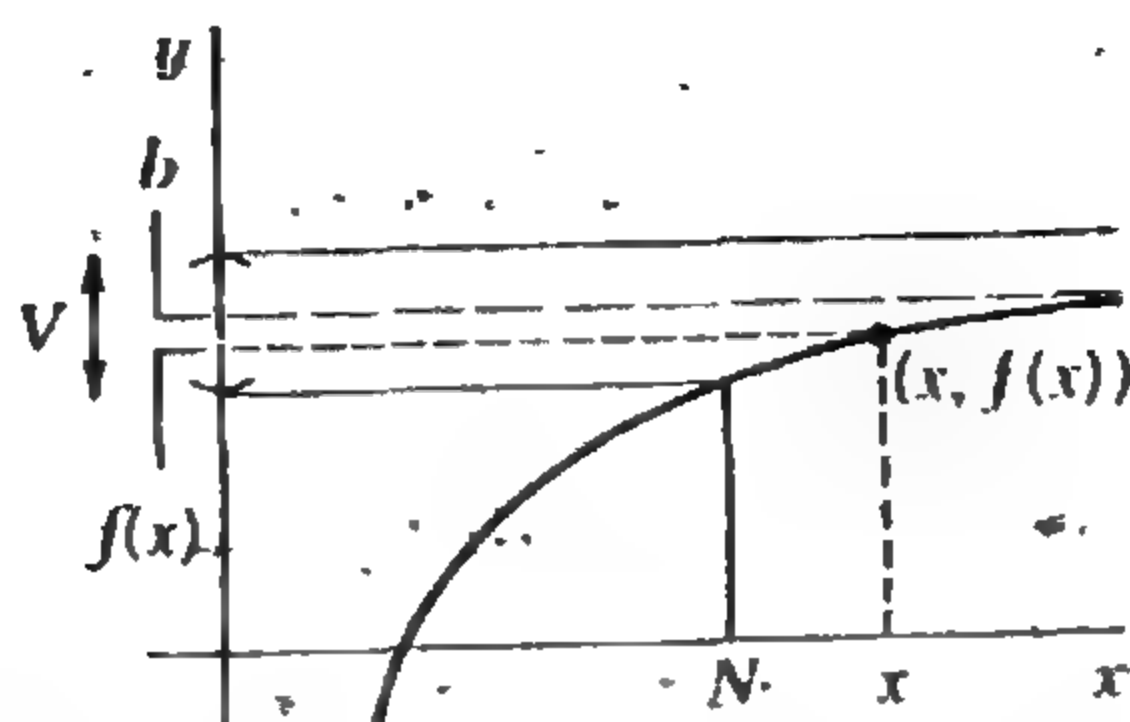
إذا كانت x في \bar{U} ، فإن $f(x) > M$.

يقابل النهايات اللانهائية ، مفهوم الدالة التي لها قيم قريبة من العدد b عندما تكون x كبيرة جدا . مثال ذلك $(x + 1) / (x + 1) + 2$ تكون قريبة من 2 لقيم x الكبيرة ، ونكتب

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x+1} \right) = 2$$

٢-٩ تعريف $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ إذا كان لكل جوار V لـ b ، يوجد عدد N بحيث أن $f(x)$ تكون في V لجميع $x > N$.

التعريف موضح في شكل ٢-٣٠ . المنحنى يقترب أكثر فأكثر إلى الخط المستقيم $y = b$ ، موضحاً أن الخط المستقيم هو خط تقاربي أفقي لـ $f(x)$. تعريف $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ مشابه لذلك .



شكل ٢-٣٠ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ إذا كانت $x > N$ ، فإن $f(x)$ تكون في V

مسائل

١- أوجد جواراً منقوصاً \bar{U} لـ -4 بحيث أن لكل x في \bar{U} تكون $\frac{1}{2}x + 1$ داخل (أ) $\frac{1}{2}$ من -1 (ب) $\frac{1}{4}$ من -1 ، (ج) ϵ من -1 ، حيث $\epsilon > 0$. ارسم الشكل البياني للدالة $y = \frac{1}{2}x + 1$. وفي كل حالة وضع على المحور y الجوار V لـ -1 المحدد بالتفاوت المسموح به وموضحاً على المحور x الجوار المناظر \bar{U} .

٢- أوجد جواراً منقوصاً \bar{U} لـ 2 بحيث أن لكل x في \bar{U} ، تكون $-x + 6$ في الجوار V لـ 4 ، حيث (أ) $V = (3.4, 4.6)$ ، (ب) $V = (3.8, 4.2)$ ، (ج) $V = (3.99, 4.01)$ ، (د) $V = (4 - \epsilon, 4 + \epsilon)$ ، $\epsilon > 0$. ارسم الشكل البياني للدالة $y = -x + 6$ ووضح \bar{U} و V على المحورين x و y على الترتيب ، في الحالتين (أ) ، (ب) .

٣- أوجد جوارين منقوصين لـ 5 بحيث أنه عندما تكون x في أي منهما ، تكون $\frac{1}{2}x - 4$ في الفترة $(-1.8, -1.2)$. ما هو أكبر جوار منقوص لـ 5 يحقق الشرط ؟

٤- أوجد جوارين منقوصين لـ 9 بحيث أنه عندما تكون x في أي منهما ، تكون \sqrt{x} في الفترة $(2.7, 3.4)$. ما هو أكبر جوار منقوص لـ 9 يحقق الشرط ؟

مستخدماً التعريف ، أثبت النهايات الآتية . خطط الشكل البياني للدالة المناظرة ووضح الجوارين \bar{U} و V على المحورين x و y ، على الترتيب

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x} = \sqrt{5} & - & ٧ \quad \lim_{x \rightarrow 2} (-2x + 1) = -3 & - & ٦ \quad \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2) = 4 & - & ٥ \\ \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 3) = 11 & - & ١٠ \quad \lim_{x \rightarrow -2} x^3 = -8 & - & ٩ \quad \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 6) = 12 & - & ٨ \end{array}$$

١١- برهن مباشرة بدون استخدام مثال ٢ أن $\lim_{x \rightarrow 0} (6x + 4) = 4$

١٢- برهن مباشرة بدون استخدام مثال ٢ أن $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

١٣- برهن مباشرة بدون استخدام مثال ٢ أن $\lim_{x \rightarrow a} k = k$ لأي ثابت k . لأي جوار معطى V لـ k ، أوجد أكبر \bar{U} ممكن .

١٤ - أثبت أن $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$

١٥ - أثبت أن $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

١٦ - أثبت أن $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$ ، حيث $a > 0$.

١٧ - إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & x \leq 0, \\ -x + 1, & x > 0, \end{cases}$$

فأوجد $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وبرهن إجابتك. للنهاية اليمنى ، وضع على المحور y الجوار $V = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ ، $I =]1, 2[$ ، وعلى المحور x الفترة المناظرة $(0, c)$ المشار إليها في تعريف ٢ - ٧ . للنهاية اليسرى ، وضع على المحور y الجوار $V_1 = (-1, 1)$ ، $I =]0, 1[$ ، وعلى المحور x الفترة المناظرة $(c, 0)$.

١٨ - إذا كانت

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x < 3, \\ 2x - 5, & x > 3, \end{cases}$$

فأوجد $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ وبرهن إجابتك .

١٩ - أثبت أن $\lim_{x \rightarrow a} (1/x^2)$ موجودة إذا كانت $a \neq 0$.

٢٠ - أثبت أن $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x+6}$ موجودة إذا كانت $a > -6$.

٢١ - لماذا في مثال ٣ من الضروري اختيار جوار جديد V إذا كانت $d > 0$ ؟

٢٢ - (أ) أين في برهان $\lim_{x \rightarrow a} (mx + b) = ma + b, m > 0$ ، في مثال ٢ ، يستخدم الشرط

$m > 0$ ؟ (ب) أكمل برهان $\lim_{x \rightarrow a} (mx + b) = ma + b$ في مثال ٢ ، في الحالتين $m = 0$ و

$m < 0$.

٢٣ - أكمل البرهان $\lim_{x \rightarrow a} (1/x) = 1/a$ في مثال ٣ في حالة $a > 0$.

٢٤ - أوجد جوارا منقوصا \bar{U} لـ 0 بحيث أن $1/x^2 > 100$ لجميع x في \bar{U} . أوجد جوارا منقوصا \bar{U}_1

لـ 0 بحيث أن $1/x^2 > 1000$ لجميع x في \bar{U}_1 . أثبت أن $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x^2) = \infty$

٢٥ - أثبت أن $\lim_{x \rightarrow 3} (3 + 1/x) = 3$

٢٦ - أكتب تعريف $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

٢٧ - عرف $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ وفسرها هندسيا .

٢٨ - اثبت أن التقاطع والاتحاد لجوارين لـ a هما جوار لـ a

٢٩ - وضع أن التعريف الآتي للاتصال يكافئ تعريف ٢ - ٤ : الدالة f تكون متصلة عند a إذا

كان لكل جوار V لـ $f(a)$ يوجد جوار U لـ a بحيث أن $f(x)$ تكون في V لجميع x في U .

٣٠ - لتكن f دالة لانهاية عند a . دع $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. هل تعتقد أن لكل فترة متماثلة مفتوحة I

حول b ، أي فترة منتصفها b ، من الممكن إيجاد جوار منقوص متماثل \bar{U} لـ a بحيث أن

$f(x)$ تكون في I لكل x في \bar{U} ؟ . أعط أسبابا لرأيك ووضح على تخطيط للشكل البياني

لـ f .

نظريات النهاية :

الآن وقد عرفنا ما يقصد بالنهاية ، يمكننا بدقة استخدام المناقشة الدارجة بيند ٢-٥ ، لإيجاد النهايات . إيجاد النهايات مباشرة من التعريف ، كما فعلنا في الأمثلة بالبند السابق ، أمر صعب لجميع الدوال ما عدا البسيطة منها . في هذا البند سنعطى بعض النظريات العامة التي تمكنا من تجنب الاستخدام المباشر لتعريف النهاية . المادة في هذا البند وفي البند التالي نظرية وأحيانا صعبة ، لكن توفير المنهج مستقبلا بالمجان بهذه النتائج سيكون أكثر من معوض عن الوقت الذي نصرفه في الحصول عليها .

نبدأ بنهائيتين هما حالتان خاصتان من $\lim_{x \rightarrow a} (mx + b) = ma + b$ ، التي أثبتت في مثال ٢ بيند ٢-٢ .
٧ . الأولى نحصل عليها بوضع $b = 0$ و $m = 1$ والثانية بوضع $b = k$ و $m = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a \quad ٢ - ١٠$$

$$\lim_{x \rightarrow a} k = k \text{ لـ } k \text{ ثابت} \quad ٢ - ١١$$

عند إيجاد نهاية مثل $\lim_{x \rightarrow 4} [3x + x(x-2)]$ كنا نفكر كما يلي . عندما تكون x قريبة من 4 ،
لكن لا تساوي 4 ، فإن $3x$ تكون قريبة من $3(4) = 12$ ، $x(x-2)$ تكون قريبة من $4(2) = 8$. لذلك $3x + x(x-2)$ تكون قريبة من $12 + 8 = 20$. عمليا ، أننا نقول إن $\lim_{x \rightarrow 4} 3x = 12$ و $\lim_{x \rightarrow 4} x(x-2) = 8$ وأن

$$\lim_{x \rightarrow 4} [3x + x(x-2)] = \lim_{x \rightarrow 4} 3x + \lim_{x \rightarrow 4} x(x-2)$$

هذه المعادلة الأخيرة هي تطبيق للنظرية التي تقول إذا كانت g و f دالتين ، فإن
(1) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
فـ ، مثالنا $a = 4$ ، $f(x) = 3x$ ، $g(x) = x(x-2)$. بالكلمات ، نهاية حاصل جمع دالتين تساوي حاصل جمع نهايتي الدالتين .

عندما ذكرنا الآن أن $x(x-2)$ تكون قريبة من $4(2)$: عمليا قلنا إن

$$\lim_{x \rightarrow 4} x(x-2) = (\lim_{x \rightarrow 4} x) [\lim_{x \rightarrow 4} (x-2)]$$

هذا هو تطبيق للنظرية

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)][\lim_{x \rightarrow a} g(x)]$$

بالكلمات ، نهاية حاصل ضرب دالتين تساوي حاصل ضرب نهايتي الدالتين . هنا $f(x) = x$ ، $g(x) = x-2$ بالفحص الدقيق للمناقشة التي استخدمت لإيجاد النهايات في الأمثلة بالبندين ٢-٥ ،
٢-٦ يبين أن (١) و (٢) قد تكرر استخدامها ، مع نظريات مماثلة متناقشها الآن .

١٢-٢ نظرية . اذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ موجودتين ، فهكذا توجد أيضا النهايات التي بالطرف الأيسر أدناه ويكون

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad (*) \text{ (أولاً)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ حيث } k \text{ ثابت . (ثانياً)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)][\lim_{x \rightarrow a} g(x)] \text{ (ثالثاً)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \text{ بفرض أن } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \text{ (رابعاً)}$$

. توجد نظريات مماثلة للنهايات اليمنى واليسرى . برهان هذه النظرية سيعطى فى بند ١٠ - ٢ .
نظرية ١٢-٢ (أولاً) يمكن امتدادها الى حواصل جمع والى فروق أكثر من دالتين . فمثلاً ، بكتابة
 $f(x) - g(x) + h(x)$ كحاصل جمع دالتين بادخال أقواس واستخدام نظرية ١٢-٢ (أولاً) مرتين ،
يكون لدينا

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x) + h(x)] &= \lim_{x \rightarrow a} ([f(x) - g(x)] + h(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] + \lim_{x \rightarrow a} h(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) + \lim_{x \rightarrow a} h(x) \end{aligned}$$

بالمثل ، نظرية ١٢-٢ (ثالثاً) يمكن امتدادها لحاصل ضرب ثلاث دوال أو أكثر . لاحظ أن نظرية ١٢-٢ (ثانياً) هى حالة خاصة لنظرية ١٢-٢ (ثالثاً) نحصل عليها بوضع $g(x) = k$ واستخدام ١١-٢ .

لتجنب المزيد من الأقواس ، سنرمز لـ $(g(x))^n$ بـ $g^n(x)$. إذا كانت n عدداً صحيحاً غير سالب ، فلدينا بامتداد نظرية ١٢-٢ (ثالثاً) لحواصل ضرب دوال متعددة

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} g^n(x) &= \lim_{x \rightarrow a} [g(x)g(x) \cdots g(x)] \\ &= [\lim_{x \rightarrow a} g(x)][\lim_{x \rightarrow a} g(x)] \cdots [\lim_{x \rightarrow a} g(x)] \\ (3) \quad &= [\lim_{x \rightarrow a} g(x)]^n. \end{aligned}$$

إذا كانت n عدداً صحيحاً سالباً ، فبنظرية ١٢-٢ (رابعاً) ، يكون

$$\lim_{x \rightarrow a} g^n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g^{-n}(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} 1}{\lim_{x \rightarrow a} g^{-n}(x)}$$

* فى المعادلات التى تحوى \pm أكثر من مرة نقرأ اما الإشارة العليا واما الإشارة السفلى فى كل المعادلة .

* * القارىء قابل طريقة الكتابة هذه فى حساب المثلثات ، حيث $(\sin x)^2$ تكتب عادة $\sin^2 x$.

بما أن $n > 0$ ، يمكن تطبيق (٣) على مقام الكسر الأخير ، ويكون لدينا

$$\frac{\lim_{x \rightarrow a} 1}{\lim_{x \rightarrow a} g^{-n}(x)} = \frac{1}{[\lim_{x \rightarrow a} g(x)]^{-n}} = [\lim_{x \rightarrow a} g(x)]^n$$

لقد أثبتنا النظرية الآتية ،

٢ - ١٣ نظرية . $\lim_{x \rightarrow a} g^n(x) = [\lim_{x \rightarrow a} g(x)]^n$ لكل الأعداد الصحيحة n ، بفرض أن $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ موجودة .

هنا ولأجلاً نصوص النظريات بقصد أن تكون سارية المفعول فقط لقيم الحروف التي تجعل المقادير ذات معنى . فمثلاً ، نظرية ٢ - ١٣ لا يكون لها معنى إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0, n = -3$

بالاستعانة بنظريات هذا البند يمكننا إيجاد نهايات دوال كثيرة بأكثر سهولة عن استخدام التعريف مباشرة ، كما فعلنا في الأمثلة في البند ٢ - ٧ . نعطي توضيحين لاستخدامها .

مثال ١ . أوجد $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 5)$

لدينا

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 5) &= \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - \lim_{x \rightarrow 3} 2x + \lim_{x \rightarrow 3} 5 \\ &= (\lim_{x \rightarrow 3} x)(\lim_{x \rightarrow 3} x) - 2 \lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 5 \\ &= 3(3) - 2(3) + 5 = 8 \end{aligned}$$

من ٢ - ١٠ مكررة ثلاث مرات
من ٢ - ١١

مثال ٢ . أثبت أن الدالة f المعرفة بـ

$$f(x) = \frac{(x^2 - 5x)(x + 2)^2}{x^3 - 10}$$

متصلة عند 1 .

لدينا $f(1) = 4$ ويجب إثبات أن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$ لدينا

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 5x)(x + 2)^2}{x^3 - 10} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5x)(x + 2)^2}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 10)}$$

من ٢ - ١٢ (رابعاً)

$$= \frac{[\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5x)][\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2)^2]}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 10)}$$

من ٢ - ١٢ (ثالثاً)

$$\text{من ٢ - ١٢ (أولاً) مرتين ،} \quad \frac{[\lim_{x \rightarrow 1} x^7 - \lim_{x \rightarrow 1} 5x][\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2)]^2}{\lim_{x \rightarrow 1} x^3 - \lim_{x \rightarrow 1} 10} = \frac{1^7 - 5}{1^3 - 10} = \frac{-4}{-9} = \frac{4}{9}$$

$$\text{من ٢ - ١٣ مرتين ،} \quad \frac{[(\lim_{x \rightarrow 1} x)^7 - 5 \lim_{x \rightarrow 1} x][\lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 2]^2}{(\lim_{x \rightarrow 1} x)^3 - \lim_{x \rightarrow 1} 10} = \frac{[1^7 - 5 \cdot 1][1 + 2]^2}{1^3 - 10} = \frac{(-4) \cdot 9}{-9} = 4$$

$$\text{من ٢ - ١٠ أربع مرات ،} \quad \frac{[1^7 - 5(1)][1 + 2]^2}{1^3 - 10} = 4$$

٢ - ١١ مرتين

كما توضح هذه الأمثلة ، مسألة إيجاد النهاية يمكن لدوال كثيرة اختزالها بالاستخدام المتكرر لنظرية ٢ - ١٢ إلى إيجاد $\lim_{x \rightarrow a} k$ و $\lim_{x \rightarrow a} x$ رغم أن نظريات النهاية تستخدم صراحة تعريف النهاية غير اللازم في مسائل كثيرة ، إلا أن التعريف يكون دائما في الخلفية ، إذ أن كل نظرية نهاية تعتمد عليه .

الشرط في نظرية ٢ - ١٢ (رابعاً) بأن $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ هام . هذا لا يعني أن $f(x)/g(x)$ حتماً ليس لها نهاية إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، بل إن النظرية لا تستخدم لها في إيجاد النهاية .

مثال ٣ . أوجد $\lim_{x \rightarrow -2} [(2x + 4)/(x^2 + 5x + 6)]$

بما أن $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 5x + 6) = 0$ فإن نظرية ٢ - ١٢ (رابعاً) لا يمكن استخدامها . إذا كانت نهاية البسط ليست صفراً ، فالكسر سيصبح كبيراً موجباً أو سالباً لـ x القريبة من -2 والنهاية لا توجد . هنا ، إذ أن نهاية البسط هي أيضاً صفراً ، من المحتمل أن يكون الكسر له نهاية . لدينا

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + 4}{x^2 + 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x + 2)}{(x + 2)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2}{x + 3}$$

في الكسر الأخير نهاية المقام لا تساوي صفراً ، واذن يمكن تطبيق نظرية ٢ - ١٢ (رابعاً) عليه ويكون

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + 4}{x^2 + 5x + 6} = \frac{\lim_{x \rightarrow -2} 2}{\lim_{x \rightarrow -2} (x + 3)} = \frac{2}{1} = 2$$

نظرية ٢ - ١٢ (أولاً) تقول أنه إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ موجودتين ، فهكذا توجد نهاية دالة حاصل الجمع $f(x) + g(x)$. العكس ليس صحيحاً . لا يمكننا أن نستنتج من وجود $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ وجود $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$. فمثلاً ، إذا كانت $f(x) = x - 1/x + 3$ وكانت $g(x) = 1/x$ فإن $f(x) + g(x) = x + 3$ والنهاية $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)]$ توجد ، بينما لا f ولا g لها نهاية عند 0 . توجد ملاحظات مماثلة بالنسبة إلى نهايات حواصل الضرب وخارج القسمة .

٢ - ١٤ نظرية $\lim_{x \rightarrow a} x^r = a^r$ لكل كسرية r ولكل a حيث a^r يكون معرفا . الدالة f المعرفة بـ $f(x) = x^r$ تكون اذن متصلة عند كل a هكذا .

هذا يعنى أن الشكل البياني لـ $y = x^{5/3}$ ، مثلا ، ليس به ثقب أوله قفزات فى أى مكان . للعدد الصحيح r ، النظرية تنتج مباشرة من نظرية ٢ - ١٣ . البرهان للعدد غير الصحيح r سيعطى فى بند ٢ - ١٠ . الدالة $f(x) = x^\alpha$ حيث α عدد حقيقى ، تسمى دالة قوى . فى الفصل السابع ستثبت ما هو أعم وهو أن f تكون متصلة لجميع قيم α الحقيقية .

رغم أن النظريات التى درسناها الى الآن تمكتنا من ايجاد النهايات للدوال كثيرة ، الا أنها ليست كافية لمعالجة كل ما سوف نقابله . حتى النهاية البسيطة مثل $\lim_{x \rightarrow 6} \sqrt{x^2 - 3x - 8}$ لا يمكن حسابها بها . ما نحتاج اليه لهذه النهاية هو التعميم للأسس الكسرية لنظرية ٢ - ١٣ ، التى نصت على أن $\lim_{x \rightarrow a} g^n(x) = [\lim_{x \rightarrow a} g(x)]^n$ اذا كانت n عددا صحيحا . بدلا من اثبات تعميم نظرية ٢ - ١٣ الى الأسس الكسرية سنعطى نتيجة أعم التى منها يستتج التعميم بسهولة والتى سيكون لها أهميتها فيما بعد . استعدادا لها يجب على القارئ أن يراجع المادة عن الدوال التركيبية فى البند ٢ - ٤ .

٢ - ١٥ نظرية . اذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ وكانت الدالة f متصلة عند b فان

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x))$$

بتعبير آخر ، \lim ، f يمكن تبادلهما . البرهان سيعطى فى بند ٢ - ١٠ . يمكننا الآن تعميم نظرية ٢ - ١٣ الى الأسس الكسرية .

٢ - ١٦ نظرية . $\lim_{x \rightarrow a} g^r(x) = [\lim_{x \rightarrow a} g(x)]^r$ لجميع r الكسرية بشرط أن $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ تكون موجودة .

$$\lim_{x \rightarrow a} g^r(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = [\lim_{x \rightarrow a} g(x)]^r$$

البرهان ضع $f(z) = z^r$ ، فيكون $g^r(x) = f(g(x))$ ويكون $g^r(x)$ قد عبر عنها بتركيب f مع g . أيضا f متصلة فى كل مكان بنظرية ٢ - ١٤ . واذن بنظرية ٢ - ١٥ يكون

مثال ٤ . أوجد $\lim_{x \rightarrow 6} \sqrt{x^2 - 3x - 8}$

من نظرية ٢ - ١٦ حيث $n = \frac{1}{2}$ و $g(x) = x^2 - 3x - 8$

$$\lim_{x \rightarrow 6} (x^2 - 3x - 8)^{1/2} = [\lim_{x \rightarrow 6} (x^2 - 3x - 8)]^{1/2} = \sqrt{10}$$

فى حساب $\lim_{x \rightarrow 6} (x^2 - 3x - 8)$ من الطبيعى أننا استخدمنا نظرية ٢ - ١٢ والنظريات الأخرى عن النهايات .

مثال ٥ . أوجد

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[x^2 + \frac{(x^3 + 1)^{-2/3}}{x \sqrt{x+1}} \right]$$

من نظرية ٢ - ١٢ ، لدينا

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[x^2 + \frac{(x^3 + 1)^{-2/3}}{x \sqrt{x+1}} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 1)^{-2/3}}{(\lim_{x \rightarrow 2} x)(\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x+1})}$$

باستخدام نظرية ٢ - ١٦ مرتين ، المدار الأخير يمكن كتابته

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \frac{[\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 1)]^{-2/3}}{(\lim_{x \rightarrow 2} x) \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} (x+1)}} = 4 + \frac{9^{-2/3}}{2\sqrt{3}}$$

مسائل :

أوجد النهايات الآتية ، مشيراً عند كل خطوة الى نظريات النهاية التي تستخدمها :

$$\lim_{u \rightarrow 1/2} (4u^3 - 5u) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (9x^4 - 7) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 5} 4x^2 = 100 \quad \lim_{z \rightarrow -1} 5z^3 = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow 64} \sqrt[3]{x} = 4 \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1+x}{1-x} = -2 \quad \lim_{t \rightarrow -1} \frac{\pi(4-2t^2)}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 5)(x-3)^2 = 0$$

$$\lim_{u \rightarrow 6} u \sqrt{u+1} = 30 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x(x+1)}{x^2-1}} + 2 = 1$$

أوجد النهايات الآتية ، ملاحظاً عقلياً نظريات النهاية التي تستخدمها :

$$\lim_{t \rightarrow -2} (5 - 3t^3)^{1/2} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + \sqrt{6})(x-3)^3 = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 - x^2 + 3x + 1) = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 1} \frac{h+1}{h-1} = \infty \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t+1}{3t-2} = -\frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(9x-8)}{4} = -6$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt[3]{5-4h} = \sqrt[3]{5} \quad \lim_{y \rightarrow 8} (7\sqrt[3]{y} + 1) = 19 \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4-x^2}{2+x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 1)\sqrt{x^2 - 5} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) \frac{x}{x-1} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2}{x^2 - 3x - 4} = -\frac{3}{5}$$

$$\lim_{u \rightarrow 3} \frac{u^2 - 8u + 15}{u-3} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \left[x + \frac{(7x+4/x)(x+3)}{2x(5-x^2)} \right] = -\frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2x} = \frac{2}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2 - 7x + 5}{2x^2 + 3x - 2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 6x + 9} = \frac{2}{3}$$

حدد ما اذا كانت كل من الدوال الآتية متصلة عند العدد المشار اليه ، واذا لم تكن كذلك ، فحدد ما اذا كانت متصلة يسارا أو يمينا عند ذلك العدد :

$$f(x) = 2x^4 - \frac{1}{3}x^2 + 7x + 1; 2 \quad - ٢٩$$

- ٣٠

$$g(t) = \frac{t+1}{t}; -1$$

- ٣٢

$$G(x) = (-\frac{1}{2}x + 1)^7; a \quad - ٣١$$

$$g(x) = \sqrt{x}; 0$$

- ٣٤

$$u(x) = \frac{1}{x-1}; 1 \quad - ٣٣$$

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & t \leq 0, \\ t^2 - 1, & t > 0; 0 \end{cases} \quad - ٣٦$$

$$h(x) = \frac{\sqrt{x+1} + 5}{\sqrt{x-1}}; 4 \quad - ٣٥$$

$$f(x) = \frac{x}{|x|}; 0$$

- ٣٨

$$f(y) = \frac{y^3 + y + 1}{(2y^2 + 1)(y - 2)}; c \quad - ٣٧$$

$$f(x) = \frac{x}{[x]}; 3 \quad - ٣٩$$

٤٠ - بافتراض نظرية ٢ - ١٢ (ثالثا) عن نهاية حاصل ضرب دالتين ، أذكر واثبت تعميمها لحاصل ضرب ثلاث دوال .

٤١ - اثبت أن الدالة الثابتة $f(x) = c$ متصلة عند أى مكان .

٤٢ - برهن مباشرة بدون استخدام نظرية ٢ - ١٣ أن $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ لعدد صحيح n . ما هى القيود التى يجب وضعها على a ؟

٤٣ - لقد أشرنا الى أن وجود $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ لا يعنى وجود $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ أو $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$. اثبت ،

مع ذلك ، أنه اذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ موجودتين ، فإن $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ تكون موجودة [ارشاد : عبر عن $g(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f(x) + g(x)$.

٢ - ٩

الدوال المتصلة

نبرهن هنا بعض حقائق مفيدة عن الدوال المتصلة .

٢ - ١٧ نظرية . دالة كثيرة الحدود متصلة عند كل مكان

البرهان لتكن $p(x)$ كثيرة الحدود

$$p(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

ولتكن a أى عدد . لدينا

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = b_n \lim_{x \rightarrow a} x^n + b_{n-1} \lim_{x \rightarrow a} x^{n-1} + \dots + b_1 \lim_{x \rightarrow a} x + \lim_{x \rightarrow a} b_0$$

$$= b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \dots + b_1 a + b_0 = p(a)$$

هذا يوضح أن p متصلة عند a . لكن a هي أى عدد . لذلك p تكون متصلة عند أى مكان .

٢ - ١٨ نظرية . إذا كانت الدالتان g و f متصلتين عند a ، فهكذا أيضاً تكون الدوال المعرفة بـ

$$(أولاً) \quad f(x) \pm g(x)$$

$$(ثانياً) \quad f(x)g(x)$$

$$(ثالثاً) \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{بفرض أن } g(a) \neq 0$$

$$(رابعاً) \quad f^r(x) \quad \text{حيث } r \text{ كسرية .}$$

جزءاً (أولاً) و (ثانياً) يمكن تعميمهما لحواصل جنح وحواصل ضرب أكثر من دالتين . برهانا نظرية ٢ - ١٨ ورفيقتها نظرية ٢ - ١٩ تتركبان للقارئ (المسائل من ١٤ الى ١٧) .

٢ - ١٩ نظرية . إذا كانت الدالة g متصلة عند a والدالة f متصلة عند $g(a)$ ، فإن الدالة التركيبية F المعرفة بـ $F(x) = f(g(x))$ تكون متصلة عند a .

اننا نحدد ما اذا كانت دالة متكونة بتكرار حواصل جمع وفروق وحواصل ضرب وخارج قسمة وجذور لدوال أخرى متصلة بفحص أجزائها . اذا كانت هذه متصلة ، فالدالة الأصلية تكون متصلة ، ماعدا عند تلك الأعداد التي تجعل المقامات صفرا أو التي تؤدي الى أعداد تخيلية . المثال الآتى يوضح ذلك .

مثال ١ . عند أى أعداد تكون

$$f(x) = \frac{3\sqrt{x+4}}{(x^2+1)(x^2-5)}$$

متصلة ؟

كثيرات الحدود $3, x+4, x^2+1, x^2-5$ متصلة عند أى مكان . بنظرية ٢ - ١٨ (رابعاً) $\sqrt{x+4}$ تكون متصلة لكل $x \geq -4$. بالجزء (ثانياً) لنفس النظرية ، حاصل الضرب للدوال المتصلة يكون متصلاً ، لذلك فإن البسط والمقام لـ $f(x)$ يكونان متصلين لكل $x \geq -4$. بالجزء (ثالثاً) ، خارج القسمة يكون متصلاً لكل $x \geq -4$ عدا الأعداد x التي تجعل المقام صفراً . لذلك f تكون متصلة لكل $x \geq -4$ عدا $\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}$. برهان مماثل لذلك المستخدم فى مثال ١ يثبت النظرية الآتية .

٢ - ٢٠ نظرية . الدوال الكسرية والجبرية تكون متصلة أينما كانت معرفة .

هذا يتضمن أن نهايات هذه الدوال تكون مساوية لقيمتها .

النظريات فى هذا البند ستمكثنا من ايجاد نهايات معظم الدوال البسيطة بسهولة . من الآن

فصاعدا سوف نحتاج لاستخدام تعريف النهاية أحيانا فقط . نحتسّم هذا البند بثلاث تمهيدات ونظرية سوف نحتاجها فيما بعد *

بما أن $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$ ، فإننا نتوقع أن $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) = 0$ وبالعكس . هذا يوضح الأولى من تمهيداتنا .

٢ - ٢١ تمهيدية . $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ اذا واذا فقط كان $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - b] = 0$

لاحظ أن النص يعنى أن وجود احدى النهايتين يتضمن وجود الأخرى . من الناحية العملية عادة تكون أبسط طريقة لاثبات أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ هي اثبات أن $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - b] = 0$ التمهيدية تؤكد صحة هذه الطريقة .

البرهان . التمهيدية هي نص « اذا واذا فقط » ، ونبرهن كل جزء على حدة . للجزء « اذا كان فقط » ، نفترض أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ويجب أن نثبت أن $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - b] = 0$. بنظرية ٢ - ١٢ (أولا) والنهاية $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - b]$ تكون موجودة ويكون

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - b] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} b = b - b = 0$$

لبرهنة الجزء « اذا كان » ، نفترض أن $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - b] = 0$. نكتب $f(x)$ على الصورة $f(x) = [f(x) - b] + b$ بنظرية ٢ - ١٢ (أولا) حيث $f(x) - b$ تلعب دور $f(x)$ فى منطق تلك النظرية ، النهاية $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ تكون موجودة ويكون

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} [(f(x) - b) + b] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - b] + \lim_{x \rightarrow a} b = 0 + b = b \end{aligned}$$

الحيلة المستخدمة هنا باضافة وطرح نفس العدد أمر عادى والغرض هو التعبير عن كمية ، هنا $f(x)$ ، فى صورة أكثر نفعا .

٢ - ٢٢ تمهيدية

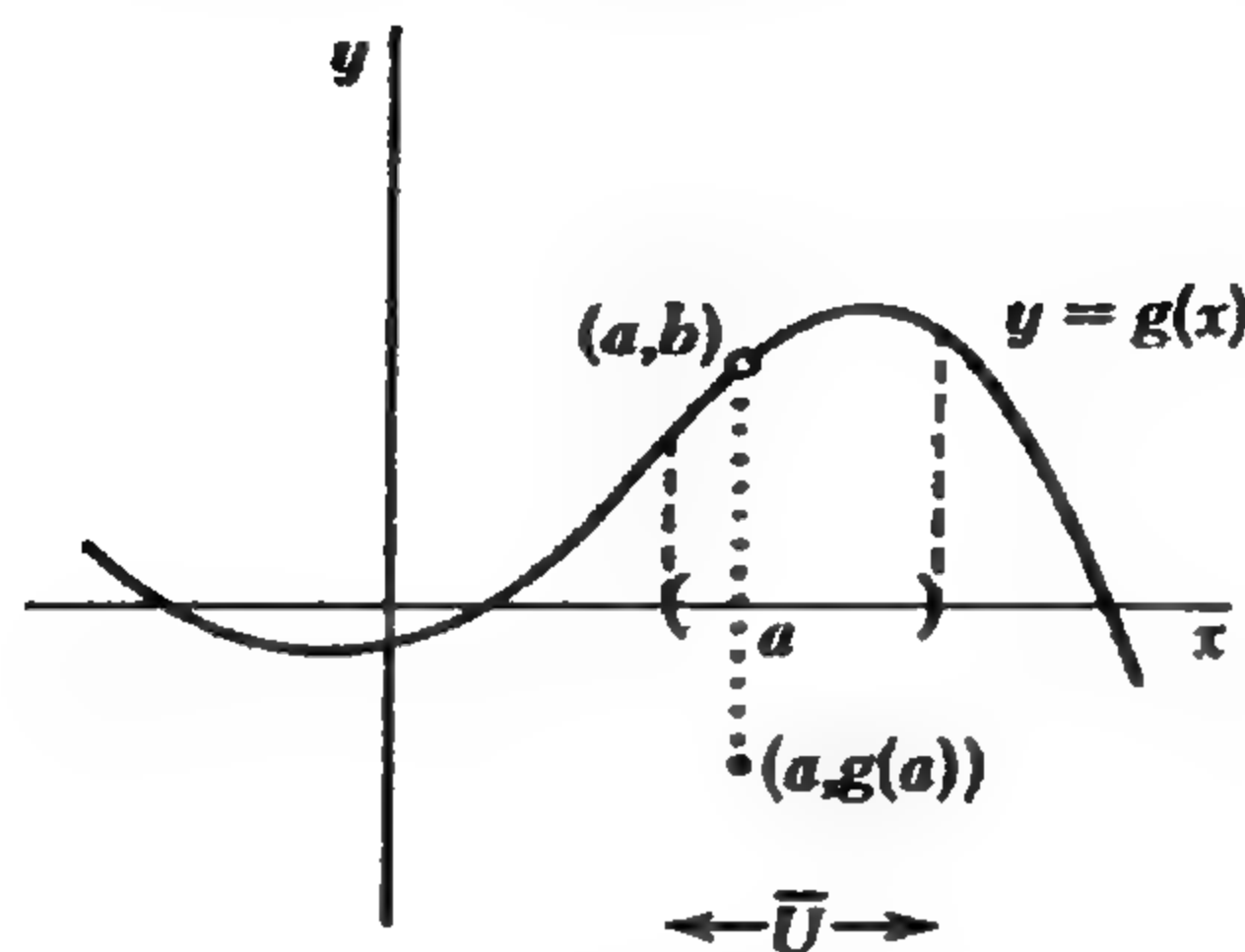
(أولا) اذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} g(x) > 0$ ، فانه يوجد جوار \bar{U} منقوص لـ c . بحيث أن $g(x) > 0$ لكل x فى \bar{U} .

(ثانيا) اذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} g(x) < 0$ ، فانه يوجد جوار منقوص \bar{U} لـ c بحيث أن $g(x) < 0$ لكل x فى \bar{U} .

* التمهيدية هي نتيجة عادة لها أهمية قليلة بالنسبة الى ذاتها لكنها مفيدة فى برهنة النظريات .

الجزء الأول من التمهيدية موضح في شكل ٢ - ٣١ . هو يقول أن لقيم x القريبة قريبا كافيا من a ، الشكل البياني يجب أن يقع فوق المحور x ، رغم أن $g(x)$ نفسها قد تكون سالبة أو غير موجودة .

البرهان (أولا) لتكن $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b > 0$ ، وليكن V الجوار $(b/2, 3b/2)$ لـ b .
بتعريف النهاية يوجد جوار منقوص \bar{U} لـ a بحيث أن لكل x في \bar{U} ، $g(x)$ تكون في V .
لكن عندما تكون x (g) في \bar{V} ، فإن $g(x) > b/2 > 0$. برهان (ثانيا) يكون مشابها .
التمهيدية الآتية هي جزء عكسي لهذه . وهي أيضا موضحة بشكل ٢ - ٣١ .



شكل ٢ - ٣١

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b > 0$ فإن الشكل البياني يقع فوق المحور x بالقرب من (a, b) .

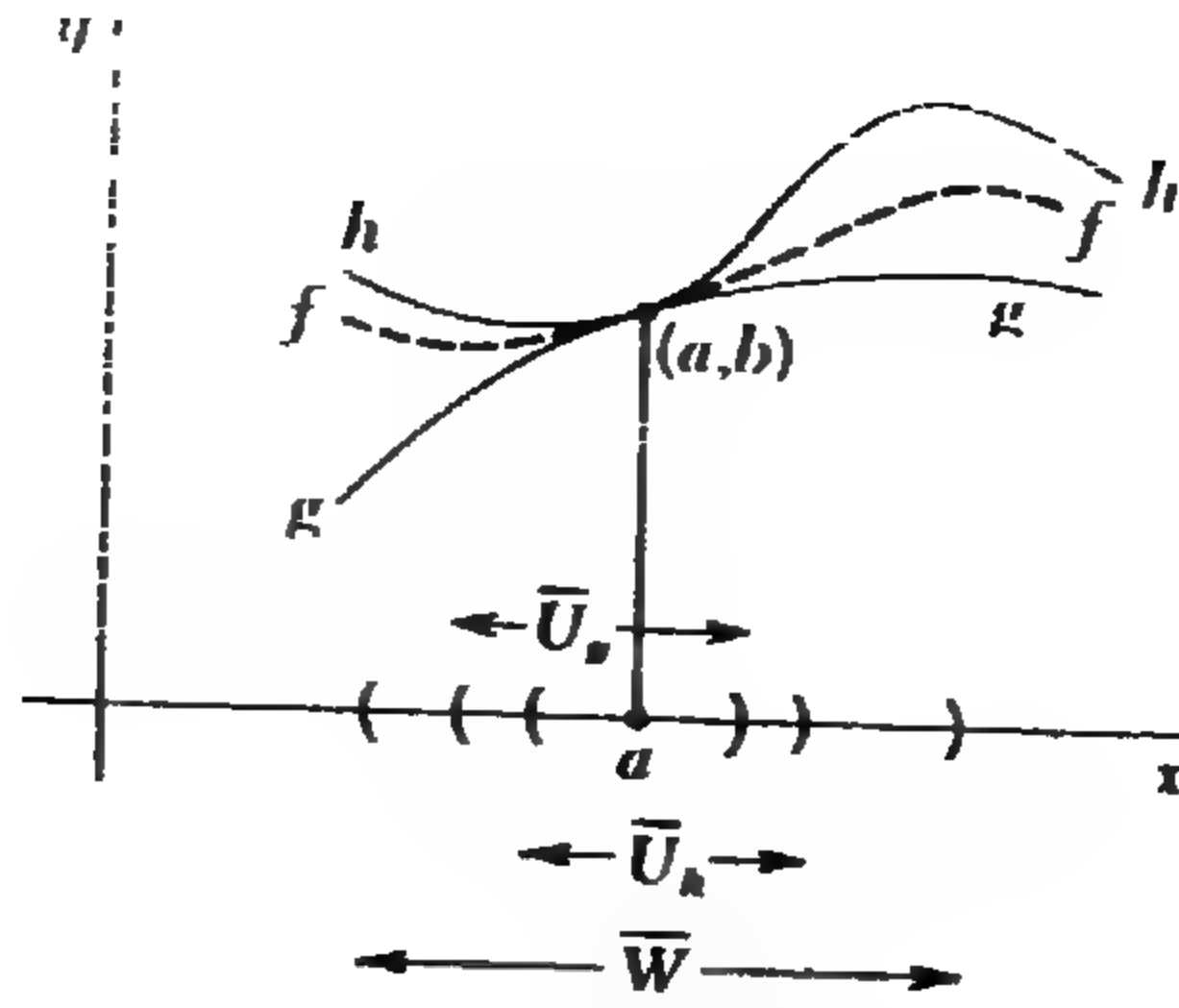
٢ - ٢٣ تمهيدية

(أولا) إذا كانت $g(x) \geq 0$ لكل x في جوار منقوص ما \bar{U} لـ a وكانت $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ موجودة ، فإن $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \geq 0$

(ثانيا) إذا كانت $g(x) \leq 0$ لكل x في جوار منقوص ما \bar{U} لـ a وكانت $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ موجودة ، فإن $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \leq 0$.

البرهان (أولا) بالفرض ، $g(x) \geq 0$ لكل x في \bar{U} . نفرض أن $\lim_{x \rightarrow a} g(x) < 0$. بتمهيدية ٢ - ٢٢ (ثانيا) يكون لدينا $g(x) < 0$ لكل x في جوار منقوص ما \bar{U}_1 لـ a . بما أن \bar{U} و \bar{U}_1 يجب أن يتداخلا فهذا يؤدي الى تناقض . ومن ثم $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \geq 0$ برهان (ثانيا) يكون مشابها .

نفرض أننا نريد اثبات أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجودة . قد يكون من الممكن إيجاد دالتين h و g بحيث أن $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ لكل x قريبة قريبا كافيا من a بحيث أن $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ تكونان موجودتين ومتساويتين (شكل ٢ - ٣٢) . بما أن $g(x)$ و $h(x)$ قريبتان من نفس العدد لـ x قريبة من a ، فهذا يفسر $f(x)$ أن تكون قريبة من نفس هذا العدد ومن ثم يكون لها نهاية . هذا هو محتوى النظرية الآتية .



شكل ٢-٢٢

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ تكون موجودة ومساوية لـ $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$

٢٤ - ٢ نظرية الحصر . إذا كانت $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ لكل x في جوار منقوص ما \bar{W} لـ a ، وكانت $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ موجودتين ومتساويتين ، فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ تكون موجودة ويكون $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$.

البرهان . $b = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$ ، ودع $V = (c, d)$ أي جوار لـ b . يوجد جواران منقوصان \bar{U}_g و \bar{U}_h لـ a بحيث أن $g(x)$ تكون في V لكل x في \bar{U}_g ، $h(x)$ تكون في V لكل x في \bar{U}_h . من ثم إذا كانت x في التقاطع $\bar{U}_g \cap \bar{U}_h$ ، فإن كلا من $g(x)$ و $h(x)$ تكون في V ، ويكون $c < g(x) < h(x) < d$. بالإضافة الى ذلك ، إذا كانت x في $\bar{W} \cap (\bar{U}_g \cap \bar{U}_h)$ فإن $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ وأيضا

$$c < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < d$$

لقد أثبتنا أنه يوجد جوار منقوص لـ a ، هو $\bar{W} \cap \bar{U}_g \cap \bar{U}_h$ بحيث أن لكل x فيه ، $f(x)$ تكون في V . ومن ثم $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ تكون موجودة وتساوي b .

مسائل :

أوجد أين تكون كل دالة مما يأتي متصلة :

$$1 - z^3 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{4} \quad 2 - x^2 \sqrt{x-1} \quad 3 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \quad 4 - \frac{(t+1)^{1/3} + 1}{t(t+2)^2}$$

$$5 - \frac{y}{y-m}, m \neq 0 \quad 6 - u^2 + \frac{u-1}{\sqrt{2u^2+7}} \quad 7 - \frac{a}{x^2(x^2-8)}, a \neq 0 \quad 8 - \frac{1}{x^2+a^2}, a \neq 0$$

$$9 - 1 + x - \frac{1}{x^3-1} \quad 10 - \frac{3}{2x^3-x-1}$$

- ١٠٠ -

١١ - استخدم نظرية ٢ - ١٨ لتبرهن أن دالة كثيرة الحدود تكون متصلة . ما هي نظريات النهاية الأخرى التي نحتاج إليها لكي نبرهن ذلك ؟

١٢ - إذا كانت f متصلة في فترة I وكانت a و m ثابتين ، اثبت أن $f(x) - m(x - a) - f(a)$ تكون متصلة في I .

١٣ - عند أي أعداد تكون الدالة الكسرية غير معرفة ومن ثم ليست متصلة ؟ ما هو أكبر عدد للأعداد التي تكون عندها دالة كسرية معطاة غير متصلة ؟ أعط مثالا لدالة كسرية ، ليست كثيرة حدود ، ومتصلة في كل مكان .

١٤ - اثبت نظرية ٢ - ١٨ (أولا) . (ارشاد : دع $F(x) = f(x) \pm g(x)$:
واثبت أن $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$)

١٥ - اثبت نظرية ٢ - ١٨ (ثانيا) . ١٦ - اثبت نظرية ٢ - ١٨ (رابعا) . ١٧ - اثبت نظرية ٢ - ١٩ .

١٨ - وضح أنه في التمهيدية ٢ - ٢٢ لا يمكن الحصول على نتيجة إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ وذلك بتخطيط الشكل البياني لدالة g حيث $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ولكن في كل جوار منقوص لـ a توجد أعداد x حيث $g(x) > 0$ وأعداد x حيث $g(x) < 0$.

١٩ - اثبت التمهيدية ٢ - ٢٢ (ثانيا) .

*٢٠ (أ) اثبت أنه إذا كانت الدالة f متصلة عند a وكانت $f(a) > 0$ ، فانه يوجد جوار U لـ a بحيث أن $f(x) > 0$ لكل x في U . (ارشاد : استخدم التمهيدية ٢ - ٢٢) (ب) اذكر وبرهن النتيجة المناظرة إذا كانت $f(a) < 0$.

٢١ - وضح برسم تخطيطي أن التمهيدية ٢ - ٢٣ (أولا) قد لا تكون صحيحة إذا كانت المتبلية القاطعة (أي $>$ بدلا من \geq) تستخدم في نصها .

٢٢ - إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ قريبة قريبا كافيا من a وكانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ موجودتين ، قاثبت أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ [ارشاد : خذ في الاعتبار $g(x) - f(x)$] .

٢٣ - برهاننا لنظرية الحصر ٢ - ٢٤ سوف لا يكون ساريا إذا كان $\bar{U}_a \cap \bar{U}_b \cap \bar{W}$ الفئة الخالية . اثبت أنها غير خالية .

*٢٤ - (أ) اثبت أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ فإن إذا وإذا فقط كان $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$.

(ب) اثبت أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ فإن إذا وإذا فقط كان $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - b| = 0$.

٢٥ - أثبت أنه إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ، فإن $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |b|$. (ارشاد : دع $g(x) = |f(x)|$. هل g متصلة ؟) هل العكس صحيحا ؟ أي إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = c \geq 0$ ، فهل

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm c$ ؟

*٢٦ - أثبت أنه إذا كانت دالة f لها نهاية عند a ، فهذه النهاية تكون وحيدة ، أي أن ، إذا كانت

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ ، فإن $b = c$ (ارشاد : افرض أن $b \neq c$. حيث

$f(x)$ يجب أن تكون قريبة من b وأيضا قريبة من c . وضح أن هذا مستحيل باختيار جولرين

غير متقاطعين V_b و V_c حول c و b . (هل يمكن اجراء ذلك ؟) . ينظر كل منهما جوارا منقوصا \bar{U}_c و \bar{U}_b لـ a بحيث أن $f(x)$ تكون في V_b لكل x في \bar{U}_b ، $f(x)$ تكون في V_c لكل x في \bar{U}_c . (لماذا ؟) استخلص الآن تناقضا

٢٧ - (أ) اذا كانت f دالة وكان a أى عدد ، فالبارة $F(h) = f(a+h)$ تعرف دالة جديدة f لـ h . اثبت أنه اذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ، فان $\lim_{h \rightarrow 0} F(h) = b$ ، وبالعكس . (ارشاد : افرض أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. ليكن V جوار لـ b ، \bar{W} جوارا منقوصا لـ a بحيث أن $f(x)$ تكون في V طالما كانت x في \bar{W} . استخدم \bar{W} لايجاد جوار منقوص \bar{U} لـ 0 بحيث أن لكل h في \bar{U} ، $f(a+h)$ تكون في V . (ب) اثبت أن $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$ اذا كانت f متصلة عند a . وضع أن اتصال f ضرورى بتخطيط الشكل البيانى لدالة منفصلة حيث النتيجة لا تبقى صحيحة .

١٠ - ٢

براهين نظريات النهاية

في هذا البند نبرهن نظريات النهاية المذكورة بدون برهان في البند ٢ - ٨ . نبرهن أولا نظرية ٢ - ١٢ (أولا) عن نهاية حاصل جمع .

نظرية اذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجودتين ، فهكذا أيضا تكون

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

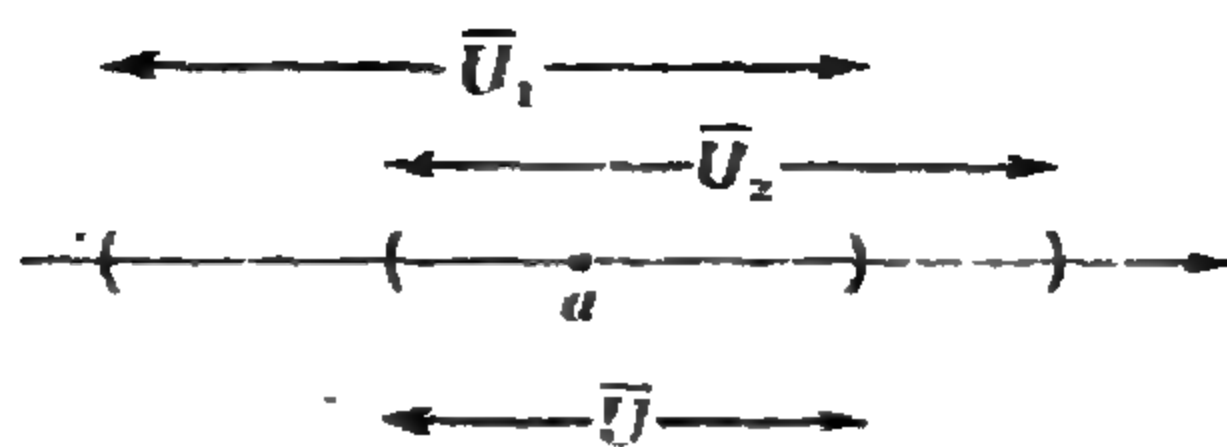
البرهان . سنبرهن فقط الحالة $f(x) + g(x)$ ونترك الحالة $f(x) - g(x)$ للقارىء . لتكن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ علينا أن نثبت أن $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = b + c$. ليكن $V = (b + c - \epsilon_1, b + c + \epsilon_2)$ أى جوار لـ $b + c$ حيث $\epsilon_1 > 0$ و $\epsilon_2 > 0$. طبقا لتعريف النهاية يجب ايجاد جوار منقوص \bar{U} لـ a بحيث أن $f(x) + g(x)$ تكون في V لكل x في \bar{U} لايجاد \bar{U} ، نتوقع أن نستخدم الفرض أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$. ليكن V_b الجوار $(b - \epsilon_1/2, b + \epsilon_2/2)$ ، V_c الجوار $(c - \epsilon_1/2, c + \epsilon_2/2)$ لـ c . الحقيقة أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجودة وتساوى b تتضمن من تعريف النهاية أنه يوجد جوار منقوص \bar{U}_1 لـ a بحيث أن $f(x)$ تكون في V_b لكل x في \bar{U}_1 ، أى أن ،

$$(1) \quad b - \frac{\epsilon_1}{2} < f(x) < b + \frac{\epsilon_2}{2} \quad \text{لكل } x \text{ في } \bar{U}_1$$

بالمثل ، بسبب أن $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ ، يوجد جوار منقوص \bar{U}_2 لـ a بحيث أن $g(x)$ تكون في V_c لكل x في \bar{U}_2 ، أى أن ،

$$(2) \quad c - \frac{\epsilon_1}{2} < g(x) < c + \frac{\epsilon_2}{2} \quad \text{لكل } x \text{ في } \bar{U}_2$$

لما أن \bar{U}_1 و \bar{U}_2 كلاهما يمتدان على جانبي a ، هكذا يكون تقاطعهما $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2$ الذي هو اذن جوار منقوص لـ a (شكل ٢ - ٣٣) . سمَّه \bar{U} . سنوضح أن \bar{U} هو الجوار المنقوص الذي نبحث عنه المتباينة (1) صحيحة لكل x في \bar{U}_1 ، والمتباينة (2) صحيحة لكل x في \bar{U}_2 . عندما تكون x



شكل ٢ - ٣٣

التقاطع \bar{U} لجوارين \bar{U}_1 و \bar{U}_2 و a لـ a هو جوار منقوص لـ a .

مقيدة بـ $\bar{U} = \bar{U}_1 \cap \bar{U}_2$ ، فهي تكون في \bar{U}_1 و \bar{U}_2 ولمثل هذه الـ x 's ، تكون كل من (1) و (2) صحيحة ويمكن جمعهما ، وبذلك يكون

$$(b + c) - \epsilon_1 < f(x) + g(x) < (b + c) + \epsilon_2$$

لكل x في \bar{U} . لكن هذا يعنى أن $f(x) + g(x)$ تكون في V . لقد حققنا شروط تعريف النهاية وأثبتنا وجود $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ وأن

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = b + c = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

نبرهن الآن النظرية ٢ - ١٢ (ثانيا) عن نهاية حاصل ضرب ثابت في دالة .

نظرية . اذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجودة فهكذا أيضا تكون $\lim_{x \rightarrow a} kf(x)$ لاي ثابت k ويكون

$$\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

البرهان . لتكن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ يجب أن نثبت أن $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = kb$. ليكن $V = (kb - \epsilon_1, kb + \epsilon_2)$ أي جوار لـ kb ، حيث $\epsilon_1 > 0$ و $\epsilon_2 > 0$. يجب أن نوجد جوارا منقوصا \bar{U} لـ a بحيث أن $kf(x)$ تكون في V لكل x في \bar{U} . اذا كانت k موجبة ، فان الفترة $(b - \epsilon_1/k, b + \epsilon_2/k)$ تكون جوارا لـ b نرمز اليه بـ V' . بما أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ، اذن يوجد جوار منقوص \bar{U} لـ a بحيث أن $f(x)$ تكون في V' لكل x في \bar{U} ، أي أن

$$b - \frac{\epsilon_1}{k} < f(x) < b + \frac{\epsilon_2}{k}$$

$$kb - \epsilon_1 < kf(x) < kb + \epsilon_2$$

من ثم

وهذا يوضح أن $kf(x)$ تكون في V لكل x في \bar{U} . البرهان مماثل اذا كانت $k < 0$ وتافه اذا كانت $k = 0$.

للاعداد للبرهنة على نظرية ٢ - ١٢ (ثالثا) عن نهاية حاصل ضرب نبرهن حالة خاصة منها .

٢ - ٢٥ تمهيدية . اذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = 0$ فان $\lim_{x \rightarrow a} u(x)v(x) = 0$

البرهان . ليكن $V = (-\epsilon_1, \epsilon_2)$ أى جوار لـ 0 حيث $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0$ اذا كانت ϵ هى الصغرى بين ϵ_1 و ϵ_2 فان $V' = (-\epsilon, \epsilon)$ هو جوار لـ 0 محتوى فى V . الفترة $W = (-\sqrt{\epsilon}, \sqrt{\epsilon})$ هى أيضا جوار لـ 0 . بسبب أن $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ ، يوجد جوار منقوص \bar{U}_1 لـ a بحيث أن $u(x)$ تكون فى W لكل x فى \bar{U}_1 . أى أن $-\sqrt{\epsilon} < u(x) < \sqrt{\epsilon}$ وهذا يكافئ ،

$$(3) \quad |u(x)| < \sqrt{\epsilon} \text{ لكل } x \text{ فى } \bar{U}_1$$

بالمثل ، لان $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = 0$ ، يوجد جوار منقوص \bar{U}_2 لـ 0 بحيث أن

$$(4) \quad |v(x)| < \sqrt{\epsilon} \text{ لكل } x \text{ فى } \bar{U}_2$$

دع $\bar{U} = \bar{U}_1 \cap \bar{U}_2$. فيكون \bar{U} جوارا منقوصا لـ 0 . عندما تكون x فى \bar{U} ، كل من (٣) و (٤) تكون صحيحة ويمكن ضربهما ، وباستخدام نظرية ١ - ١٥ يكون

$$|u(x)v(x)| = |u(x)||v(x)| < \epsilon$$

هذا يعنى أن $-\epsilon < u(x)v(x) < \epsilon$ ومن ثم فان $u(x)v(x)$ تكون فى $V' \subseteq V$ لكل x فى \bar{U} . يمكننا الآن اثبات نظرية ٢ - ١٢ (ثالثا) .

نظرية اذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ موجودتين فهكذا أيضا تكون $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ ويكون

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)][\lim_{x \rightarrow a} g(x)]$$

البرهان . دع $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ فيكون $\lim_{x \rightarrow a} [g(x) - c] = 0$ و : $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - b] = 0$ باستخدام التمهيدية ٢ - ٢١ أكتب $f(x)g(x)$ هكذا

$$f(x)g(x) = [f(x) - b][g(x) - c] + bg(x) + cf(x) - bc$$

فيكون

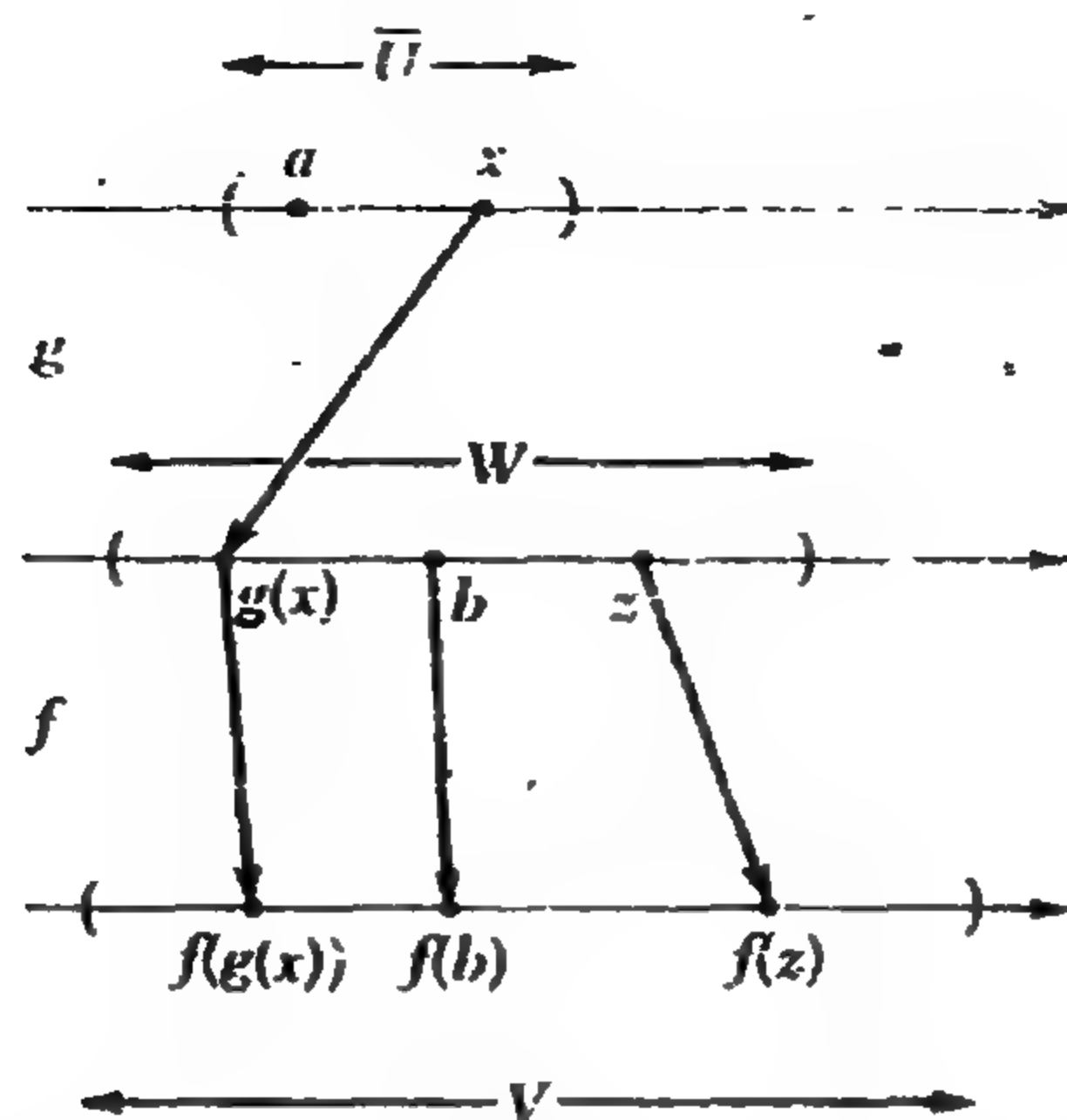
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - b][g(x) - c] + b \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ &\quad + c \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} bc \end{aligned}$$

$$= 0 + bc + cb - bc = bc \text{ من ٢ - ١٢ (أولا) و (ثانيا) ٢ - ١١}$$

يوجد برهان مباشر لنظرية ٢ - ١٢ (رابعا) عن نهاية خارج قسمة ، لكن يمكننا اعطاء برهان أقصر اذا أثبتنا أولا نظرية ٢ - ١٥ .

نظرية . إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ وكانت الدالة f متصلة عند b ، فإن

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x))$$



شكل ٢ - ٣٤

لكل x في U ، $g(x)$ تكون في W ومن ثم $g(x)$ تكون في V

البرهان . الرسوم التخطيطية لـ g و f موضحة في شكل ٢ - ٣٤ . علينا أن نثبت أن :
 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b)$. ليكن V أي جوار لـ $f(b)$. يجب أن نثبت أنه يوجد جوار منقوص \bar{U} لـ a بحيث أن :

$f(g(x))$ تكون في V لكل x في \bar{U} . بما أن f متصلة عند b ، إذن $\lim_{z \rightarrow b} f(z) = f(b)$ وإذن يوجد جوار منقوص \bar{W} لـ b بحيث أن $f(z)$ تكون في \bar{V} لكل z في \bar{W} . بما أن $f(b)$ أيضا في V ، يمكننا أن نقول بعبارة أعم أن $f(z)$ تكون في V لكل z في W . بما أن $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ و W جوار لـ b ، فإنه يوجد جوار منقوص \bar{U} لـ a بحيث أن $g(x)$ تكون في W لكل x في \bar{U} . وإذن إذا كانت x في \bar{U} فإن $g(x)$ تكون في W و $f(g(x))$ بدورها تكون في V .

نثبت الآن نظرية ٢ - ١٢ (رابعا) .

نظرية . إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجودتين وكانت $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ، فإن :

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) / g(x)]$ تكون موجودة ويكون

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

البرهان . نثبت أولا الحالة الخاصة

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

التي نحصل عليها بأخذ $f(x) = 1$. في مثال ٣ بيند ٢ - ٧ ، أثبتنا أن $(1/z) = 1/h$. بفرض أن $b \neq 0$. اذن الدالة $h(z) = 1/z$ تكون متصلة عند كل عدد عدا الصفر . الدالة $1/g(x)$ يمكن اعتبارها الدالة التركيبية لـ h مع g ، أى $1/g(x) = h(g(x))$. بنظرية ٢ - ١٥

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} h(g(x)) = h(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

هذا يبرهن الحالة الخاصة . للحالة العامة ، باستخدام نظرية ٢ - ١٢ (ثالثا) عن نهاية حاصل ضرب ، ويكون

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \left[\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} \right] \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \cdot \left[\frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \end{aligned}$$

البرهان الأخير هو لنظرية ٢ - ١٤ .

نظرية . $\lim_{x \rightarrow a} x^r = a^r$ لكل عدد كسرى r ولكل a حيث تكون a^r معرفة .

البرهان . النظرية تافهة اذا كانت $a = 0$. من ثم نفرض أن $a \neq 0$. نبدأ باثبات الحالة الخاصة $r = 1/m$ ، حيث m عدد صحيح موجب . (اذا كانت m زوجية ، فيجب أن نقيّد a بالشرط أن $a > 0$ لتستبعد الاعداد التخيلية مثل $\sqrt{-16}$) . علينا أن نثبت أن $\lim_{x \rightarrow a} x^{1/m} = a^{1/m}$. ليكن $V = (c, d)$ أى جوار لـ $a^{1/m}$. البرهان ينفصل الى حالتين .

الحالة الاولى m فردية . المتبايتان

$$(5) \quad c < x^{1/m} < d$$

$$(6) \quad c^m < x < d^m$$

متكافئتان . دع $U = (c^m, d^m)$. بما أن $c < a^{1/m} < d$ فإن (٥) و (٦) توضّحان أن a تكون فى الفترة U ، واذن U يكون جوار لـ a . المتبايتان أيضا توضّحان أن $x^{1/m}$ تكون فى V لكل x فى \bar{U} .

الحالة الثانية m زوجية . المتباينة (٥) لاتتضمن (٦) اذا كانت $c < 0$ ، لكن لايلزم سوى تعديل طفيف للبرهان المستخدم فى الحالة الاولى . اذا كانت $c < 0$. فالتا نختار c' بحيث أن

$$c < 0 \leq c' < a^{1/m} < d$$

(بما أن a تكون بالضرورة موجبة إذا كانت m زوجية ، كذلك تكون $a^{1/m}$ ، ومثل هذا الاختيار لـ c' يكون دائما ممكنا) . إذا كانت $c \geq 0$ فالتنا نختار $c' = c$. ليكن V هو الجوار (c', d) لـ $a^{1/m}$. كل من الحالتين يكون $V \subseteq V$. البرهان الآن يكون كما في الحالة الاولى حيث c' تأخذ مكان c .

الآن وقد أثبتنا أن $\lim_{x \rightarrow a} x^{1/m} = a^{1/m}$ ، الباقي يكون سهلا . أى عدد كسرى r يمكن كتابته على الصورة $r = n/m$ ، حيث n, m عددان صحيحان وحيث $m > 0$. العدد $x^{n/m}$ يعرف بأنه $(x^{1/m})^n$. (نفترض هنا وفي المواقف المشابهة أن m و n هي أعداد حيث $x^{n/m}$ تكون عددا حقيقيا .) . وادق باستخدام نظرية ٢ - ١٣ يكون .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} x^r &= \lim_{x \rightarrow a} x^{n/m} = \lim_{x \rightarrow a} (x^{1/m})^n \\ &= (\lim_{x \rightarrow a} x^{1/m})^n = (a^{1/m})^n = a^{n/m} = a^r \end{aligned}$$

هذا يكمل البرهان .

الفصل الثالث

المشتقات

٣ - ١

تعريف المشتقة

أول استعمالنا للنهايات هو في تعريف المشتقة ، وهي أهم الأفكار المفيدة في الرياضيات وتطبيقاتها .

لتكن f دالة ، a أى عدد داخل نطاقها . كون المقدار $[f(u) - f(a)]/(u - a)$.
نعتبر a ثابتة ، لذلك المقدار يعتمد فقط على u . فهو إذن دالة في u . سمها F :

$$F(u) = \frac{f(u) - f(a)}{u - a}$$

F تكون معرفة لكل الاعداد حيث f تكون معرفة ماعدا a . مثال ذلك ، إذا كانت $f(x) = x^2$ وكانت $a = 2$ ، فإن

$$F(u) = \frac{u^2 - 4}{u - 2}$$

الآن نسأل ما اذا كانت F لها نهاية عند a ، أى هل

$$(١) \quad \lim_{u \rightarrow a} \frac{f(u) - f(a)}{u - a}$$

موجودة . للدالة $f(x) = x^2$ ، $a = 2$ ، يصبح السؤال «هل $\lim_{u \rightarrow 2} [(u^2 - 4)/(u - 2)]$ موجودة » . بما أن النهاية للمقام هي صفر فإن نظرية ٢ - ١٢ (رابعا) عن نهاية خارج القسمة لا يمكن أن تستخدم لإجابة السؤال ونتابع كما فعلنا في المواقف المشابهة :

$$\lim_{u \rightarrow 2} \frac{u^2 - 4}{u - 2} = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{(u + 2)(u - 2)}{u - 2} = \lim_{u \rightarrow 2} (u + 2) = 4$$

النهاية موجودة .

الدوال أخرى f وأعداد أخرى a ، النهاية في (١) قد توجد وقد لا توجد . عندما تكون النهاية موجودة ، يكون لدينا موقف ذو أهمية بالغة ومن المناسب كتابة رمز بسيط لها . نكتب $f'(a)$ للنهاية في (١) ونسمى هذا العدد مشتقة f عند a .

٣-١ تعريف . لتكن f دالة ، a عدد في نطاقها . مشتقة الدالة f عند a هي العدد .

$$f'(a) = \lim_{u \rightarrow a} \frac{f(u) - f(a)}{u - a}$$

بشرط وجود النهاية . إذا كانت النهاية موجودة ، f يقال إنها قابلة للتفاضل عند a . في حالة الدالة $f(x) = x^2$ ، أثبتنا أن $f'(2) = 4$. قبل توضيحنا كيف تستخدم المشتقة ، نعطى عنها أمثلة أكثر .

مثال ١ . إذا كانت $f(x) = x^2 + 3x - 5$ ، فأوجد $f'(-1)$ إذا كانت موجودة . طبقا للتعريف ، يجب إيجاد قيمة

$$\lim_{u \rightarrow -1} \frac{f(u) - f(-1)}{u - (-1)}$$

لدينا

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow -1} \frac{f(u) - f(-1)}{u - (-1)} &= \lim_{u \rightarrow -1} \frac{(u^2 + 3u - 5) - (-7)}{u + 1} \\ &= \lim_{u \rightarrow -1} \frac{u^2 + 3u + 2}{u + 1} = \lim_{u \rightarrow -1} \frac{(u + 1)(u + 2)}{u + 1} \\ &= \lim_{u \rightarrow -1} (u + 2) = 1 \end{aligned}$$

لذلك $f'(-1)$ موجودة وتساوى 1 .

مثال ٢ . إذا كانت $f(x) = x^2$ ، فأوجد $f'(a)$ لأي a . لدينا

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{u \rightarrow a} \frac{f(u) - f(a)}{u - a} = \lim_{u \rightarrow a} \frac{u^2 - a^2}{u - a} \\ &= \lim_{u \rightarrow a} \frac{(u + a)(u - a)}{u - a} = \lim_{u \rightarrow a} (u + a) = 2a \end{aligned}$$

بما أن a يمكن أن تكون أى عدد فإن $f'(x) = 2x$ ، $f'(-1) = -2$ ، $f'(0) = 0$ ، $f'(3) = 2(3) = 6$ ، هذه هي المشتقات عند x و -1 ، 0 ، 3 على الترتيب .

مثال ٣ . إذا كانت $f(x) = 1/x$ ، فأوجد $f'(x)$.
لا يوجد تأكيد بأن المشتقة موجودة لمجرد أن سألنا عن إيجادها بالتعريف ،

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} = \lim_{u \rightarrow x} \frac{1/u - 1/x}{u - x} \\ &= \lim_{u \rightarrow x} \frac{x - u}{ux(u - x)} = \lim_{u \rightarrow x} \frac{-1}{ux} = \frac{-1}{\lim_{u \rightarrow x} ux} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

المشتقة موجودة ، والدالة f قابلة للتفاضل لكل $x \neq 0$.

طريقة أخرى لكتابة مشتقة الدالة f عند x هي $Df(x)$. في مثال ٣ أثبتنا أن في حالة الدالة $f(x) = 1/x$ ، $Df(x) = -1/x^2$. أيضا نكتب $D(1/x) = -1/x^2$ ونتحدث عن مشتقة الدالة $1/x$ بدلا من مشتقة f . وبالقول الحازم ، أن كلا من الكتابتين $D(1/x)$ و $Df(x)$ ليست صحيحة ؛ $1/x$ و $f(x)$ عددان ، والدوال وليست الاعداد التي لها مشتقات ، لكن الممارسة العملية أصبحت عامة .

إذا استخدمنا الكتابة $y = f(x)$ فإن رموزا أخرى عامة لمشتقة الدالة f عند x هي

$$Dy, \quad D_x y, \quad \frac{df(x)}{dx}, \quad \frac{d}{dx} f(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad y'$$

مثال ٤ . أوجد Dx^3

دع $g(x) = x^3$. فيكون

$$(٢) \quad Dx^3 = g'(x) = \lim_{u \rightarrow x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x} = \lim_{u \rightarrow x} \frac{u^3 - x^3}{u - x}$$

بما أن x هي جذر للمقدار $x^3 - x^3$ ، معبرة ككثيرة حدود في u ، فالتنا نعرف من نظرية العامل ١ -
٢١ أن $u - x$ هو عامل لـ $u^3 - x^3$. العامل الآخر يمكن إيجاده بطريقة المحاولة والخطأ أو بطريقة القسمة المطولة :

$$u^3 - x^3 = (u - x)(u^2 + ux + x^2)$$

بتعويض ذلك في (٢) واختزال $u - x$ ، يكون لدينا

$$Dx = \lim_{u \rightarrow x} \frac{u^3 - x^3}{u - x} = \lim_{u \rightarrow x} (u^2 + ux + x^2) = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$$

إذا اعتبرنا المعادلة $y = x^3$ ، فإنه يمكننا أن نكتب $dy/dx = 3x^2$ أو $y' = 3x^2$.

مثال ٥ . إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 4 + x - \frac{1}{2}x^2, & x \leq 0, \\ 4 - x - \frac{1}{2}x^2, & x > 0, \end{cases}$$

هل f لها مشتقة عند 0 ؟

يجب أن نحدد ما إذا كانت

$$(٣) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

موجودة . حيث ان وصف f يتغير عند 0 ، يمكننا الاجابة عن السؤال فقط بإيجاد النهايتين اليسرى واليمنى عند 0 . عند $x < 0$ يكون $f(x) = 4 + x - \frac{1}{2}x^2$ ، ويكون

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(4 + x - \frac{1}{2}x^2) - 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{x}{2}\right) = 1$$

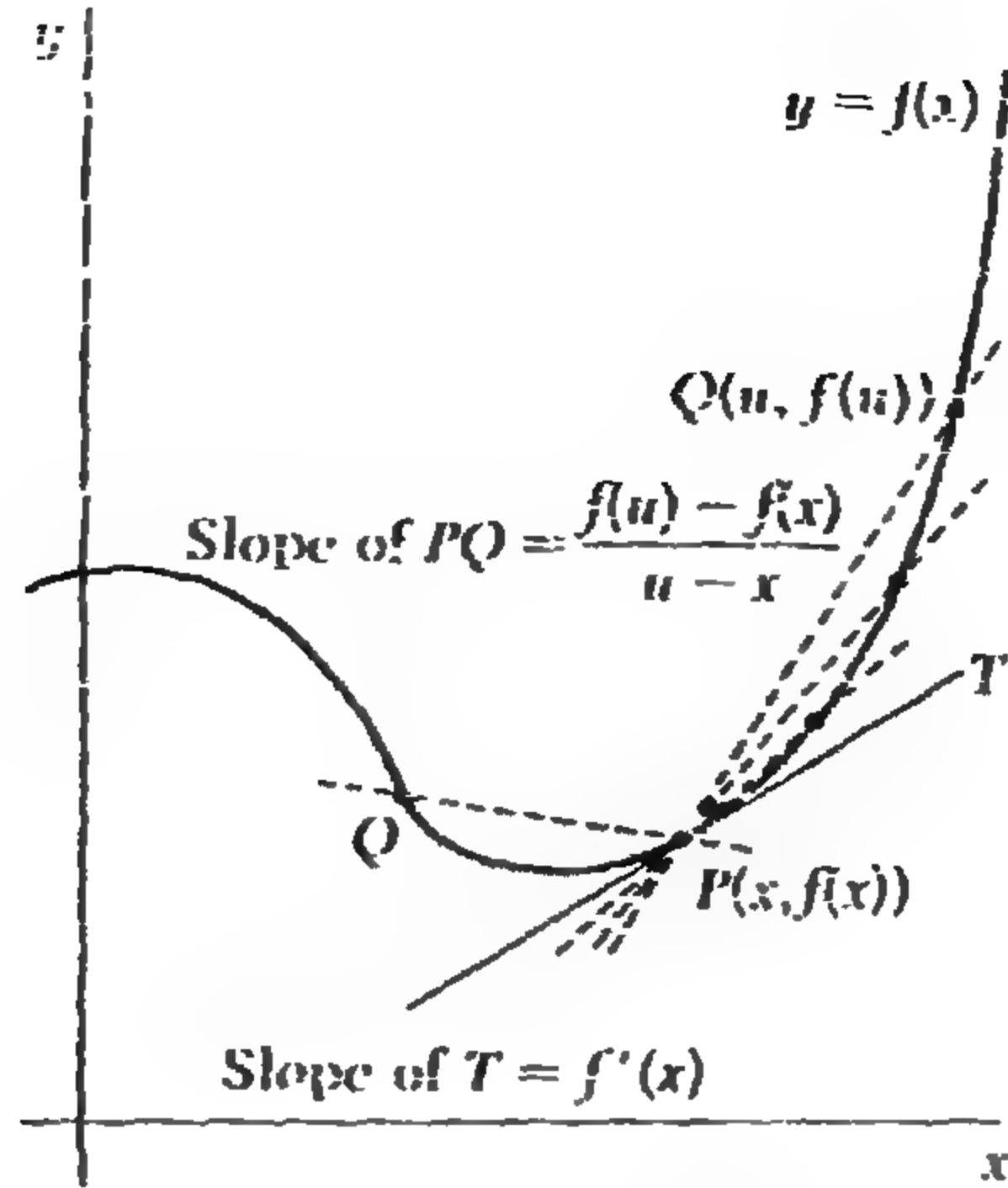
عند $x > 0$ يكون $f(x) = 4 - x - \frac{1}{2}x^2$ ، ويكون

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(4 - x - \frac{1}{2}x^2) - 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-1 - \frac{x}{2}\right) = -1$$

لأن النهايتين اليمنى واليسرى ليستا نفس المقدار ، فإن النهاية في (٣) لا توجد والدالة f ليس لها مشتقة عند 0 . لكن الدالة لها مشتقة عند الأعداد الأخرى .

نحن نؤكد أن في حالة المشتقة لا توجد $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ لكن نهاية الدالة المرتبطة بها .
في $[f(u) - f(a)]/(u - a)$ مثال ٥ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ لذلك $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ تكون موجودة .

المشتقة لها تفسير هندسى هام . الشكل البيانى لدالة نمطية f مخطط فى شكل ٣ - ١ . لتكن $P(x, f(x))$ و $Q(u, f(u))$ نقطتين على المنحنى . ميل الخط PQ المار بالنقطتين P و Q ، المستج من احداثيات هاتين النقطتين ، هو $[f(u) - f(x)]/(u - x)$. اذا كانت f متصلة عند x ، فإنه عندما تقترب u من x ، تتحرك Q على المنحنى ناحية P ، والخط المستقيم PQ يدور حول P ويقترب من المماس للمنحنى عند P . من المعقول أن نفترض أنه فى نفس الوقت يقترب ميل PQ من ميل المماس ويمكن جعله يقترب منه كما نريد باختيار u قريبة قريبا كافيا من x . لكن ذلك مجرد عملية نهائية ، ويمكن أن نقول .



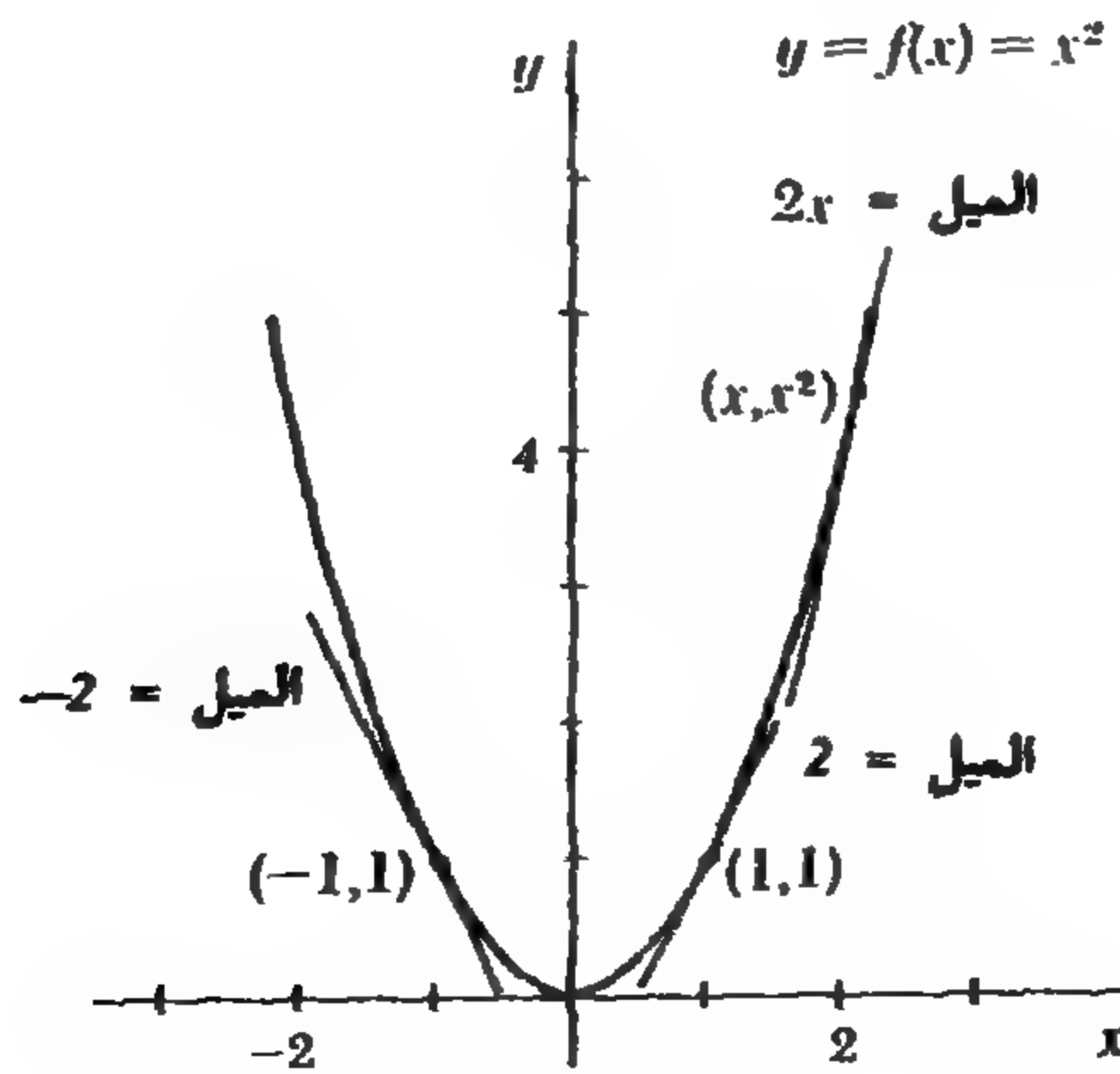
شكل ١-٣

كلما تقترب u من x ، يقترب الوتر PQ من المماس عند P

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow x} (\text{ميل } PQ) &= \text{ميل المماس عند } P \\ &= \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} = f'(x) \end{aligned}$$

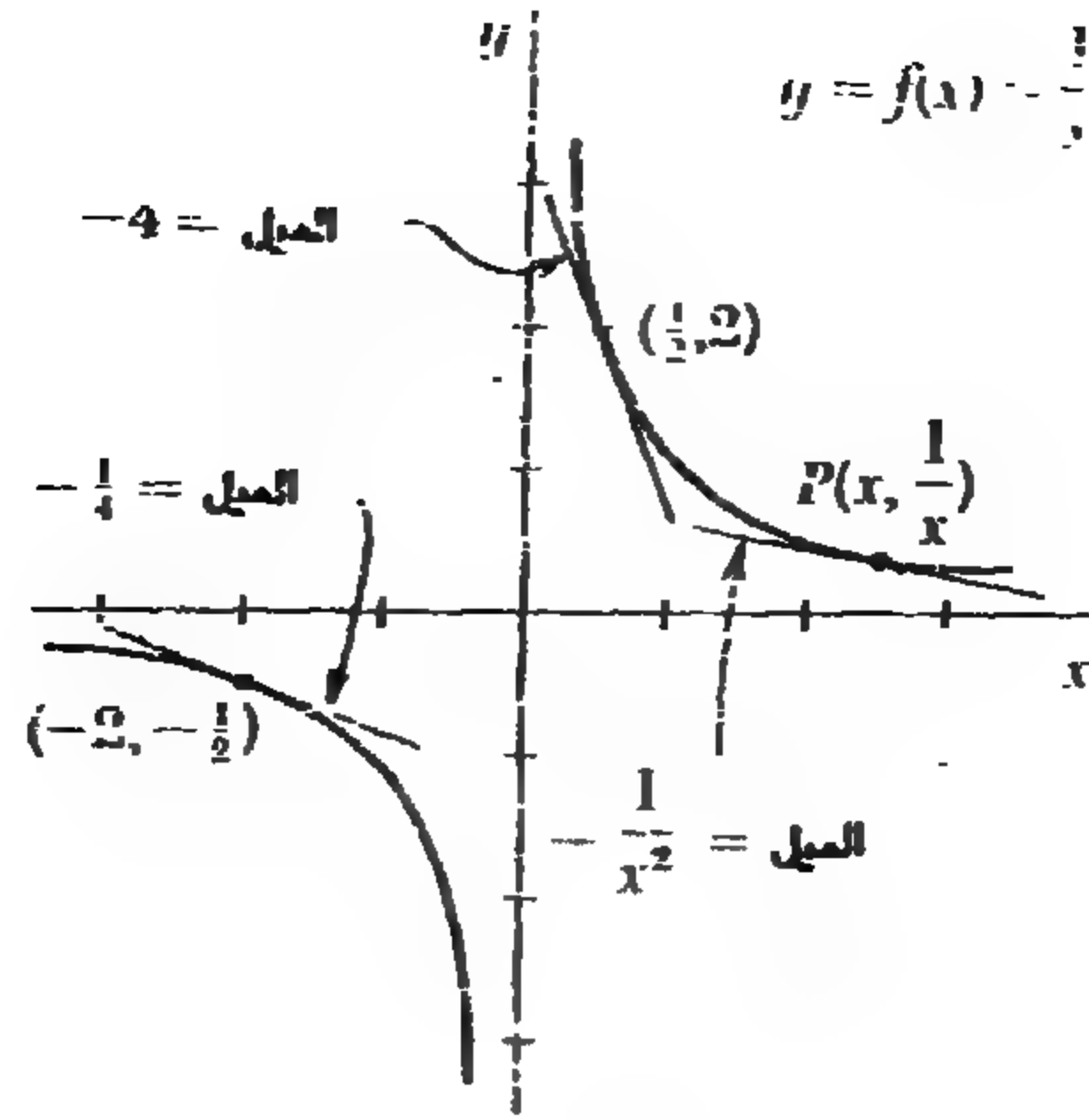
بشرط وجود هذه النهاية (كما في حالة أي نهاية)، يجب أن نأخذ في الاعتبار قيم u الأقل من وأيضا الأكبر من x . كلاميا، مشتقة f عند x هي ميل المماس للمنحنى $y = f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$. قبل اعتبار ذلك بتدقيق أكثر، دعنا ننظر ثانية في بعض أمثلتنا.

في مثال ٢ أثبتنا أن الدالة $f(x) = x^2$ لها المشتقة $f'(x) = 2x$. هذا هو ميل المماس للمنحنى $y = x^2$ عند النقطة (x, x^2) . المنحنى موضح في شكل ٢-٣. ميل المماس عند النقطة $(1, 1)$ هو $f'(1) = 2$



شكل ٢-٣

المماس عند (x, x^2) ميله $f'(x) = 2x$



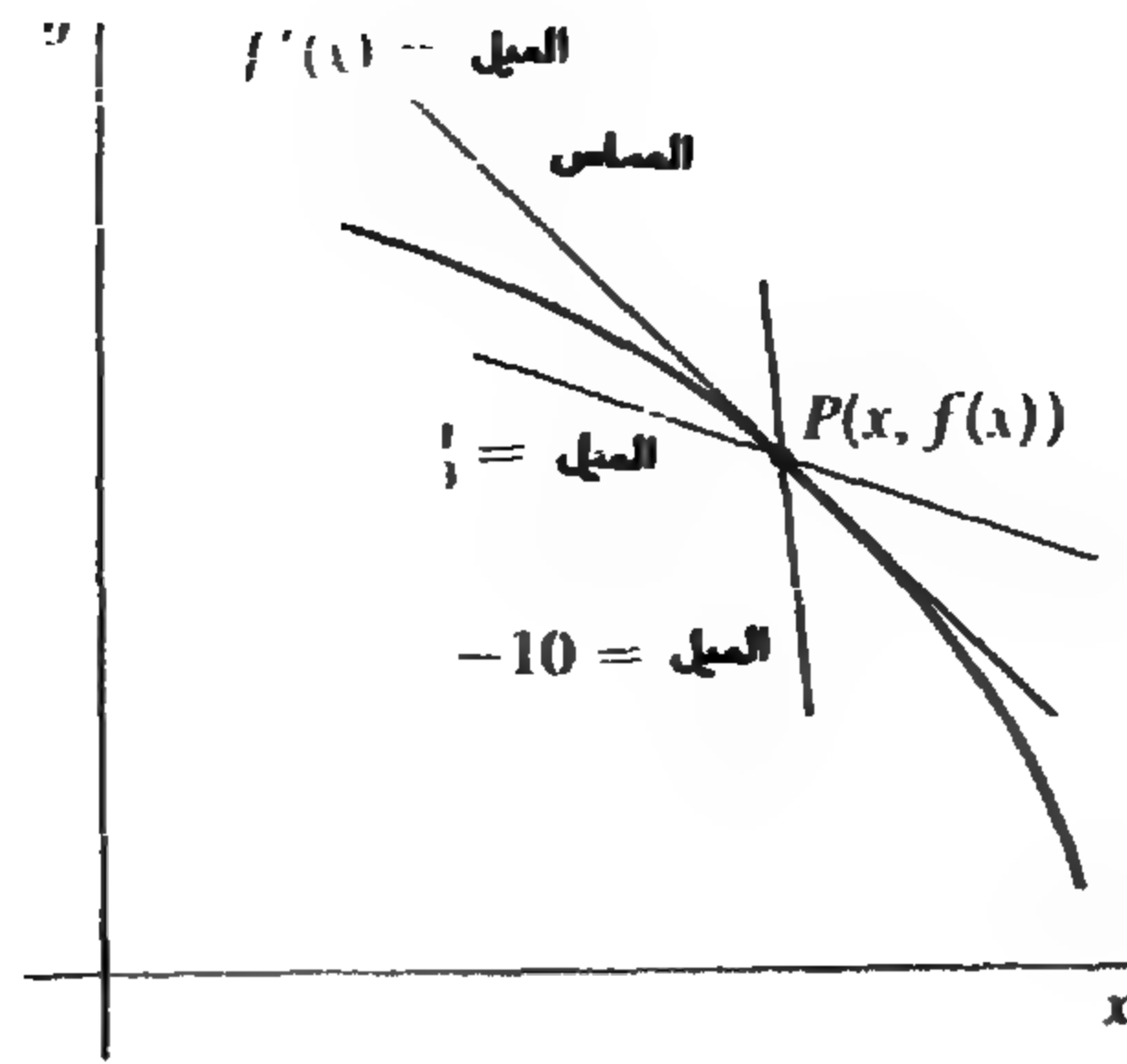
شكل ٣-٣
الميل عند $(x, 1/x)$ هو $-1/x^2$

ميل المماس عند النقطة $(2, 4)$ هو $f'(2) = 4$. عندما تزداد x ، النقطة (x, x^2) تتحرك لأعلى على طول النصف الأيمن للمنحنى والميل $2x$ للمماس يزداد. عند نقطة الأصل تكون $f'(0) = 0$ و $x = 0$ ميل المماس عند النقطة $(-1, 1)$ هو $f'(-1) = -2$. للنقط على النصف الأيسر للمنحنى تكون $x < 0$ وميل المماس عند كل نقطة يكون سالب.

من الطبيعي أن نعرف ميل المنحنى عند نقطة بأنه ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة. وإذا ميل المنحنى $y = f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$ يعطى بـ $f'(x)$ ويكون مقياساً لانحدار المنحنى عند النقطة.

الشكل البياني لـ $f(x) = 1/x$ موضع في شكل ٣-٣. في مثال ٣، رأينا أن: $f'(x) = -1/x^2$. هذا هو ميل المنحنى $y = 1/x$ عند النقطة $P(x, 1/x)$. دعنا نرى ما إذا كان هذا معقولاً هندسياً. بما أن $-1/x^2 < 0$ لكل $x \neq 0$ ، الميل يكون دائماً سالباً. لقيم x الكبيرة، P تكون بعيدة على الفرع الأيمن للمنحنى، والميل $f'(x)$ يكون سالباً وقريباً من الصفر. عندما تكون x قريبة من الصفر، P تكون قريبة من المحور y ، $f'(x)$ تكون عدداً كبيراً سالباً. فمثلاً عند $(1/10, 10)$ ، الميل يكون -100 ، والمماس يكاد يكون رأسياً.

عندما كنا نناقش المماسات للمنحنيات، كنا على أرض هشة، لأننا لم نكن قد عرفنا بعد ما هو المماس للمنحنى. لدينا جميعاً فكرة بديهية عما يقصد بالمماس للمنحنى، لكن عندما نحاول أن نجعل أفكارنا دقيقة، نجد أن فكرة المماس أكثر مراوغة عما نود فقط في حالة الدوائر، حيث المماس يعرف بالعمودي على نصف القطر عند نهايته، يكون لدينا شيء محدد. للمنحنيات العامة، التعريفات للمماس مثل «خط مستقيم يلمس فقط المنحنى» أو «خط مستقيم له فقط نقطة واحدة مشتركة مع المنحنى ولا يقطع المنحنى» تكون إما مبهمة أو مقيدة جداً. تعريف عام يعرف



شكل ٣-٤

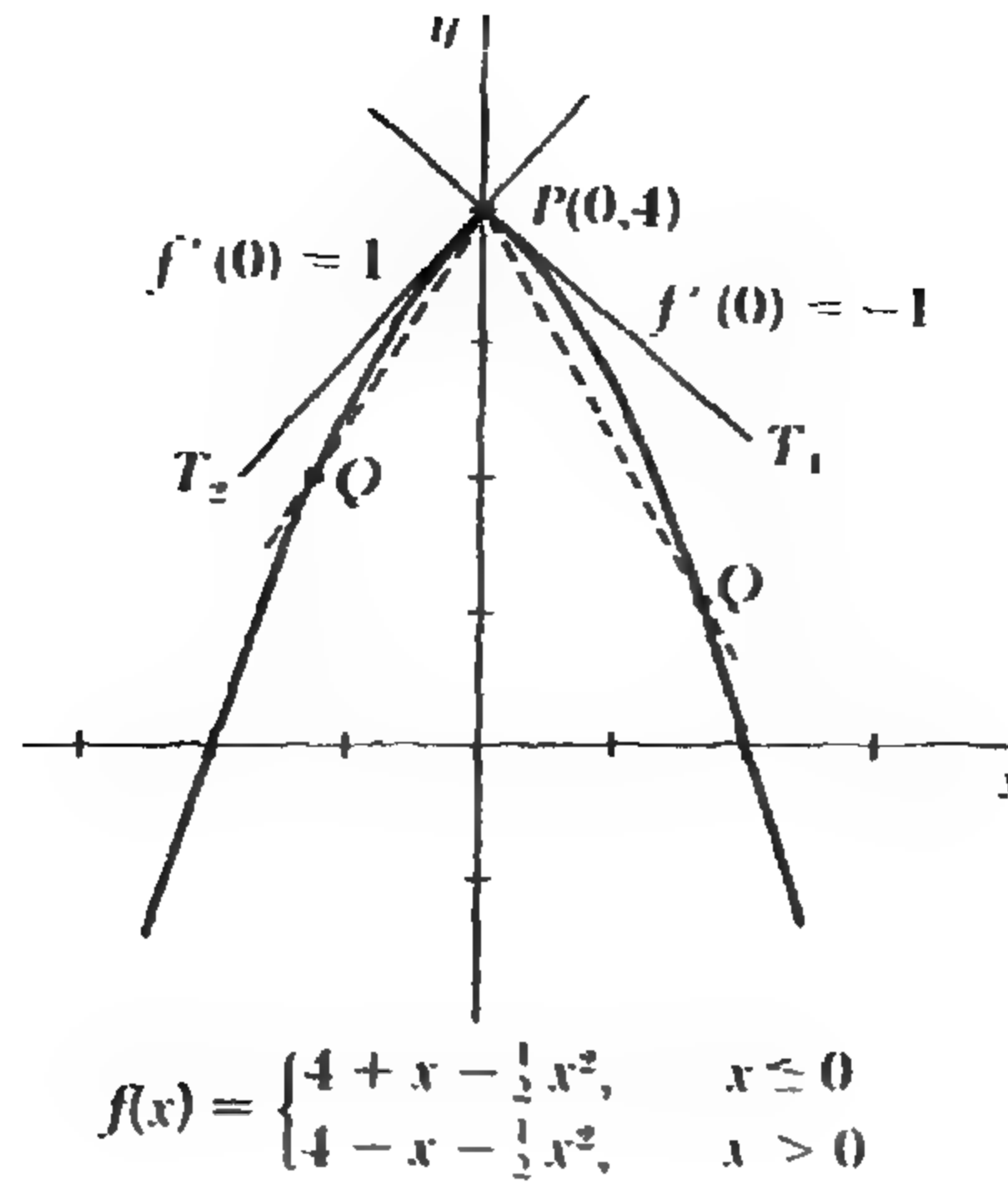
المماس عند P يعرف بأنه الخط المماس المار بالنقطة P وميله $f'(x)$

المماس عند P (شكل ٣-١) بأنه ذلك الخط الذي يقترب اليه الخط المار بـ Q ، عندما تقترب Q من P . لبعض الأغراض هذا يكون كافيا ، لكن لأجل غرضنا ليس كذلك ، لأننا حينئذ يجب أن نبرهن أن ميل المماس هو نهاية ميل الوتر الواصل بين P و Q ، وهذا ليس ممكنا بدون دراسة لفروض الهندسة التحليلية أكثر تفصيلا عما يمكن الالتزام به هنا . ليس لمجرد السبب أن الوتر ، الذي هو مفهوم هندسي ، يكون قريبا من المماس يكون ميل الوتر ، الذي هو عدد ، قريبا من ميل المماس . حل مقنع ، وان كان مصطنعا ، هو تعريف المماس عند $P(x, f(x))$ بأنه الخط المستقيم المار بالنقطة P وميله $f'(x)$ (شكل ٣-٤) . على الأقل نشعر بداهة أن هذا التعريف يعطى الخط الصحيح ، وأن له ميزة الوضوح والبساطة .

٣-٢ تعريف . المماس للمنحنى $y = f(x)$ عند النقطة $P(x, f(x))$ هو الخط المستقيم المار بالنقطة P وميله $f'(x)$. باستثناء المماس الرأسى ، الذى سيدرس فى البند ٤-٨ ، لا يوجد مماس عند P اذا كانت $f'(x)$ غير موجودة .

بما أن المشتقة هي مقياس لانحدار الشكل البياني للدالة $y = f(x)$ ، فهي تعطى التغير التقريبى فى الاحداثى y لنقطة على المنحنى لكل وحدة تغير فى الاحداثى x عندما تتحرك النقطة مسافة صغيرة على المنحنى . التغير فى الاحداثى y بالنسبة الى التغير فى الاحداثى x يكون أكبر عندما يكون المنحنى أشد انحدارا ويكون أقل عندما يكون المنحنى أقل انحدارا . لهذا السبب يقال أن المشتقة مقياس لمعدل تغير y بالنسبة الى x .

الشكل البياني للدالة f فى مثال ٥ مخطط فى شكل ٣-٥ . توجد نقطة حادة عند $P(0,4)$ ، حيث f ليس لها مشتقة . عندما تقترب Q من P على النصف الأيمن للمنحنى ، الخط المستقيم PQ يقترب من الخط T_1 ، الذى ميله -1 . عندما تقترب Q من P على النصف الأيسر للمنحنى ،



شكل ٣-٥

يوجد مماس أيمن ومماس أيسر عند النقطة P لكن لا يوجد مماس هناك

الخط PQ يقترب من الخط T_2 ، الذي ميله 1 . نسمى T_1 ، T_2 المماس الأيمن والمماس الأيسر عند P ، لكن لأن $f'(0)$ غير موجودة ، فلا يوجد مماس عند P حسب التعريف . مفهوم مرتبط لكن الأكثر أهمية هو مفهوم المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى عند عدد . التعريف يشبه تعريف المشتقة لكن بنهايات من جانب واحد .

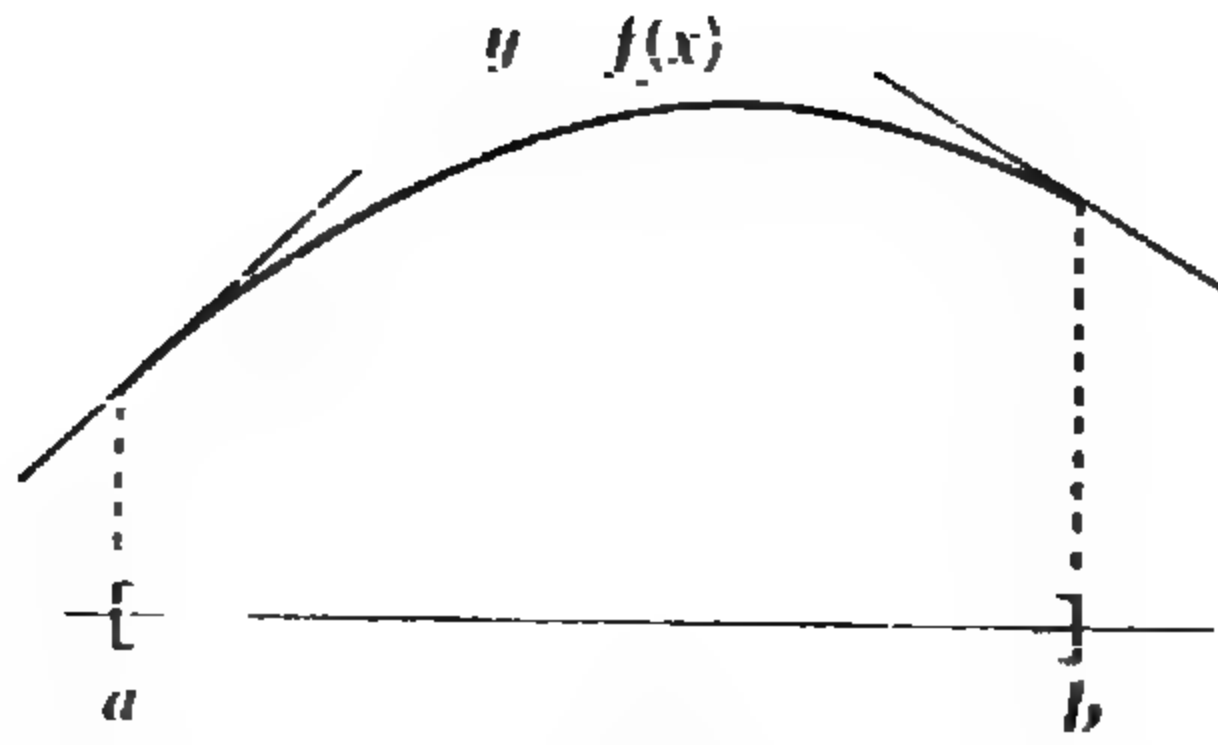
٣-٣ تعريف . لتكن f دالة ، a عددا . المشتقة اليمنى للدالة عند a هي العدد

$$f'_+(a) = \lim_{u \rightarrow a^+} \frac{f(u) - f(a)}{u - a},$$

بشرط وجود هذه النهاية اليمنى . المشتقة اليسرى $f'_-(a)$ تعرف بالمثل .

يجب أن يكون واضحا أن الدالة لها مشتقة عند عدد a إذا وإذا فقط كان لها مشتقة يمنى ومشتقة يسرى هناك وكانت هاتان النهايتان متساويتين . الدالة f في مثال ٥ (شكل ٣-٥) لها مشتقة يمنى ومشتقة يسرى عند 0 وهما $f'_-(0) = 1$ و $f'_+(0) = -1$ ، لكن ليس لها مشتقة هناك .

مفهوم النهاية يستلزم أن تكون الدالة معرفة على كلا الجانبين لعدد لكي ما يكون لها مشتقة هناك . تبعا لذلك ، الدالة لا يمكن أن يكون لها مشتقة عند نقطة طرفية لنطاق تعريفها . لكن ، مع ذلك ، قد يكون لها مشتقة يمنى عند النقطة الطرفية اليسرى للنطاق ومشتقة يسرى عند النقطة الطرفية اليمنى (شكل ٣-٦) .



شكل ٦-٣

الدالة معرفة في $[a, b]$ ولها مشتقة يمينية عند a ومشتقة يسرى عند b .

الدالة لها مشتقة (أو تكون قابلة للتفاضل أو مشتقتها موجودة) في فترة مفتوحة إذا كان لها مشتقة عند كل نقطة بالفترة. الدالة لها مشتقة (أو تكون قابلة للتفاضل أو مشتقتها موجودة) في فترة مغلقة إذا كان لها مشتقة عند كل نقطة داخل الفترة ولها مشتقة يمينية عند النقطة الطرفية اليسرى ومشتقة يسرى عند النقطة الطرفية اليمينية.

الدالة في مثال ٥ (شكل ٣-٥) قابلة للتفاضل في الفترتين $[0, 2]$ و $(1, 3)$. لكنها غير قابلة للتفاضل في الفترة $(-1, 2)$.

العمودي للمنحنى عند نقطة P على المنحنى هو الخط المستقيم المار بالنقطة P وعمودي على المماس عند P . بالاستعانة بالمشتقة يكون من السهل إيجاد معادلات المماسات والأعمدة.

مثال ٦. أوجد معادلتى المماس والعمودي للمنحنى $y = x^2$ عند النقطة $(3, 9)$.

إذا كتبنا $f(x) = x^2$ ، فمن مثال ٢ يكون $f'(x) = 2x$ ، ويكون ميل المماس عند $(3, 9)$ هو $f'(3) = 6$. من ثم، بصيغة النقطة والميل معادلة المماس هي:
 $y - 9 = 6(x - 3)$ أى $6x - y - 9 = 0$ العمودي ميله $-\frac{1}{6}$.
معادلته هي $y - 9 = -\frac{1}{6}(x - 3)$ أى $x + 6y - 57 = 0$.

مثال ٧. الخط المستقيم العام الذى ميله m معادلته هي:
 $y = mx + b$. الدالة المناظرة هي $f(x) = mx + b$ حقق أن الميل $f'(x)$ للخط المستقيم عند النقطة (x, y) ، كما يعطى من تعريف المشتقة، هو أيضا m . إذا لم يكن كذلك، فإن تعريفنا للمماس لمنحنى يكون غير مقنع.

لدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} = \lim_{u \rightarrow x} \frac{(mu + b) - (mx + b)}{u - x} \\ &= \lim_{u \rightarrow x} \frac{m(u - x)}{u - x} = \lim_{u \rightarrow x} m = m, \end{aligned}$$

فالكل صحيح.

مشتقة f عند x تعرف بأنها

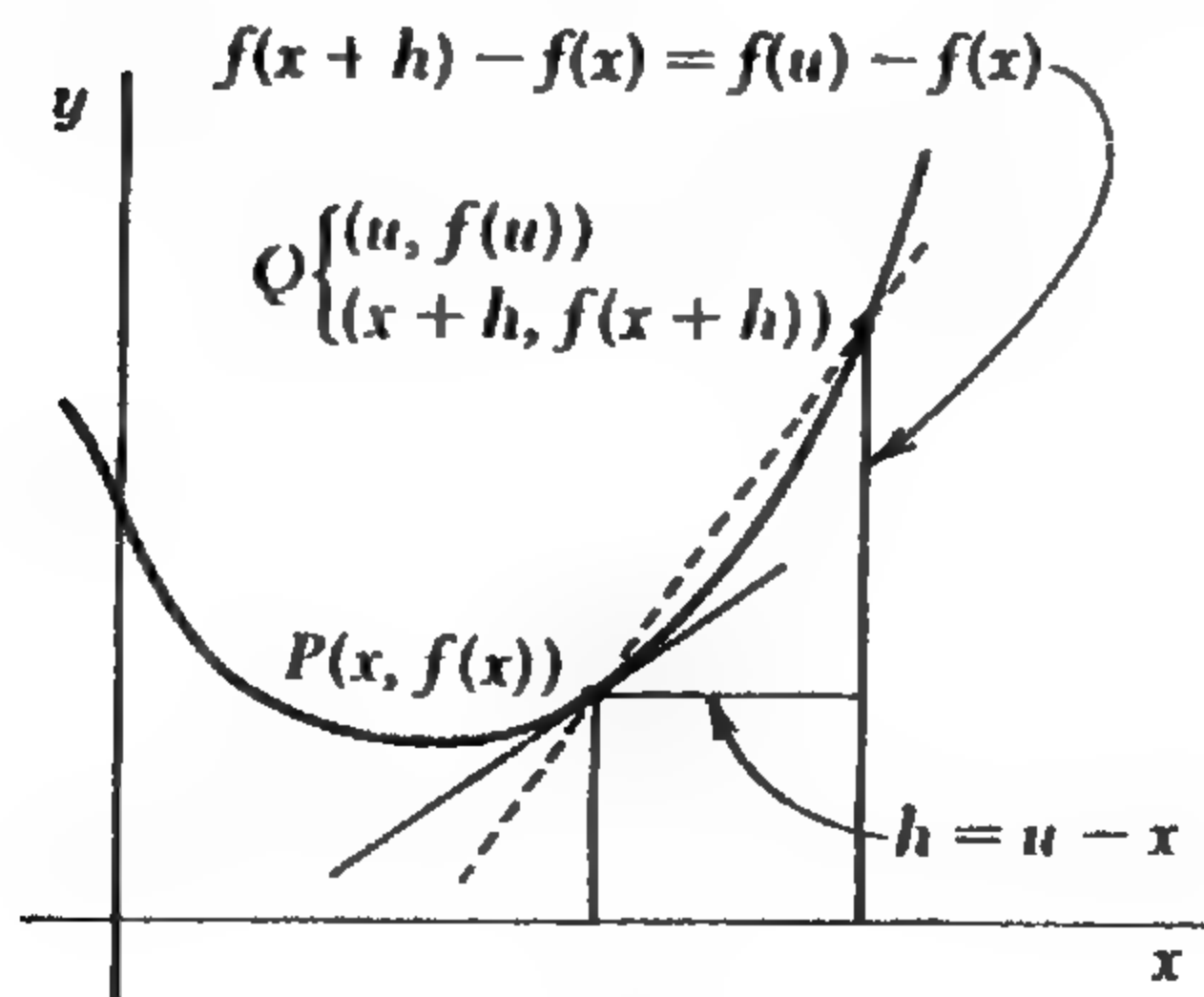
$$(4) \quad f'(x) = \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$$

المقدار $[f(u) - f(x)] / (u - x)$ يسمى خارج قسمة فروق f ، وكما رأينا، هو ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $Q(u, f(u))$ و $P(x, f(x))$. الاحداثي x للنقطة Q يمكن كتابته $x + h$ ، حيث h هي المسافة الأفقية المتجهة من P إلى Q (شكل ٧-٣). الاحداثي y للنقطة Q يكون عندئذ $f(x + h)$ ، وتكون $h = u - x$. إذا كانت Q تقع على يسار P ، فإن h تكون سالبة. بما أن u تكون قريبة من x إذا فقط كانت h قريبة من الصفر، فإن تعبيراً آخر للمشتقة عند x ، كثيراً ما يستخدم، هو

$$(5) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

العددان في البسطين لخارج قسمة الفروق في (٤) و (٥) هما نفس العدد أيضاً العددان في المقامين هما نفس العدد. فقط طريقة التعبير هي التي تختلف. في (٤) التأكيد هو على الاحداثي السيني u للنقطة Q ، وفي (٥) هو على الفرق h بين الاحداثي السيني للنقطتين P و Q . في مثال ١، إذا استخدمنا التعبير (٥) للمشتقة عند ١ - للدالة $f(x) = x^2 + 3x - 5$ ، فإن الخطوات تكون هكذا.

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(-1 + h)^2 + 3(-1 + h) - 5] - (-7)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2 + h - 7) - (-7)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 1) = 1. \end{aligned}$$



شكل ٧-٣

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

الدالة في مثال ٥ (شكل ٣ - ٥) ليس لها مشتقة عند 0 رغم أنها متصلة هناك . دوال كثيرة تكون مثل هذه ، تكون متصلة عند عدد لكن ليس لها مشتقة هناك . النظرية التالية توضح أن الموقف العكسى لا يحدث أبدا .

٣ - ٤ نظرية . إذا كانت دالة لها مشتقة عند عدد ، فهي تكون متصلة هناك .

البرهان سهل . لتكن f هي الدالة ولتكن a العدد . أكتب $f(x) - f(a)$ على الصورة

$$(٦) \quad f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a), \quad x \neq a.$$

بنظرية ٢ - ١٢ (ثالثا) عن نهاية حاصل الضرب ، يكون

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

بما أن $f(a)$ ثابتة ، فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ بتمهيدية ٢ - ٢١ . لكن هذا هو الشرط لكي تكون f متصلة عند a .

الشرط أن f تكون لها مشتقة عند a ، أى أن

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تكون موجودة ، هام فى هذا البرهان . وإلا يمكننا التأكد ما إذا كانت نهاية حاصل ضرب الدالتين فى (6) هي حاصل ضرب النهايتين . حقيقة أن $\lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0$ ليست كافية لأنه اذ قد يحدث أن $[f(x) - f(a)] / (x - a)$ تصبح أكبر فأكبر كلما تقترب x من a .

الاتصال عند عدد يؤكد أن الشكل البياني ليس به ثقب أو له قفزة عند النقطة المناظرة . لكن الشكل البياني قد يكون له زاوية كما فى شكل ٣ - ٥ . الدالة التى شكلها البياني له زاوية لها مشتقان يمنى ويسرى غير متساويتين هناك ولا يمكن أن تكون لها مشتقة . ومن ثم إذا كانت الدالة لها مشتقة ، لا يمكن ان توجد زاوية . القابلية للتفاضل عند عدد تؤكد أن المنحنى يكون منسقا بالقرب من النقطة المناظرة . فهي شرط أقوى من الاتصال .

مسائل

١ - إذا كانت $g(x) = 3x - 5$ ، أوجد $g(x + h)$ عند (أ) $h = \frac{1}{2}$ و $x = 4$ ، (ب) $h = -\frac{1}{2}$ و $x = 4$. أوجد $g'(x)$.

أوجد المشتقات المشار إليها للدوال الآتية :

$$f(x) = -2x^2 - 5; f'(0), f'(a) \quad - ٣ \quad f(x) = x^2 + 3; f''(2), f'(-1) \quad - ٧$$

$$g(x) = \frac{2}{x+1}; g'(-4), g'(c) \quad - ٥ \quad g(x) = x^2 + 5x + 1; g'(2), g'(x) \quad - ٤$$

$$F(t) = 6/t^2; F'(-2) \quad - ٧ \quad f(t) = t^2/(t-2); f'(1) \quad - ٦$$

$$u(x) = \sqrt{x}; u'(4) \quad - ٨ \quad (أ) \quad \text{ارشاد : ازل الجذر من بسط خارج قسمة الفروق} \\ \text{حاول إيجاد } u'_+(0).$$

استخدم التعبير (5) لإيجاد المشتقات المشار إليها للدوال الآتية :

$$f(x) = x^2; f'(x) \quad - ١٠ \quad f(x) = -10x - 3; f'(3) \quad - ٩$$

$$g(x) = x^3; g'(1), g'(x) \quad - ١٢ \quad f(x) = -2x^2 - 4x + 1; f'(0), f'(x) \quad - ١١$$

$$g(t) = 1/t; g'(-3) \quad - ١٣$$

أوجد المشتقات الآتية

$$\frac{d}{dx}(3x^2 - 3x + 2) \quad - ١٦ \quad D(u^2 + \frac{1}{2}) \quad - ١٥ \quad L(-2x - 3) \quad - ١٤$$

$$D \frac{5}{x^2} \quad - ١٩ \quad D \left(at + \frac{b}{t} \right) \quad - ١٨ \quad \frac{d}{dx} \frac{1}{x-4} \quad - ١٧$$

$$D(x^4 + x - 2) \quad - ٢٢ \quad \frac{d}{dt}(t^3 + t^2 - 1) \quad - ٢١ \quad D\sqrt{z+1} \quad - ٢٠$$

$$D_x(2x^3 + x + z^2), z \text{ const.} \quad - ٢٥ \quad \frac{d}{dx} x\sqrt{x} \quad - ٢٤ \quad Dx^{1/3} \quad - ٢٣$$

$$- ٢٦ \quad \text{لماذا لا توجد المشتقة اليسرى للدالة } f(z) = \sqrt{z-1} \text{ ؟}$$

$$- ٢٧ \quad \text{خطط الشكل البياني للمعادلة } y = x^2 - 4 \text{ . أوجد ميل المنحنى عند أى نقطة } (x, y) \text{ . عند} \\ \text{أية نقطة يكون الميل صفراً ؟ و } -2 \text{ ؟}$$

$$- ٢٨ \quad \text{الشكل البياني للدالة } y = 4 + 3x - x^2 \text{ هو قطع مكافئ . أوجد أجزائه المقطوعة} \\ \text{واستخدامها فى تخطيط الشكل البياني . أوجد ميل المنحنى عند أية } (x, y) \text{ ، واستخدمه} \\ \text{لايجاد أعلى نقطة على المنحنى .}$$

$$- ٢٩ \quad \text{أوجد الأجزاء المقطوعة للمنحنى } y = x^3 - x \text{ . أوجد ميل المنحنى عند أى نقطة . عند أى} \\ \text{النقط يكون الميل صفراً ؟ استخدم هذه المعلومات لتخطيط المنحنى}$$

$$- ٣٠ \quad \text{أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى } y = 1/x \text{ عند النقطة } (3, \frac{1}{3}) \text{ .}$$

$$- ٣١ \quad \text{أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى } y = -x^2 + x + 1 \text{ عند النقطة } (2, -1)$$

$$- ٣٢ \quad \text{هل الدالة } g \text{ المعرفة بأنها}$$

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x < 0. \\ x^2 + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

لها مشتقة يمينى عند 0 ؟ مشتقة يسرى عند 0 ؟ مشتقة عند 0 ؟ خطط الشكل البياني ، للدالة g وحقق
اجابتك هندسيا .

٣٣ - هل الدالة f المعروفة بأنها

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x < 0, \\ -x^2 - 2 & x > 0. \end{cases}$$

لها مشتقة يمين عند 0 ؟ مشتقة يسرى عند 0 ؟ مشتقة عند 0 ؟ حطط الشكل البياني للدالة f وحقق أجابتك هندسيا . إذا كانت P هي النقطة $(0, 2)$ والنقطة $Q(u, f(u))$ على الشكل البياني ، ما هو الخط المستقيم الذى يقترب منه الوتر PQ عندما تقترب u من الصفر من اليمين ؟ من اليسار ؟

٣٤ - لتكن f هي دالة حيث $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجودت وتساوى b ، مثلا لكن $b \neq f(a)$. فالشكل البياني للدالة f به ثقب عند (a, b) . لتكن P النقطة $(a, f(a))$ ولتكن $Q(u, f(u))$ نقطه على الشكل البياني . ما هو الخط المستقيم الذى تقترب منه الوتر PQ عندما تقترب u من a ؟ هل الشكل البياني له مماس عند P ؟

٣٥ - اثبت أن الدالة f المعروفة بأنها $f(x) = |x|$ ليس لها مشتقة عند 0 . هل الدالة f لها مشتقتان يمينى ويسرى هناك ؟ حطط الشكل البياني للدالة f وحقق أجابتك هندسيا .

٣٦ - لتكن h هي الدالة المعربة بـ

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + [1/x]}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

حيث $[1/x]$ ترمز الى أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوى $1/x$. أوجد $h'(0)$ أو أثبت أنها لاتوجد .

٢ - ٣

قاعدتا القوة وحاصل الجمع

المشتقات لها تطبيقات كثيرة ، لكن قبل دراسة التطبيقات يتحتم إيجاد طرق أكثر فعالية للحصول على المشتقات عن طريق الاستخدام المباشر للتعريف . طريقتنا ستكون مشابهة لتلك التى للنهايات . معظم الدوال الشائعة يمكن اعتبارها مكونة من عدد قليل من الدوال البسيطة بتكرار اجراء عمليات جمع وضرب وتركيب . الخ . سنوجد مشتقات الدوال الأساسية من التعريف ونضع قواعد مناظرة لنظريات النهاية لنستخدمها سويا للحصول على مشتقة الدالة الأصلية

نبدأ بدالتين بسيطتين $f(x) = k$ ، حيث k ثابت $g(x) = x$. فى مثال ٧ بيند ٣ - ١ قد أثبتنا أن $D(mx + b) = m$. إذا وضعنا فى هذه $m = 0$ ، $b = k$ ، فإننا نحصل على $Dk = 0$. إذا وضعنا $b = 0$ و $m = 1$ فإننا نحصل على $Dx = 1$. لقد أثبتنا ما يأتى :

٢ - ٥ $Dk = 0$ لاي ثابت k .

٣ - ٦ $Dx = 1$.

حيث أن الشكلين البيانيين لـ $f(x) = k$ ، $g(x) = x$ هما خطان مستقيمان ميلهما 0 و 1 ، فهاتان التيجتان كانتا متوقعتين .

نعتبر ثانيا دالة القوى $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد صحيح موجب . لقد أوجدنا حالا المشتقة عند $n = 1$ ، وهي يمكن كتابتها $Dx = 1 = 1x^0$ ، وفي مثالي ٢ ، ٤ بيد ٣ - ١ وجدنا أن $Dx^2 = 2x$ ، $Dx^3 = 3x^2$ من هذه يمكننا التخمين بأن $Dx^7 = 7x^6$ ، $Dx^4 = 4x^3$ ويوجه عام $Dx^n = nx^{n-1}$. بالطبع ، هذا مجرد تخمين ومثل كثير من التخمينات الرياضية قد يكون خطأ . بالرغم من ذلك فهو صحيح . نؤجل الرهان الى البد القادم ، لكن نجد برهانا بديلا مجملا في المسألة ٦٠ .

٣ - ٧ قاعدة القوة . $Dn^n = nx^{n-1}$ حيث n عدد صحيح موجب .

نتحول الان من الدوال الخاصة الى مشتقات تركيبات الدوال . الدالة $5x^3$ هي على الصورة $kf(x)$ ، حيث $f(x) = x^3$ ، $k = 5$. مشتقة أى دالة معبر عنها بحاصل ضرب ثابت في دالة f يمكن ايجادها بالقاعدة الآتية :

٣ - ٨ . اذا كانت الدالة f لها مشتقة عند x ، فان الدالة kf لأى مقدار ثابت k يكون لها مشتقة ويكون $DKf(x) = kDf(x)$.

البرهان . لتكن $F(x) = Kf(x)$. باستخدام تعريف المشتقة ، يكون لدينا

$$F'(x) = \lim_{u \rightarrow x} \frac{F(u) - F(x)}{u - x} = \lim_{u \rightarrow x} \frac{kf(u) - kf(x)}{u - x}$$

$$= \lim_{u \rightarrow x} k \frac{f(u) - f(x)}{u - x} = k \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$$

من ٢ - ١٢ (ثانيا)

النهاية الأخيرة هي بالتعريف $f'(x)$ ، وهي موجودة بالفرض . وإذا $F'(x) = kf'(x)$. يمكننا إيجاد مشتقة $5x^3$ باستخدام القاعدة ٣ - ٨ ثم قاعدة القوة :

$$D5x^3 = 5Dx^3 \quad \text{من ٣ - ٨}$$

$$= 5(3x^2) \quad \text{بقاعدة القوة}$$

$$= 15x^2.$$

لتكن دالة هي حاصل جمع دالتين لهما مشتقتان عند x . هل يمكننا استخدام المشتقتين لإيجاد مشتقة حاصل الجمع ، أكثر سهولة عن الاستخدام المباشر للتعريف . سنجد أننا مجرد أن نجمع المشتقتين أى أن ، مشتقة حاصل الجمع هي حاصل جمع المشتقتين .

٣ - ٩ قاعدة الجمع . اذا كانت الدالتان g و f لهما مشتقتان عند x ، فهكذا يكون حاصل جمعهما وفرقهما ويكون

$$D[f(x) \pm g(x)] = Df(x) \pm Dg(x)$$

فمثلا ، إذا كانت $g(x) = x^5$ و $f(x) = x^3$ ، فإن

$$D(x^3 + x^5) = Dx^3 + Dx^5 = 3x^2 + 5x^4$$

البرهان . نبرهن القاعدة لحاصل جمع دالتين . البرهان للفرق يكون مشابها . دع $F(x) = f(x) + g(x)$. علينا أن نثبت أن $F'(x) = f'(x) + g'(x)$. من تعريف المشتقة ، يكون

$$(1) \quad F'(x) = \lim_{u \rightarrow x} \frac{F(u) - F(x)}{u - x}$$

$$(2) \quad = \lim_{u \rightarrow x} \frac{[f(u) + g(u)] - [f(x) + g(x)]}{u - x}$$

$$(3) \quad = \lim_{u \rightarrow x} \left[\frac{f(u) - f(x)}{u - x} + \frac{g(u) - g(x)}{u - x} \right]$$

الفرض أن $g'(x)$ و $f'(x)$ موجودتان هو مجرد طريقة أخرى للقول أن النهاية لكل حد في (3) موجودة . إذن يمكننا استخدام نظرية ٢ - ١٢ (أولاً) عن نهاية حاصل الجمع لنكتب (3) على الصورة

$$(4) \quad F'(x) = \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} + \lim_{u \rightarrow x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x} \\ = f'(x) + g'(x).$$

دعنا نحلل برهان النظرية السابقة ونبرز نقطة هامة . غرضنا هنا كان التعبير عن مشتقة F بدلالة مشتقتي g و f . لذلك كان طبيعياً التعبير عن (1) بدلالة g و f ثم كتابة (2) في الصورة (3) لكي ندخل خارجي قسمة الفرق $[g(u) - g(x)] / (u - x)$ و $[f(u) - f(x)] / (u - x)$ اللذين يتقدمان $g'(x)$ و $f'(x)$.

القاعدة ٣ - ٩ يمكن تعميمها بسهولة الى حاصل الجمع لأكثر من دالتين .

$$D[f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] \\ = Df_1(x) + Df_2(x) + \dots + Df_n(x) \quad . \quad ٣ - ١٠$$

بفرض أن الدوال $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ لها مشتقات عند x . توجد قواعد مماثلة لخليط من خواص الجمع والفرق .

مثال ١ . أوجد $D(x^3 - 6x^2 + 8)$. لدينا

$$\begin{aligned} D(x^3 - 6x^2 + 8) &= Dx^3 - D(6x^2) + D8 \quad \text{من ٣ - ٨} \\ &= Dx^3 - 6Dx^2 + D8 \quad \text{من ٣ - ١٠} \\ &= 3x^2 - 6(2x) + 0 \quad \text{من ٣ - ٧ مرتين ، ٣ - ٥} \\ &= 3x^2 - 12x. \end{aligned}$$

مثال ٢ . أوجد $\frac{d}{dt}(4t^5 + \sqrt{2}t^4 - t^3 - t + 7)$. لدينا

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(4t^5 + \sqrt{2}t^4 - t^3 - t + 7) &= \frac{d}{dt} 4t^5 + \frac{d}{dt} \sqrt{2}t^4 - \frac{d}{dt} t^3 - \frac{d}{dt} t + \frac{d}{dt} 7 \\ &= 4 \frac{d}{dt} t^5 + \sqrt{2} \frac{d}{dt} t^4 - \frac{d}{dt} t^3 - \frac{d}{dt} t + \frac{d}{dt} 7 \\ &= 4(5t^4) + \sqrt{2}(4t^3) - 3t^2 - 1 + 0 \\ &= 20t^4 + 4\sqrt{2}t^3 - 3t^2 - 1. \end{aligned}$$

مثال ٣ . أوجد $D[\frac{1}{4}(z^3 + bz^2 + c)]$.

من المعروف في نصوص حساب التفاضل أن ، ما لم يشر إلى خلاف ذلك ، الحروف الأبجدية الأولى تكون ثوابت . واذن التعبير الذي نجرى تفاضله هنا يعتبر دالة في z حيث c و b ثابتان . بما أن التعبير هو على الصورة ثابت مضروباً في دالة ، نبدأ بالقاعدة ٣ - ٨ ونحصل على

$$\begin{aligned} D[\frac{1}{4}(z^3 + bz^2 + c)] &= \frac{1}{4}D(z^3 + bz^2 + c) = \frac{1}{4}(3z^2 + b2z + 0) \\ &= \frac{1}{4}(3z^2 + 2bz). \end{aligned}$$

مثال ٤ . أوجد dz/dy إذا كانت $z = y^2(x^2 + 2xy^3)$ ، حيث x ثابت .

نبدأ بضرب المقدار الجبري للتعبير عنه كحاصل جمع ، ومع تذكر أن x ثابتة ، نحصل على

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy} (x^2y^2 + 2xy^3) = x^2 2y + 2x 3y^2 = 2x^2y + 6xy^2$$

المشتقة التي أوجدناها تسمى أحيانا مشتقة $(x^2 + 2xy^3)$ بالنسبة إلى y للإشارة إلى أن المقدار الجبري يعتبر كدالة في y . المشتقة بالنسبة إلى x ، إذا كانت y ثابتة ، هي

$$\frac{d}{dx} [y^2(x^2 + 2xy^3)] = y^2 \frac{d}{dx} (x^2 + 2xy^3) = y^2(2x + 2y^3)$$

مثال ٥ . أوجد $g'(x)$ إذا كانت

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x < 1, \\ -x^2 + x, & x \geq 1. \end{cases}$$

عند $x < 1$, $g(x) = x^2 - 3x + 2$, يمكننا استخدام القواعد لمشتقات حواصل الجمع والقوى للحصول على $g'(x) = 2x - 3$ لكل $x < 1$. عند $x > 1$ و $g(x) = -x^2 + x$. واذن $g'(x) = -2x + 1$ لكل $x > 1$. لا توجد صيغة مفردة لوصف g داخل أى جوار للواحد الصحيح. لذلك لا يمكننا استخدام القواعد لإيجاد $g'(1)$ ، ويجب أن نلجأ إلى تعريف المشتقة، ويكون

$$\begin{aligned} g'_-(1) &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{g(u) - g(1)}{u - 1} = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{(u^2 - 3u + 2) - 0}{u - 1} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} (u - 2) = -1 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} g'_+(1) &= \lim_{u \rightarrow 1^+} \frac{g(u) - g(1)}{u - 1} = \lim_{u \rightarrow 1^+} \frac{(-u^2 + u) - 0}{u - 1} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^+} (-u) = -1. \end{aligned}$$

وحيث أن $g'_-(1) = g'_+(1)$ ، فتعرف أن $g'(1)$ موجودة وتساوى -1 .

مسائل

أوجد مشتقات الدوال الآتية :

$3t^2 - 3t + 2$ - ٤	z^6 - ٣	$ax + b$ - ٢	$5x - 1$ - ١
$4u^6 - 3u^5 + u^3 - 2u^2 - 6u - 1$ - ٦		$\sqrt{3}x^4 + 5x^2 - 2x - 11$ - ٥	
$-(y^3 - \sqrt[3]{2}y + y^2) + 8y^2$ - ٨		$3(6z^7 + 4z^5 + 6)$ - ٧	
$bu^5 - 5au^3$ - ١٠		$\frac{a}{2}(x^n - x)$ - ٩	
$k(y^2 - a^2)$, ثابت k - ١٢		$\frac{t^2}{2} - \frac{t^6}{6} + \frac{t^3}{3} - t + 10$ - ١١	
$\frac{6x^3 - \sqrt{2}x^2 + 4x}{7}$ - ١٤		$m(y^2 + by + c)$, ثابت m - ١٣	
$(2x - 1)(3x + 5)$ - ١٦		$t^5(-t^{12} + 2t^3)$ - ١٥	
$(x^6 - 5x) + x^2(x + 3) + \frac{1}{x}$ - ١٨		$(x^2 + 1)^2 - x + 1$ - ١٧	
$\frac{2x^2(x + 1)}{3}$ - ٢٠		$3t^2(2 + t^3)^2$ - ١٩	
$\frac{x^4 - x^2 - 6x^5}{x^2}$ - ٢٢		$b(z^2 - 1)^3$ - ٢١	

- ٢٣ - $ax'' + bx'''$ ، حيث m و n عندان صحيحان موجبان .
- ٢٤ - (أ) إذا كانت $V = \pi(h^2 - r^2)$ ، حيث r ثابت ، فأوجد $D_h V$. (ب) إذا كانت $V = \pi r(h^2 - r^2)$ حيث h ثابت ، فأوجد $D_r V$.
- ٢٥ - أوجد $du / d\alpha$ إذا كانت $u = (x + 2\alpha)^2 - y + \alpha$ حيث x و y ثابتان .
- ٢٦ - إذا كانت $f(x) = 4x^3 - x^2 + x$ فأوجد $f(-1), f'(0), f'(a), f'(x-y)$
- ٢٧ - إذا كانت $f(x) = x^2 + 4x + 4$ فأوجد $f'(1), f'(0), f'(t), f'(1-t^2)$
- لأى قيم x تكون $f'(x)$ تساوى 2 .
- ٢٨ - إذا كانت ، فأوجد $g'(2)$ و $g(2)$. لأى قيم t تكون $g'(t)$ تساوى صفراً .
- ٢٩ - أوجد dy / dx عندما $x = -3$ إذا كانت $y = (x^2 - x)^3$.
- ٣٠ - أوجد معادلات المماسات للمنحنى $y = x^2$ عند النقط $(0,0)$ و $(-1, -1)$ و $(2,8)$
- ٣١ - أوجد معادلتى المماس والعمودى للقطع المكافئ $y = \frac{1}{2}(3 - x^2)$ عند $(-2, -\frac{1}{2})$.
- ٣٢ - أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$ عند النقطة التى إحداثياتها x هو 2 .
- ٣٣ - أوجد معادلة العمودى للقطع المكافئ $y = 2x^2 - 8x + 5$ عند النقطة حيث الميل يساوى 4 .
- ٣٤ - أوجد معادلات المماسات للمنحنى $y = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$ عند نقط تقاطعه مع محور x .
- ٣٥ - أوجد معادلة المماس للمنحنى $y = x^2 + 2x - 3$ عند النقطة $(-2, -3)$. عند أى نقطة يكون المماس أفقياً ؟ أوجد نقط تقاطع المنحنى مع المحورين وخطط المنحنى دون توقيع نقط اضافية .
- ٣٦ - عند أى نقطة على المنحنى $y = x^2 - 3x - 3$ يكون المماس عمودياً على الخط المستقيم $x + 2y + 1 = 0$ ؟
- ٣٧ - خطط القطعين المكافئين $y = x^2, x^2 + 3y = 3$ وأوجد نقط تقاطعهما . أثبت أن القطعين المكافئين يتقاطعان على التعامد . أى أن ، المماسين عند كل نقطة تقاطع يكونان متعامدين .
- ٣٨ - أثبت عن طريق الميل أن الأحداثى x لرأس القطع المكافئ $y = ax^2 + bx + c$ هو $-b / 2a$.
- ٣٩ - إذا كانت $y = x^2 - 2x - 8$ ، فلأى قيم x تكون dy / dx موجبة ؟ سالبة ؟ إذا كانت $dy / dx > 0$ عند x ما ، ما الذى يمكنك استنتاجه عن اتجاه المنحنى عند النقطة المناظرة ؟ استخدم المعلومات عن ايجابية وسلبية المشتقة لتساعد فى تخطيط المنحنى .
- ٤٠ - إذا كانت $y = x^2(6-x)$ ، لأى قيمة x تكون dy / dx موجبة ؟ سالبة ؟ استخدم هذه المعلومات لتساعد فى تخطيط المنحنى .

٤١ - إذا كانت $h(x) = f(x) - m(m-a) - f(a)$ ، حيث a, m ثابتان وحيث f دالة قابلة للتفاضل ، فأوجد $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$.
أوجد دالة مشتقتها هي :

$$- ٤٢ \quad 4x \quad - ٤٣ \quad 6x^2 \quad - ٤٤ \quad x^2 \quad - ٤٥ \quad 5t + 4$$

$$- ٤٦ \quad 2x^2 - 8x \quad - ٤٧ \quad x^3 - x^2 + x - 1 \quad - ٤٨ \quad ax^3 + b \quad - ٤٩ \quad (1 + y)^2$$

أوجد $f'(x)$ إذا كانت :

$$- ٥٠ \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x \leq 0 \\ -x^2 + 3, & x > 0 \end{cases} \quad - ٥١ \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x < 3 \\ 3x - 6, & x \geq 3 \end{cases}$$

- ٥٢ - أثبت أن مشتقة $|x|$ عند $x \neq 0$ هي $x/|x|$.

- ٥٣ - أوجد $g'(-3)$ إذا كانت $g(x) = x^2 + |x|$. - ٥٤ - أوجد $D|x^2 - 9|$.

- ٥٥ - أين تفشل دالة أكبر الأعداد الصحيحة في أن يكون لها مشتقة ؟ ما قيمة المشتقة عند الأعداد الأخرى ؟

- ٥٦ - أثبت أن $D[-f(x)] = -Df(x)$.

- ٥٧ - عمم قاعدة حاصل الجمع ٣ - ٩ لحاصل جمع ثلاثة حدود باثبات أن

$$D[f(x) + g(x) + h(x)] = Df(x) + Dg(x) + Dh(x)$$

[إرشاد : يمكن برهان النتيجة إما مباشرة باستخدام تعريف المشتقة واتباع الخطوات كما فعلنا في برهان القاعدة ٣ - ٩ وإما بالتعبير عن $f(x) + g(x) + h(x)$ كحاصل جمع دالتين واستخدام ٣ - ٩] .

- ٥٨ - (أ) اعط برهانا لـ $D[f(x) - g(x)] = Df(x) - Dg(x)$ مشابها لبرهان قاعدة

حاصل الجمع ٣ - ٩ ، المعطى في الكتاب . (ب) أثبت أن $D[f(x) - g(x)] =$

$Df(x) - Dg(x)$ بكتابة $-g(x)$ على الصورة $g(x)(-1)$. لاحظ جيدا أى صيغ

للمشتقات تستخدم في البرهان .

- ٥٩ - أثبت مباشرة من تعريف المشتقة أن (أ) $Dk = 0$ ، k ثابت . (ب) $Dx = 1$.

- ٦٠ - أثبت قاعدة القوة ٣ - ٧ مباشرة من تعريف المشتقة ، بإيجاد قيمة

$$\lim_{u \rightarrow x} [(u^n - x^n)/(u - x)]$$

[إرشاد : حلل البسط ؛ انظر ٢ ، بيند ٣ - ٥]

- ٦١ - أثبت أن كثيرة الحدود قابلة للتفاضل في أى مكان .

٣ - ٣

قاعدتا حاصل الضرب وخارج القسمة

نفرض أن دالة h هي حاصل ضرب دالتين g و f لهما مشتقتان عند x . نبحث عن طريقة للتعبير عن مشتقة حاصل الضرب fg بدلالة مشتقتي g و f مناظرة للصيغة لمشتقة حاصل جمع دالتين .
مسترشدتين بصيغة المشتقة لحاصل الجمع والنظرية عن النهاية لحاصل الضرب ، قد نخمن أن

$D[f(x)g(x)] = Df(x)Dg(x)$. من السهل أن نختبر هذا للدالتين $g(x) = x^4$ و $f(x) = x^2$ لدينا $Dx^3 = 3x^2$ و $Dx^2 = 2x$ و $Dx^4 = 5x^3$ ، ففي هذه الحالة :
 $D[f(x)g(x)] = Df(x)Dg(x)$. تخميننا خطأ : دعنا نرى ما ينبغي أن تكون مشتقة حاصل الضرب .

نفرض أن f و g لهما مشتقتان عند x . دع $F(x) = f(x)g(x)$ ، بالتعريف

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{u \rightarrow x} \frac{F(u) - F(x)}{u - x} \\ (1) \quad &= \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u)g(u) - f(x)g(x)}{u - x} \end{aligned}$$

كما في برهان قاعدة حاصل الجمع ، أننا نرغب في أن نعبر عن خارج القسمة في هذا المقدار الجبري الأخير بدلالة خارج قسمة الفروق للدالتين f و g . هناك كان واضحا تماما كيف نواصل ، لكن هنا ليس كذلك . فكرة استخدمت من قبل تمدنا بالحيلة . نطرح ونجمع $f(u)g(x)$ بالبسط في (١) ، فنحصل على

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u)g(u) - f(u)g(x) + f(u)g(x) - f(x)g(x)}{u - x} \\ &= \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u)[g(u) - g(x)] + g(x)[f(u) - f(x)]}{u - x} \\ &= \lim_{u \rightarrow x} \left[f(u) \frac{g(u) - g(x)}{u - x} + g(x) \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \right] \\ (2) \quad &= \left[\lim_{u \rightarrow x} f(u) \right] \left[\lim_{u \rightarrow x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x} \right] \\ &\quad + \left[\lim_{u \rightarrow x} g(x) \right] \left[\lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \right] \\ (3) \quad &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \end{aligned}$$

نظرية ٢-١٢ عن نهايات حواصل الجمع وحواصل الضرب قد استخدمت للحصول على (٢) من الخطوة التي تعلوها . لقد بدأنا بالفعل استخدام هذه النظرية الأساسية بكثرة . المقادير في (٣) نحصل عليها كما يلي ، بما أن مشتقة الدالة f عند x موجودة فإن f دالة متصلة عند x (نظرية ٣-٤) وعليه يكون $\lim_{u \rightarrow x} f(u) = f(x)$ ، الرمز $g(x)$ هو مجرد طريقة أخرى لكتابة

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x} \\ \lim_{u \rightarrow x} g(x) = g(x) ، \text{ وبالمثل بالنسبة الى } f'(x) ، \text{ لأن } g(x) \text{ ثابتة ،} \end{aligned}$$

بإعادة كتابة (٣) يكون لدينا القاعدة الآتية لمشتقة حاصل ضرب دالتين .

٣-١١ قاعدة حاصل الضرب . إذا كانت الدالتان g و f لهما مشتقتان عند x ، فإن حاصل ضربيهما أيضا يكون له مشتقة ويكون

$$D[f(x)g(x)] = f(x)Dg(x) + g(x)Df(x)$$

قاعدة حاصل الضرب نتذكرها بسهولة أكثر باعتبار مشتقة حاصل الضرب تساوى العامل الأول مضروباً في مشتقة العامل الثانى زائداً العامل الثانى مضروباً في مشتقة العامل الأول . دعنا نحاول مرة أخرى أن نوجد مشتقة حاصل الضرب $x^2 x^3$ ، مستخدمين هذه المرة القاعدة ٣ - ١١ . لدينا

$$D(x^2 x^3) = x^2 D x^3 + x^3 D x^2 = x^2 3x^2 + x^3 2x = 5x^4$$

التي هي مشتقة x^5 .

مثال ١ . أوجد $D[(x^3 - 3x)(x^2 + 1)]$

مع أننا يمكننا التعبير عن حاصل الضرب ككثيرة حدود ونستخدم قاعدة حاصل الجمع ، سنستخدم قاعدة حاصل الضرب ٣ - ١١ ، التي تعطى

$$\begin{aligned} D[(x^3 - 3x)(x^2 + 1)] &= (x^3 - 3x)D(x^2 + 1) + (x^2 + 1)D(x^3 - 3x) \\ &= (x^3 - 3x)(2x) + (x^2 + 1)(3x^2 - 3) \\ &= 5x^4 - 6x^2 - 3. \end{aligned}$$

بوجه خاص ، المشتقة عند 2 هي $5(2^4) - 6(2^2) - 3 = 53$

يمكننا الآن برهنة قاعدة القوة

$$Dx^n = nx^{n-1} \quad \text{حيث } n \text{ عدد صحيح موجب} \quad (٤)$$

في بند ٣ - ١ برهنا (٤) عندما $n=1$ و 2 و 3 مباشرة من تعريف المشتقة . مع أن الحالة $n=4$ يمكن البرهنة عليها بنفس الطريقة ، إلا أننا مستبعد طريقة أخرى . نكتب x^4 على الصورة $x^3 x$. عندئذ بقاعدة حاصل الضرب ٣ - ١١ ، يكون

$$Dx^4 = D(x^3 x) = x^3 Dx + x D x^3 = x^3(1) + x(3x^2) = 4x^3$$

بالمثل يمكننا إيجاد Dx^5

$$Dx^5 = D(x^4 x) = x^4 Dx + x D x^4$$

ولقد أثبتنا حالا أن $Dx^4 = 4x^3$. واذن

$$Dx^5 = x^4(1) + x(4x^3) = 5x^4$$

بنفس الطريقة ، بكتابة x^6 على الصورة $x^5 x$ واستخدام الحقيقة أن $Dx^5 = 5x^4$ ، يمكننا إثبات أن $Dx^6 = 6x^5$.

بالاستمرار بهذه الكيفية ، مستخدمين كل خطوة لنبرهن الخطوة التالية ، سيبدو أننا سوف نكون قادرين على إثبات (٤) لكل n تباعاً وأخيراً نصل $n = 1000, 1,000,000$ أو أى عدد

صحيح ، وهذا يدعو إلى أن (٤) تكون صحيحة لكل عدد صحيح موجب n . لحسم الموقف ، يجب أن نثبت أنه من الممكن دائما الاستمرار من أى قيمة لـ n إلى القيمة التالية . سنعمل هذا باثبات أنه إذا كانت (٤) صحيحة لأى قيمة لـ n ، مثلا k ، فهي صحيحة للقيمة الأكبر التالية ، $k + 1$. بمعنى آخر ، نثبت أن لكل عدد صحيح موجب k إذا كان النص

$$(٥) \quad Dx^k = kx^{k-1}$$

صحيحا ، فإن النص

$$(٦) \quad Dx^{k+1} = (k + 1)x^k$$

يكون صحيحا ، هذا ليس صعبا . فلدينا

$$(٧) \quad Dx^{k+1} = D(x^k x) = x^k Dx + x Dx^k$$

بما أننا مفترضون صحة (٥) ، فيمكننا استبدال Dx^k فى (٧) بـ kx^{k-1} ونحصل على

$$Dx^{k+1} = x^k(1) + x(kx^{k-1}) = x^k + kx^k = (k + 1)x^k$$

التي هى (٦) . حيث أننا قد أثبتنا أنه من الممكن دائما أن نتقل من مرحلة الى المرحلة التى تليها ونعلم أن (٤) صحيحة عندما $n = 5$ فإننا نعرف أنها صحيحة عندما $n = 6$. يجب عندئذ بنفس الاستدلال أن تكون صحيحة عندما $n = 7$ ، بعد ذلك عندما $n = 8$ ، وهكذا . يمكننا الآن رسميا أن ندعو إلى أن (٤) تكون صحيحة لكل عدد صحيح موجب n .

الاستدلال المستخدم فى هذا البرهان ربما يكون جديدا لبعض القارئین . هذا الاستدلال يسمى الاستنتاج الرياضى ، وهو طريقة هامة للبرهنة . ستناقشه مناقشة أعمق فى نهاية هذا البند . لكى نوجد المشتقة لدالة مثل $x^2 / (2x + 1)$ نحتاج الى قاعدة لمشتقة خارج القسمة .

٣-١٢ قاعدة خارج القسمة . إذا كانت الدالتان g و f لهما مشتقتان عند x ، فإن خارج قسمتها f/g أيضا له مشتقة ، وذلك بفرض أن $g(x) \neq 0$ ، ويكون

$$D \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)Df(x) - f(x)Dg(x)}{g^2(x)}$$

البرهان . دع $F(x) = f(x)/g(x)$ حيثذ يكون

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u)/g(u) - f(x)/g(x)}{u - x} \\
&= \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u)g(x) - f(x)g(u)}{g(u)g(x)(u - x)} \\
&= \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(u)}{g(u)g(x)(u - x)} \\
&= \lim_{u \rightarrow x} \frac{1}{g(x)} \frac{1}{g(u)} \frac{g(x)[f(u) - f(x)] - f(x)[g(u) - g(x)]}{u - x} \\
&= \frac{1}{g(x)} \left[\lim_{u \rightarrow x} \frac{1}{g(u)} \right] \left[g(x) \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \right. \\
&\quad \left. - f(x) \lim_{u \rightarrow x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x} \right] \\
(8) \quad &= \frac{1}{g^2(x)} [g(x)f'(x) - f(x)g'(x)].
\end{aligned}$$

على القارئ أن يكون قادرا على شرح كل خطوة في هذا البرهان وبخاصة لماذا :
 $\lim_{u \rightarrow x} [1/g(u)] = 1/g(x)$ في (8) . قاعدة خارج القسمة تكون أكثر تذكرا في الصورة « مشتقة »
 خارج القسمة هي المقام مضروباً في مشتقة البسط ، ناقص البسط مضروباً في مشتقة المقام ، الكل
 مقسوماً على مربع المقام .

مثال ٢ . أوجد $D[x^3/(2x+1)]$.

بقاعدة خارج القسمة ٣ - ١٢ يكون

$$\begin{aligned}
D \frac{x^3}{2x+1} &= \frac{(2x+1)Dx^3 - x^3D(2x+1)}{(2x+1)^2} \\
&= \frac{(2x+1)3x^2 - x^3(2)}{(2x+1)^2} \\
&= \frac{x^2(4x+3)}{(2x+1)^2}.
\end{aligned}$$

هذا يكون صحيحاً لأي $x \neq -\frac{1}{2}$.

قاعدة خارج القسمة تمكنتنا من تعميم قاعدة القوة ٣ - ٧ إلى الأس الصحيحة السالبة . نفرض
 أن $n < 0$. بقاعدة خارج القسمة ، يكون

$$Dx^n = D \frac{1}{x^{-n}} = \frac{x^{-n}D1 - 1(Dx^{-n})}{(x^{-n})^2}$$

بما أن $n > 0$ ، يمكننا إيجاد Dx^{-n} بقاعدة القوة . ومن ثم يكون

$$Dx^n = \frac{x^{-n}(0) - 1(-nx^{-n-1})}{x^{-2n}} = nx^{-n-1}x^{2n} = nx^{n-1}$$

هذا يبرهن تعميم قاعدة القوة :

$$Dx^n = nx^{n-1} \quad \text{لـ كل عدد صحيح } n. \quad ١٣ - ٣$$

$$\text{فمثلا } Dx^{-3} = -3x^{-4} = -3/x^4$$

مثال ٣ . أوجد $D[(x^4 - 6x^2 - 7x + 5)/x^2]$ لدينا

$$\begin{aligned} D \frac{x^4 - 6x^2 - 7x + 5}{x^2} &= D \left(x^2 - 6 - \frac{7}{x} + \frac{5}{x^2} \right) \\ &= Dx^2 - D6 - 7Dx^{-1} + 5Dx^{-2} \\ &= 2x + 7x^{-2} - 10x^{-3} \\ &= 2x + \frac{7}{x^2} - \frac{10}{x^3} \\ &= \frac{2x^4 + 7x - 10}{x^3} \end{aligned}$$

يمكن أيضا إيجاد المشتقة بقاعدة خارج القسمة: *

مثال ٤ . أوجد أصفار $f'(x)$ ، حيث $f(x) = 4/(x-1) + x$

سنوجد قيم x حيث $f'(x) = 0$. بما أن f يعبر عنها كحاصل جمع ، نوجد مشتقتها بأذن
نستخدم أولا قاعدة حاصل الجمع ثم قاعدة خارج القسمة مطبقة على الحد الأول :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{4}{x-1} + x \right) = \frac{d}{dx} \frac{4}{x-1} + \frac{d}{dx} x \\ &= \frac{(x-1)(0) - 4(1)}{(x-1)^2} + 1 = \frac{-4}{(x-1)^2} + 1. \end{aligned}$$

* ليس ضروريا بل ليس دائما من المرغوب فيه أن نعبر عن إجابات نحوي على أسس سالبة ، في صورة تكون فيها الأسس موجبة . في مثال ٣ أي من المقادير الجبرية الثلاثة الأخيرة يكون مقبولا لأن يكون الجواب .

لايجاد أين $f'(x) = 0$ ، نعبّر أولا عن $f'(x)$ ككسر فيه البسط محللا الى عوامله .

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

بما أن الكسر يكون صفرا فقط اذا كان بسطه صفرا فان $f'(x) = 0$ اذا كانت $x = 3$ أو $x = -1$ وليس لقيم أخرى .

لقد أثبتنا قاعدة القوة لاجراء التفاضل بطريقة الاستنتاج الرياضى . نختتم هذا البند بتوضيحين آخرين لاستخدام الاستنتاج .

مثال ٥ . أثبت أن حاصل جمع الاعداد الصحيحة الموجبة الأولى التى عددها n هو $n(n+1)/2$ علينا أن نثبت أن

$$(٩) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

لأى عدد صحيح $n \geq 1$. عندما $n = 1$ ، المعادلة (٩) تختزل الى

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

لذلك فهى صحيحة فى هذه الحالة . سنوضح الآن أنه اذا كانت (٩) صحيحة لأى عدد صحيح موجب n ، فهى أيضا صحيحة للعدد الصحيح الأكبر التالى . لذلك نفرض أن (٩) تكون صحيحة عندما $n = k$ ، أى أن ،

$$(١٠) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

تكون صحيحة . سنثبت أن (٩) تكون عندئذ صحيحة عندما $n = k + 1$ ، أى أن ،

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

تكون صحيحة . لدينا

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = [1 + 2 + 3 + \dots + k] + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \quad \text{by (10)}$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

لقد أثبتنا أنه إذا كانت (٩) صحيحة لأي عدد صحيح موجب n ، فهي صحيحة للعدد الصحيح الأكبر التالي . لكن نعلم أن (٩) صحيحة عندما $n = 1$. لذلك هي صحيحة عندما $n = 2$. بما أن (٩) تكون صحيحة عند $n = 2$ ، فهي صحيحة عند $n = 3$. بتطبيق الاستدلال مرة أخرى ، هي صحيحة عندما $n = 4$ ، وهكذا . وإذن (٩) صحيحة لكل عدد صحيح موجب n .

مثال ٦ . باستخدام القاعدة ٣ - ٩ لمشتقة حاصل جمع دالتين ، أثبت تعميمها إلى القاعدة ٣ - ١٠ لمشتقة حاصل جمع n من الدوال :

علينا أن نثبت أن لأي عدد صحيح $n \geq 2$ ، يكون

$$(11) \quad D[f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] \\ = Df_1(x) + Df_2(x) + \dots + Df_n(x).$$

إذا كانت $n = 2$ ، فإن (١١) تختزل إلى

$$D[f_1(x) + f_2(x)] = Df_1(x) + Df_2(x)$$

التي هي صحيحة بالقاعدة ٣ - ٩ . سنثبت الآن أنه إذا كانت (١١) صحيحة لأي عدد صحيح موجب n ، فهي صحيحة للعدد الصحيح الأكبر التالي . لذلك نفرض أن (١١) تكون صحيحة عندما $n = k$. سنثبت أنها تكون صحيحة عندما $n = k + 1$. لدينا

$$(12) \quad D[f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x) + f_{k+1}(x)] \\ = D[\{f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x)\} + f_{k+1}(x)].$$

الطرف الأيمن لهذه المعادلة هو مشتقة حاصل جمع دالتين وإذن بالقاعدة ٣ - ٩ يساوي

$$(13) \quad D\{f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x)\} + Df_{k+1}(x)$$

حيث أننا افترضنا أن (١١) تكون صحيحة عند $n = k$ ، فإن (١٣) تساوي

$$\{Df_1(x) + Df_2(x) + \dots + Df_k(x)\} + Df_{k+1}(x)$$

بتعويض ذلك في الطرف الأيمن من (١٢) ، يكون لدينا

$$D[f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x) + f_{k+1}(x)] \\ = Df_1(x) + Df_2(x) + \dots + Df_k(x) + Df_{k+1}(x)$$

ونكون قد أثبتنا أن (١١) تكون صحيحة عند $n = k + 1$ عندما تكون صحيحة عند $n = k$. بما أننا نعلم أن (١١) تكون صحيحة عند $n = 2$ ، فهي لذلك صحيحة عند $n = 3$. بالمثل ، هي صحيحة عند $n = 4$ و $n = 5$ وهكذا . وإذن (١١) تكون صحيحة لكل الأعداد الصحيحة $n \geq 2$.

مسائل

أوجد المشتقة للآتي بطريقتين ، أولا بقاعدة حاصل الضرب ثم بالتعبير عن حاصل الضرب كحاصل جمع واستخدام قاعدة حاصل الجمع

$$\begin{array}{ll} x^2(1-4x) & - ٢ \quad 3x(x-2) & - ١ \\ (u^2+3u+1)(u^2-3u+1) & - ٤ \quad (2s+1)(3s^2-1) & - ٣ \end{array}$$

أوجد المشتقة لما يأتي بقاعدة حاصل الضرب :

$$\begin{array}{ll} (t^4-1)^2 & - ٧ \quad (5x^2-4)(5x^2+4) & - ٦ \quad y^3(6-3y-2y^2) & - ٥ \\ (\pi t^2+2)(t^3\sqrt{2}-2) & - ٩ \quad (x^2-d^2)(x^2+d^2) & - ٨ \\ \pi(b/a)r^2(a-r) & - ١١ \quad 6(x+b)(x^2-ax-6) & - ١٠ \\ 4(2y^2-y-1)(y^3+y+\frac{1}{2}) & - ١٣ \quad (4r^2-2r)(r^3-\frac{1}{2}r^2-r+\sqrt{10}) & - ١٢ \\ (x^3+1)^3 & - ١٦ \quad (x^2+1)(x^2-2)(5x+7) & - ١٥ \quad \frac{2}{3}x^3(x^3+1)(2x^2-3) & - ١٤ \end{array}$$

أوجد المشتقة لما يأتي وبسط النتيجة :

$$\begin{array}{ll} \frac{2z-5}{2z+5} & - ١٩ \quad \frac{a}{x+3} & - ١٨ \quad \frac{x+1}{x} & - ١٧ \\ \frac{x^3+x^2+x-1}{x^2} & - ٢٢ \quad 5\left(t^3+\frac{1}{t^3}\right) & - ٢١ \quad \frac{x^4}{x^2+1} & - ٢٠ \\ \frac{1}{x^2-3x-4} & - ٢٥ \quad \frac{x^2+3x}{4x+2}+6x & - ٢٤ \quad \frac{u^3}{2b-u} & - ٢٣ \\ a\frac{c+bx}{c-bx} & - ٢٨ \quad (x^2+3)\left(x+\frac{3}{x}\right) & - ٢٧ \quad \frac{1-4t}{t^2}+t^3(t+2) & - ٢٦ \\ \left(u+\frac{1}{u}\right)^2 & - ٣١ \quad (ax+b)^{-1} & - ٣٠ \quad \left(2s+\frac{1}{s}\right)\frac{1-s}{s} & - ٢٩ \\ \frac{x^2+2}{x+2/x} & - ٣٤ \quad \frac{x^2+4x+4}{x^2-6x+9} & - ٣٣ \quad y^2\frac{a+y}{a-y} & - ٣٢ \\ \frac{2z}{(z^2-3)(z^3-6)} & - ٣٧ \quad \frac{(y+5)(3y^2-y-1)}{4-y^2} & - ٣٦ \quad \frac{(x^2-2x)(1-x^2)}{3x+2} & - ٣٥ \\ (5x^2+2)\frac{1-\frac{1}{2}x}{1+\frac{1}{2}x} & - ٤٠ \quad \frac{1-v^{-1}}{1+v^{-3}} & - ٣٩ \quad \frac{3/y+1}{1/y-3} & - ٣٨ \end{array}$$

أوجد أصفار المشتقة لما يأتي :

- ٤١ - $(x^2 + 4)(x - 4)$ - ٤٢ $z^2 + z^{-2}$ - ٤٣ $y + \frac{6}{y}$
- ٤٤ - $\frac{x+1}{x-2}$ - ٤٥ $\frac{x+b}{dx^2}, b \neq 0$ - ٤٦ $\frac{1}{1+u^2}$
- ٤٧ - $\frac{ax}{a^2+x^2}, a \neq 0$ - ٤٨ $A(r) = \frac{2b}{r} + 2\pi r^2$ - ٤٩ $\frac{c^2-x^2}{c^2+x^2}, c \neq 0$
- ٥٠ $V(h) = \pi \left(r^2 h - \frac{h^3}{4} \right), r \text{ const}$

حل المعادلات الآتية بالنسبة الى y وأوجد dy/dx :

- ٥١ - $x^2 - xy = 3$ - ٥٢ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 6$ - ٥٣ $x^2 = \frac{x+y}{x-y}$

- ٥٤ - أوجد معادلة المماس للمنحنى $y = 7/(3x^2 + 2)$ عند النقطة $(-1, 7/5)$
- ٥٥ - أوجد معادلة المماس للمنحنى $y = (x^2 - a^2)/(x^2 + a^2), a \neq 0$ عند النقطة $(a, 0)$. أية نقطة يكون المماس أفقيا ؟

- ٥٦ - أوجد معادلة المماس للمنحنى $y = (x-2)/x^2$ الذى يكون عموديا على الخط المستقيم $2x + 6y + 5 = 0$.

- ٥٧ - هل الدالة الكسرية قابلة للتفاضل فى كل مكان ، اذا لم تكن ، عند أى أعداد تكون قابلة للتفاضل ؟

- ٥٨ - اتبع الخطوات فى برهان قاعدة القوة المعممة ٣ - ١٣ للدالة الخاصة x^{-5} .
- ٥٩ - لماذا تكون $[1/g(u)] = 1/g(x)$ فى المعادلة (٨) فى برهان قاعدة خارج القسمة .
- ٦٠ - استنتج الصيغة $Dkf(x) = kDf(x)$ ، حيث k ثابت ، من قاعدة مشتقة حاصل ضرب دالتين .

- ٦١ - أثبت أن $D \frac{f(x)}{k} = \frac{Df(x)}{k}$ ، حيث k ثابت .

- ٦٢ - أثبت قاعدة حاصل الضرب ٣ - ١١ مستخدما الصورة البديلة للمشتقة المعطاة فى (٥) ، بتد ٣ - ١ .

- ٦٣ - استنتج قاعدة مشابهة لقاعدة ٣ - ١١ لمشتقة حاصل ضرب ثلاث دوال . (ارشاد : اكتب حاصل الضرب كحاصل ضرب دالتين) . حقق قاعدتك باستخدامها لإيجاد مشتقة $x^2(2x^3 + 1)(4x + 3)$.

- ٦٤ - أثبت بالاستنتاج الرياضى أن لكل عدد صحيح موجب n يكون

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

٦٥ - أثبت بالاستنتاج الرياضى الصيغة لحاصل جمع متوالية هندسية

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r}$$

حيث n عدد صحيح موجب ، $r \neq 1$.

٦٦ - أثبت بالاستنتاج الرياضى أن لاي عدد صحيح موجب n يكون

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

٦٧ - لتكن S_n حاصل جمع الأعداد الصحيحة الفردية الأولى التى عددها n . أى أن :

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$$

باعتبار بعض القيم الأولى لـ n خمن صيغة لـ S_n .

أثبت الآن تخمينك بالاستنتاج الرياضى .

٦٨ - أثبت بالاستنتاج الرياضى أن $5^{2n} - 1$ تقبل القسمة على 24 لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n

(إرشاد : إذا كانت تقبل القسمة على 24 ، فإنه يوجد عدد صحيح a بحيث أن :

$$5^{2n} - 1 = 24a$$

٦٩ - استخدم الاستنتاج الرياضى لتعميم نظرية ٢ - ١٢ (أولاً) عن نهاية حاصل جمع دالتين إلى

النهية لحاصل جمع n من الدوال . .

٧٠ - أثبت بالاستنتاج الرياضى أن $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ ، حيث n عدد صحيح موجب . ماهى نظريات

النهية التى تحتاجها لاثبات ذلك ؟

٧١ - أثبت بالاستنتاج الرياضى أن اذا كانت $x \geq -1$ ، فإن $(1+x)^n \geq 1 + nx$ لكل عدد صحيح

n ليس سالبا .

٧٢ - أثبت بالاستنتاج الرياضى أن لاي عدد صحيح $n > 1$ ، يكون

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

٧٣ - (أ) أثبت بالاستنتاج الرياضى « مبدأ الصندوق » : إذا وضع $n+1$ من الأشياء فى n أو أقل من

الصناديق ، فعلى الأقل أحد الصناديق يجب أن يحتوى على أكثر من شىء واحد . (ب) أثبت

أنه يوجد على الأقل كلبان فى العالم لهما نفس العدد من الشعر . (إرشاد : قدر عدد الكلاب

وقدر أكبر عدد من الشعر يكون لاي كلب .)

مع أننا يمكننا إيجاد مشتقة $(x^2 + 1)^7$ بفك المقدار الجبرى ، لكن المشروع ليس سارا . وأيضا لا يمكننا إيجاد المشتقة بطريقة قاعدة القوة إذ أن المقدار الجبرى هو قوة الدالة فى x وليس قوة لـ x . نحتاج إلى تعميم لقاعدة القوة إلى مقدار جبرى على الصورة $g^n(x)$. سنحصل على مثل هذه القاعدة إذا ما اعتبرنا $g^n(x)$ كدالة تركيبية لدوال ، لكن نحتاج أولا إلى قاعدة مشابهة لقاعدتى حاصل الجمع وحاصل الضرب تمكنا من إيجاد مشتقة الدالة التركيبية $f(g(x))$ لدالتين بدلالة مشتقتى g و f .

٣ - ١٤ قاعدة السلسلة . دع $F(x) = f(g(x))$ وضع $z = g(x)$ إذا كانت g لها مشتقة عند x وكانت f لها مشتقة عند z ، فإن F يكون لها مشتقة عند x ويكون

$$F'(x) = D_x f(g(x)) = f'(z)g'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

الدليل x يظهر فى رمز المشتقة D_x لىذكرنا بأن $f(g(x))$ هى دالة فى x .

مثال ذلك ، افرض أن $F(x) = (3x + 1)^2$. إذا وضعنا $z = g(x) = 3x + 1$ و $f(z) = z^2$ ، فإن $F'(x) = f'(g(x))$ وقاعدة السلسلة تعطى $F'(x) = (2z)(3) = 6(3x + 1)$.

قاعدة السلسلة ستمكنا من تعميم كثير من قواعد التفاضل الأساسية مما يوسع كثيراً مدى تطبيقها . سنؤجل برهانها حتى نهاية هذا البند ، وندرس الآن المشتقة لـ $g^n(x)$.

$$Dg^n(x) = ng^{n-1}(x)Dg(x) \quad ٣ - ١٥$$

من الطبيعى يجب أن تكون g قابلة للتفاضل عند x ليكون ذلك صحيحا . لاحظ أن القاعدة ٣ - ١٥ تختزل الى قاعدة القوة عندما تكون $g(x) = x$.

البرهان . إذا وضعنا $z = g(x)$ وكتبنا $f(z) = z^n$ ، فإن $g^n(x)$ يمكن اعتبارها كالدالة التركيبية لـ f بـ g .

$$g^n(x) = f(g(x))$$

بما أن $f'(z) = nz^{n-1}$ ، فيكون لدينا بقاعدة السلسلة

$$\begin{aligned} Dg^n(x) &= D_x f(g(x)) = f'(z)g'(x) \\ &= nz^{n-1}g'(x) = ng^{n-1}(x)g'(x) \end{aligned}$$

مثال ١ . أوجد $D (x^2 + 1)^7$.

المقدار الجبرى ليفاضل هو على الصورة $g^n(x)$ ، حيث $n=7$ و $g(x) = x^2 + 1$. بقاعدة ٣- .
١٥ ، يكون

$$\begin{aligned} D(x^2 + 1)^7 &= 7(x^2 + 1)^6 D(x^2 + 1) \\ &= 7(x^2 + 1)^6 2x = 14x(x^2 + 1)^6. \end{aligned}$$

مثال ٢ . أوجد $D [1 / (x^2 - 2x)^3]$.

بدلاً من استخدام قاعدة خارج القسمة ، نكتب المقدار الجبرى ليفاضل فى الصورة :
 $(x^2 - 2x)^{-3}$. فيكون الآن فى الصورة $g^n(x)$ حيث $n = -3$ و $g(x) = x^2 - 2x$. باستخدام
قاعدة ٣- ١٥ ، يكون

$$\begin{aligned} D \frac{1}{(x^2 - 2x)^3} &= D(x^2 - 2x)^{-3} = -3(x^2 - 2x)^{-4} D(x^2 - 2x) \\ &= -3(x^2 - 2x)^{-4} (2x - 2) = \frac{-6(x - 1)}{(x^2 - 2x)^4}. \end{aligned}$$

مثال ٣ . أوجد $D [(z^2 + 2)^3 (3z + 1)^2]$.

المقدار الجبرى الذى سيفاضل هو حاصل ضرب . نبدأ بصيغة حاصل الضرب ثم نستخدم
قاعدة ٣- ١٥ مرتين :

$$\begin{aligned} D[(z^2 + 2)^3 (3z + 1)^2] &= (z^2 + 2)^3 D(3z + 1)^2 + (3z + 1)^2 D(z^2 + 2)^3 \\ &= (z^2 + 2)^3 2(3z + 1) D(3z + 1) \\ &\quad + (3z + 1)^2 3(z^2 + 2)^2 D(z^2 + 2) \\ &= (z^2 + 2)^3 2(3z + 1) 3 + (3z + 1)^2 3(z^2 + 2)^2 2z \\ &= 6(z^2 + 2)^2 (3z + 1) [(z^2 + 2) + (3z + 1)z] \\ &= 6(z^2 + 2)^2 (3z + 1) (4z^2 + z + 2). \end{aligned}$$

أى من الصورة الثلاث الأخيرة تكون صحيحة ، لكن الأخيرة ، التى فيها المشتقة مكتوبة فى
صورة عوامل ، تكون عادة الأكثر ملاءمة .

مثال ٤ . أوجد معادلة المماس عند النقطة (2,8) للمنحنى $y = [x/(x - 1)]^3$
نوجد أولاً المشتقة عند x :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 3 \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 D \frac{x}{x-1} \\ &= 3 \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-3x^2}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

عند $x = 2$ يكون $dy / dx = -12$ فتكون معادلة المماس هي

$$y - 8 = -12(x - 2)$$

$$12x + y - 32 = 0 \text{ أى}$$

إذا كانت y تعتمد على z ، وليكن $y = f(z)$ ، وكانت z بدورها تعتمد على x ، $z = g(x)$ ، فإن y تكون بطريق غير مباشر دالة في x . إذا كانت z في $f(z)$ تستبدل بـ $g(x)$ فيكون لدينا

$$(1) \quad y = f(g(x))$$

وتكون y الآن مكتوبة مباشرة كدالة في x . فمثلا ، إذا كانت

$$(2) \quad z = g(x) = 2x^2 - x + 1 \quad \text{و} \quad y = f(z) = z^3$$

فإن

$$(3) \quad y = f(g(x)) = (2x^2 - x + 1)^3$$

يمكننا إيجاد $D_x y$ بإجراء تفاضل (1) مباشرة . في مثالنا هذا يكون من (3)

$$(4) \quad D_x y = 3(2x^2 - x + 1)^2(4x - 1)$$

بطريق آخر ، يمكن إيجاد $D_x y$ في (1) بدون إجراء التعويض ، وذلك باستخدام قاعدة السلسلة ، ويكون

$$(5) \quad D_x y = f'(z)g'(x)$$

بالرموز التفاضلية هنا يأخذ الصورة المقترحة

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx}$$

إذا أوجدنا المشتقة في مثالنا بهذه الصيغة ، فيكون من (2)

$$(7) \quad \frac{dy}{dx} = 3z^2(4x - 1)$$

يمكن ترك الجواب في هذه الصورة ، المحتوية على كل من x و z ، أو إذا أردنا ، فإن z يمكن استبدالها بالمقدار الجبري $2x^2 - x + 1$ ، فنحصل ، كما سبق ، على (4) . لايجاد قيمة dy / dx من (7) عندما $x = 1$ ، نرى أن $z = 2$ عندما $x = 1$ ومن ثم $(3) = 36$ و $(4) = 3$. $dy / dx = 36$.

المعادلتان $y = f(z)$ ، $z = g(x)$ تعرفان y بدلالة x بسلسلة من الدوال . مع أن الصورة (6) لمشتقة y بالنسبة إلى x هي الأكثر سهولة في تذكرها ، فسواء هذه الصورة أو الصورة (5) لاتشيران إلى قيم المتغيرات . لأي قيمة لـ x ، القيمة المناظرة لـ z محسوبة من $z = g(x)$ يجب استخدامها في $f'(z)$ في (5) وفي dy / dx في (6) . الكتابة $F'(x) = f'(g(x))g'(x)$ للمشتقة بقاعدة السلسلة لها ميزة الإشارة إلى ذلك بوضوح .

برهان قاعدة السلسلة . دع $F(x) = f(g(x))$. فيكون من تعريف المشتقة

$$(8) \quad F'(x) = \lim_{u \rightarrow x} \frac{F(u) - F(x)}{u - x} = \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(g(u)) - f(g(x))}{u - x}$$

$$= \lim_{u \rightarrow x} \left[\frac{f(g(u)) - f(g(x))}{g(u) - g(x)} \cdot \frac{g(u) - g(x)}{u - x} \right]$$

ضع $z = g(x)$ و $s = g(u)$ في المعامل الأول ، فيكون

$$(9) \quad F'(x) = \lim_{u \rightarrow x} \left[\frac{f(s) - f(z)}{s - z} \cdot \frac{g(u) - g(x)}{u - x} \right]$$

عندما تقترب u من x ، تقترب s من z لأن g تكون بالضرورة متصلة عند x ، وتصبح (٩)

$$F'(x) = \left[\lim_{s \rightarrow z} \frac{f(s) - f(z)}{s - z} \right] \left[\lim_{u \rightarrow x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x} \right] = f'(z)g'(x)$$

هذا البرهان صحيح لمعظم الدوال g ، لكن بسبب الكمية $s - z$ التي في المقام ، فإن هذا البرهان ينهار كلما حدث أن كانت s تساوى z ، المتغير u يكون مباشرة تحت تحكمنا ويمكن الاحتفاظ به بعيدا عن x ، لكن s ليست كذلك و g قد تكون دالة حيث $g(u) = g(x)$ حتى ولو أن $u \neq x$. نعطي برهانا آخر يتجنب هذه الصعوبة .

كون من f دالة جديدة h كما يأتي (t هي المتغير المستقل ، z هي ثابت) . عرف

$$(10) \quad h(t) = \frac{f(t) - f(z)}{t - z} \quad \text{إذا كانت } t \neq z \text{ و } h(z) = f'(z)$$

فيكون

$$(11) \quad f(t) - f(z) = h(t)(t - z)$$

لكل t . هنا ينتج من (١٠) إذا كانت $t \neq z$ ويكون صحيحا إذا كانت $t = z$ لأن كلا من طرفي (١١) يكون عندئذ صفرا . في (١١) استبدل t بـ $g(u)$ واستبدل z بـ $g(x)$ ، فتحصل على

$$f(g(u)) - f(g(x)) = h(g(u))[g(u) - g(x)]$$

إذا عوضنا الطرف الأيمن لهذه المعادلة عن بسط الكسر الأخير في (٨) ، فانه يكون

$$(12) \quad F'(x) = \lim_{u \rightarrow x} \frac{h(g(u))[g(u) - g(x)]}{u - x}$$

$$= \left[\lim_{u \rightarrow x} h(g(u)) \right] \left[\lim_{u \rightarrow x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x} \right]$$

الدالة h كونت بحيث تكون متصلة عند z . هذا ينتج بسبب أن

$$\lim_{t \rightarrow z} h(t) = \lim_{t \rightarrow z} \frac{f(t) - f(z)}{t - z} = f'(z) = h(z)$$

أيضا $\lim_{u \rightarrow x} g(u) = g(x)$ (لماذا ؟) . وإذن من نظرية ٢ - ١٥ يكون

$$\lim_{u \rightarrow x} h(g(u)) = h(\lim_{u \rightarrow x} g(u)) = h(g(x)) = h(z) = f'(z)$$

وتصبح (١٢) ، $F'(x) = f'(z) g'(x)$ ، وهذا يكمل البرهان

مسائل

أوجد المشتقة لما يأتي وبسط النتيجة :

$$1 - (x^2 + 3)^5 - 2 - (x^3 - 3x)^4 - 3 - (3x^2 + 5)^{17} - \frac{1}{2}x^2$$

$$4 - (1 + u^2)^{-2} - 5 - \frac{1}{x^2 - 3x - 4} - 6 - \left(u + \frac{1}{u}\right)^2$$

$$7 - \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^3 - 8 - (x + 1)^3(6x - 2)^4 - 9 - (3 - 5x - x^2)^3(2 + x + 4x^2)^2$$

$$10 - (ax + b)^{-1} - 11 - \frac{1}{(3 - x^2)^3} - 12 - [(2x + 1)(x^2 - 3x)]^2$$

$$13 - \left(y - \frac{1}{y}\right)^2 - y^2 - y^{-2} - 14 - (t^2 - 1)\left(t - \frac{1}{t}\right) - 15 - u^2(u - 1)^{-4}$$

$$16 - (6y + 1)^4(y - 7)^{-5} - 17 - (2x - 1)^n(x^2 + 5x) + 17x$$

$$18 - (3x - 1)^2(x + 2) + (3x - 1)(x + 2)^2 - 19 - \frac{(1 - x)^3}{2 - 3x}$$

$$20 - \frac{a(2z - 1)}{(4z + 1)^2} - 21 - \left(\frac{v + 2}{v - 2}\right)^2$$

$$22 - \left(\frac{1 - 8x}{1 + 8x}\right)^4 - 23 - \left(\frac{z}{a^2 - z^2}\right)^{-3}$$

$$24 - \left(\frac{a}{b + cx}\right)^n, n \text{ عدد صحيح} - 25 - (x - 2)^3(x + 5)^4(x + 1)^2$$

٢٦ - أوجد معادلة المماس للمنحنى $y = (1 + 2x^2)^3$ عند النقطة (1, 27) .

أوجد أصفار المشتقة لما يأتي

$$27 - (x^2 - 1)^2(x + 1) - 28 - (2r + 1)^2(r - 3)^3$$

$$29 - x^5(ax + b)^4, a \neq 0 - 30 - \frac{(x + 3)^2}{x}$$

$$f(r) = \pi \frac{H}{R} r^2 (R-r) \quad \text{ثابتان } H \text{ و } R \quad \text{٣٢} \quad \left(\frac{1-8y}{1+8y} \right)^4 \quad \text{٣١}$$

$$g(h) = \pi \frac{R^2}{H^2} (H-h)^2 h, \quad \text{ثابتان } H \text{ و } R \quad \text{٣٣}$$

فيما يأتي ، y دالة غير مباشرة في x . أوجد dy/dx ، أولا باستخدام قاعدة السلسلة ثم بالتعبير عن y مباشرة بدلالة x وإجراء التفاضل

$$y = u^2 - 2u^{-1}, u = 5x \quad \text{٣٥} \quad y = z^2 + 3z - 2, z = 2x + 4 \quad \text{٣٤}$$

$$y = \frac{t}{3t+2}, t = \frac{2x}{1-3x} \quad \text{٣٧} \quad y = \frac{t^2}{t-1}, t = \frac{x-1}{x} \quad \text{٣٦}$$

$$D \frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2} \quad \text{من قاعدة السلسلة والنتيجة} \quad D \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{٣٨}$$

التي حصلنا عليها في مثال ٣ ، بند ٣ - ١ .

[إرشاد : ضع $h(z) = \frac{1}{z}$ ، فيكون $h(g(x)) = \frac{1}{g(x)}$. أوجد $D \frac{1}{g(x)}$ بقاعدة السلسلة . أوجد

$$D \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{بكتابة} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{بالصورة} \quad f(x) \frac{1}{g(x)}$$

٣٩ - في الفصل السادس ستثبت أن $D \sin x = \cos x$. باستخدام قاعدة السلسلة ، أوجد صيغة لـ $D \sin g(x)$. استخدم صيغتك لإيجاد $D \sin (3x^2 - 2x - 2)$.

٣ - ٥

الدوال الجبرية

قاعدة القوة ، $Dx^n = nx^{n-1}$ ، التي أثبتنا أنها صحيحة عندما تكون n عددا صحيحا ، هي أيضا صحيحة عندما يكون الأس كسرا ، ولذلك يمكن استخدامها لإيجاد مشتقات المقادير الجبرية مثل $x^{3/5}$.

$$Dx^r = rx^{r-1} \quad \text{لكل } r \text{ كسرية} \quad \text{٣ - ١٦}$$

البرهان . نبرهن أولا الحالة الخاصة $r = 1/m$ ، حيث m عدد صحيح موجب . أي ستثبت أن

$$Dx^{1/m} = \frac{1}{m} x^{1/m-1} \quad (١)$$

لكن نعطي التفاصيل فقط عندما $m = 4$. وذلك نموذج للطريقة العامة . لاحظ أولا التحليل

$$(٢) \quad a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

حيث n عدد صحيح موجب . هذا يمكن تحقيقه بضرب الطرف الأيمن للمعادلة . جميع الحدود ماعدا الأول والأخير ستحذف بوجه خاص ، عندما $n = 4$ ، (٢) تكون

$$(٣) \quad a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

من تعريف المشتقة

$$Dx^{1/4} = \lim_{u \rightarrow x} \frac{u^{1/4} - x^{1/4}}{u - x}$$

إذا وضعنا $b = x^{1/4}$ و $a = u^{1/4}$ في (٣) فإنا نحصل على

$$u - x = (u^{1/4} - x^{1/4})(u^{3/4} + u^{2/4}x^{1/4} + u^{1/4}x^{2/4} + x^{3/4})$$

واذن

$$\begin{aligned} Dx^{1/4} &= \lim_{u \rightarrow x} \frac{u^{1/4} - x^{1/4}}{u - x} \\ &= \lim_{u \rightarrow x} \frac{1}{u^{3/4} + u^{2/4}x^{1/4} + u^{1/4}x^{2/4} + x^{3/4}} \\ &= \frac{1}{x^{3/4} + x^{2/4}x^{1/4} + x^{1/4}x^{2/4} + x^{3/4}} \\ &= \frac{1}{4x^{3/4}} = \frac{1}{4} x^{-3/4} \end{aligned}$$

من السهل الآن إثبات أن القاعدة ٣ - ١٦ تكون صحيحة لكل r الكسرية . أى عدد كسرى r يمكن التعبير عنه بالصورة n/m ، حيث m و n عدنان صحيحان . وحيث $m > 0$ بالقاعدة ٣ - ١٥ ، يكون

$$Dx^r = Dx^{n/m} = D(x^{1/m})^n = n(x^{1/m})^{n-1} Dx^{1/m}$$

يمكننا إيجاد $Dx^{1/m}$ باستخدام (١) . إذن ، بالاستمرار يكون

$$\begin{aligned} Dx^r &= n(x^{1/m})^{n-1} Dx^{1/m} = n(x^{1/m})^{n-1} \frac{1}{m} x^{1/m-1} = nx^{(n-1)/m} \frac{1}{m} x^{1/m-1} \\ &= \frac{n}{m} x^{n/m-1/m} x^{1/m-1} = \frac{n}{m} x^{n/m-1} = rx^{r-1} \end{aligned}$$

كالمعتاد ، من المفهوم أن $x \neq 0$ إذا كانت $r < 1$.

مثالان . لاستخدام القاعدة ٣ - ١٦ هما

$$Dx^{3/5} = \frac{3}{5} x^{-2/5} = \frac{3}{5x^{2/5}}$$

$$D \frac{3}{2\sqrt{x}} = D(\frac{3}{2} x^{-1/2}) = -\frac{3}{4} x^{-3/2} \quad \text{و}$$

قاعدة القوة بصفة أعم صحيحة لأي أس حقيقي ، لكن برهان ذلك يجب أن يؤجل إلى أن ندرس الأسس غير الكسرية واللوغاريتمات . سيعطى ذلك في بند ٧ - ٥ .

بالاستعانة بقاعدة السلسلة يمكن تعميم القاعدة ٣ - ١٥ للأسس الكسرية .

٣ - ١٧ قاعدة القوة المعممة . إذا كانت $g(x)$ لها مشتقة عند x ، فذلك تكون $g'(x)$ لكل r الكسرية ويكون

$$Dg^r(x) = rg^{r-1}(x)Dg(x)$$

بالطبع ، $g(x)$ يجب أن تختلف عن الصفر إذا كانت $r < 1$ لكي يكون هذا صحيحا .

البرهان . دع $f(z) = z^r$ و $z = g(x)$ ، فيكون $g'(x) = f'(g(x))$. بما أن $f'(z) = rz^{r-1}$ ، فيكون لقاعدة السلسلة ٣ - ١٤ ، أن

$$\begin{aligned} Dg^r(x) &= D_x f(g(x)) = f'(z)g'(x) \\ &= rz^{r-1}g'(x) = rg^{r-1}(x)g'(x) \end{aligned}$$

مثال ١ أوجد $D\sqrt{x^2-1}$.

عندما يشتمل المقدار الجبري المراد اجراء تفاضله على جذر ، من الأفضل أن نكتبه مستخدمين الأسس الكسرية . بالقاعدة ٣ - ١٧ حيث $r = \frac{1}{2}$ و $g(x) = x^2 - 1$ ويكون

$$D\sqrt{x^2-1} = D(x^2-1)^{1/2} = \frac{1}{2}(x^2-1)^{-1/2}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

مثال ٢ . أوجد مشتقة $x^{1/3}/\sqrt[3]{(1-3x)^2}$

نبدأ بقاعدة خارج القسمة :

$$D \frac{x^{1/3}}{(1-3x)^{2/3}} = \frac{(1-3x)^{2/3} \cdot \frac{1}{3}x^{-2/3} - x^{1/3} \cdot \frac{2}{3}(1-3x)^{-1/3}(-3)}{(1-3x)^{4/3}}$$

مشتقة $(1-3x)^{2/3}$ يمكن إيجادها بقاعدة القوة المعممة . إذن

$$(4) \quad D \frac{x^{1/3}}{(1-3x)^{2/3}} = \frac{(1-3x)^{2/3} \cdot \frac{1}{3}x^{-2/3} - x^{1/3} \cdot \frac{2}{3}(1-3x)^{-1/3}(-3)}{(1-3x)^{4/3}}$$

المقادير الجبرية المماثلة لذلك على اليمين في (٤) عادية ، وتوجد طريقة معينة لتبسيطها . اكتب كل الكميات المحتوية على أسس سالبة في صورة أسس موجبة وبسط الكسر الناتج . (٤) تصبح

$$\begin{aligned}
D \frac{x^1}{(1-3x)^{2/3}} &= \frac{(1-3x)^{-1/3} 3x^2 + \frac{2x^1}{(1-3x)^{1/3}}}{(1-3x)^{4/3}} \\
&= \frac{(1-3x)3x^2 + 2x^3}{(1-3x)^{4/3}} = \frac{3x^2 - 7x^3}{(1-3x)^{5/3}} \\
&= \frac{x^2(3-7x)}{(1-3x)^{5/3}}
\end{aligned}$$

مثال ٣ . أوجد قيم z حيث مشتقة $z\sqrt{a^2-z^2}$, $a \neq 0$ تساوى صفراً والقيم حيث المشتقة لا توجد .

لايجاد مشتقة $z\sqrt{a^2-z^2}$ ، نبدأ بقاعدة حاصل الضرب ثم نستخدم قاعدة القوة المعممة .

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} (z\sqrt{a^2-z^2}) &= \frac{d}{dz} [z(a^2-z^2)^{1/2}] \\
&= z(\frac{1}{2})(a^2-z^2)^{-1/2}(-2z) + (a^2-z^2)^{1/2} \\
&= \frac{-z^2}{(a^2-z^2)^{1/2}} + (a^2-z^2)^{1/2} = \frac{-z^2 + (a^2-z^2)}{(a^2-z^2)^{1/2}} \\
&= \frac{a^2-2z^2}{(a^2-z^2)^{1/2}}
\end{aligned}$$

(٥)

الكسر يكون صفراً فقط إذا كان بسطه يساوى صفراً . لذلك المشتقة تكون صفراً إذا وإذا فقط كان $z = \pm a/\sqrt{2}$. المشتقة موجودة لكل z حيث الكسر في (٥) يمثل عدداً . لكن الكسر دائماً يمثل عدداً ما لم يكن مقامه صفراً . ومن ثم المشتقة لا توجد إذا كانت $z = \pm a$.

قد قطعنا مرحلة كبيرة بعد بند ٣ - ١ ، حيث كانت الطريقة الوحيدة لدينا لايجاد المشتقات هي الاستخدام المباشر للتعريف . صيغ التفاضل التي حصلنا عليها تمكنتنا بسهولة من إيجاد مشتقة أي دالة منشأة من كثيرات حدود بعمليات متكررة من إضافة وطرح وضرب قسمة وأخذ الجذور . مع أن تعريف المشتقة لا يكون واضحاً عند استخدام هذه الصيغ ، إلا أنه يكون واضحاً جلياً في الخلفية . كل صيغتنا تعود أخيراً إلى التعريف ، وكل مشتقة هي نهاية خارج قسمة فروق . نظريات النهاية مازالت الأساسيات الجوهرية ، فقد استخدمت واحدة منها أو أكثر في اشتقاق كل صيغة من صيغ التفاضل .

مسائل

أوجد مشتقة ما يأتي وبسط الناتج :

$\sqrt{x^{2.66}}$	- ٢	$6/x^{4/3}$	- ١	$4x^{-1/2}$	- ١
$4x^2 + 6x + 2 - x^{-1/3}$	- ٦	$\pi r^2 + \frac{2}{3}r^{3/2}$	- ٥	$y^{0.704} + y^{-0.704}$	- ٤
$\sqrt{r^2 - x^2}, r \text{ const}$	- ٩	$\sqrt{9 + 6u^2}$	- ٨	$\sqrt{x^3 + 5}$	- ٧
$\sqrt{(4y + 1)^3}$	- ١٢	$\frac{x}{1 + x^{0.6}}$	- ١١	$\sqrt[3]{1 - 4x}$	- ١٠
$\left(\frac{80}{\pi}t\right)^{1/3}$	- ١٥	$\frac{1}{\sqrt[3]{(2x^2 - 3x + 2)^4}}$	- ١٤	$\sqrt[3]{ax^2 + bx + c}$	- ١٣
$(a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$	- ١٨	$\sqrt{\frac{1}{x}}$	- ١٧	$\frac{1}{\sqrt{36 - x^2}}$	- ١٦
$x^2\sqrt{1 + x^3}$	- ٢١	$w\sqrt{c^2 + w^2}$	- ٢٠	$2\sqrt{x} + \sqrt{2 - x^2}$	- ١٩
$x\sqrt[3]{(c + ax)^2}$	- ٢٤	$\frac{(3x^2 + 4x)^{3/2}}{6}$	- ٢٣	$(t + 1)\sqrt[4]{6t^2 + 3}$	- ٢٢
$\sqrt{7x} + \frac{1}{\sqrt{7x}}$	- ٢٧	$\sqrt{5u} + \sqrt{\frac{u}{5}}$	- ٢٦	$(8x + 5)(4x + 1)^{3/2}$	- ٢٥
$\frac{z}{\sqrt{c^2 - z^2}}$	- ٣٠	$\frac{\sqrt{a + bz}}{z}$	- ٢٩	$(4s)^{1/3} + (4s)^{2/3}$	- ٢٨
$\frac{\sqrt{1 + 2x}}{\sqrt{1 - 2x}}$	- ٣٣	$\sqrt[3]{\frac{5 + 3s}{5 - 3s}}$	- ٣٢	$\sqrt{\frac{t - 1}{t + 1}}$	- ٣١
$\frac{\theta^2 + 3}{\sqrt{\theta + 2}}$	- ٣٦	$\frac{x}{\sqrt[3]{x + 1}}$	- ٣٥	$\left(\frac{ax^2 + b}{cx^2 + d}\right)^{2/3}$	- ٣٤
$\left(\frac{x}{x^2 + a^2}\right)^{5/2}$	- ٣٩	$(1 - z)^{1/2} - 3(2z - z^2)^{-1/2}$	- ٣٨	$x + \frac{3x}{\sqrt{x + 1}}$	- ٣٧
$\sqrt{(v^2 - 2)(v^4 + 3)}$	- ٤٢	$\frac{\sqrt{8x^2 + 5}}{x + 2}$	- ٤١	$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2x}\right)^3$	- ٤٠
$\frac{(x^3 + 2)^2 \sqrt{3 - x^2}}{4 + \sqrt{x}}$	- ٤٥	$\frac{(x + a)^{-2/3}}{(x + b)^{-1/3}}$	- ٤٤	$\sqrt{x} \sqrt[3]{x^2 - c^2}$	- ٤٣
		$\frac{1}{ t }$	- ٤٧	$x + x $	- ٤٦

حل المعادلات الآتية لـ y وأوجد dy / dx :

$$(2x - 5)^3 = 3y^5 - ٥٠ \quad (حالتان) \quad x^2 + y^2 = 1 - ٤٩ \quad y^3 = x^2 - ٤٨$$

أوجد معادلة المماس للمنحنيات الآتية عند النقطة المعطاة :

$$- ٥١ \quad y = \sqrt[3]{x}, (-8, -2) \quad - ٥٢ \quad y = \frac{1}{\sqrt{4x+1}}, (6, \frac{1}{5}) \quad - ٥٣ \quad z = x\sqrt{x^2+1}, (0,0)$$

$$- ٥٤ \quad y = t^2\sqrt{t+1}, (3,18) \quad - ٥٥ \quad y = \frac{2x}{\sqrt{3x+1}}, (3, \frac{3}{2})$$

٥٦ - أوجد ميل الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ عند النقطة $P(x,y)$ باستخدام المشتقة وتحقق أن المماس هناك يكون عموديا على نصف القطر عند P . هذا يوضح أن الخط العمودي على نصف القطر عند P ، الذي هو أحد تعاريف المماس للدائرة، هو نفس المماس المعروف بدلالة المشتقات.

أوجد قيم المتغير المستقل حيث المشتقة لكل مما يأتي تساوى صفراً والقيم حيث المشتقة لا توجد :

$$- ٥٧ \quad \frac{t}{t^2+b^2} \quad - ٥٨ \quad \frac{\sqrt{c^2+y^2}}{y} \quad - ٥٩ \quad \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad - ٦٠ \quad x + \sqrt{5-x^2}$$

$$- ٦١ \quad 2\pi r^2 \sqrt{a^2 - r^2} \quad - ٦٢ \quad x^{1/3}(x-8) \quad - ٦٣ \quad \frac{x^2+3}{\sqrt{x+2}} \quad - ٦٤ \quad z^3(z+b)^{4/3}$$

$$- ٦٥ \quad u^2\sqrt[3]{2u+5} \quad - ٦٦ \quad x|x|$$

٦٧ - ما هي نظريات النهاية التي استخدمت في برهان $Dx^{1/4} = \frac{1}{4}x^{-3/4}$ ؟

٦٨ - أثبت أن $Dx^{1/m} = \frac{1}{m}x^{1/m-1}$ ، عندما (أ) $m = 3$ ، (ب) $m = 5$ (ج) أى عدد صحيح موجب m .

٣ - ٦

المشتقات الأعلى

المشتقة $f'(x)$ للدالة f هي عدد يعتمد على x . فهي إذن تعين تناظر يخصص عددا هو $f'(x)$ ، لكل عدد x حيث تكون المشتقة موجودة. هذا التناظر هو إذن دالة، تسمى الدالة المشتقة للدالة f ويرمز لها بالرمز f' . نطاق f' قد يكون أصغر من نطاق f إذ أن $f'(x)$ قد لا توجد عند كل x حيث $f(x)$ تكون معرفة. كأي دالة، f' قد يكون لها مشتقة عند عدد x . أو قد لا يكون. إذا كان لها، فإننا نسمى مشتقة f' عند x المشتقة الثانية لـ f عند x ونقول أن f لها مشتقة من الرتبة الثانية عند x . ويرمز لها بالرمز $D^2f(x)$ أو $f''(x)$. إذا استخدمنا أسلوب الكتابة $y = f(x)$ ، فإن رموزا أخرى للمشتقة الثانية هي

$$y'', \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx}$$

مثال ١ . إذا كانت $f(x) = x^4 + 3x^2 - 6$ ، فأوجد $f'(2)$ و $f''(2)$.
نوجد أولاً $f'(x)$ و $f''(x)$:

$$f'(x) = Df(x) = D(x^4 + 3x^2 - 6) = 4x^3 + 6x,$$

$$f''(x) = D^2f(x) = Df'(x) = D(4x^3 + 6x) = 12x^2 + 6.$$

$$\text{إذن } f'(2) = 44 \text{ و } f''(2) = 54$$

عندما تكون دالة المشتقة الثانية f'' لها مشتقة عند x ، فهذه تسمى المشتقة الثالثة لـ f عند x ويرمز لها بـ $D^3f(x)$, $f'''(x)$, $d^3f(x)/dx^3$, etc. . بالمثل ، قد توجد مشتقات رابعة وخامسة ومن رتبة أعلى . إذا استخدم الرمز بالشرطة ، فاننا نكتب $f^{(n)}(x)$ أو $y^{(n)}$ للمشتقة النونية عندما $n \geq 4$.

مثال ٢ . إذا كانت $f(x) = 4x^3 - 2/x$ ، فأوجد المشتقات الأربع الأولى للدالة f لدينا

$$f(x) = 4x^3 - 2x^{-1},$$

$$f'(x) = Df(x) = 12x^2 + 2x^{-2},$$

$$f''(x) = D^2f(x) = Df'(x) = 24x - 4x^{-3},$$

$$f'''(x) = D^3f(x) = Df''(x) = 24 + 12x^{-4},$$

$$f^{(4)}(x) = D^4f(x) = Df'''(x) = -48x^{-5}.$$

مسائل

أوجد المشتقة الثانية لما يأتي :

- | | | |
|-------------------------------------|--|--|
| ١ - $t^4 - t^3$ | ٢ - $-\frac{1}{2}x^3 + \sqrt{2}x^2 - 18$ | ٣ - $y^2\sqrt{y} + \frac{3}{2}y + 1$ |
| ٤ - $\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x} - 2x$ | ٥ - $t^3 + \sqrt{1-t}$ | ٦ - $\frac{x^2 - 2x - 4}{x^2}$ |
| ٧ - $\sqrt[3]{3u+2}$ | ٨ - $\frac{4}{3x+b}$ | ٩ - $3\left(x^5 - \frac{5}{\sqrt{x}}\right)$ |
| ١٠ - $\frac{1}{y^2 + b^2}$ | ١١ - $\frac{6}{\sqrt{4-x^2}}$ | ١٢ - $\sqrt[3]{4(x^2+2)^2}$ |
| ١٣ - $\frac{x}{x^2 - a^2}$ | ١٤ - $z\sqrt{z^2 - c^2}$ | ١٥ - $\frac{\sqrt{12-u^2}}{u}$ |
| ١٦ - $(x-2)^{3/2}(x+1)^{1/2}$ | ١٧ - $x^{1/3}(x-8)$ | |

أوجد أصفار المشتقتين الأولى والثانية للدوال الآتية :

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 1 \quad - ١٨ \quad s(t) = t^3 - 9t^2 - 21t + 2 \quad - ١٩ \quad g(x) = 16 \quad - ٢٠$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x \quad - ٢١ \quad F(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, a \neq 0 \quad - ٢٢ \quad u(r) = \sqrt{10 - r^2} \quad - ٢٣$$

أوجد d^3y/dx^3 لما يأتي :

$$y = x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 4x \quad - ٢٤ \quad y = x^2 + \frac{3}{x^2} \quad - ٢٥ \quad y = 2\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad - ٢٦$$

$$y = (x - x^2)^8 \quad - ٢٨ \quad y = \frac{4}{\sqrt[3]{x-1}} \quad - ٢٧$$

$$- ٢٩ \quad \text{إذا كانت } y = x^4, \text{ فأثبت أن } \frac{d^2y}{dx^2} - 12y = 0 \text{ لجميع قيم } x.$$

$$- ٣٠ \quad \text{إذا كانت } y = 1/x, \text{ فأثبت أن } x^2 y'' + 3xy' + y = 0 \text{ لجميع قيم } x \neq 0.$$

$$- ٣١ \quad \text{إذا كانت } f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1, \text{ فهل توجد } f^{(5)}(x) ?$$

$$- ٣٢ \quad \text{أى من المشتقة الأولى والمشتقات من رتب أعلى ، للدالة } f(x) = x^2 \text{ تكون متصلة عند } 5 ?$$

أوجد صيغة للمشتقة النونية لكل مما يأتي . (ارشاد : من المشتقات الأولى القليلة حاول تخمين المشتقة النونية . هذا سيكون أسهل إذا تركت المعاملات في صورة عوامل . الآن اثبت تخمينك بالاستنتاج الرياضي)

$$x^n \quad - ٣٣ \quad 1/z \quad - ٣٤ \quad 1/(t+1)^2 \quad - ٣٥$$

$$(ax+b)^{-1} \quad - ٣٦ \quad \sqrt{x} \quad - ٣٧ \quad x^r \quad - ٣٨ \quad \text{حيث } r \text{ كسرية .}$$

$$- ٣٩ \quad \text{أوجد تعبيراً لـ } \frac{d^n}{dx^n} xf(x) \text{ بدلالة } f^{(n)}(x).$$

٧ - ٣

المعكوسات التفاضلية

بدلاً من السؤال عن المشتقة لدالة f يمكننا الذهاب في الاتجاه العكسي ونسأل عن الدالة F التي مشتقتها هي f . مثل هذه الدالة F تسمى معكوساً تفاضلياً أو تكاملاً غير محدد لـ f ، وقيمه عند x يرمز لها بـ $D^{-1}f(x)$ أو أكثر اعتياداً بالرمز $\int f(x) dx$ (يقرأ « تكامل $f(x)$ ») . فمثلاً ، إذا كانت f هي الدالة المعرفة بـ $f(x) = 2x$ ، فإن الدالة F المعرفة لـ $F(x) = x^2$ هي معكوس تفاضلي لـ f لأن $F'(x) = f(x)$. يمكننا أن نكتب

$$D^{-1}2x = \int 2x dx = x^2$$

التعبير $f(x)$ في $\int f(x) dx$ يسمى الدالة المكاملة ، وعملية إيجاد تكامل غير محدد تسمى التكامل .

$$\int f(x) dx = F(x) \text{ if } F'(x) = f(x)$$

مثال ١

$$(أ) \quad D 4x^3 = 12x^2 \quad \text{لأن} \quad D^{-1}12x^2 = \int 12x^2 dx = 4x^3$$

$$(ب) \quad D^{-1}(x^3 + 5x + 3) = \int (x^3 + 5x + 3) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + 3x \quad \text{لأن}$$

$$D(\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + 3x) = x^3 + 5x + 3 \quad \text{الدالة المكاملة هنا هي } x^3 + 5x + 3.$$

أل dx في $\int f(x) dx$ تكون مضافة معظم الوقت . إذا كانت الدالة المكاملة تحتوي حروفا أخرى غير x ، فإن أل dx تشير الى أننا نعتبر الدالة المكاملة دالة في x . فمثلا $\int (2y + x^2) dx = 2yx + \frac{1}{2}x^2$ إذا كانت y مقدارا ثابتا

لكن

$$\int (2y + x^2) dy = y^2 + x^2y \quad \text{إذا كانت } x \text{ مقدارا ثابتا .}$$

بالرجوع الى الدالة $f(x) = 2x$ ، نرى أن معكوساً تفاضلياً آخر لـ f هو $x^2 + 5$. كذلك أيضاً $x^2 - \frac{1}{2}$ ، $x^2 + \sqrt{3}$ ، وبصفة أعم $x^2 + C$ لأي ثابت C . وبالتالي f لها عدد لا نهائي من المعكوسات التفاضلية . بالمثل بالنسبة لأي دالة f . إذا كانت $F(x)$ هي أي معكوس تفاضلي خاص لـ $f(x)$ ، أي $DF(x) = f(x)$ فحينئذ أيضاً تكون $F(x) + C$ لأي ثابت C إذ أن $D[F(x) + C] = f(x)$. كل دالة لها معكوس تفاضلي يكون لها عدد لا نهائي من المعكوسات التفاضلية ، وأي اثنان منها يختلفان بمقدار ثابت . مجموعة الدوال المعرفة بـ $F(x) + C$ ، لجميع الثوابت C ، تشمل على جميع المعكوسات التفاضلية لـ f . برهان هذه الحقيقة الهامة يجب أن يتظر حتى الفصل القادم (بند ٤ - ٢) ، لكن سوف نفترض صحته الآن في أمثلتنا . الاستفسار عن تلك الدوال التي لها معكوسات تفاضلية سيدرس في الفصل الخامس . التعبير $\int f(x) dx$ يمثل القيمة عند x لأي واحد من المعكوسات التفاضلية لـ f . فمثلا يمكن القول أن $\int 2x dx = x^2 + 5$. رمز التكامل مبهم ، وعلينا أن نتذكر ذلك عند استخدامه .

من المعتاد اختصار $\int 1 dx$ إلى $\int dx$ ، وتكامل مثل $\int 1/x^2 dx$ يكتب عادة $\int dx/x^2$.

أساساً ، التكامل هو عملية تخمين ، لكن بالتمرين تخمينات جيدة تظهر بسهولة . ومع ذلك ، توجد ، صيغتان مفيدتان للتكامل . في مثال ١ (ب) أوجدنا معكوساً تفاضلياً لـ $x^3 + 5x + 3$ بإيجاد معكوس تفاضلي لكل حد ثم جمعها . أي أننا قلنا

$$\int (x^3 + 5x + 3) dx = \int x^3 dx + \int 5x dx + \int 3 dx$$

لقد طبقنا النظرية الآتية ، أو بالأحرى تعميمها الى حاصل جمع ثلاث دوال .

٣- ١٩ نظرية . إذا كانت الدالتان g و f لهما معكوسان تفاضليان فكذلك يكون أيضا حاصل جمعهما وفرقهما ، ويكون

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

يوجد تعميم واضح لحواصل الجمع والفرق لأكثر من دالتين . البرهان يستخدم النظرية المناظرة عن المشتقات . بالتعريف $\int g(x) dx$ و $\int f(x) dx$ هما معكوسان تفاضليان لـ $g(x)$ و $f(x)$. واذن

$$\begin{aligned} D[\int f(x) dx \pm \int g(x) dx] &= D\int f(x) dx \pm D\int g(x) dx \\ &= f(x) \pm g(x) \end{aligned}$$

هذا يعنى أن $\int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ هو معكوس تفاضلى لـ $f(x) \pm g(x)$. لكن رمز المعكوس التفاضلى لـ $f(x) \pm g(x)$ هو $\int [f(x) \pm g(x)] dx$. لذلك

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

نظرية مرافقة هي الآتى .

٣- ٢٠ نظرية . إذا كانت الدالة f لها معكوس تفاضلى ، فكذلك أيضا الدالة kf لـ k ثابت و k يكون

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

فمثلا ،

$$\int 5x^2 dx = 5 \int x^2 dx = 5(\frac{1}{3}x^3) = \frac{5}{3}x^3$$

البرهان لهذه النظرية يترك للقارىء (مسألة ٥٣) . بسبب غموض رمز التكامل ، يجب تفسير نظرية ٣- ١٩ بعناية . إنها تعنى أن لكل معكوس تفاضلى H لـ $f \pm g$ يوجد معكوس تفاضلى لـ f وآخر لـ g بحيث يكون مجموعهما هو H ، أو بصيغة أخرى ، إذا كانت G و F و H أى معكوسات تفاضلية ممكنة لـ g و f و $f \pm g$ ، فيوجد مقدار ثابت C بحيث أن $H(x) = F(x) \pm G(x) + C$ لجميع قيم x . تفسير مماثل يجب أن يعطى لنظرية ٣- ٢٠ .

باجراء تفاضل الطرف الأيمن للمعادلة ٣- ٢١ ، نرى أن لكل $r \neq -1$ كسرية ، يكون

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}, \quad r \neq -1 \quad ٣- ٢١$$

الصيغة لـ $r = -1$ هذا لايعنى أن $1/x$ ليس لها معكوس تفاضلى . المعكوس التفاضلى يوجد فعلا ، لكن المعادلة ٣- ٢١ لاتساعد فى ايجاده . فهو الدالة اللوغاريتمية وسوف ندرسه فى الفصل السابع .

النظريتان ٣- ١٩ ، ٣- ٢٠ والمعادلة ٣- ٢١ تمكنا من إيجاد المعكوس التفاضلى لـ أى دالة يمكن التعبير عنها كحاصل جمع حواصل ضرب ثوابت فى قوى x .

مثال ٢ . أوجد قيمة

$$(1) \int \left(6x^4 - 10x^2 + 7 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$$

لدينا

$$\begin{aligned} \int \left(6x^4 - 10x^2 + 7 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx \\ = 6 \int x^4 dx - 10 \int x^2 dx + \int 7 dx + \frac{1}{2} \int x^{-1/2} dx \quad \text{من ٢٠ - ٣ ، ١٩ - ٣} \\ = \frac{6}{5} x^5 - \frac{10}{3} x^3 + 7x + x^{1/2} \quad \text{من ٢١ - ٣} \end{aligned}$$

سنضيف مقداراً ثابتاً C للإجابة فنكتب $\frac{6}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 7x + x^{1/2} + C$ لنذكر أنفسنا أنه توجد اجابات كثيرة لـ (١) لكن جميعها على هذه الصورة .

جميع المعكوسات التفاضلية يجب تحقيقها بإجراء التفاضل . فى المثال السابق مشتقة المقدار الجبرى الأخير هى الدالة المكاملة ، لذلك نعرف أن الاجابة صحيحة .

تكاملات غير محددة كثيرة يمكن ايجادها بسهولة اذا عبرنا عن الدالة المكاملة بصورة أخرى .

مثال ٣ . أوجد قيمة $\int 6x(5-x) dx$

لدينا

$$\begin{aligned} \int 6x(5-x) dx &= 6 \int (5x - x^2) dx = 6 \left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) + C \\ &= x^2(15 - 2x) + C. \end{aligned}$$

مثال ٤ . أوجد قيمة $\int (4t-3)/t^3 dt$

لدينا

$$\begin{aligned} \int \frac{4t-3}{t^3} dt &= \int \left(\frac{4}{t^2} - \frac{3}{t^3} \right) dt = 4 \int t^{-2} dt - 3 \int t^{-3} dt \\ &= -4t^{-1} + \frac{3}{2}t^{-2} + C = -\frac{4}{t} + \frac{3}{2t^2} + C = \frac{-8t+3}{2t^2} + C \end{aligned}$$

مثال ٥ . أوجد قيمة

$$(2) \int (x^2 + 1)^3 2x dx$$

يمكن تقييم التكامل بضرب الدالة المكاملة أولاً . القارىء النابه قد يلاحظ أن الدالة المكاملة $(x^2 + 1)^3 2x$ تشابه مقادير جبرية حصلنا عليها عند إجراء التفاضل بقاعدة القوة المعممة ، ويوجه خاص أنها مشتقة دالة مثل $(x^2 + 1)^4$. دعنا نحاول $(x^2 + 1)^4$ نفسها لنرى كيف يكون المعكوس التفاضلى قريباً منها . لدينا

$$D(x^2 + 1)^4 = 4(x^2 + 1)^3 2x$$

المقدار الجبرى على اليمين يختلف عن الدالة المكاملة فى (٢) بالعامل 4 . هذا يوحي بأن $\frac{1}{4}(x^2 + 1)^4$ قد يكون تخمين أفضل من $(x^2 + 1)^4$ للمعكوس التفاضلى . بإجراء تفاضل هذه ، يكون لدينا

$$D[\frac{1}{4}(x^2 + 1)^4] = (x^2 + 1)^3 2x$$

الطرف الأيمن من هذه المعادلة هو الدالة المكاملة فى (٢) ، ولذلك يكون

$$\int (x^2 + 1)^3 2x dx = \frac{1}{4}(x^2 + 1)^4 + C$$

لاحظ أن فى هذا المثال $2x$ هى مشتقة $x^2 + 1$ ، لذلك (٢) هى على الصورة $\int g'(x) g^r(x) dx$ ، حيث $r = 3$ و $g(x) = x^2 + 1$. عندما تكون الدالة المكاملة على الصورة

$$g^r(x) g'(x) \quad (٣)$$

لدالة ما g أو تختلف عنها بعامل ثابت فقط ، فإن التكامل يمكن ايجاده بسلسلة من التخمينات كما فى مثال ٥ ، التخمين الأول الجيد هو $g^{r+1}(x)$.

مثال ٦ . أوجد قيمة $\int 4x^2 \sqrt{5 - x^3} dx$

إذا وضعنا $g(x) = 5 - x^3$ ، فإن الدالة المكاملة تكون ، فيما عدا لعامل ثابت ، على الصورة $g^{1/2}(x) g'(x)$. نحاول $(5 - x^3)^{3/2}$ كتخمين أول للمعكوس التفاضلى ونرى أن

$$\frac{d}{dx} (5 - x^3)^{3/2} = \frac{3}{2}(5 - x^3)^{1/2}(-3x^2) = -\frac{9}{2}x^2(5 - x^3)^{1/2}$$

المقدار الجبرى الأخير يتفق مع الدالة المكاملة فيما عدا المعامل الذى هو $-\frac{9}{2}$ بدلا من 4 . وعلى ذلك ، نعدل تخميننا بضربه فى $-\frac{4}{9}$ ، لتخلص من العامل غير المطلوب $-\frac{9}{2}$. ولندخل العامل 4 ، ثم نحاول

$$-\frac{4}{9}(4)(5 - x^3)^{3/2} = -\frac{8}{9}(5 - x^3)^{3/2}$$

كتخمين ثان . بإجراء التفاضل يكون

$$\frac{d}{dx} [-\frac{8}{9}(5 - x^3)^{3/2}] = -\frac{8}{9}[\frac{3}{2}(5 - x^3)^{1/2}(-3x^2)] = 4x^2(5 - x^3)^{1/2}$$

تخميننا الثانى صحيح ، ويكون

$$\int 4x^2 \sqrt{5 - x^3} dx = -\frac{8}{9}(5 - x^3)^{3/2} + C$$

لو كان التكامل فى مثال ٦ هو $\int 4x \sqrt{5 - x^3} dx$ لكنا وجدنا صعوبة فى إيجاد قيمته . لا توجد طريقة واضحة يمكن التعبير بها عن الدالة المكاملة فى الصورة (٣) . بإجراء تفاضل التخمين التجريبى $(5 - x^3)^{3/2}$ تظهر x^2 ، بينما نحن نريد x فقط والتخمين $(5 - x^3)^{3/2} (1/x)$ يكون أسوأ .

بعكس التفاضل ، لا توجد طريقة محددة للحصول على المعكوس التفاضلى لدالة جبرية .
معكوسات تفاضلية كثيرة يمكن إيجادها بسهولة ، لكن معكوسات أخرى تتطلب براعة فائقة ، وأيضا
معكوسات أخرى لا يمكن التعبير عنها برموز مألوفة . التبرير الوحيد الذى يمكن إعطاؤه لصحة
معكوس تفاضلى هو أن مشتقته هى الدالة الأصلية . سندرس طرق إيجاد المعكوس التفاضلى
بتفضيل أكثر بعد أن ندرس بعض استخداماته .

مسائل

أوجد التكاملات غير المحددة الآتية

- ١ - $\int (x+5) dx$
- ٢ - $\int (ax+b) dx$
- ٣ - $\int dt$
- ٤ - $\int \frac{5}{\sqrt{3}} du$
- ٥ - $\int b(x-a) dx$
- ٦ - $\int (3x^2 - 8x) dx$
- ٧ - $\int \pi r^2 dr$
- ٨ - $\int 3(x + \frac{1}{2}x^3) dx$
- ٩ - $\int (a^2 - x^2) dx$
- ١٠ - $\int (t^3 + t + 5)/7 dt$
- ١١ - $\int x(2x-3) dx$
- ١٢ - $\int x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 3 dx$
- ١٣ - $\int 4x^2(x+1) dx$
- ١٤ - $\int 3x(1 + \sqrt{x}) dx$
- ١٥ - $\int [z^3(4-2z) + 6] dz$
- ١٦ - $\int (y+5)^2 dy$
- ١٧ - $\int cr(a+r)^2 dr$
- ١٨ - $\int 3\left(x+5+\frac{1}{x^2}\right) dx$
- ١٩ - $\int \left[x(x^3+1) - \frac{1}{x^4}\right] dx$
- ٢٠ - $\int \frac{1}{3}\left(s^6 - s + \frac{\sqrt{2}}{s^2} + \frac{1}{3s^3}\right) ds$
- ٢١ - $\int (3x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-5}) dx$
- ٢٢ - $\int \frac{4}{\sqrt[3]{t}} dt$
- ٢٣ - $\int \left(\sqrt{w} - \frac{1}{\sqrt{w}}\right) dw$
- ٢٤ - $\int \sqrt{7z} dz$
- ٢٥ - $\int \frac{5z^2 - 12z - 10}{z^4} dz$
- ٢٦ - $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$
- ٢٧ - $\int \frac{u-1}{u^3} du$
- ٢٨ - $\int \sqrt{y}(3y+1)^2 dy$
- ٢٩ - $\int 3x^2(x^3-10) dx$
- ٣٠ - $\int u^2(u^3+3)^{10} du$
- ٣١ - $\int (3-4x)^{17} dx$
- ٣٢ - $\int 3x(x^2+6)^3 dx$
- ٣٣ - $\int (x^2+6)^3 dx$
- ٣٤ - $\int (3x+5)^{-3} dx$
- ٣٥ - $35. \int \frac{dt}{(t-1)^2}$
- ٣٦ - $\int (8x-6)(4x^2-6x)^3 dx$
- ٣٧ - $\int (6z^2+5)(2z^3+5z-1)^4 dz$
- ٣٨ - $\frac{1}{2} \int \sqrt{4-9x} dx$
- ٣٩ - $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$
- ٤٠ - $\int \left[x + \frac{1}{(4x+3)^2}\right] dx$
- ٤١ - $\int (x + \sqrt{1-x}) dx$
- ٤٢ - $\int x\sqrt{2x^2-1} dx$
- ٤٣ - $\int x\sqrt[3]{4x^2-6} dx$

$$\int y^3 (by^4 - c)^{-1} dy \quad - ٤٥ \quad \int z^2 \sqrt[3]{5z^3 + 2} dz \quad - ٤٤$$

$$\int x^2 \sqrt[3]{(x^3 + 8)^2} dx \quad - ٤٧ \quad \int \frac{u^2 du}{(u^3 + \pi)^6} \quad - ٤٦$$

$$\int 2x[1 + (x^2 + 1)^{3/2}] dx \quad - ٤٨$$

٤٩ - أوجد المعكوس التفاضلى $f(x)$ لـ x^2 حيث $f(1) = 2$.

٥٠ - أوجد ثلاث دوال f حيث $f''(x) = x$.

٥١ - تكامل $(x + 2)^2$ يمكن إيجاد قيمته بطريقتين . إحدى الطريقتين هي

$$\int (x + 2)^2 dx = \frac{1}{3}(x + 2)^3 + C$$

لأن $D[\frac{1}{3}(x + 2)^3] = (x + 2)^2$. الطريقة الثانية هي بفك $(x + 2)^2$ ويكون

$$\int (x + 2)^2 dx = \int (x^2 + 4x + 4) dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x + C$$

اشرح الاختلاف الظاهرى بين التيجتين .

٥٢ - إذا كانت $g(y) = (y - 1)(y^2 + y + 1)$ و $f(y) = y^3$ فحقق أو $f'(y) = g'(y)$

من ثم يوجد مقدار ثابت C بحيث أن $f(y) = g(y) + C$ لجميع قيم y . أوجد C :

٥٣ - أثبت نظرية ٣ - ٢٠

٣ - ٨

المعادلات التفاضلية

نفرض أننا لانعرف معادلة منحنى معين لكن نعرف أن عند كل نقطة (x, y) عليه الميل يكون $x/2$ وأن المنحنى يمر بالنقطة $(3, 4)$. سنوضح كيف يمكن إيجاد معادلة المنحنى من هذه المعلومات . لتكن معادلة المنحنى هي $y = f(x)$. النص عن الميل يعنى أن

$$(١) \quad f'(x) = \frac{1}{2}x$$

لجميع قيم x . علاوة على ذلك ، إذا كان المنحنى يمر بالنقطة $(3, 4)$ ، فيجب أن يكون

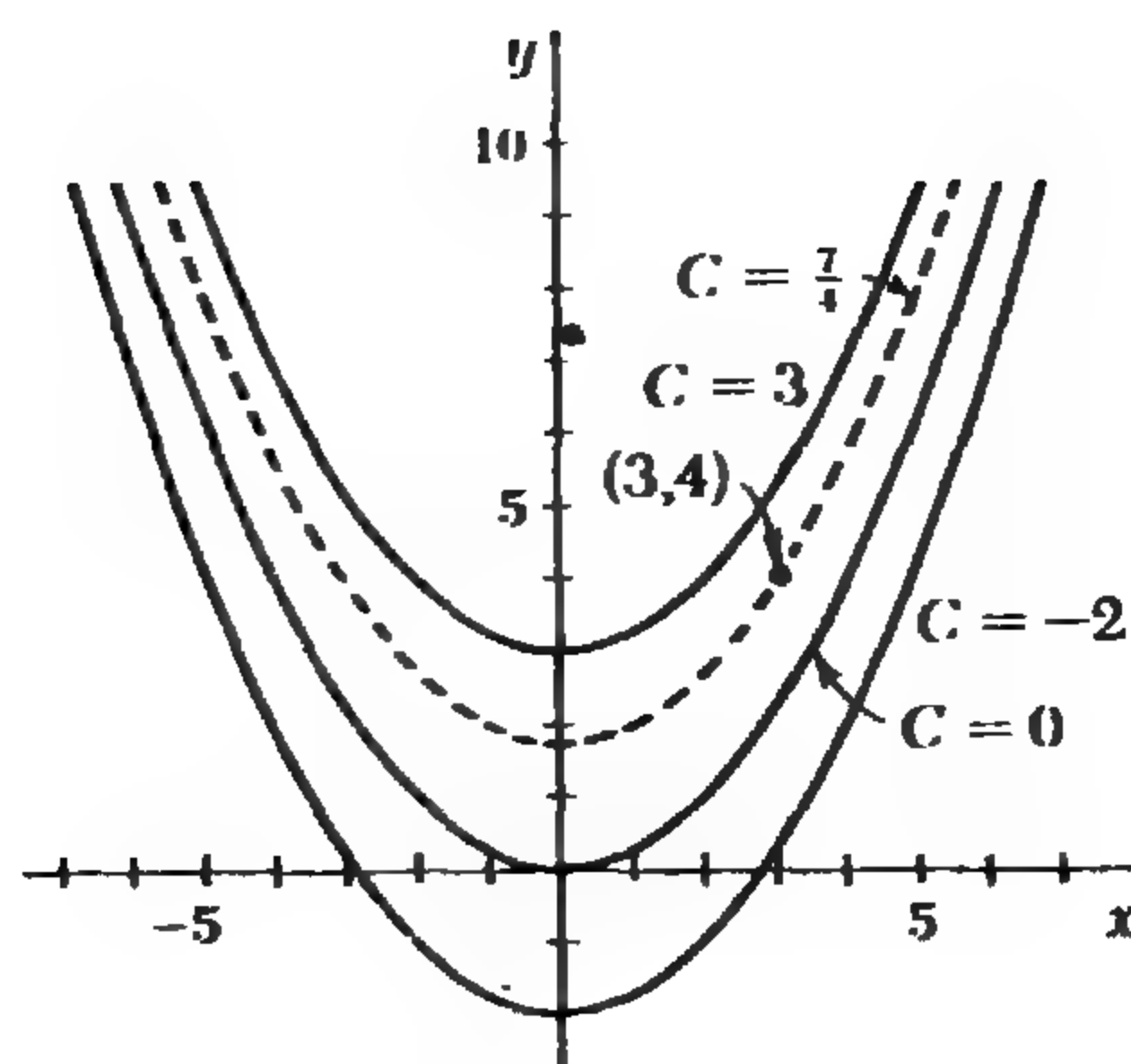
$$(٢) \quad f(3) = 4$$

علينا أن نوجه دالة f تحقق (١) و (٢) . من (١) نرى من عملية إيجاد المعكوس التفاضلى أن كل دالة f ممكنة يجب أن تكون على الصورة

$$(٣) \quad y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 + C$$

لثابت ما C . كل قيمة لـ C تحدد منحنى ، عدد قليل من هذه المنحنيات مخطط فى شكل

٣ - ٨ . يجب اختيار C بحيث أن المنحنى المناظر يمر بالنقطة $(3, 4)$. لذلك C يجب أن



شكل ٨-٣

الأشكال اليلآية لـ $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + C$ لآيم C المختلفة

تكون علداً بحيث أن (٣) تكون صحيحة علما $y = 4$ و $x = 3$ ، أى أن C يجب أن تكون علداً يحقق

$$4 = f(3) = \frac{1}{4}(3^2) + C$$

إذن $C = \frac{7}{4}$ ، ومعادلة المنحنى هى

$$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{4}$$

على القارىء ان يتحقق أن الميل عند كل نقطة هو $x/2$ وأن المنحنى يمر بالنقطة $(3, 4)$. معادلة مثل (١) تشتمل على مشتقة دالة تسمى معادلة تفاضلية . عادة فى هذا الكتاب نستخدم للمشتقة الرمز التفاضلى dy/dx أو y' ونكتب (١) فى الصورة

$$(٤) \quad y' = \frac{1}{2}x \quad \text{أو} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x$$

أى حل للمعادلة التفاضلية هو دالة f بحيث أنه علما تعرض : $f'(x)$ عن dy/dx وتعرض $f(x)$ عن y ، إذا كانت موجودة ، فإن المعادلة الناتجة تكون صحيحة لجميع قيم x حيث الكميات المحتواة تكون معرفة . فمثلاً ، الدالة f المعرفة بـ

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$$

هو حل للمعادلة التفاضلية (٤) لأنه علما تعرض مشتقة f عن dy/dx فى (٤) ، فإن المعادلة الناتجة ، $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$ ، تكون صحيحة لجميع قيم x . عادة المعادلة التفاضلية يكون لها حلول كثيرة . حل المعادلة التفاضلية سيعنى بالنسبة لنا ، إيجاد أكثر ما يمكن إيجاد من حلولها . هذا التعريف هو غير دقيق قصداً لأن لمعادلات كثيرة يكون من الصعب ، وفوق مستوى هذا الكتاب ، تحديد ما إذا كنا قد أوجدنا كل الحلول . شروط إضافية على الحلول

مثل (٢) تسمى شروطاً حدية . في مثالنا طلب منا إيجاد حل للمعادلة التفاضلية (١) يحقق الشرط الحدي (٢) . لإجراء ذلك كان علينا أن نوجد أولاً كل الحلول (٣) للمعادلة (١) . إذا كنا قد اخترنا فقط أبسط الحلول $x^2/4$ ، فإنه لم يكن في إمكاننا تحقيق الشرط الحدي.

مثال ١ . حقق أن الدالة

$$(٥) \quad f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{C}{x}$$

هي حل للمعادلة التفاضلية

$$(٦) \quad x \frac{dy}{dx} + y = x^2$$

لجميع الثوابت C .

مشتقة f هي $f'(x) = 2x/3 - C/x^2$ عندما نعوض بالطرف الأيمن لهذه المعادلة والمعادلة (٥) عن y و dy/dx في (٦) ، فإننا نحصل على

$$x \left(\frac{1}{3}x - \frac{C}{x^2} \right) + \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{C}{x} \right) = x^2$$

بما أن هذه المعادلة صحيحة لجميع قيم x حيث الكميات المحتواة تكون معرفة ، وهي جميع $x \neq 0$ ، فإن (٥) هي حل للمعادلة (٦) لكل C .

مثال ٢ . حل المعادلة التفاضلية

$$(٧) \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{6x+1}$$

بفرض أن

$$(٨) \quad x = \frac{1}{2} \text{ عندما } y = 1$$

بعكس المثال السابق ، حيث كان علينا فقط أن نحقق أن دالة معطاة هي حل ، هنا علينا أن نكتشف الحل . علينا أن نوجد دالة f بحيث أن $f'(x) = \sqrt{6x+1}$ لجميع قيم x ، وأيضاً $f(\frac{1}{2}) = 1$. نوجد أولاً ، بإجراء العملية العكسية للتفاضل كل حلول (٧) . هذه الحلول هي

$$(٩) \quad y = f(x) = \frac{1}{3}(6x+1)^{3/2} + C$$

حيث C ثابت . من بين هذه الحلول نختار حلاً خاصاً يحقق الشرط الحدي (٨) . إذا كانت y لتساوي 1 عندما x تساوي $\frac{1}{2}$ ، فإنه بتعويض $\frac{1}{2}$ و 1 عن x و y في (٩) ، نرى أن C يجب أن تكون عدداً يحقق

$$1 = \frac{1}{3}[6(\frac{1}{2}) + 1]^{3/2} + C = \frac{8}{9} + C$$

إذن $C = \frac{1}{3}$ ، وحل (٧) الذى يحقق (٨) هو

$$y = f(x) = \frac{1}{3}(6x + 1)^{3/2} + \frac{1}{3}$$

على القارىء أن يتأكد من أن الحل يحقق (٧) و (٨) .

المعادلة التفاضلية هى أداة رياضية هامة للفيزيائى . عادة هو لا يعرف بالضبط كيف تعتمد كمية معينة على كمية أخرى ، لكن من اعتبارات فيزيائية يعرف مشتقة الأولى بالنسبة إلى الثانية . بحل المعادلة التفاضلية الناتجة خاضعة للشروط الحدية يمكنه إيجاد العلاقة بين الكميتين .

مسائل

أثبت أن المعادلة التفاضلية لها الدالة المعطاة كحل :

$$1 - \frac{dy}{dx} = x^2, f(x) = \frac{1}{3}x^3 \quad - \quad 2 - \frac{dy}{dx} = 3x + 5, f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 2$$

$$3 - \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{t-1}}, f(t) = 2(\sqrt{t-1} + 1) \quad - \quad 4 - x^3y' = x^4 - \sqrt{3}, g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2x^2}$$

$$5 - \frac{d^2y}{dx^2} = x, y = \frac{1}{6}(x^3 + 2x - 2) \quad - \quad 6 - \frac{d^2s}{dt^2} - 2\frac{ds}{dt} + 10 = 0, s = 5t$$

$$7 - xy' = 2y, f(x) = Cx^2 \quad - \quad 8 - y''' - y'' = 0, y = C_1 + C_2x$$

$$9 - y \frac{dy}{dx} = x^2, g(x) = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 4} \quad - \quad 10 - \frac{u}{x} \frac{du}{dx} = 1, h(x) = \sqrt{x^2 + k}$$

$$11 - \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2}, y = \frac{x}{1-ax} \quad - \quad 12 - x(y')^2 - yy' + 1 = 0, y = C + \frac{x}{C}$$

$$13 - \frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} = \sqrt{t^2 + 1}, x = \frac{(t^2 + 1)^{3/2} + C}{3t}$$

حل المعادلات التفاضلية الآتية :

$$14 - \frac{dy}{dx} = -x + 5 \quad - \quad 15 - f'(x) = x^3 - 3x^2 + 10 \quad - \quad 16 - y' = \frac{4}{\sqrt{x}} - x$$

$$17 - \frac{ds}{dt} = \frac{t^4 - t}{2t^3} \quad - \quad 18 - x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 + 1 \quad - \quad 19 - \sqrt{x} \frac{du}{dx} = (1-x)^2$$

$$20 - z' = \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} \quad - \quad 21 - \frac{1}{t^2} g'(t) = \frac{-7}{(1+t^2)^2} \quad - \quad 22 - \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^3}$$

$$23 - \frac{d^n y}{dx^n} = 0$$

أوجد حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط الحدى المعطى :

$$F'(t) = 1 - 6t + t^2; F(-1) = 4 \quad - ٢٥ \quad f'(x) = -5x; f(1) = 2 \quad - ٢٤$$

$$y' = ax^2; y = a \text{ عند } x = 1 \quad - ٢٧ \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{7}x^3 + 3x - 2; y = -5 \text{ عند } x = 0 \quad - ٢٦$$

$$\frac{1}{t} \frac{dy}{dt} = 2t^2 + t + 1; y = 5 \text{ عند } t = \frac{1}{2} \quad - ٢٩ \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{1-2t}; s = 0 \text{ عند } t = -4 \quad - ٢٨$$

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{10-x^2}}; y = 3 \text{ عند } x = -2 \quad - ٣١ \quad \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} = 8\sqrt[3]{1+2x^2}; y = 2 \text{ عند } x = 0 \quad - ٣٠$$

$$f''(x) = x; f(2) = \frac{1}{2}, f'(2) = 1 \quad - ٣٣ \quad F''(t) = -4; F(0) = 2, F'(0) = 1 \quad - ٣٢$$

$$t = 0, s = 12, \frac{ds}{dt} = 0 \text{ عندما } (g \text{ ثابت}), \frac{d^2s}{dt^2} = g \quad - ٣٤$$

$$x = 1 \text{ عند } y = 0, x = 4 \text{ عندما } \frac{dy}{dx} = 2 \text{ حيث } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \quad - ٣٥$$

$$f''(x) = 2x; f(1) = 2, f(-1) = -3 \quad - ٣٦$$

٣٧ - أوجد معادلة المنحنى الذى ميله $-x^2$ عند كل نقطة (x, y) عليه ، ويمر بالنقطة $(0, 6)$.

٣٨ - أوجد معادلة المنحنى الذى ميله $\sqrt[3]{x}$ عند كل نقطة (x, y) عليه ويمر بالنقطة $(-8, -2)$.

٣٩ - أوجد معادلة المنحنى الذى ميله $1/x^2 - 5x$ عند كل نقطة (x, y) عليه ويمر بالنقطة $(1, -4)$.

٤٠ - أوجد المعادلة $y = g(x)$ لمنحنى بحيث أن $g''(x) = 3$ عند كل نقطة (x, y) عليه ويمر بالنقطة $(2, 1)$ وميله عند هذه النقطة يساوى -1 .

٤١ - أوجد المعادلة $y = f(x)$ لمنحنى بحيث أن $f''(x) = 4x$ عند كل نقطة (x, y) عليه ويقطع المحور x عند النقطة $(-2, 0)$ بزاوية 45° .

٤٢ - أوجد المعادلة $y = f(x)$ لمنحنى بحيث أن $f''(x) = 3x^2$ عند كل نقطة (x, y) عليه ويمر بالنقطتين $(1, \frac{1}{2})$ و $(2, 5)$.

٤٣ - أوجد المعادلة $y = F(x)$ لمنحنى بحيث أن $F''(x) = 1/x^3$ عند كل نقطة (x, y) عليه ويمر بالنقطة $(1, 6)$.

٤٤ - فى الفصل التالى سنرى أنه إذا أسقط حجر من قمة جرف ، فإن سرعته بعد t sec تعطى بالعلاقة $ds/dt = 32t$ ، حيث s هى المسافة التى سقطها . ما هى المسافة التى يسقطها فى 2 sec ؟ إذا كان ارتفاع الجرف 144ft متى يصل الحجر القاع ؟ .

التفاضل الضمني

لقد رأينا أن كل دالة f يناظرها معادلة في y و x نحصل عليها بوضع $y = f(x)$. مع استثناءات بسيطة ، العكس أيضا يكون صحيحا . أى أن أى معادلة في y و x تعرف دالة . خذ مثلا المعادلة

$$(1) \quad 6x - 2y + 5 = 0$$

لكل x ، توجد y حيث المعادلة تكون صحيحة . بعض الأزواج $x's, y's$ معطى فى الجدول ١ .
التناظر الناشئ بين $x's, y's$ يكون ، مثل كل التناظرات بين قئات الأعداد ، دالة تعين بالمعادلة .
دعنا نرمز لها بالرمز f . فيكون $y = f(x)$. إذا أجرينا حل (١) بالنسبة إلى y : $y = \frac{1}{2}(6x + 5)$ ، فإنه يمكننا الحصول على تعبير للعدد $f(x)$ يناظر x ، وهو

$$(2) \quad f(x) = \frac{1}{2}(6x + 5)$$

المعادلة (٢) يقال إنها تعرف الدالة f صراحة لأنها تعطى مباشرة ، أو صراحة ، العدد الذى يناظر x . المعادلة (١) يقال إنها تعرف الدالة ضمنا . أيضا نقول إن (١) تعرف دالة ضمنية لـ x . مع أنها ليست الدالة التى تكون ضمنية لكن طريقة تعريفها . لا يوجد سبب لتفضيل x عن y ، والمعادلة (١) أيضا تعرف ضمنا دالة F لـ y ، يصفها جزئيا الجدول ٢ . التعريف الصريح لـ F يمكن الحصول عليه بحل (١) بالنسبة إلى x :

$$x = F(y) = \frac{1}{6}(2y - 5)$$

لكل x فى الفترة $[-5, 5]$ ، توجد y غير سالبة تحقق المعادلة

$$(3) \quad x^2 + y^2 = 25$$

عدد قليل من هذه الأزواج $x's, y's$ مدون فى الجدول ٣ . المعادلة (٣) تعين التناظر ولذلك تعرف ضمنا دالة g لـ x ، تعريفها الصريح يمكن الحصول عليه بحل (٣) بالنسبة إلى y غير السالبة :

$$(4) \quad y = g_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

فئة أخرى من الـ $y's$ التى تناظران $x's$ وتحقق (٣) معطاة جزئيا فى الجدول ٤ . واذن المعادلة (٣) تعرف ضمنا دالة ثانية g_2 لـ x ، تعريفها الصريح هو

$$(5) \quad g_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$$

جدول ٤		جدول ٣		جدول ٢		جدول ١	
x	$y = g_2(x)$	x	$y = g_1(x)$	y	$x = F(y)$	x	$y = f(x)$
-5	0	-5	0	$-\frac{1}{2}$	-2	-2	$-\frac{1}{2}$
-2	$-\sqrt{21}$	-2	$\sqrt{21}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
0	-5	0	5	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	4
4	-3	4	3	$\frac{23}{2}$	4	4	$\frac{23}{2}$
5	0	5	0				

الشكل البياني لـ (٣) هو دائرة نصف قطرها 5 ومركزها عند نقطة الأصل . الشكل البياني لـ g_1 هو النصف الأعلى للدائرة لأن الاحداثي y وهو $g_1(x)$ يكون دائما موجبا ، والشكل البياني لـ g_2 هو النصف الأسفل للدائرة .

الدالة f تبرز معادلة واحدة فقط ، $y = f(x)$ ، لكن كما يوضح هذا المثال ، المعادلة في x, y قد تعين أكثر من دالة واحدة في x .

من الممكن اثبات أن لكل x يوجد عدد حقيقي y يحقق المعادلة

(٦)

$$y^5 - x^2y + 2x^3 = -1$$

عدد قليل من هذه الأزواج مدون في الجدول ٥ .

جدول ٥

x	$y = h(x)$
0	-1
$-\frac{1}{2}$	-1
$-2^{-1/3}$	0

وعلى ذلك ، فالمعادلة (٦) تعرف ضمينا دالة h لـ x ، ويمكننا أن نكتب $y = h(x)$. لكن هنا يوجد اختلاف المعادلة (٦) لا يمكن حلها جبريا لـ y بدلالة x ، لذلك لا يوجد تعبير صريح لـ h .

كما هو الحال مع (٣) ، المعادلة (٦) قد تعرف أكثر من دالة واحدة لـ x . لمعادلات أخرى في x, y قد لا توجد x لها y مناظرة ، في هذه الحالة ، المعادلة لا تعرف دالة . مثل هذه المعادلة هي $x^2 + y^2 = -9$. أيضا لمعادلات كثيرة نطاق الدالة معرفة قد يتكون فقط من واحدة أو أكثر من الفترات المحددة ، كما كان الحال مع g_1 و g_2 لا يمكننا التعمق في هذه الامور هنا ، فهي تدرس في حساب التفاضل المتقدم . سنفترض أن المعادلات التي ندرسها تعرف دوال نطاقها يحتوى على فترة .

مشتقة الدالة غير السالبة $g_1(x)$ المعرفة بالمعادلة

(٧)

$$x^2 + y^2 = 25$$

يمكن إيجادها من الصورة الصريحة

(٨)

$$g_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

المعطاة في (٤) . المشتقة هي

$$g_1'(x) = \frac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

يمكن أيضاً إيجاد المشتقة مباشرة من المعادلة (٧) ، التي تعرف g_1 ضمينا ، كما سنوضح الآن .

لكل x في الفترة $[-5,5]$ ، تكون $g_1(x)$ هي العدد الذي عند تعويضه عن y في (٧) يجعل هذه المعادلة صحيحة . بمعنى آخر ، المعادلة

$$(9) \quad x^2 + g_1^2(x) = 25$$

تكون صحيحة ، وهي صحيحة لكل x في نطاق الدالة g_1 . بما أن الطرفين الأيسر والأيمن للمعادلة (٩) يكونان متساويين لجميع هذه القيم لـ x ، هكذا أيضا تكون مشتقاتها ، أي أن ،

$$\frac{d}{dx} [x^2 + g_1^2(x)] = \frac{d}{dx} 25$$

بقاعدة القوة المعممة ٣ - ١٧ ، هذه يمكن كتابتها

$$(10) \quad 2x + 2g_1(x)g_1'(x) = 0$$

فيما سبق كان لدينا تعبير صريح للدالة $g_1(x)$ يمكننا منه إيجاد $g_1'(x)$. هنا ندعى أن الأمر ليس كذلك ، في الواقع ، أن $g_1'(x)$ هي التي نحاول إيجادها . بحل (١٠) بالنسبة إلى $g_1'(x)$ ، نرى أن

$$(11) \quad g_1'(x) = \frac{-x}{g_1(x)}$$

المعادلة (١١) تعطي مشتقة الدالة g_1 عند كل x في نطاق g_1 حيث $g_1(x) \neq 0$. فمثلا ، عند $x = 4$ ، يكون

$$(12) \quad g_1'(4) = \frac{-4}{g_1(4)}$$

من جدول الدالة g_1 ، نرى أن $g_1(4) = 3$ وإذن $g_1'(4) = -\frac{4}{3}$ هذا قد يكون أكثر نفعا لكن ليس أكثر صحة من (١٢) . مشتقات الدوال المعرفة صراحة ، كما في (٨) ، تشمل x فقط . التعبير لمشتقة g_1 عندما تكون g_1 معرفة ضمنا ، كما بالمعادلة (٧) ، لا تشمل x فقط لكن أيضا $g_1(x)$. بما أن $g_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ ، يمكننا إذا أردنا ، أن نعوض $\sqrt{25 - x^2}$ عن $g_1(x)$ في (١١) ونعبر عن $g_1(x)$ في صورة تشمل x فقط :

$$(13) \quad g_1'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

ليس من الضروري عمل ذلك . الصورتان (١١) و (١٢) كلاهما صحيح . صورة المشتقة في (١٣) هي الصورة التي حصلنا عليها سابقا بالتفاضل الصريح . هذه الطريقة لأجراء التفاضل باستخدام الصورة الضمنية للدالة تسمى التفاضل الضمني .

إذا أردنا مشتقة الدالة الأخرى g_2 المعرفة بالمعادلة (٧) ، فالطريقة هي نفسها . مناظرا لـ (٩) لدينا $x^2 + g_2^2(x) = 25$ لكل x في نطاق g_2 . بأجراء تفاضل ذلك وحل المعادلة الناتجة بالنسبة إلى $g_2'(x)$ نحصل على

$$(14) \quad g_2'(x) = \frac{-x}{g_2(x)}$$

إذا أردنا ، يمكننا تعويض $\sqrt{25 - x^2}$ عن $g_2(x)$ ونحصل على

$$g_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

وهذا ما نحصل عليه بإجراء تفاضل (٥) مباشرة . المعادلتان (١١) و (١٤) تعطيان الميل عند النقط على النصف الأعلى والنصف الأسفل ، على الترتيب ، للدائرة $x^2 + y^2 = 25$.

دعنا نوجد الآن المشتقة $h'(x)$ للدالة h المعرفة بالمعادلة $-1 = x^2y + 2x^3 - y^5$ في (٦) . بما أن $y = h(x)$ ، فإن المعادلة

$$h^5(x) - x^2h(x) + 2x^3 = -1$$

تكون صحيحة لكل x في نطاق h ، وإذن

$$\frac{d}{dx} [h^5(x) - x^2h(x) + 2x^3] = \frac{d}{dx} (-1)$$

$$\frac{d}{dx} h^5(x) - \frac{d}{dx} x^2h(x) + \frac{d}{dx} 2x^3 = 0 \quad \text{ومن ثم}$$

الحد $x^2h(x)$ هو حاصل ضرب . نستخدم قاعدة حاصل الضرب لإيجاد مشتقته ، والمعادلة السابقة تصبح

$$(15) \quad 5h^4(x)h'(x) - [x^2h'(x) + 2xh(x)] + 6x^2 = 0$$

مع أن $h(x)$ تظهر إلى القوة الرابعة في (١٥) فإن $h'(x)$ تظهر إلى القوة الأولى فقط وذلك يمكننا من حل المعادلة بالنسبة إلى $h'(x)$. الكتابة تكون أبسط إذا استخدمنا dy/dx و y بدلا من $h'(x)$ و $h(x)$. بهذا التغير في أسلوب الكتابة ، (١٥) تصبح

$$5y^4 \frac{dy}{dx} - \left(x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy \right) + 6x^2 = 0$$

حل المعادلة بالنسبة إلى dy/dx ، نتبع الطريقة كما مع أي معادلة من الدرجة الأولى

$$(5y^4 - x^2) \frac{dy}{dx} = 2xy - 6x^2,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - 6x^2}{5y^4 - x^2} = \frac{2x(y - 3x)}{5y^4 - x^2}$$

أو بدلالة $h(x)$

$$(16) \quad h'(x) = \frac{2x[h(x) - 3x]}{5h^4(x) - x^2}$$

المشتقة معطاة بدلالة $h(x)$ بالإضافة إلى x . وجود قيمة الدالة من مميزات التفاضل الضمني وأحيانا يكون غير مناسب مع ذلك ، لدينا في (١٦) مقدار جبري للمشتقة التي لم يكن في استطاعتنا

ايجادها لو أن التفاضل الصريح هو الطريقة الوحيدة المتاحة . وعلاوة على ذلك ، ربما تكون قيم الدالة معرفة لبعض قيم x ، حتى إذا لم تكن للكل ، في هذه الحالة يمكن إيجاد قيم المشتقة لهذه الـ x 's . مثال ذلك ، من الجدول ٥ يكون $h(-\frac{1}{2}) = -1$ ، واذن

$$h'(-\frac{1}{2}) = \frac{(-1)(-1 + \frac{3}{2})}{5 - \frac{1}{4}} = -\frac{2}{19}$$

بالقول الحازم ، لا تكون لنا أحقية في استخدام أى من قواعد المشتقة للحصول على (١٥) مالم نعلم مسبقا أن $h'(x)$ موجودة . يوجد دليل لتعيين ما إذا كانت الدالة المعرفة ضمينا لها مشتقة ، لكن لا يمكن إعطاؤه هنا . للدوال التي نعتبرها في أمثلتنا ، المشتقات توجد فعلا ، وسنفترض هذه الحقيقة .

مثال ١ . أوجد معادلة المماس عند النقطة (1,4) للمنحنى

$$(17) \quad y^2 + 2\sqrt{xy} = 21 - x^2$$

المعادلة تعين y كدالة f في x . نحتاج إلى ميل المنحنى عند النقطة (1,4) كما تعطيه مشتقة f . بدلا من تعويض $f(x)$ بدلا من y في (١٧) سنجرى تفاضل (١٧) كما هي ، محتفظين في ذاكرتنا أن $y = f(x)$ ومستخدمين dy/dx لـ $f'(x)$. التعبيران الجبريان \sqrt{xy} و y^2 هما أيضا يكونان دالتان في x يمكن إيجاد مشتقتهما بقاعدة القوة المعممة . بإجراء تفاضل (١٧) بالنسبة إلى x والحل بالنسبة إلى dy/dx ، يكون

$$\frac{d}{dx} (y^2 + 2\sqrt{xy}) = \frac{d}{dx} (21 - x^2),$$

$$2y \frac{dy}{dx} + 2(\frac{1}{2})(xy)^{-1/2} \frac{d}{dx} xy = -2x,$$

$$2y \frac{dy}{dx} + \frac{1}{(xy)^{1/2}} \left(x \frac{dy}{dx} + y \right) = -2x,$$

$$2y(xy)^{1/2} \frac{dy}{dx} + x \frac{dy}{dx} + y = -2x(xy)^{1/2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x(xy)^{1/2} - y}{2y(xy)^{1/2} + x}.$$

هذا يعطي المشتقة عند أي نقطة (x,y) على المنحنى . عند النقطة (1,4) يكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(2) - 4}{2(4)(2) + 1} = -\frac{8}{17}$$

ومعادلة المماس هي

$$y - 4 = -\frac{8}{17}(x - 1)$$

$$8x + 17y - 76 = 0 \quad \text{أو}$$

مثال ٢ . المعادلة $x^2 + y^2 = 25$ تعرف y كدالة في x . أوجد dy/dx و d^2y/dx^2 عند النقطة $(3,4)$.

أوجدنا dy/dx من قبل ، لكن نكرر العمل مستخدمين y والد dy/dx . بإجراء تفاضل كل من طرفي المعادلة بالنسبة إلى x ، يكون

$$\frac{d}{dx} (x^2 + y^2) = \frac{d}{dx} 25,$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0.$$

$$(18) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

عندما $x=3$ و $y=4$ يكون $dy/dx = -\frac{3}{4}$. لايجاد d^2y/dx^2 نجرى تفاضل (18) ضمناً بالنسبة إلى x ، فنحصل على

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(-\frac{x}{y} \right) = -\frac{y - x \frac{dy}{dx}}{y^2}$$

من (18) ، $dy/dx = -x/y$. لذلك

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y - x(-x/y)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}$$

لانتوقع أنه يمكن عمل أحسن من ذلك . لكن فكرة بسيطة تمكنا من تبسيط النتيجة . لأن x و y يتحققان المعادلة $x^2 + y^2 = 25$ ، فالبسط يمكن إبداله بالعدد 25 ، ويكون $d^2y/dx^2 = -25/y^3$. عند النقطة $(3,4)$ يكون $d^2y/dx^2 = -\frac{25}{64}$.

لاحظ أنه عند إيجاد d^2y/dx^2 في هذا المثال قد أجرينا تفاضل المشتقة الأولى العامة $-x/y$ وليست القيمة الخاصة $-\frac{3}{4}$.

مثال ٣ . المعادلة $y = x^3 + 2x - 7$ تعرف x ضمناً كدالة في y . أوجد dx/dy .

بالاحتفاظ في ذاكرتنا أن x هي دالة في y ، نجرى تفاضل كل من طرفي المعادلة بالنسبة إلى y ، فنحصل على

$$1 = 3x^2 \frac{dx}{dy} + 2 \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2 + 2}$$

وإذن

لدوال كثيرة f ، المعادلة

$$y = f(x) \quad (19)$$

تعرف أيضاً x ضمناً كدالة في y : $x = g(y)$. إذا كانت g و f قابلتين للتفاضل ، فإن مشتقة g يمكن إيجادها بدون حل (19) بالنسبة إلى x وذلك بإجراء تفاضل المعادلة ضمناً بالنسبة إلى y . مثال ٣ يوضح هذه الطريقة . هذه هي أفضل طريقة لمعالجة معادلة خاصة ، لكن للأغراض النظرية ، النظرية الآتية ، التي هي صياغة لهذه الطريقة ، مفيدة

٣- ٢٢ نظرية . إذا كانت المعادلة $y = f(x)$ تعرف x ضمناً كدالة في y ، أى $x = g(y)$ ، فإن

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}$$

بفرض وجود المشتقات وبفرض أن $f'(x) \neq 0$. بالرموز التفاضلية هذه تصبح

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

البرهان . أجر تفاضل كل من طرفي المعادلة $y = f(x)$ بالنسبة إلى y . بما أن x دالة في y ، فإن $f(x)$ يجب أن تفاضل بقاعدة السلسلة . بذلك نحصل على

$$1 = f'(x) \frac{dx}{dy}$$

وإذن $dx/dy = 1/f'(x)$ ، أو بأسلوب آخر

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}$$

عندما نستخدم الرموز التفاضلية يجب أن نكون حريصين لأن نستخدم لكل x القيمة المناظرة لـ y المعطاة بالمعادلة $y = f(x)$. في مثال ٣ لاحظ أن مقام الجواب هو dy/dx ، وهذا يتفق مع النظرية .

مسائل

معظم المعادلات الآتية تعرف ضمناً دالة أو أكثر في x . عندما يكون ذلك ، أوجد المقدار الجبرى الذى يعرف هذه الدوال صراحة واعط نطاق الدالة .

$$\begin{array}{llll} 1. & 7y - x = 14 & 2. & xy + y = x \\ 3. & 3y^2 = -x & 4. & y^3 - x = 0 \\ 5. & x/y + y = -5 & 6. & x^2 - y^2 = 9 \\ 7. & y^2 = x^3 & 8. & 5x^2 + y^3 = -1 \\ 9. & x^2 + y^2 = 0 & & \end{array}$$

كل من المعادلات الآتية تعرف y ضمناً كدالة في x . أوجد dy/dx بطريقتين : الأولى بإجراء التفاضل الضمني ، والثانية بحل المعادلة لـ y بدلالة x وإجراء تفاضل الدالة الصريحة .

$$3x + 2y = 8 \quad - ١٠ \quad y/x + 4y = 3x \quad - ١٢ \quad y^2 - 5x = 2 \quad - ١٣ \quad y^3 = x$$

$$6x^2 - 4y^2 = 24 \quad - ١٤ \quad y^2 = (2x - 1)^2 + (5x)^2 \quad - ١٥ \quad \sqrt{xy} + x^2 = y \quad - ١٦$$

كل من المعادلات الآتية تعرف y ضمناً كدالة في x . أوجد dy/dx بإجراء التفاضل الضمني .

$$7y - x = 14 \quad - ١٧ \quad y^2 = 4px \quad - ١٨ \quad 2x^2 + y^2 = 8 \quad - ١٩ \quad x^2 - y^2 = 4 \quad - ٢٠$$

$$y^2 = x^3 \quad - ٢١ \quad xy = 1 \quad - ٢٢ \quad xy - 3x^2 = 7 \quad - ٢٣ \quad x^2y + x^3 = -2 \quad - ٢٤$$

$$y^2 = (x - 3)^2(2x - 1) \quad - ٢٥ \quad x = 30y + 10y^3 - 6y^5 \quad - ٢٦ \quad x^2 + xy + y^2 = 9 \quad - ٢٧$$

$$x^2y^3 = 6 \quad - ٢٨ \quad x^2 + y^2 = x^2y^2 \quad - ٢٩ \quad x^3 + x^2y - 3y^2 = 0 \quad - ٣٠$$

$$xy(x + y) = 8 \quad - ٣١ \quad x^3 - 6xy - 3y^3 = 5 \quad - ٣٢ \quad 2x^2 - y^2 + y^3 = 3x \quad - ٣٣$$

$$(x + y)^3 + (x - y)^3 = x^2 + y^2 \quad - ٣٤ \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \quad - ٣٥ \quad x = \sqrt{y} - \sqrt[3]{y} \quad - ٣٦$$

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad - ٣٧ \quad y^2 = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2} \quad - ٣٩ \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \quad - ٣٩$$

$$\frac{x}{y} - 3y = 2x \quad - ٤١ \quad \frac{x + y}{x - y} = x \quad - ٤٢ \quad \frac{x^2}{x + y} = 1 - y^2 \quad - ٤٢$$

$$\sqrt[3]{xy} + y^2 = x \quad - ٤٤ \quad \sqrt{\frac{x}{y}} + y = x^3 \quad - ٤٥ \quad x = \frac{2 + \sqrt{y}}{2 - \sqrt{y}} \quad - ٤٥$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 9 \quad - ٤٦$$

أوجد معادلات المماسات والأعمدة للمنحنيات الآتية عند النقاط المعطاة :

$$4x^2 + 3y^2 = 12; (\frac{1}{2}, 1) \quad - ٤٧ \quad y^2 - 2xy = -8; (3, 2) \quad - ٤٨$$

$$xy^2 - y = x + 4; (0, -4) \quad - ٤٩ \quad 3x^2 - x^2y + 2y^2 = 18; (1, 3) \quad - ٥٠$$

$$x^3 - xy + y^3 = -5; (1, -2) \quad - ٥١ \quad (x - y)^2 = 2x + 6; (5, 1) \quad - ٥٢$$

$$(x + y)^4 = x - y; (0, -1) \quad - ٥٣ \quad \frac{x - y}{x + 2y} = -5; (3, -2) \quad - ٥٤$$

$$x - \sqrt{xy} = 2y; (8, 2) \quad - ٥٥$$

كل من المعادلات الآتية تعرف y ضمناً كدالة في x . أوجد d^2y/dx^2 و dy/dx بإجراء التفاضل الضمني

$$- ٥٦ \quad y^2 = 4px \quad - ٥٧ \quad x^2 - y^2 = a^2 \quad - ٥٨ \quad x^4 + y^4 = 8 \quad - ٥٩ \quad xy + y^2 = 2$$

$$- ٦٠ \quad x^2 - xy + 2y^2 = 1 \quad - ٦١ \quad x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad - ٦٢ \quad x^3 - xy^2 + y^3 = 8$$

كل من المعادلات الآتية تعرف y ضمناً كدالة في x . أوجد قيم dy/dx و d^2y/dx^2 عند النقطة المعطاة بإجراء التفاضل الضمني .

$$- ٦٣ \quad x^2 - 3y^2 = 13; (5,2) \quad - ٦٤ \quad x^3 + y^3 = 2a^3; (a,a)$$

$$- ٦٥ \quad y^2 + 3xy = 22; (3,2) \quad - ٦٦ \quad y^2 = x^2(1 + 2x); (4,12)$$

- ٦٧ أثبت أن الدائرتين $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 25 = 0$ و $x^2 + y^2 + 2x + y = 10$ متماستان عند النقطة $(2,1)$ ، أي لها مماس مشترك عند هذه النقطة .

المنحنيان يكونان متعامدين إذا كان مماسهما عند كل من نقط تقاطعهما متعامدين . أثبت أن أزواج المنحنيات الآتية متعامدة .

$$- ٦٨ \quad y^2 = 6x + 9, y^2 = 9 - 6x \quad - ٦٩ \quad 3x^2 + y^2 = 24, x^2 - 3y^2 = -12$$

$$- ٧٠ \quad xy = 2, x^2 - y^2 = 3 \quad - ٧١ \quad x^2 + y^2 - 4x = 0, x^2 + y^2 - 4y = 0$$

- ٧٢ أوجد النقطة الواقعة على القطع المكافئ $(y - 4)^2 = x + 2$ حيث المماس يكون موازياً للخط المستقيم $3x + 6y = -2$.

- ٧٣ المنحنيان $y^2 = 4b^2 + 4bx$ و $y^2 = 4a^2 - 4ax$ هما قطعان مكافئان لجميع قيم b و a الموجبة . خطط الاشكال البيانية عندما $a = 2$ و 5 ، $b = 2$. اثبت أن كل منحنى من إحدى فتي القطوع المكافئة يكون عمودياً على كل منحنى من الفئة الأخرى . (أنظر المسألة ٦٨ لتعريف التعامد)

- ٧٤ أثبت أن معادلة المماس للقطع المكافئ $y^2 = 4px$ عند النقطة (x_1, y_1) هي $y_1y = 2p(x_1 + x)$.

- ٧٥ أثبت أن معادلة المماس للقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ عند النقطة (x_1, y_1) هي $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$

كل من المعادلات الآتية تعرف x ضمناً كدالة في y . أوجد dx/dy بإجراء التفاضل الضمني . عندما يكون ممكناً ، حقق إجابتك بحل المعادلة لـ x بدلالة y ثم إيجاد dx/dy مباشرة .

$$- ٧٦ \quad y = 2x - 3 \quad - ٧٧ \quad y = x^3 + 5 \quad - ٧٨ \quad y = 6\sqrt{x}$$

$$- ٧٩ \quad y = 2x^3 - x^2 + 6x \quad - ٨٠ \quad y = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

- ٨١ لقد رأينا في دراستنا أن المعادلة $x^2 + y^2 = 25$ تعرف دالتين في x ،

$$\text{هما } g_1(x) = \sqrt{25 - x^2} \text{ و } g_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$$

أوجد دالة ثالثة في x تعرف بالمعادلة (إرشاد : ستكون منفصلة) .

الفصل الرابع

تطبيقات المشتقة

٤ - ١

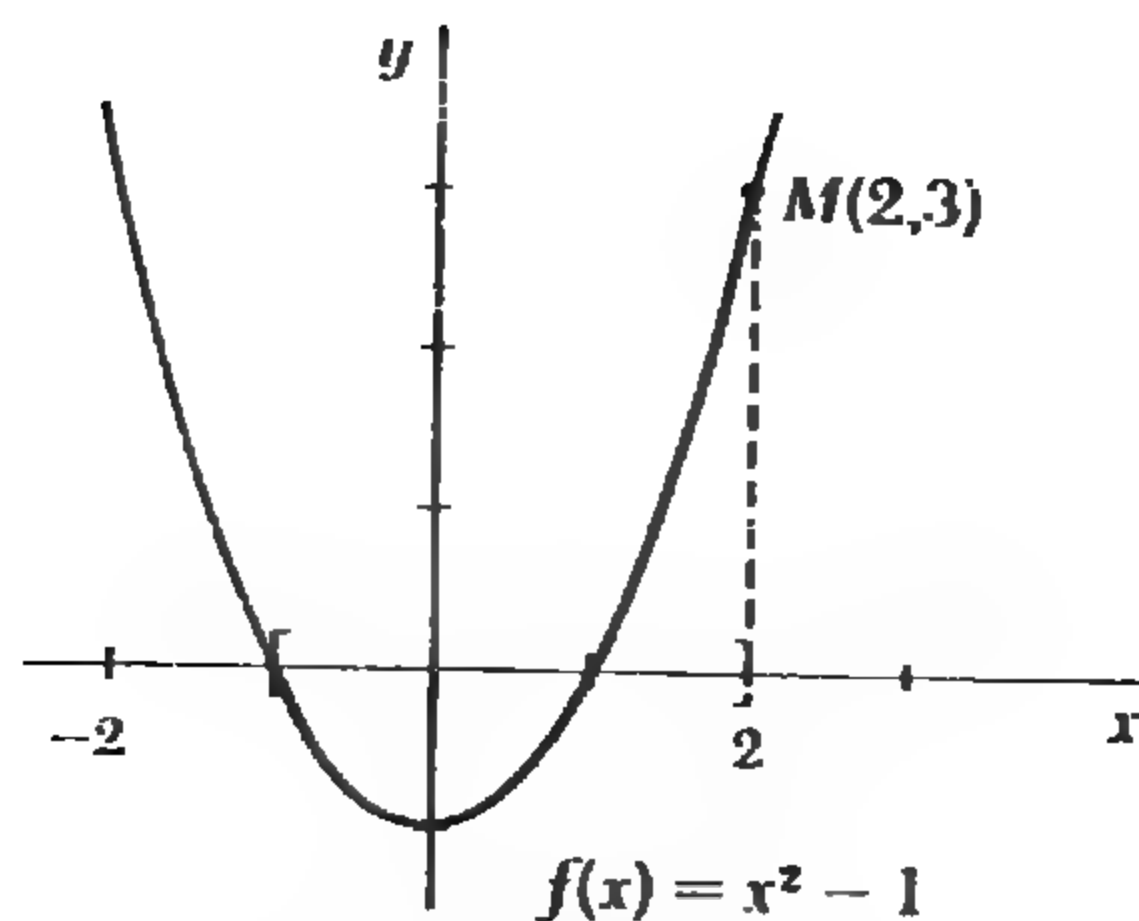
النهايات العظمى والنهايات الصغرى

مهندس الطيران يصمم جناح الطائرة للحصول على النهاية العظمى للرفع . أمر جوهري للمصانع هو كيف يقلل تكاليفه الانتاجية . الحلول لهذه المشاكل وما يشابهها تشمل إيجاد أكبر وأصغر قيمة للدالة فوق مدى معين للمتغير المستقل . المشتقة هي الأداة القوية لحل هذه المشاكل . الجزء الأول من هذا الفصل يدرس نظرية النهايات العظمى والنهايات الصغرى للدوال والموضوع المتعلق بها لتخطيط المنحنى . فى الجزء الآخر نطبق النظرية على مسائل عملية ونعطى تطبيقات أخرى للمشتقة .

الدالة f المعرفة بـ $f(x) = x^2 - 1$ مخططة فى شكل ٤ - ١ . إذا وجهنا إنتباهنا الى قيم x فى الفترة المغلقة $[1, 2]$ ، نرى أن أعلى نقطة على الشكل البياني هى $(2, 3)$ وأن أدنى نقطة هى $(0, -1)$. هذا يعنى أنه لجميع قيم x فى الفترة $[-1, 2]$ يكون $f(x) \geq f(0) = -1$ و $f(x) \leq f(2) = 3$.

٤ - ١ تعريف . لتكن f هى دالة معرفة فى فترة I ، يمكن أن تكون لانهائية . النقطة $M(c, f(c))$ تسمى نقطة قيمة عظمى على الشكل البياني للدالة f فى الفترة I إذا كانت c فى I وكان : $f(x) \leq f(c)$ لجميع x فى I . الاحداثى الصادى $f(c)$ للنقطة M يسمى القيمة العظمى للدالة f فى الفترة I ، وهذه القيمة العظمى يقال إنها تحدث عند c . نقط القيمة الصغرى والقيمة الصغرى للدالة f فى الفترة I تعرف بالمثل .

القيمة العظمى للدالة $f(x) = x^2 - 1$ فى الفترة $[-1, 2]$ هى 3 وتحدث عند 2 : (شكل ٤ - ١) . القيمة الصغرى هى -1 ، وتحدث عند 0 . لاحظ أن القيمة العظمى أو الصغرى يقال إنها تحدث عند الاحداثى x للنقطة المناظرة على المنحنى .

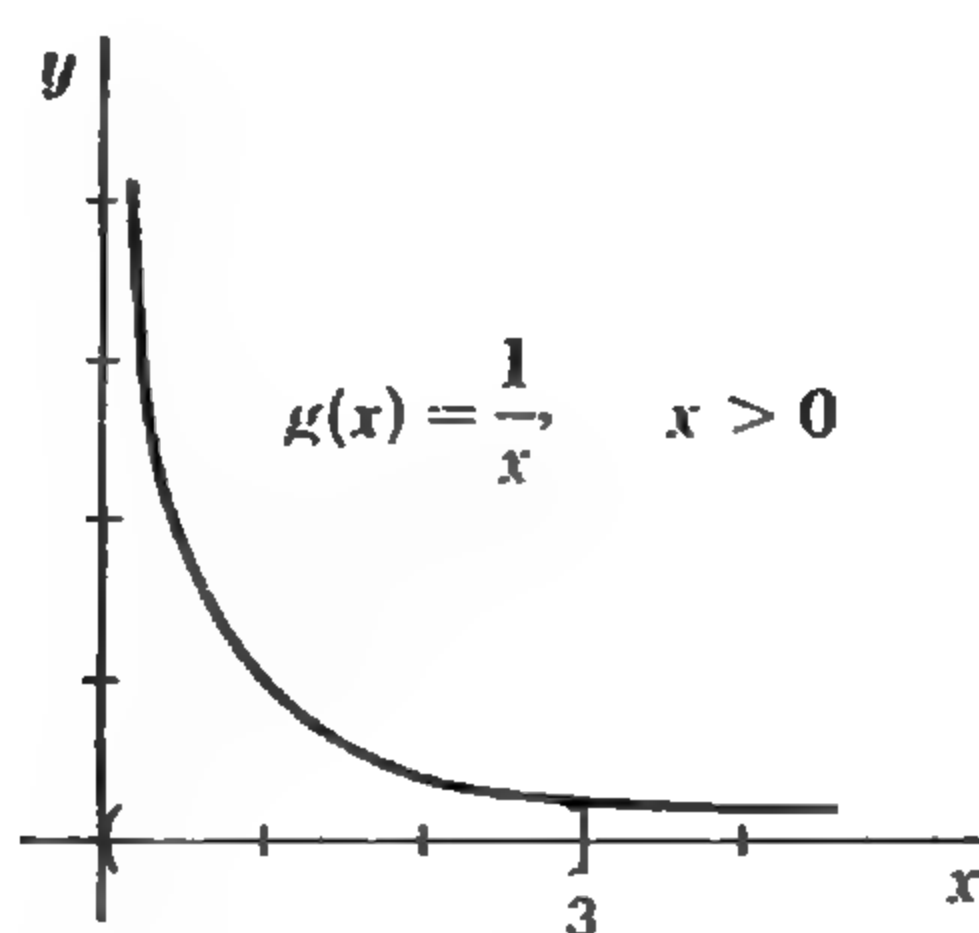


شكل ١-٤

$-1, 3$ هما القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة f في الفترة $[-1, 2]$ وهما تحدثان عند 2 و 0

القيمة نفسها هي الاحداثي y . القيمة القصوى للدالة في فترة هي أما قيمتها العظمى أو الصغرى. الدالة في شكل ١-٤ لها قيمتان قصويتان في الفترة $[-1, 2]$ هما 3 و -1 .

الدالة قد لا يكون لها قيمة عظمى أو صغرى في فترة ما. الدالة g المعرفة بـ $g(x) = 1/x$ ، حيث $x > 0$ ، ليس لها قيمة عظمى في الفترة $(0, 3]$ (شكل ٢-٤)، ولها قيمة صغرى $\frac{1}{3}$ تحدث عند 3 .



شكل ٢-٤

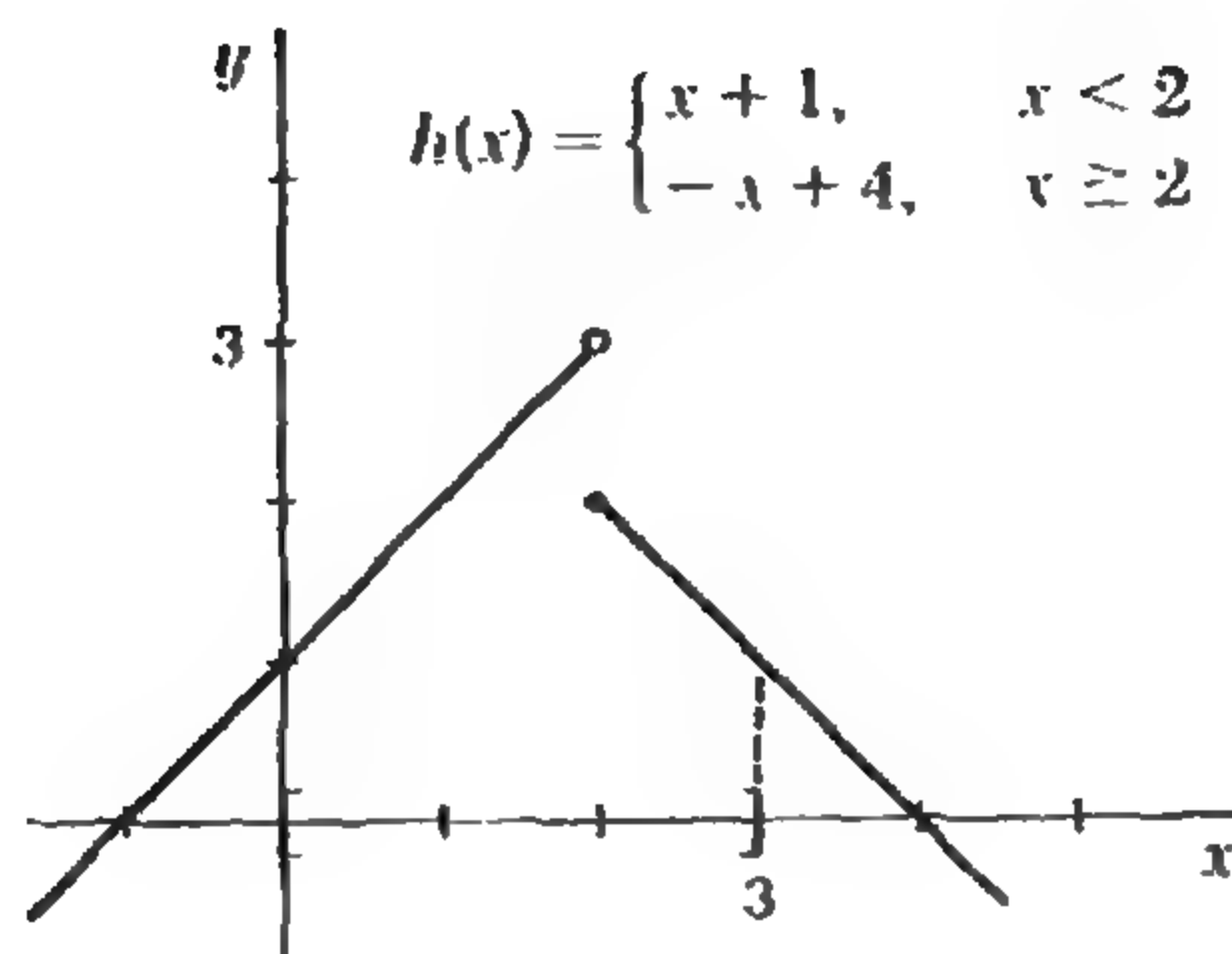
g ليس لها قيمة عظمى في الفترة $(0, 3]$

ليس من الضروري أن قيم الدالة تصبح لانهاية لكي لا توجد قيمة عظمى. الدالة $f(x) = x^2 - 1$ ليس لها قيمة عظمى في الفترة نصف المفتوحة $(-1, 2)$. قيم الدالة أقل من 3 لجميع قيم x في الفترة وتكون قريبة من 3 عندما تكون x قريبة من 2 ، لكن لا توجد c في الفترة $(-1, 2)$ يكون عندها $f(x)$ تساوي 3 . لكن الدالة لها قيمة صغرى في الفترة عند 0 .

أيضاً، لتكن h هي الدالة المعرفة بـ

$$h(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2, \\ -x + 4, & x \geq 2, \end{cases}$$

ولتكن $[0, 3]$ هي الفترة المعطاة (شكل ٤ - ٣) . لا توجد قيمة عظمى للدالة h في الفترة $[0, 3]$. القيمة الصغرى هي 1 وتحدث عند 0 وأيضا عند 3 . الدالة يمكن أن يكون لها قيمة صغرى لكن هي واحدة ، اذا وجدت ، وهذا المثال يوضح أن القيمة الصغرى يمكن حدوثها عند أكثر من عدد واحد . يمكن أن توجد نقط « أدنى » متعددة ، جميعها على نفس المسافة من المحور السيني .



شكل ٤ - ٣

h ليس لها قيمة عظمى في الفترة $[0, 3]$. القيمة الصغرى في الفترة $[0, 3]$ هي 1 . وهي تحدث عند 0 وأيضا عند 3 .

المشتقة تمكنا من إيجاد القيم القصوى لدوال كثيرة . في هذا البند سنرى كيف نستخدمها .

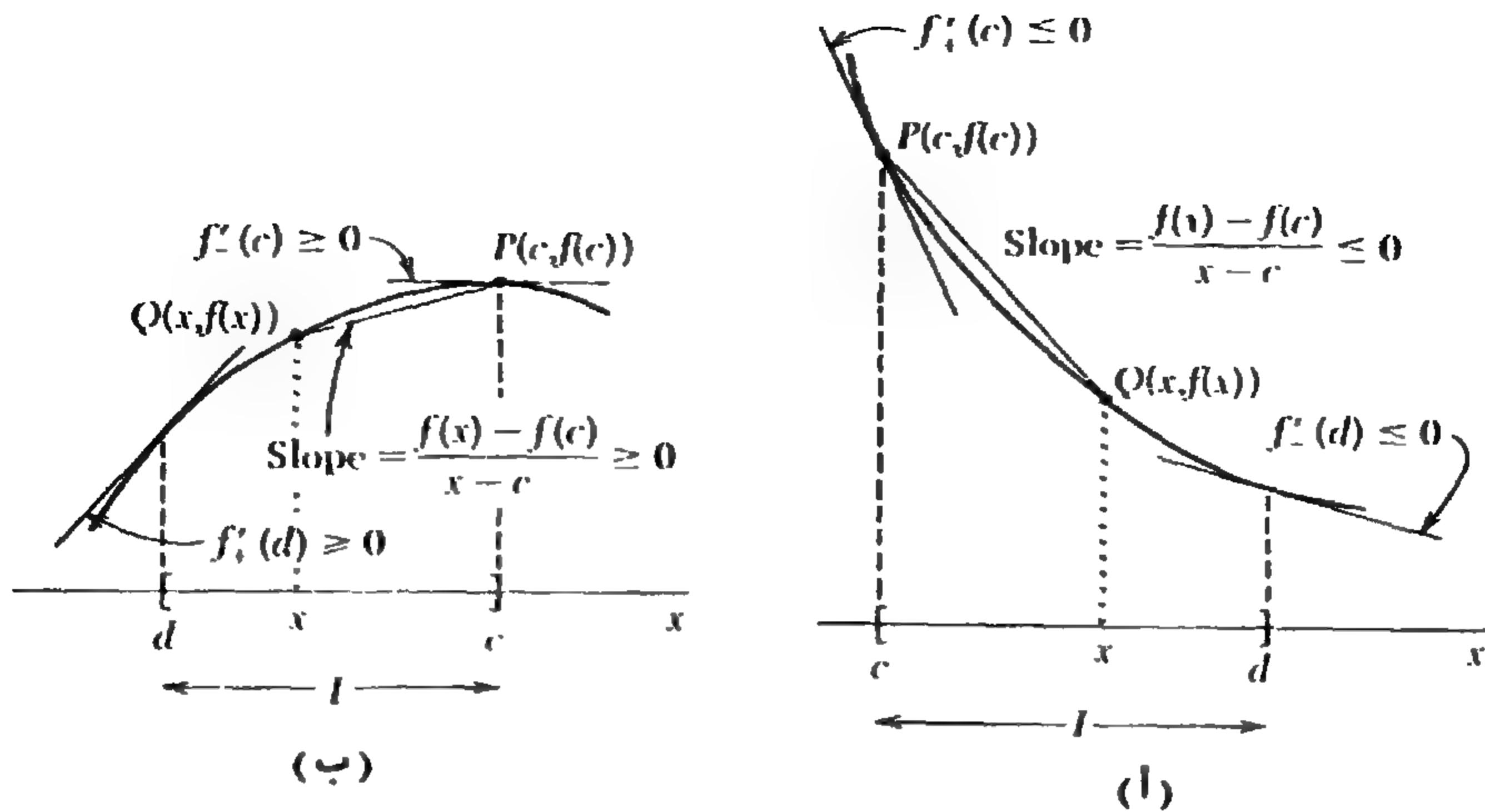
٤ - ٢ تمهيدية . لتكن الدالة f معرفة في الفترة I ، التي قد تكون لانهائية ، ولنفرض أن f لها قيمة عظمى في I عند c . اذا كانت c النقطة الطرفية اليسرى للفترة I وكانت $f'_+(c)$ موجودة ، فإن $f'_+(c) \leq 0$

إذا كانت c هي النقطة الطرفية اليمنى للفترة I وكانت $f'_-(c)$ موجودة ، فإن $f'_-(c) \geq 0$. توجد عبارات مشابهة للقيمة الصغرى .

من السهل تذكر الاحتمالات بالنظر الى شكل مناسب ، كما في شكل ٤ - ٤ .

البرهان . لتكن I هي الفترة ولتكن f لها قيمة عظمى في I عند c . فتكون $f(x) - f(c) \leq 0$ و $f(x) \leq f(c)$ لجميع x في I . نفرض أن c هي النقطة الطرفية اليسرى للفترة I (شكل ٤ - ٤) . فيكون $0 < x - c$ لجميع $x \neq c$ في I ، ومن ثم

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$



شكل ٤ - ٤

(أ) إذا كانت القيمة العظمى للدالة f في الفترة I تحدث عند النقطة الطرفية اليسرى للفترة I فإن :
 (ب) إذا كانت القيمة العظمى للدالة f في الفترة I تحدث عند النقطة الطرفية اليمنى للفترة I ، فإن $f'_-(c) \geq 0$

هندسياً هذا معناه أن ميل الوتر PQ يكون سالباً أو صفراً . بما أن $f'_+(c)$ موجودة ، فإنه من نظرية ٢ - ٢٣ (ثانياً) يكون

$$f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

لنفرض الآن أن c هي النقطة الطرفية اليمنى للفترة I (شكل ٤ - ٤ ب) . فيكون $x - c < 0$ لجميع $x \in I$ وإذن

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

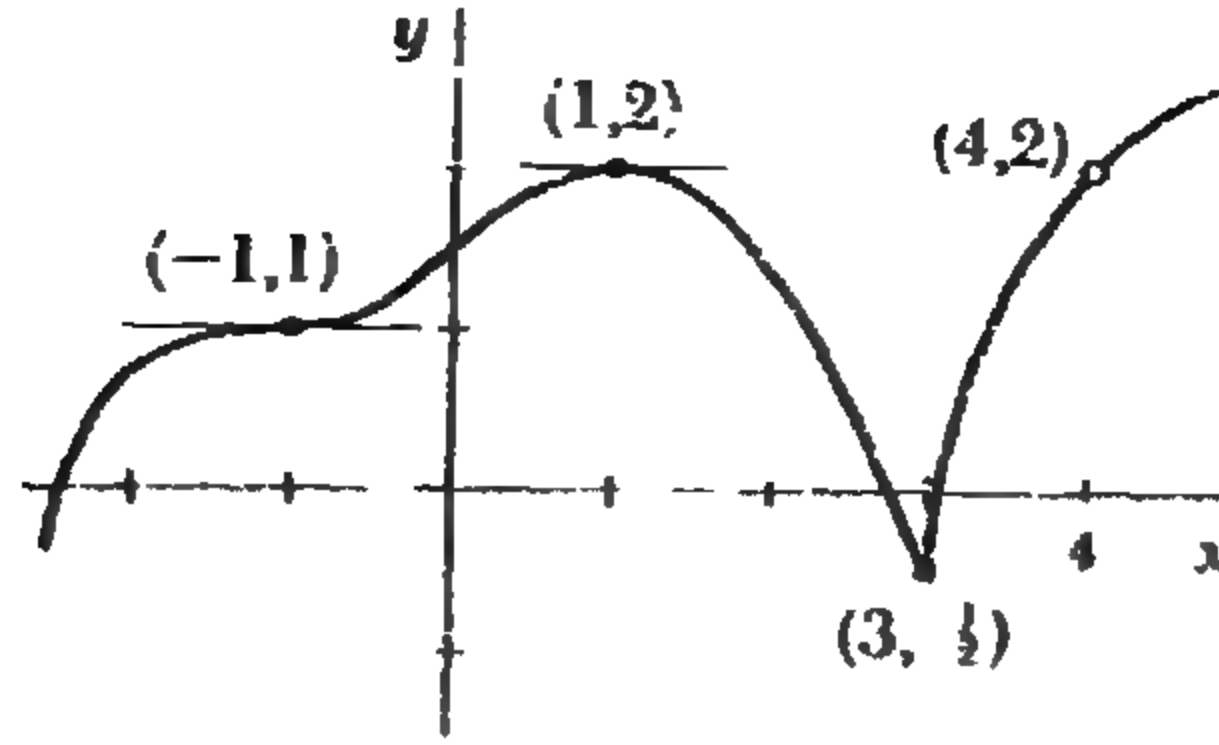
هذا يعني أن ميل الوتر PQ يكون موجباً أو صفراً ، ومن ثم

$$f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

فالبرهان للقيمة الصغرى مماثل .

العدد c يسمى عدداً حرجياً للدالة f إذا كان f معرفة عند c ، (٢) $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ لا توجد . فمثلاً ، عدد حرج للدالة $f(x) = x^2 - 1$ في شكل ٤ - ١ ، ٢ هو عدد حرج للدالة h في شكل ٤ - ٣ . الدالة المخططة في شكل ٤ - ٥ لها ٣ و ١ - ١ - أعداد حرجة ، إذ أن :

حرجا ، لأن f غير معرفة هناك . النظرية الآتية أساسية .
 $f'(-1) = f'(1) = 0$ و $f'(3)$ لا توجد . ورغم أن $f'(4)$ غير موجودة إلا أن 4 ليست عددا

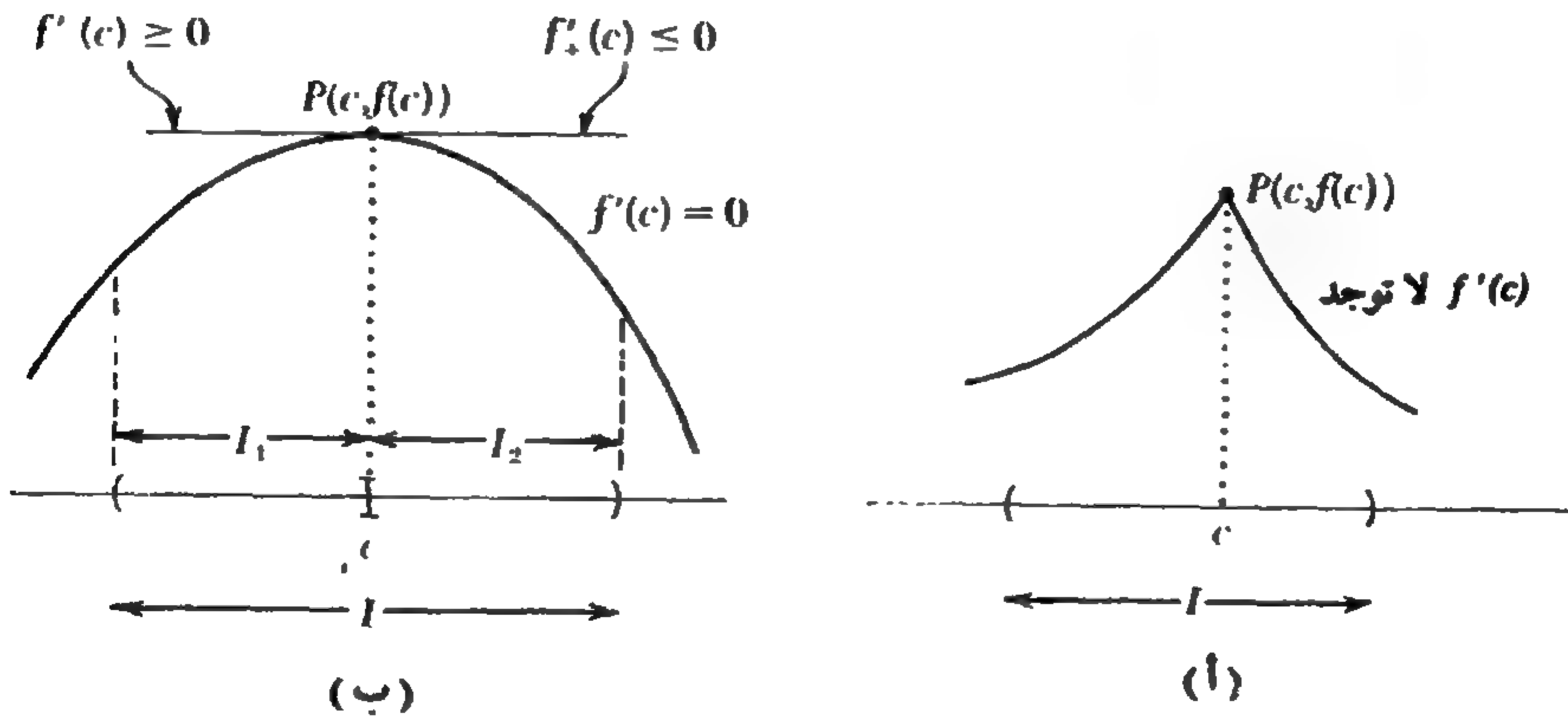


شكل ٤-٥

-1, 1, 3 أعداد حرجة لكن 4 ليست كذلك .

٤-٣ نظرية . لتكن f دالة معرفة في فترة I ، قد تكون لانهائية . أى قيمة قصوى للدالة f في الفترة I تحدث داخل الفترة I يمكن حدوثها فقط عند عدد حرج .

البرهان . لتكن f لها قيمة قصوى عند العدد c داخل الفترة I ولنفرض أن القيمة القصوى هي قيمة عظمى . إذا كانت $f'(c)$ لا توجد ، فإن c هو عدد حرج للدالة f بالتعريف (شكل ٤-٦ (أ)) . لنفرض الآن أن $f'(c)$ توجد . العدد c يقسم الفترة I إلى فترتين جزئيتين I_1 و I_2 حيث c النقطة المشتركة بينهما (شكل ٤-٦ (ب))



شكل ٤-٦

عند قيمة قصوى داخلية إما $f'(c)$ لا توجد وإما $f'(c) = 0$

القيمتان العظميان للدالة f في الفترة الجزئية I_1 وفي الفترة الجزئية I_2 كلاهما يحدثان عند c . بما أن c هي النقطة الطرفية اليمنى للفترة الجزئية I_1 والنقطة الطرفية اليسرى للفترة الجزئية I_2 ، فإن التمهيدية السابقة تعطى $f'_+(c) \leq 0$ و $f'_-(c) \geq 0$ لكن $f'_-(c) = f'(c) = f'_+(c)$ إذن $f'(c) = 0$

وتكون c عددا حرجا . البرهان مماثل في حالة ما إذا كانت القيمة القصوى هي قيمة صغرى .

هذه النظرية لاتقل أن الدالة f يجب أن يكون لها قيمة قصوى ، إنما هي تخبرنا فقط أين تحدث القيم القصوى الداخلية ان حدثت . لاتوجد طريقة عامة لتعيين ما إذا كانت الدالة لها قيمة قصوى في فترة ما ، لكن النظرية الآتية تجيب عن السؤال للعائلة الكبرى للدوال المتصلة .

٤ - ٤ نظرية . إذا كانت الدالة f متصلة في الفترة المقفلة المحدودة $[a, b]$ ، فإنه يكون لها قيمة عظمى وقيمة صغرى في الفترة . أى أنه ، يوجد عدنان u و v في $[a, b]$ بحيث أن :

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \text{ لجميع } x \text{ في } [a, b] .$$

إذا أخذنا في الاعتبار أن الشكل البياني لدالة متصلة هو شكل بدون ثقب أو قفزات ، فإن النظرية تكون منطقيا واضحا . إذا تحركنا على المنحنى من $(a, f(a))$ إلى $(b, f(b))$ فإنه يجب أن توجد على الأقل نقطة عليا واحدة ونقطة سفلى واحدة على المنحنى . بالرغم من أن النظرية تبدو واضحة إلا أن البرهان الذى يغطى جميع الدوال ليس سهلا ، وسنفترض صحة النظرية . شكلا ٤ - ٣ ، ٤ - ٢ يوضحان أنه إذا كانت الدالة منفصلة أو كانت الفترة غير مقفلة ، فقد لاتوجد قيمة عظمى . يربط النظريتين ٤ - ٣ ، ٤ - ٤ يكون لدينا النظرية الآتية :

٤ - ٥ . نظرية الدالة المتصلة في فترة محدودة مقفلة لها قيمتان عظمى وصغرى في الفترة . هاتان القيمتان القصويتان يمكن حدوثهما فقط عند الاعداد الحرجة داخل الفترة أو عند النقطتين الطرفيتين .

البرهان . من نظرية ٤ - ٤ ، الدالة f لها قيمتان عظمى وصغرى في الفترة . تلك التى لاتحدث عند نقطة طرفية يجب أن تحدث داخل الفترة ، ومن نظرية ٤ - ٣ عند عدد حرج هناك .

هذه النظرية تحدد بدقة احتمالات مواقع القيم القصوى للدالة المتصلة في فترة محدودة مقفلة . لايجادها ، نحتاج فقط إلى البحث عن الأعداد الحرجة ، وهى عادة عددها محدود ، وأن نلتفت أيضا الى النقطتين الطرفيتين . فى مثال واقعى يمكننا إتباع الخطوات الآتية . نفرض أن الفترة المقفلة هي $[a, b]$ وأن f هي الدالة . نوجد جميع الأعداد الحرجة c_1, c_2, \dots, c_n الواقعة داخل الفترة $[a, b]$. القيمتان العظمى والصغرى للدالة f في الفترة $[a, b]$ يمكن حدوثهما فقط عند عدد أو أكثر من هذه الأعداد الحرجة أو عند a أو عند b . نحسب

$$f(a), f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_n), f(b)$$

القيمة الأكبر تكون القيمة العظمى والأقل هي القيمة الصغرى . اذا لم توجد أعداد حرجة ، فالقيمة العظمى يجب حدوثها عند احدى النقطتين الطرفيتين والقيمة الصغرى عند الأخرى . فائدة هذه

الطريقة تكون محدودة اذا كان هنالك أعداد حرجة كثيرة ، لكن رغم ذلك ، عمليا ، يمكننا عادة ايجاد أكبر وأصغر $f(c)$ وبالتالي تعيين القيمتين العظمى والصغرى .

مثال ١ . أوجد القيمتين العظمى والصغرى فى الفترة $[-1, 3]$ للدالة f المعرفة بـ $f(x) = x^4 - 8x^2$.

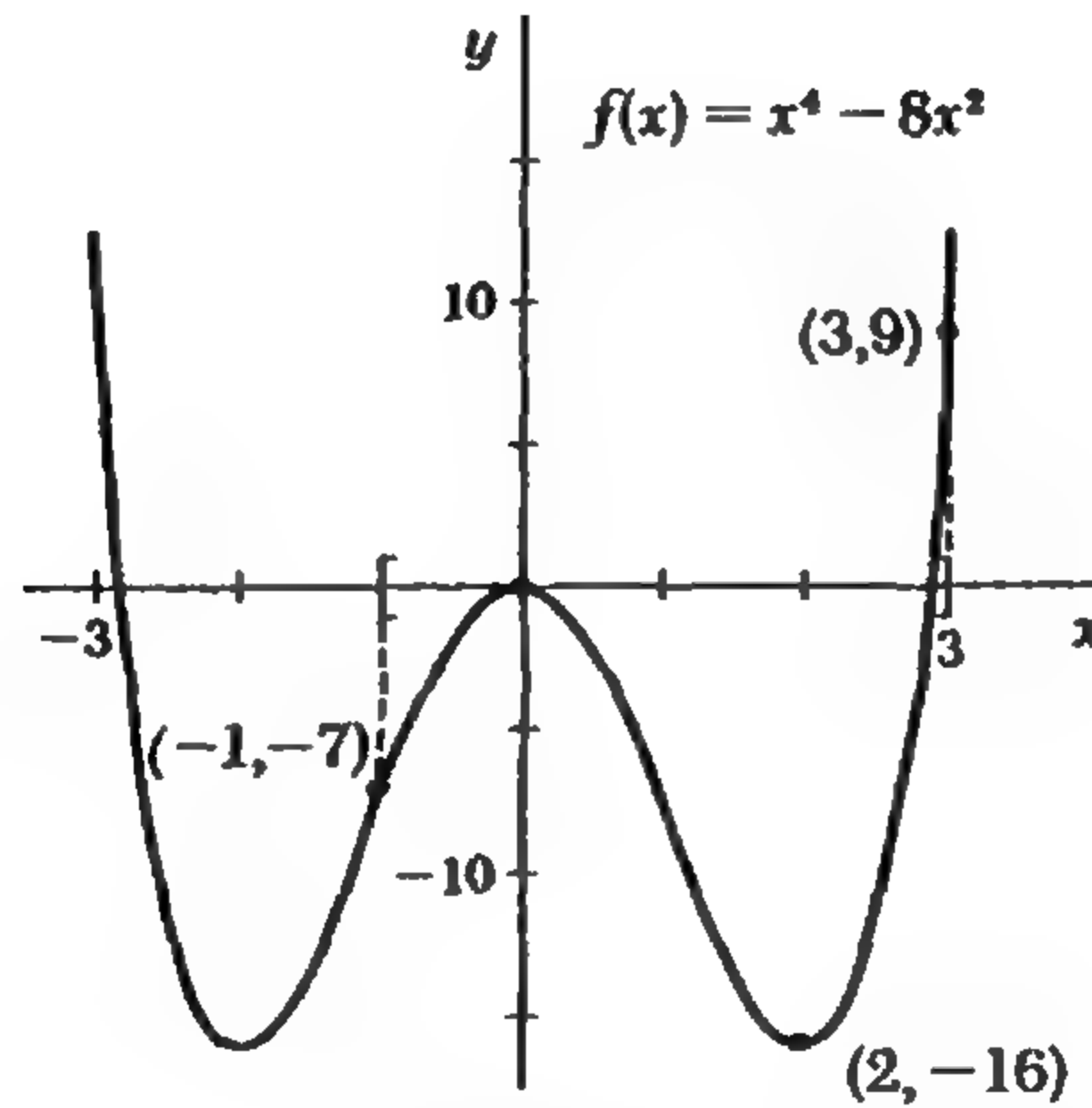
هذه الدالة ، دالة كثيرة حدود ، فهي متصلة فى كل مكان ولذلك لها قيمتان عظمى وصغرى فى الفترة . لايجاد الأعداد الحرجة ، نعبر عن المشتقة فى صورة حاصل ضرب

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x+2)(x-2)$$

المشتقة موجودة لجميع قيم x ، وعليه فالأعداد الحرجة للدالة f هى فقط قيم x حيث $f'(x) = 0$.
فهى $2, 0, -2$ [نظرية ١ - ١٩ تؤكد أنه لا توجد أصفار أخرى للمشتقة $f'(x)$]. نحسب قيم الدالة f عند الأعداد الحرجة الواقعة داخل الفترة $[-1, 3]$ وعند النقطتين الطرفيتين :

$$f(-1) = -7, \quad f(0) = 0, \quad f(2) = -16, \quad f(3) = 9$$

القيمتان العظمى والصغرى للدالة f فى الفترة $[-1, 3]$ هما أكبر وأصغر هذه القيم . القيمة العظمى هى ٩ وتحدث عند ٣ . القيمة الصغرى هى -١٦ وتحدث عند ٢ . الشكل البياني للدالة f مخطط فى شكل ٤ - ٧ ، حيث المقياس على المحور الصادى مصغر لتوضيح السمة العامة للشكل البياني .



شكل ٤ - ٧

القيمتان العظمى والصغرى للدالة f فى الفترة $[-1, 3]$ هما ٩ و -١٦ .

مثال ٢ . أوجد القيمتين العظمى والصغرى فى الفترة $[-1, 3]$ للدالة g المعرفة بـ $g(x) = x^{2/3}(x-2)^2$.

بما أن $g(x)$ دالة جبرية معرفة لجميع قيم x ، فهي متصلة في كل مكان بنظرية ٢ - ٢٠ ، واذن لها قيمتان عظمى وصغرى في الفترة $[-1, 3]$. فمن التعبير للمشتقة

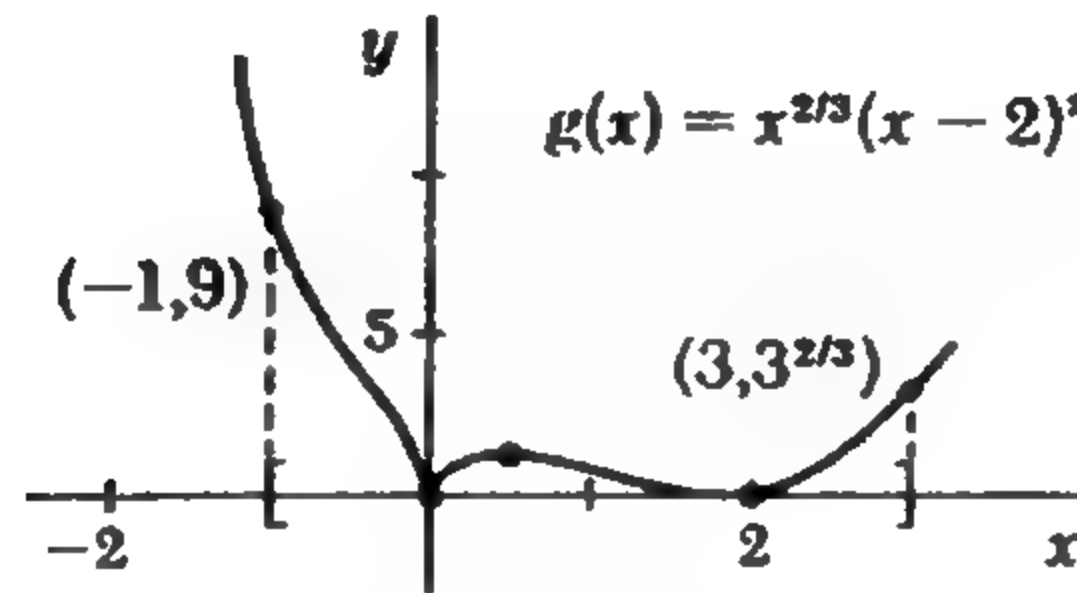
$$(1) \quad g'(x) = \frac{4(x-2)(2x-1)}{3x^{1/3}},$$

نرى أن $g'(x) = 0$ إذا كانت $x = \frac{1}{2}$ أو $x = 2$. المشتقة معبر عنها في (١) ككسر ، والبسط والمقام للكسر معرفان لجميع قيم x . واذن الكسر معرف لجميع قيم x ماعدا تلك التي عندها يكون المقام صفراً . أي أن ، $g'(x)$ توجد لجميع قيم x ماعدا $x = 0$. الاعداد الحرجة للدالة g هي $\frac{1}{2}$ و 2 و 0 . بما أن

$$g(-1) = 9, \quad g(0) = 0, \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2^{8/3}} \approx 1.42,$$

$$g(2) = 0, \quad g(3) = 3^{2/3} \approx 2.08,$$

القيمة العظمى للدالة g هي 9 وتحدث عند -1 . القيمة الصغرى هي صفر وتحدث عند 0 وأيضاً عند 2 . الشكل البياني للدالة مخطط في شكل ٤ - ٨ .



شكل ٤ - ٨

القيمة العظمى للدالة g في الفترة $[-1, 3]$ تحدث عند -1 والقيمة الصغرى تحدث عند 0 وعند 2 .

إيجاد الاعداد الحرجة يكون سهلاً إذا عبرنا عن المشتقة في صورة حاصل ضرب أو في صورة خارج قسمة بسيط ومقام في صورة عوامل .

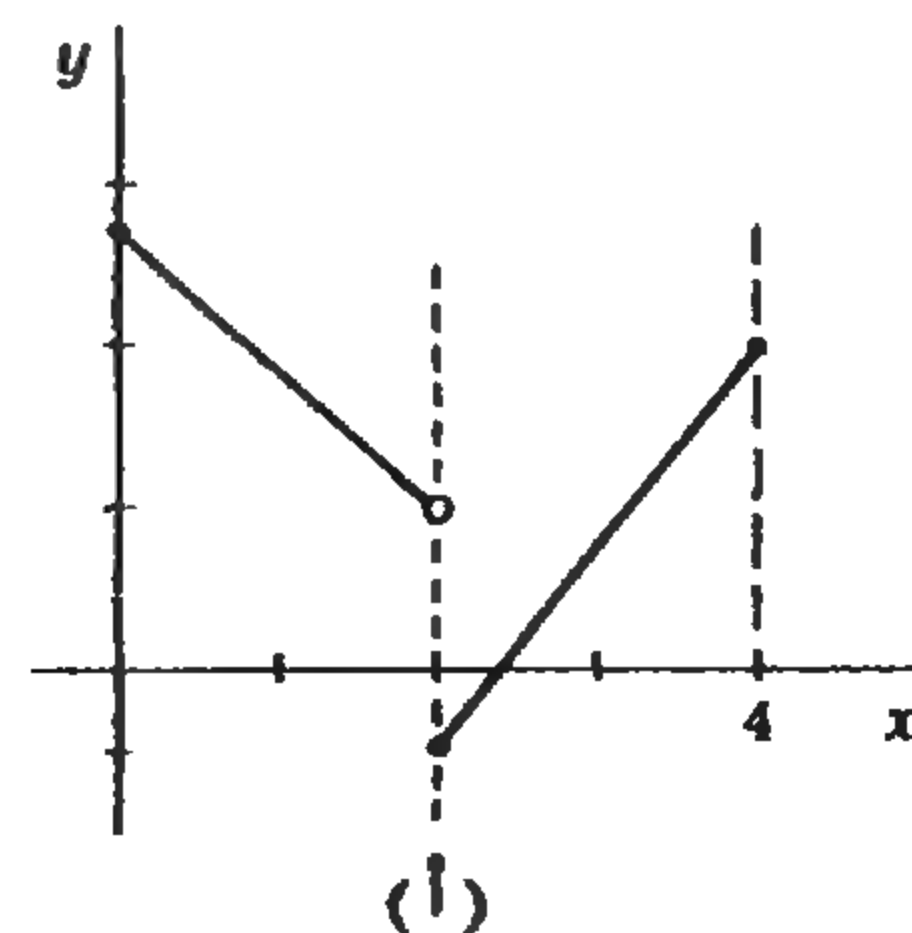
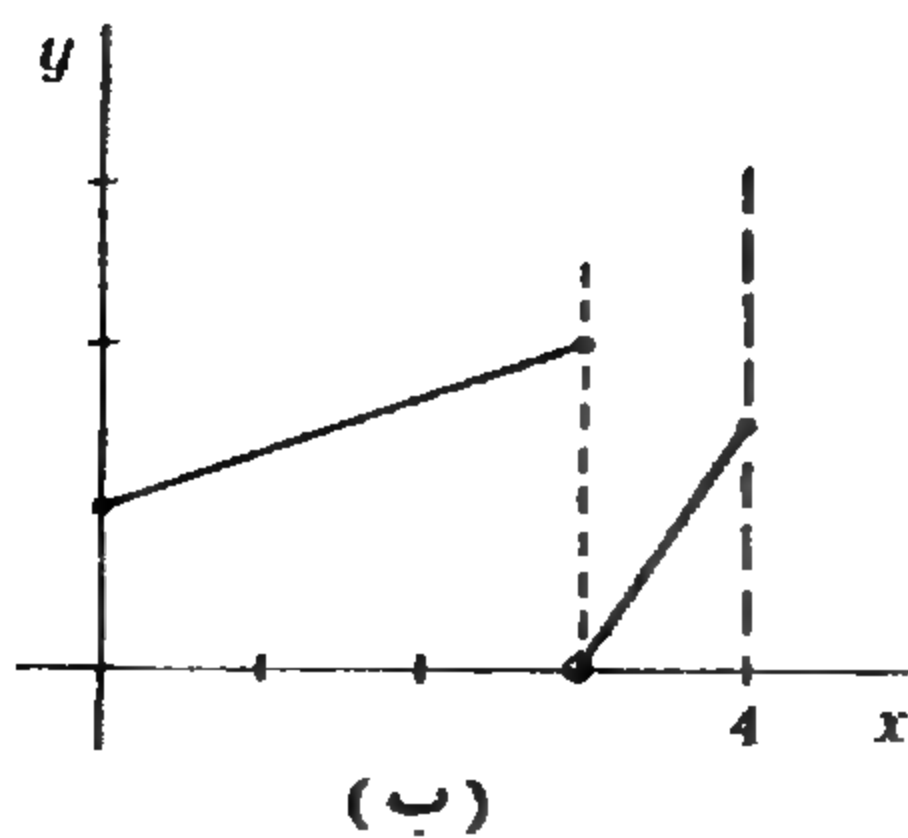
لا يوجد ضمان عام لوجود قيم قصوى للدوال المتصلة في فترة مفتوحة يقارن مع ذلك الذي للفترة المغلقة . تحت شروط معينة يجب أن توجد قيمة قصوى لكن نؤجل دراسة ذلك الى أن نحتاج اليه في بند ٤ - ٩ .

مسائل

عين ما إذا كانت الدالة لها قيمتان عظمى وصغرى في الفترة (الفترات) المعطاة . وإذا كان كذلك فأوجد أين تحدثان .

- ١ - $f(x) = x^2 - 4x - 1$ ، (أ) $[-3, 4]$ ، (ب) $[-3, 1]$ ، ٢ - $f(x) = 1 - x^2/2$; $[-2, 4]$.
٣ - $g(x) = 3x + 2$ ، (أ) $[0, 5]$ ، (ب) $(0, 5)$ ، (ج) $(-\infty, \infty)$

- $F(x) = 4; [0,3]$. - ٦ (ب) $(-2, 2)$ ، $[-2, 2]$ (أ) ، $f(z) = z^3 - ٤$
 $[-2, 2]$ (د) ، $[-4, -2]$ (ج) ، $[1, 5]$ (ب) ، $[1, 5]$ (أ) ، $h(x) = 1/x - ٦$
 $f(x) = 3 - 5x - x^2; (-\infty, \infty)$. - ٨ $f(u) = u^2 + 6u; [-5, -1]$. - ٧
 $[-5, 2)$ (ج) ، $(-5, 2)$ (ب) ، $[-5, 2]$ (أ) ، $f(t) = -3t - t^2 - ٩$
 $(0, \infty)$ (ب) ، $[1/2, 3]$ (أ) ، $f(r) = r + 1/r - ١٠$
 $[-8, 2]$ (ب) ، $[-1, 2]$ (أ) ، $u(x) = x^3 + 6x^2 - ١١$
 $g(z) = 2z^3 - 9z^2 + 12z; [3/4, 4]$ - ١٣ $s(x) = x^2 - 1/6 x^3; [1, 5]$ - ١٢
 $f(x) = -3x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 1; [-3, 2]$ - ١٥ $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 2x - 3; [-2, 2]$ - ١٤
 $f(t) = |t|; [-3, 3]$. - ١٧ $f(x) = 1/5 x^5 - 3x^3; [-4, 3]$ - ١٦
 $V(x) = x(a - 2x)^2, a > 0; [0, a/2]$ - ١٩ $g(x) = \sqrt{x-1}; [1, 5]$ - ١٨
 $G(y) = \frac{y-1}{y^2+8}; [-3, 6]$ - ٢١ $H(x) = (x^2 - 9)^2; [-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$ - ٢٠
 $g(s) = \begin{cases} s^2, & s < 2, \\ -1/2(s-10), & s \geq 2; \end{cases} (-1, 9)$ - ٢٣ $f(t) = \begin{cases} -t-2, & t < 0, \\ 2t+1, & t \geq 0; \end{cases} [-3, 1]$ - ٢٢
 $f(x) = x^{2/3}; [-3, 3]$ - ٢٥ $g(x) = [x]; (1, 2]$ - ٢٤
 $f(x) = -\sqrt{16-x^2}; [0, 4]$ - ٢٧ $f(x) = \begin{cases} 1/x^2, & x \neq 0, \\ -2, & x = 0; \end{cases} [-3, 3]$ - ٢٦
 $f(x) = (x+1)^{1/3} - 2; [-3, 0]$ - ٢٩ $h(t) = \sin t; (-\infty, \infty)$ 28
 $h(x) = x^{1/3}(x-4)^2; [0, 5]$ - ٣١ $A(x) = 2x\sqrt{r^2-x^2}; [0, r]$ - ٣٠
٣٢ - الدالتان المخططتان في شكل ٤ - ٩ منفصلتان في الفترة المقفلة $[0, 4]$. هل لهما قيمتان
عظمى وصغرى في الفترة ، وإذا كان كذلك ، فأين تحدث هاتان القيمتان ؟
٣٣ - أين في الفترة $[2, 5]$ يكون ميل المنحنى $y = -x^3 + 9x^2 + 2$ أكبر ما يمكن ؟ أصغر
ما يمكن ؟



شكل ٤ - ٩

٣٤- أوجد القيمتين العظمى والصغرى لميل المنحنى $y = x^3 + 6x^2$ في الفترة $[-5, 0]$. في الفترة $(-5, 0)$.

٣٥- مستطيل له رأسان على المحور السيني والرأسان الآخران فوق المحور السيني على القطع المكافئ $y = 25 - x^2$. أوجد تعبيراً لمساحة المستطيل بدلالة الاحداثي السيني للرأس العلوي الأيمن . فوق أي فترة يمكن أن تتغير x ؟ (أجز الحالتين النهائييتين التي فيهما يكون المستطيل قطعة من خط مستقيم بمساحة صفر) . هل توجد قيمة عظمى لدالة المساحة في هذه الفترة ؟ . إذا كان كذلك ، فأوجدتها .

٣٦- أوجد تعبيراً بدلالة x للمسافة بين النقطة $P(x,y)$ على الخط المستقيم $x + 2y - 4 = 0$ والنقطة $(0,1)$. هل دالة المسافة هذه لها قيمتان عظمى وصغرى في الفترة $[-1, 3]$ ؟ . إذا كان كذلك ، فأوجدتهما .

٣٧- شروط النظرية ٤ - ٤ تكفي لوجود القيم القصوى في فترة محدودة . وضع أن الشروط ليست ضرورية بإعطاء أمثلة حيث النتيجة تكون صحيحة رغم أن الدالة تكون غير متصلة أو الفترة لا تكون مغلقة .

٣٨- أثبت أن الدالة لا يمكن أن يكون لها قيمتان عظميان في فترة . أو بمعنى آخر ، لا يمكن أن توجد أكثر من قيمة عظمى واحدة ، إلا إنها يمكن أن تحدث عند أكثر من عدد واحد . وضع بياناً مثل هذا الحدث المتكرر .

٣٩- اذكر وبرهن منطوق الجزء الثاني من التمهيدية ٤ - ٢ الخاص بإشارة المشتقة للدالة التي قيمتها الصغرى تحدث عن نقطة طرفية .

٤٠- أكمل برهان النظرية ٤ - ٣ باثبات أنه إذا كانت القيمة القصوى للدالة f عند c هي قيمة صغرى ، فإن c تكون عدداً حرجاً .

٤١- أين في برهان النظرية ٤ - ٣ استخدمنا الحقيقة أن c هي نقطة داخلية للفترة I ؟

٤٢- رغم أنه من الواضح منطقياً ، إلا أننا واقعياً لم نبرهن أن الدالة $f(x) = x^2 - 1$ (شكل

٤ - ١) ليس لها قيمة عظمى في الفترة $(-1, 2)$. كل ما أثبتناه هو أن 3 لا يمكن أن

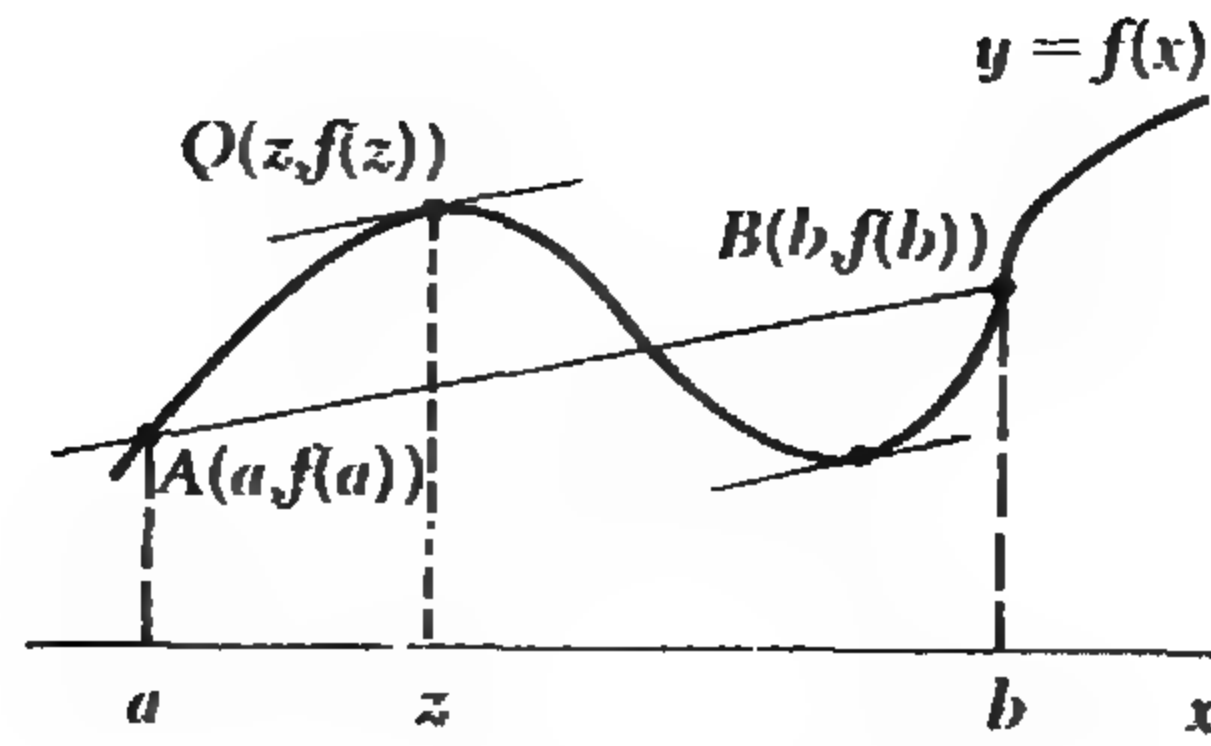
تكون القيمة العظمى . أثبت أن f ليس لها قيمة عظمى باثبات أن لكل (v) في $(-1, 2)$

توجد x في $(-1, 2)$ حيث $f(x) > f(v)$.

٤ - ٢

نظرية القيمة المتوسطة

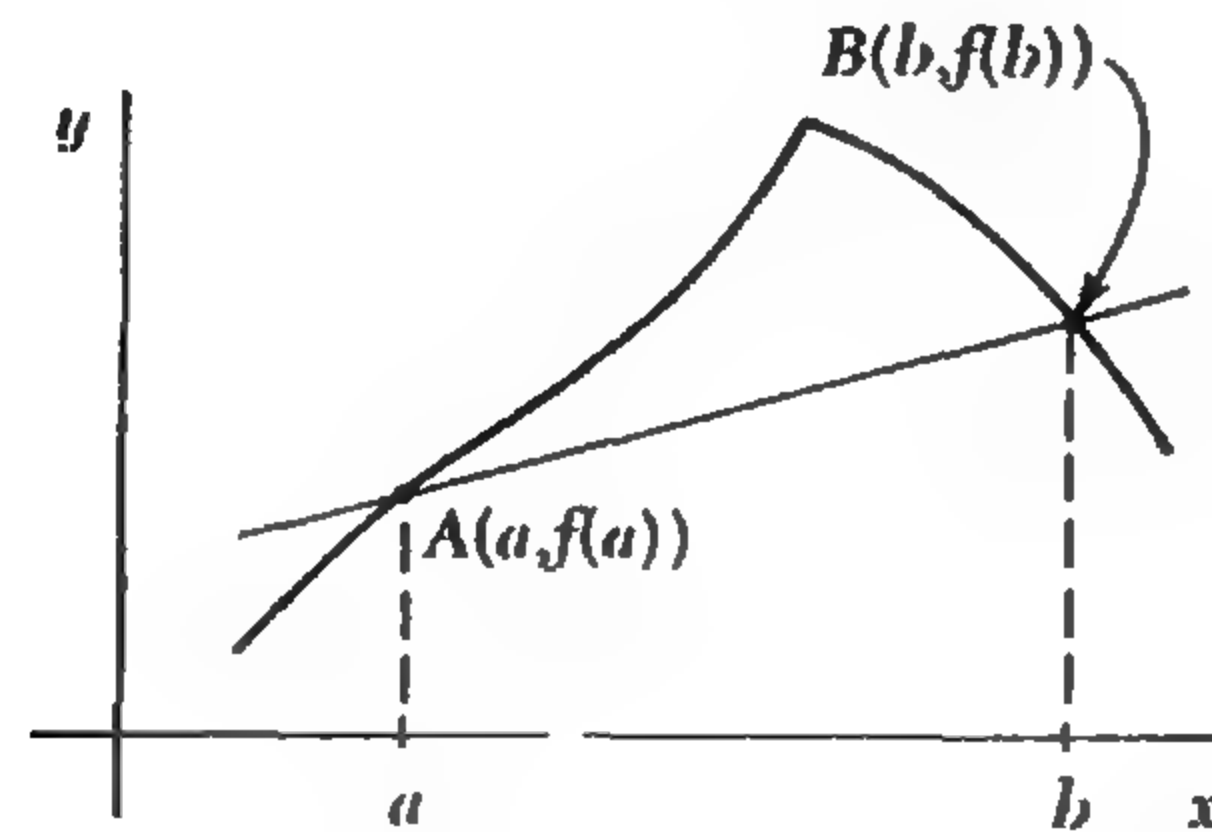
لتكن $A(a, f(a))$ و $B(b, f(b))$ أي نقطتين على الشكل البياني لدالة f (شكل ٤ - ١٠) . من الواضح أنه يجب أن توجد نقطة ما $Q(z, f(z))$ على الشكل البياني بين A و B حيث المماس يكون موازياً للخط المستقيم الواصل بين A و B . للشكل البياني في شكل ٤ - ١٠ ، توجد امكانيتان للنقطة Q .



شكل ٤ - ١٠

نظرية القيمة المتوسطة : عند نقطة ما بين A و B على منحنى
سلس يكون المماس موازياً للخط المستقيم AB .

رغم أنه يبدو واضحاً أن مثل هذه النقطة توجد لكل منحنى ، إلا أنه يجب ألا نتسرع كثيراً .
المنحنى في الشكل ٤ - ١١ ليس له مماس موازٍ للخط المستقيم AB . هذا يوضح الخطر في
الاستدلال من الصور . في نظرنا إلى نظرية ما نكون ميالين للتفكير فقط في الدوال البسيطة ،
والنظرية التي تكون صحيحة لهذه الدوال قد لا تكون صحيحة أيضاً للدوال الأكثر تعقيداً والتي لا ترد
بسرعة إلى الذاكرة . لكي نتأكد من نتائجنا فأننا نعطي براهين لها . الصعوبة في شكل ٤ - ١١
يمكن أن تعزى إلى عدم وجود المشتقة عند عدد ما بين a و b . بوجود المشتقة في كل مكان يجب
أن يوجد مماس مواز . النظرية الآتية تنص على هذا جبرياً .



شكل ٤ - ١١

إذا كانت f غير قابلة للتفاضل في الفترة (a, b) فإن المنحنى قد
يفشل في أن يكون له مماس يوازي AB .

٤ - ٦ نظرية القيمة المتوسطة . إذا كانت الدالة f قابلة للتفاضل داخل الفترة $[a, b]$ ومتصلة يميناً
عند a ومتصلة يساراً عند b ، فإنه توجد z في الفترة (a, b) بحيث أن

$$(1) \quad f'(z) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

هذه يمكن كتابتها على الصورة

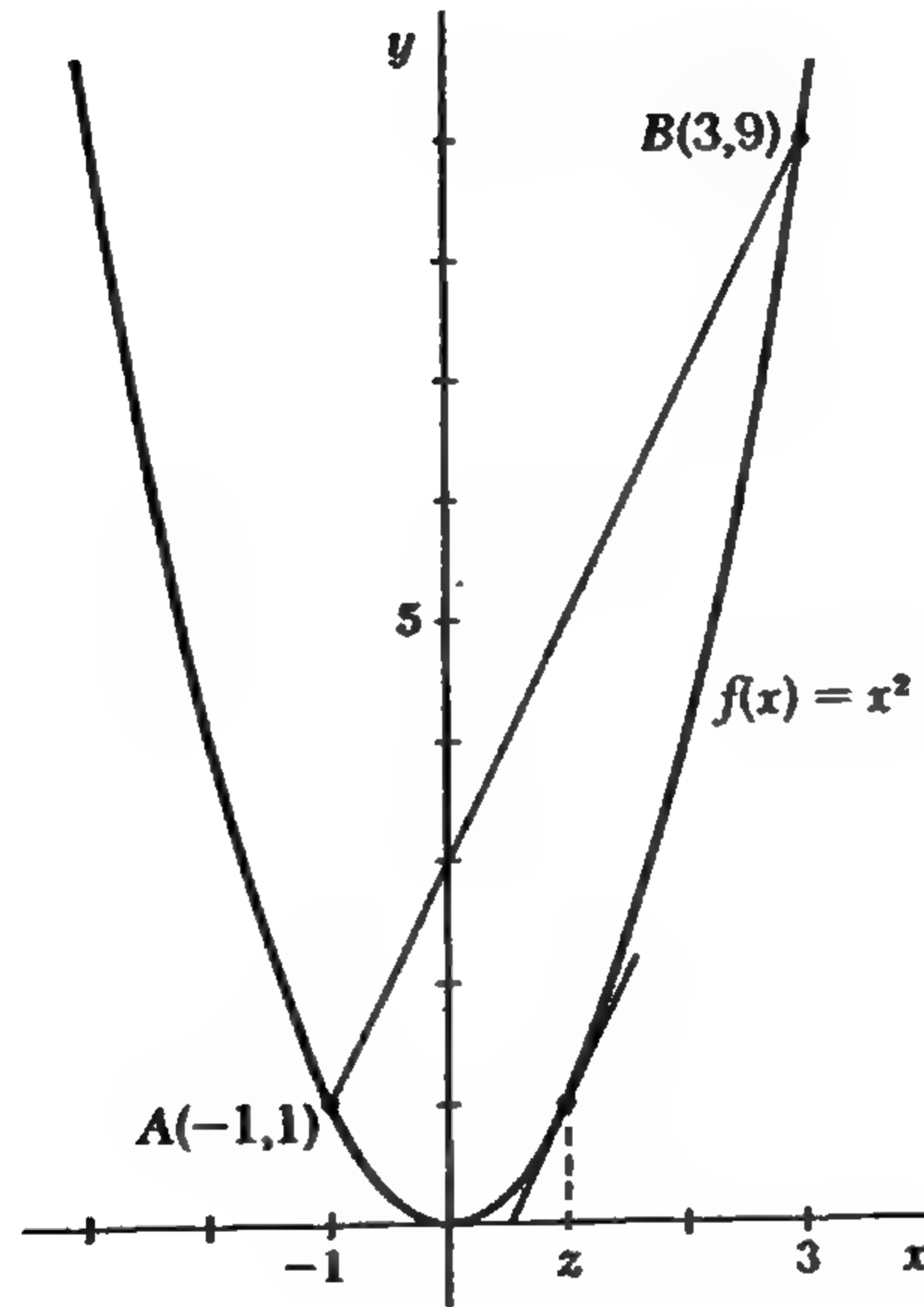
$$(٢) \quad f(b) - f(a) = (b - a)f'(z)$$

الطرف الأيمن من (١) هو ميل الخط المستقيم الواصل بين $A(a, f(a))$ و $B(b, f(b))$ في شكل ٤ - ١٠ ، والطرف الأيسر هو ميل المماس عند $(z, f(z))$. هندسيا ، النظرية تنص على أنه توجد نقطة ما على المنحنى بين A و B حيث المماس يوازي AB . مع أن النظرية لها هذا التفسير الهندسي ، فإن استعمالهما الغالب هو في التحليل ، بالصورة (١) أو (٢) . لاحظ أن نقطة z يمكن إيجادها ختما بين a, b .

كتوضيح للنظرية ، سنوجد z للدالة $f(x) = x^2$ ، حيث $b = 3$ و $a = -1$ (شكل ٤ - ١٢) . هنا $f'(x) = 2x$ ويكون

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{9 - 1}{3 + 1} = 2$$

واذن $z = 1$



شكل ٤ - ١٢
عند $(1, 1)$ المماس يوازي AB .

برهان نظرية القيمة المتوسطة . ضع

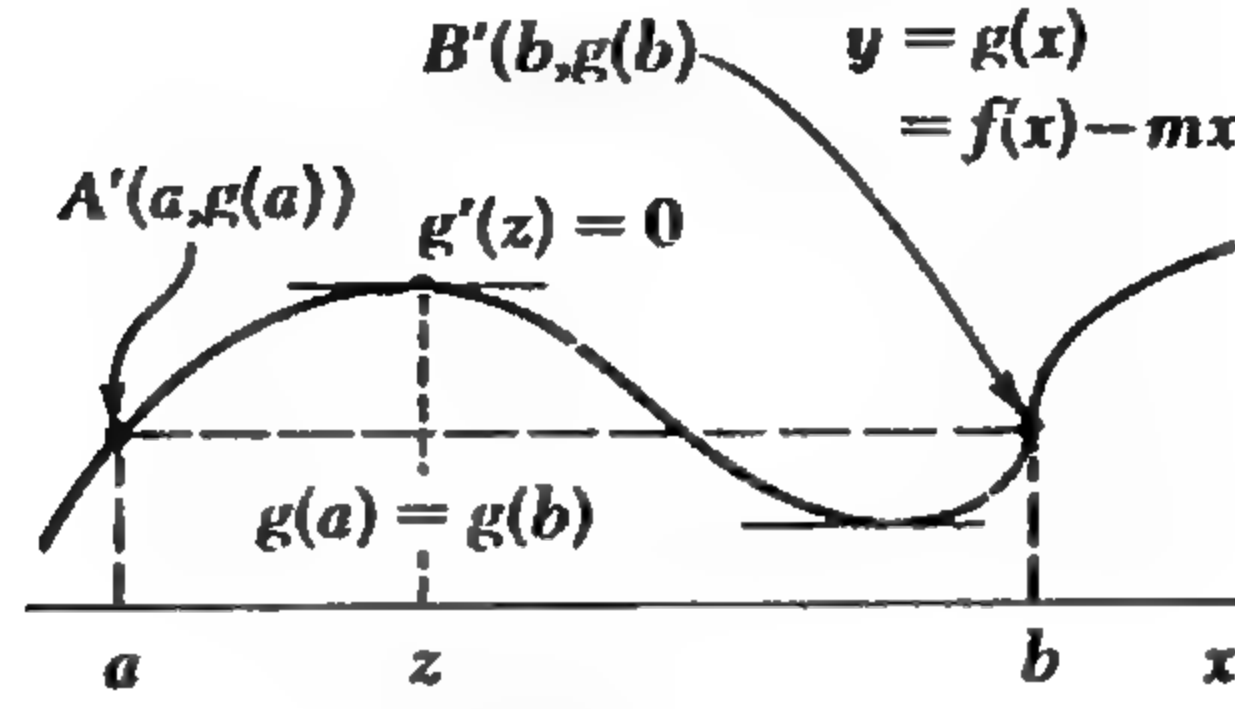
$$(٣) \quad m_{\text{secant}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

من الدالة f والعلم m كون دالة جديدة g بالتعريف

$$g(x) = f(x) - mx$$

للدالة $f(x) = x^2$ ، $g(x) = x^2 - 2x$ ، $m = 2$ الشكل البياني للدالة g للدالة f الموضحة في شكل ٤ - ١٠ مخطط في الشكل ٤ - ١٣ . المعادلة (٣) يمكن كتابتها على الصورة

$$f(a) - ma = f(b) - mb$$



شكل ٤ - ١٣

التي منها نرى أن $g(a) = g(b)$. أي أن النقطتين A' و B' في شكل ٤ - ١٣ تكونان على نفس المسافة فوق المحور السيني . أيضا

$$(٤) \quad g'(x) = f'(x) - m$$

لجميع x في (a, b) . وحيث أن g حاصل جمع دوال متصلة ، فهي متصلة في $[a, b]$ ، واذن بنظرية ٤ - ٤ يكون لها قيمتان عظمى وصغرى في $[a, b]$. إذا كانت إحدى هاتين القيمتين القصويتين تحدث داخل الفترة لتكن z هي عدد تحدث عنده . (إذا كانت كلاهما تحدث داخل الفترة ، فيمكن اختيار z لأي منهما) . بنظرية ٤ - ٣ ، z يجب أن تكون عددا حرجا حيث $g'(z) = 0$. إذا كان لا تحدث قيمة قصوى داخل الفترة $[a, b]$ ، فإن القيمة العظمى يجب حدوثها عند إحدى النقطتين الطرفيتين والقيمة الصغرى عند الأخرى . بما أن $g(a) = g(b)$ ، فإن هذا يدل على أن $g(x) = g(a)$ ، مقدار ثابت لجميع x في (a, b) ، ومن ثم فإن $g'(x) = 0$ لجميع قيم x هذه . أي أن في كلتا الحالتين توجد z في (a, b) بحيث أن $g'(z) = 0$. من المعادلة (٤) يكون لهذه النقطة z

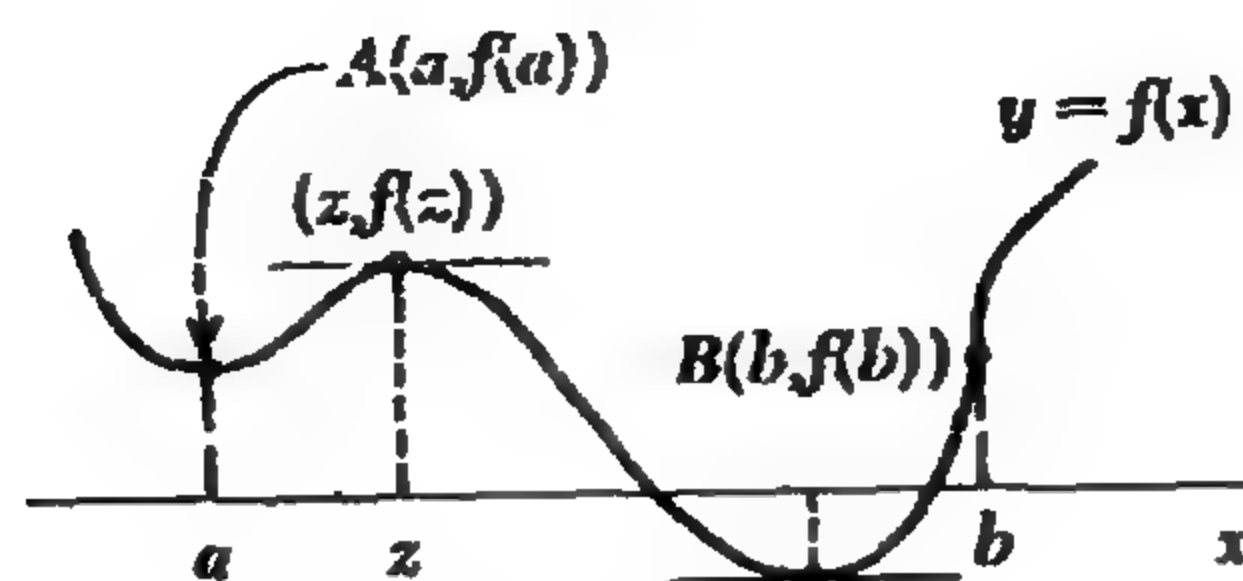
$$f'(z) = m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

وهذا يثبت النظرية .

الحالة الخاصة لنظرية القيمة المتوسطة التي فيها A و B تكونان على نفس المسافة أعلى أو أسفل المحور السيني تعرف بنظرية رول (Rolle) .

٤ - ٧ نظرية رول : إذا كانت الدالة f قابلة للتفاضل داخل الفترة $[a, b]$ ومتصلة يمينا عند a ومتصلة يسارا عند b وكان $f(a) = f(b)$ ، فإنه توجد z في (a, b) حيث $f'(z) = 0$.

النظرية نتيجة مباشرة لنظرية القيمة المتوسطة لأن الطرف الأيمن من (١) يكون الآن صفرا ، هندسيا ، نظرية رول تنص على أنه إذا كانت A و B على نفس المسافة من المحور السيني ، فإن على أى منحنى سلس يصل بين هاتين النقطتين يجب أن توجد نقطة ما حتما بين A و B حيث المماس يكون أفقيا (شكل ٤ - ١٤) .



شكل ٤ - ١٤

نظرية رول : عند نقطة ما بين النقطتين A, B الواقعتين على ارتفاع واحد ، على منحنى سلس يوجد مماس أفقى .

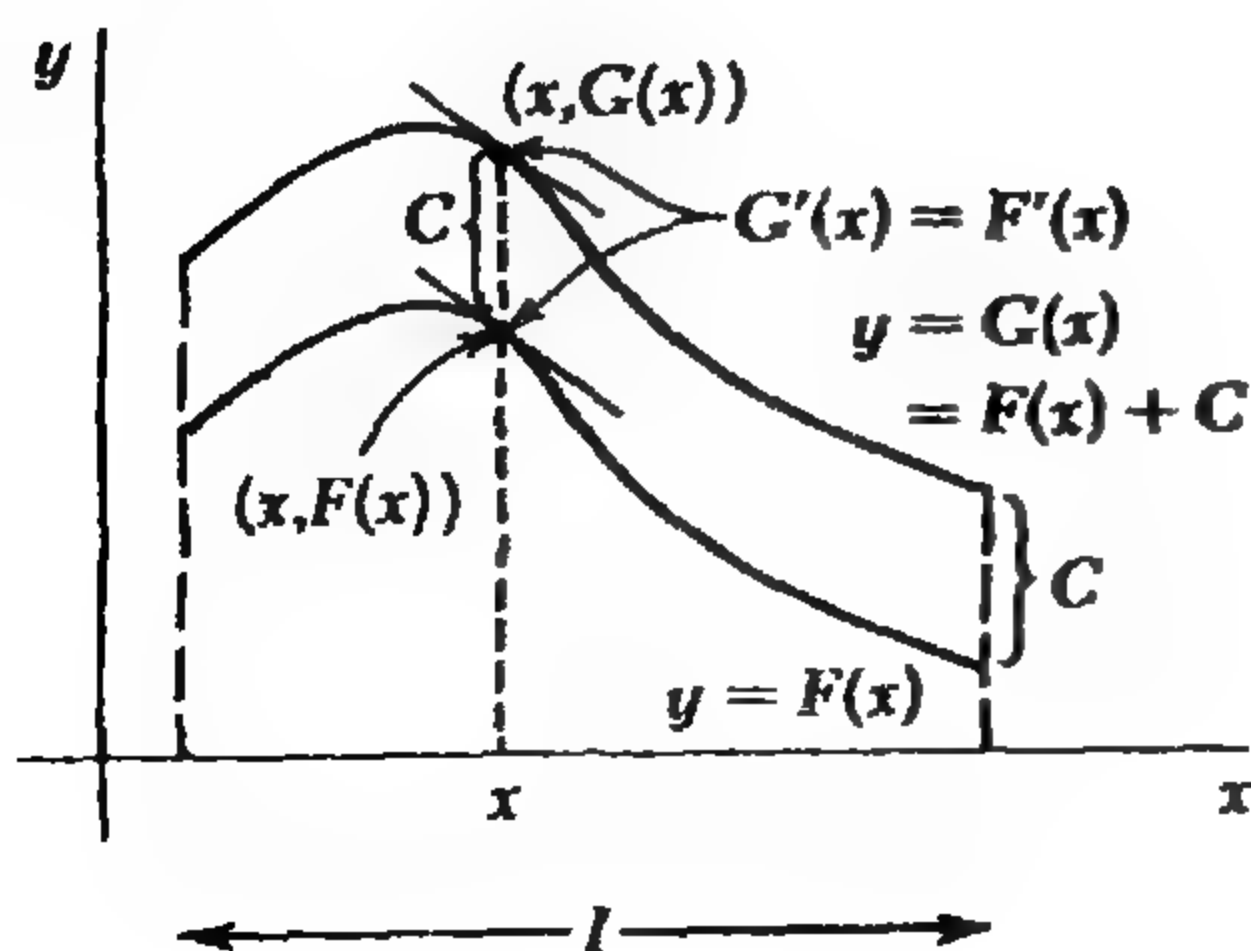
نظرية القيمة المتوسطة هي نظرية وجود ، ومع أن وجود z يكون مضمونا ، فإن البرهان لا يعطى فكرة عن موقعها أكثر من أنها تقع بين a و b . مثل هذه النظرية قد تبدو أنها غير دقيقة للغاية حتى يمكن الاستفادة منها ، لكن هذا ليس كذلك . فهي أداة قيمة فى التحليل وستقتصر كثيرا من براهيننا . أول استخدامنا لها سيكون فى إثبات أن أى دالتين لهما نفس المشتقة يختلفان بمقدار ثابت . هذا يتضمن أنه إذا كانت F معكوسا تفاضليا لدالة f ، فإن أى معكوس تفاضلى آخر للدالة f يمكن ايجاده بإضافة ثابت مناسب الى F .

٤ - ٨ . نظرية إذا كانت F و G دالتين بحيث أن

$$G'(x) = F'(x)$$

لجميع x فى الفترة I ، فإنه يوجد مقدار ثابت C بحيث أن $G(x) = F(x) + C$ لجميع x فى I .

هذا يعنى هندسيا أنه إذا تحرك الشكل البياني للدالة F لأعلى بمقدار C من الوحدات فإنه سينطبق على الشكل البياني للدالة G (شكل ٤ - ١٥) . المنحنيان يكونان متوازيين .

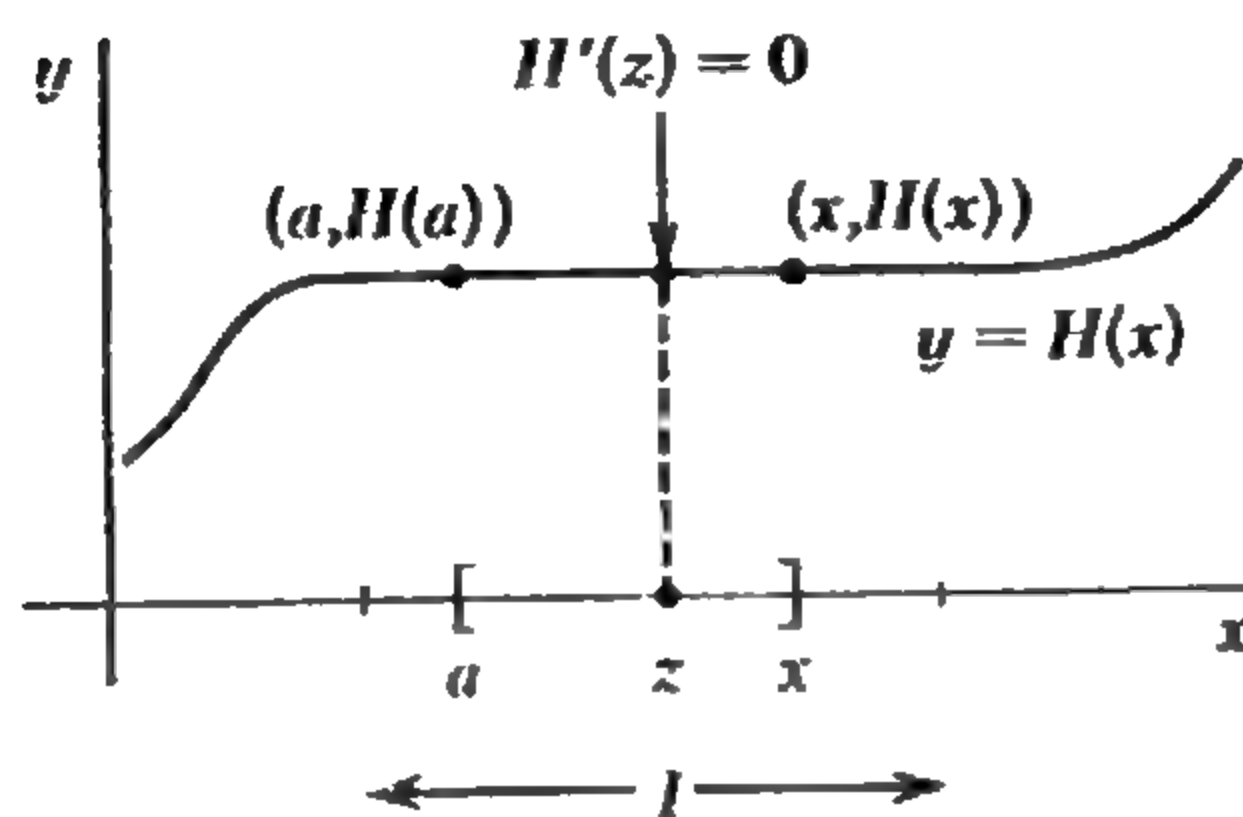


شكل ٤ - ١٥

بما ان $G(x) = F(x) + C$ فالشكل البياني للدالة F عند تحركه الى أعلى مسافة C سينطبق على الشكل البياني للدالة G .

البرهان . سنثبت أولاً أن الثوابت هي الدوال الوحيدة التي مشتقتها تساوى صفراً في كل مكان .
 لتكن H هي دالة مشتقتها $H'(x) = 0$ لجميع x في I . نختار أي عدد ثابت a في I (شكل ٤ - ١٦) .
 لتكن x أي عدد في I غير العدد a . نطبق الآن نظرية القيمة المتوسطة على الدالة H على الفترة الجزئية $[a, x]$ (أو $[x, a]$ إذا كانت $x < a$) . في الصورة المعطاه في (٢) تشير هذه النظرية الى أنه توجد z في (a, x) بحيث أن

$$H(x) - H(a) = (x - a)H'(z).$$



شكل ٤ - ١٦

إذا كانت $H'(x) = 0$ لجميع x في I ، فإن $H(x)$ تكون ثابتة في I .

لكن $H'(z) = 0$ ، واذن $H(x) = H(a)$. بما أن x كانت اختيارية فإن $H(x)$ تكون مقداراً ثابتاً هو $H(a)$ ، لجميع x في I . الآن ، إذا كانت F و G دالتين بحيث أن $G'(x) = F'(x)$ لجميع x في I ، فإن $D[G(x) - F(x)] = 0$. واذن بما أثبتناه جالاً ، يوجد ثابت C بحيث أن $G(x) - F(x) = C$ ، والنظرية تكون أثبتت .

مسائل

تحقق أن الفروض لنظرية رول تكون متحققة للدالة المعطاه والفترة المعطاه وأوجد نقطة z تحقق نتيجة النظرية . هل توجد أكثر من z واحدة ؟

١ - $f(x) = x^2 - 3x; [-1, 4]$ ٢ - $g(x) = x^3 - 12x; [-\sqrt{12}, \sqrt{12}]$

٣ - $f(t) = (t+2)^2(t-3)^2; [-3, 4]$ ٤ - $h(x) = x + \frac{1}{x}; [\frac{1}{2}, 2]$

تحقق أن الفروض لنظرية القيمة المتوسطة تكون متحققة للدالة المعطاه والفترة المعطاه ، وأوجد نقطة z تحقق نتيجة النظرية . هل توجد أكثر من z واحدة ؟

٥ - $f(x) = x^2; [-4, 1]$ ٦ - $u(t) = t^3 - t; [-2, 3]$

٧ - $f(x) = x + 1/x; [\frac{1}{2}, 3]$ ٨ - $g(x) = x^{1/3}; [0, 6]$

٩ - خطط الشكل البياني للدالة $g(x) = |x|$. وضح أن لهذه الدالة والفترة $[-2, 2]$ ، لا توجد z تحقق نتيجة نظرية رول . أي فرض لا يتحقق هنا ؟

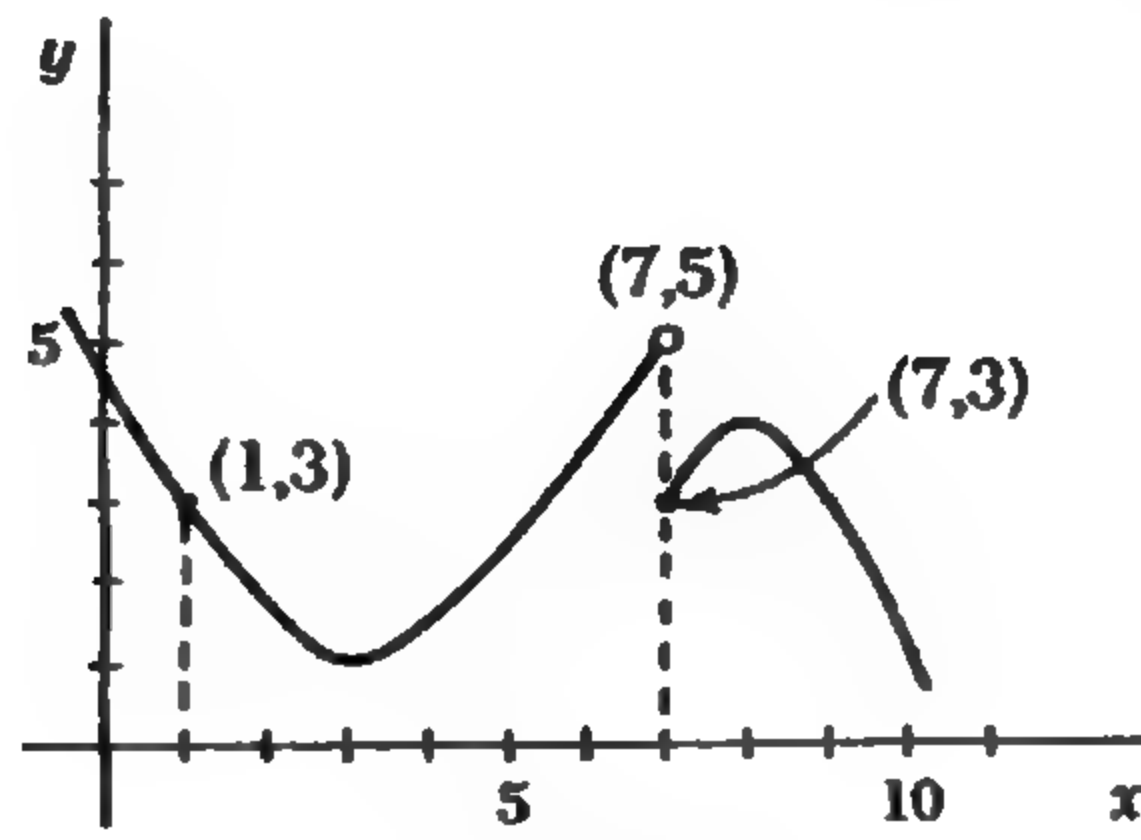
١٠ - الفرض لنظرية رول له ثلاثة شروط على القابلية للتفاضل والاتصال وأن $f(a) = f(b)$ ونسح عن طريق التخطيط أنه إذا حذف أى واحد من هذه الشروط ، فإن منطوق النظرية قد لا يكون صحيحا .

١١ - خطط الشكل البيانى للدالة .

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & t \leq 2, \\ -t + 6, & t > 2. \end{cases}$$

أين فى الفترة $[-1, 5]$ تفشل f فى أن يكون لها مشتقة ؟ اثبت أنه بالرغم من ذلك ، توجد z فى $(-1, 5)$ تحقق النتيجة لنظرية رول . هذا يوضح أن شروط نظرية رول كافية لكن ليست ضرورية لتكون النتيجة صحيحة .

١٢ - الدالة التى شكلها البيانى مخطط فى شكل ٤ - ١٧ تحقق الشروط لنظرية رول للفترة $[1, 7]$ ماعدا الاتصال يسارا عند 7 . اثبت أنه رغم ذلك فإن نتيجة النظرية تكون صحيحة لهذه الدالة بأن توجد بيانيا نقطة مناسبة z .



شكل ٤ - ١٧

١٣ - خطط الشكل البيانى لدالة

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq -1, \\ x^2, & x > -1. \end{cases}$$

أين فى الفترة $[-2, 1]$ تفشل f فى أن يكون لها مشتقة ؟ اثبت أنه بالرغم من ذلك توجد z فى $(-2, 1)$ تحقق النتيجة لنظرية القيمة المتوسطة . هذا يوضح أن الشروط لنظرية القيمة المتوسطة هى شروط كافية لكن ليست ضرورية لتكون النتيجة صحيحة .

١٤ - اثبت أنه للدالة $g(x) = x^{2/3}$ والفترة $[-1, 8]$ لا توجد z تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة . لماذا لا يتعارض ذلك مع النظرية ؟ اثبت أنه توجد z إذا كانت الفترة هى $[-1, 27]$. لماذا لا يتعارض ذلك مع النظرية ؟

١٥ - خطط الشكل البيانى لدالة تحقق القابلية للتفاضل لكن لا تحقق شرط الاتصال لنظرية القيمة المتوسطة ، وحيث (أ) النتيجة لا تكون صحيحة ، (ب) النتيجة تكون صحيحة .

حدد ما اذا كانت الفروض لنظرية القيمة المتوسطة تتحقق للدالة المعطاة والفترة المعطاه . اذا لم تتحقق ، هل النتيجة تكون صحيحة مع ذلك ؟

$$f(t) = |t|; [1,5] \quad - ١٧ \quad f(x) = \frac{x-2}{x}; [1, \frac{1}{2}] \quad - ١٦$$

$$G(x) = x^{1/3}; [-8,3] \quad - ١٩ \quad g(x) = \sqrt{x}; [0,9] \quad - ١٨$$

$$f(y) = y^2 - 2y + 3, y \neq 0; [0,2] \quad - ٢١ \quad f(x) = \frac{1}{x^{1/3}}; [-8,27]$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ -x + 5, & x \geq 1; \end{cases} [-1,1] \quad - ٢٣ \quad h(u) = \begin{cases} u^2, & u \leq 2, \\ 4, & u > 2; \end{cases} [0,3] \quad - ٢٢$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ -x + 5, & x \geq 1; \end{cases} [0,1] \quad - ٢٤$$

٢٥ - أين في برهان نظرية القيمة المتوسطة تستخدم فروض النظرية ؟

٢٦ - لتكن f دالة متصلة في الفترة المغلقة $[a,b]$ ولها $f(a) = f(b)$. اثبت أن f لها على الأقل عدد حرج واحد في الفترة المفتوحة (a,b) .

٢٧ - اثبت أن المعادلة $x^2 - 3x + 1 = 0$ ليس لها جذران متباينان في الفترة المغلقة $[0,1]$.

(ارشاد : اعتبر المنحنى $y = x^3 - 3x + 1$ افرض أن المعادلة لها جذران في $[0,1]$.)

٢٨ - اثبت أن المعادلة $x^{10} + x + a$ لها على الأكثر جذران حقيقيان لكل a .

٢٩ - لتكن f قابلة للتفاضل في (a,b) الا ربما عند العدد c ، حيث $a < c < b$. اذا كانت

$\lim_{x \rightarrow c} f'(x) = r$ ، فاثبت أن المشتقة موجودة عند c وأن $f'(c) = r$. (ارشاد : استخدم

نظرية القيمة المتوسطة .)

تحقق أن $G'(x) = F'(x)$ لأزواج الدوال الآتية . أوجد الثابت C ، الذي نضمن وجوده

بنظرية ٤ - ٨ ، حيث $G(x) = F(x) + C$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 3x - 10, G(x) = \frac{1}{4}(x^4 + 12x + 1) \quad - ٣٠$$

$$F(x) = x^3/3 - x^2 + x, G(x) = \frac{1}{3}(x-1)^3 \quad - ٣١$$

$$F(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x-1}, G(x) = x + \frac{2}{x-1} \quad - ٣٢$$

٣٣ - وضح أن استخدام نظرية القيمة المتوسطة في برهان النظرية ٤ - ٨ مسموح به ، بتحقيق أن

الدالة H تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة .

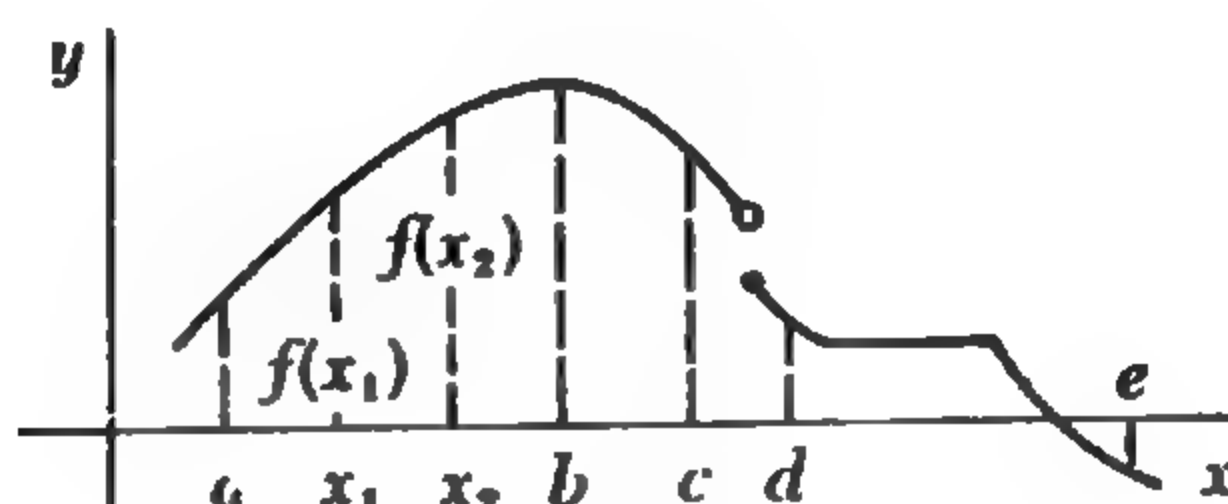
الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة

في تخطيط الشكل البياني لدالة عادة نهتم فقط بمظهره العام وملامحه البارزة . لانتطلب دقة كبيرة . شكل كاف لمعظم الأغراض يمكن رسمه اذا كنا نعلم أين يكون المنحنى صاعدا وأين يكون هابطا . التعبيران صاعد وهابط يشيران دائما الى سلوك المنحنى تتحرك نقطة عليه من اليسار الى اليمين . قبل أن نستطيع معرفة أين يكون المنحنى صاعدا أو هابطا يجب تعريف هذين التعبيرين . منطقيا أى جزء من المنحنى يكون صاعدا اذا واذا فقط كان لكل نقطتين عليه النقطة اليمنى أعلى من النقطة اليسرى . اذا كانت معادلة المنحنى هي $y = f(x)$ ، فهذا يعنى أن $f(x_1) < f(x_2)$ طالما كانت $x_1 < x_2$. نختار هذا التعريف . عند الحديث عن الدوال بدلا من المنحنيات ، من المعتاد استخدام الكلمتين متزايدة ومتناقصة بدلا من صاعد وهابط .

٤ - ٩ تعريف . لتكن f دالة ولتكن I فترة قد تكون لانهاية .

(أولا) f تكون متزايدة في الفترة I اذا كانت $f(x_1) < f(x_2)$ لمع x_1 و x_2 في I حيث $x_1 < x_2$.
 (ثانيا) f تكون متناقصة في الفترة I اذا كانت $f(x_1) > f(x_2)$ لجميع x_1 و x_2 في I حيث $x_1 < x_2$.
 (ثالثا) f تكون متزايدة باطراد في الفترة I اذا كانت $f(x_1) \leq f(x_2)$ لجميع x_1 و x_2 في I حيث $x_1 < x_2$.

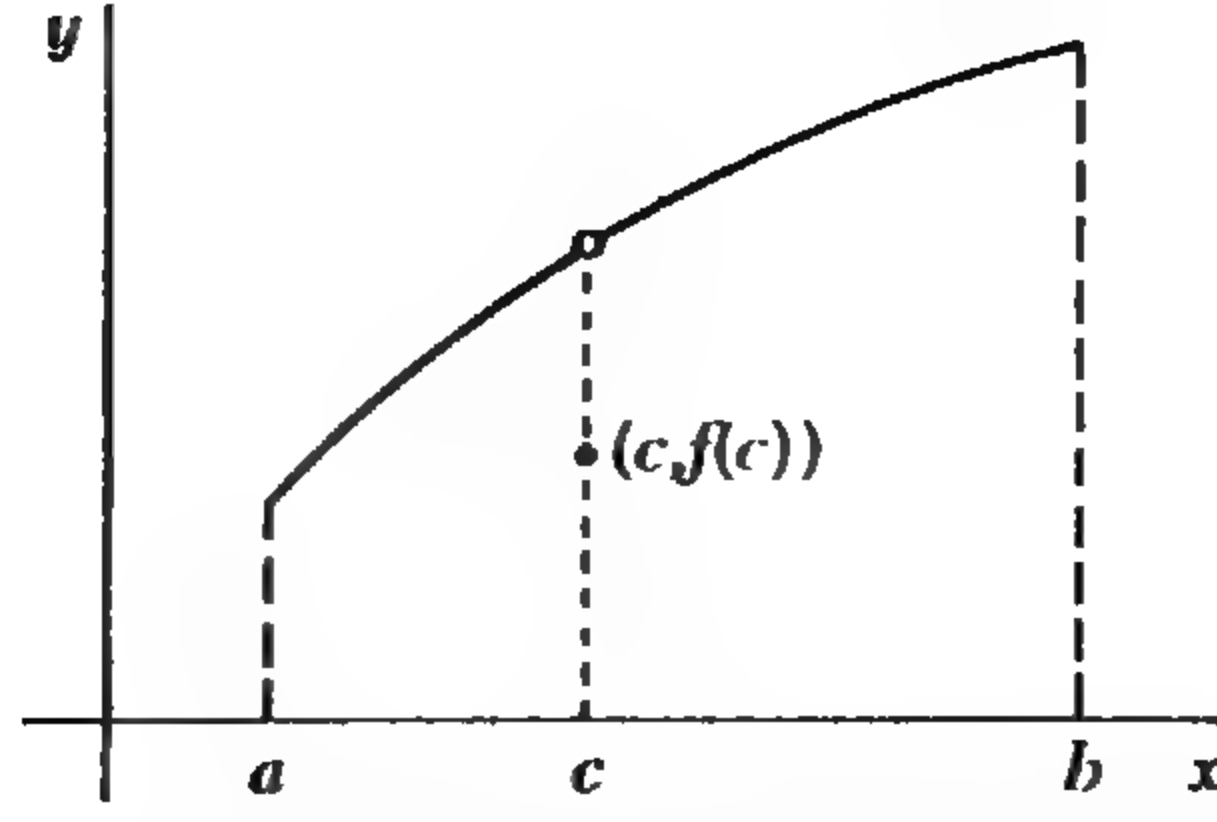
(رابعا) f تكون متناقصة باطراد في الفترة I اذا كانت $f(x_1) \geq f(x_2)$ لجميع x_1 , x_2 في I حيث $x_1 < x_2$.



شكل ٤ - ١٨

الدالة متزايدة في (a, b) ، متناقصة في $[c, d]$ و $[b, c]$ ومتناقصة باطراد في $[d, e]$.

الفترة I جزء حيوى من التعريف . لانقول أن الدالة متزايدة فحسب ولكن متزايدة في فترة . الدالة المخططة في شكل ٤ - ١٨ تكون متزايدة في الفترة المفتوحة (a, b) ، متناقصة في الفترتين المقفلتين $[c, d]$ و $[b, c]$ ومتناقصة باطراد في الفترة $[d, e]$. الدالة ليست متزايدة في الفترة $[a, c]$. ولا هي متناقصة هناك . لاحظ الكلمة جميع في التعريف . اذا كان يوجد ولو زوج واحد x_1, x_2 حيث $f(x_1) \geq f(x_2)$ ، فان f لا تكون متزايدة في الفترة . الدالة في شكل ٤ - ١٩ ليست متزايدة في الفترة (a, b) . هي ، مع ذلك ، متزايدة في $[c, b)$.



شكل ٤-١٩

الدالة ليست متزايدة في (a,b) . هي متزايدة في $[c,b)$.

الدالة تكون مطردة في فترة I اذا كانت متزايدة باطراد في I او متناقصة باطراد في I . الدالة f في الشكل ٤-١٨ مطردة في $[a,b]$ وايضا في $[b,e]$.

ليس من السهل دائما أن ندرك من التعريف ما اذا كانت الدالة متزايدة أم متناقصة في فترة معطاة . لكن المشتقة ، تعطينا اختيارا سريعا . اذا كان ميل الشكل البياني موجبا ، فالشكل يجب أن يكون صاعدا ، واذا كان الميل سالبا ، فالشكل يجب أن يكون هابطا . النظرية الآتية تثبت هذا .

٤-١٠ نظرية . لتكن الدالة f متصلة في الفترة I ، التي قد تكون لانهائية .

(أولا) اذا كانت $f'(x) > 0$ لجميع x داخل الفترة I ، فان f تكون متزايدة في I .

(ثانيا) اذا كانت $f'(x) < 0$ لجميع x داخل الفترة I ، فان f تكون متناقصة في I .

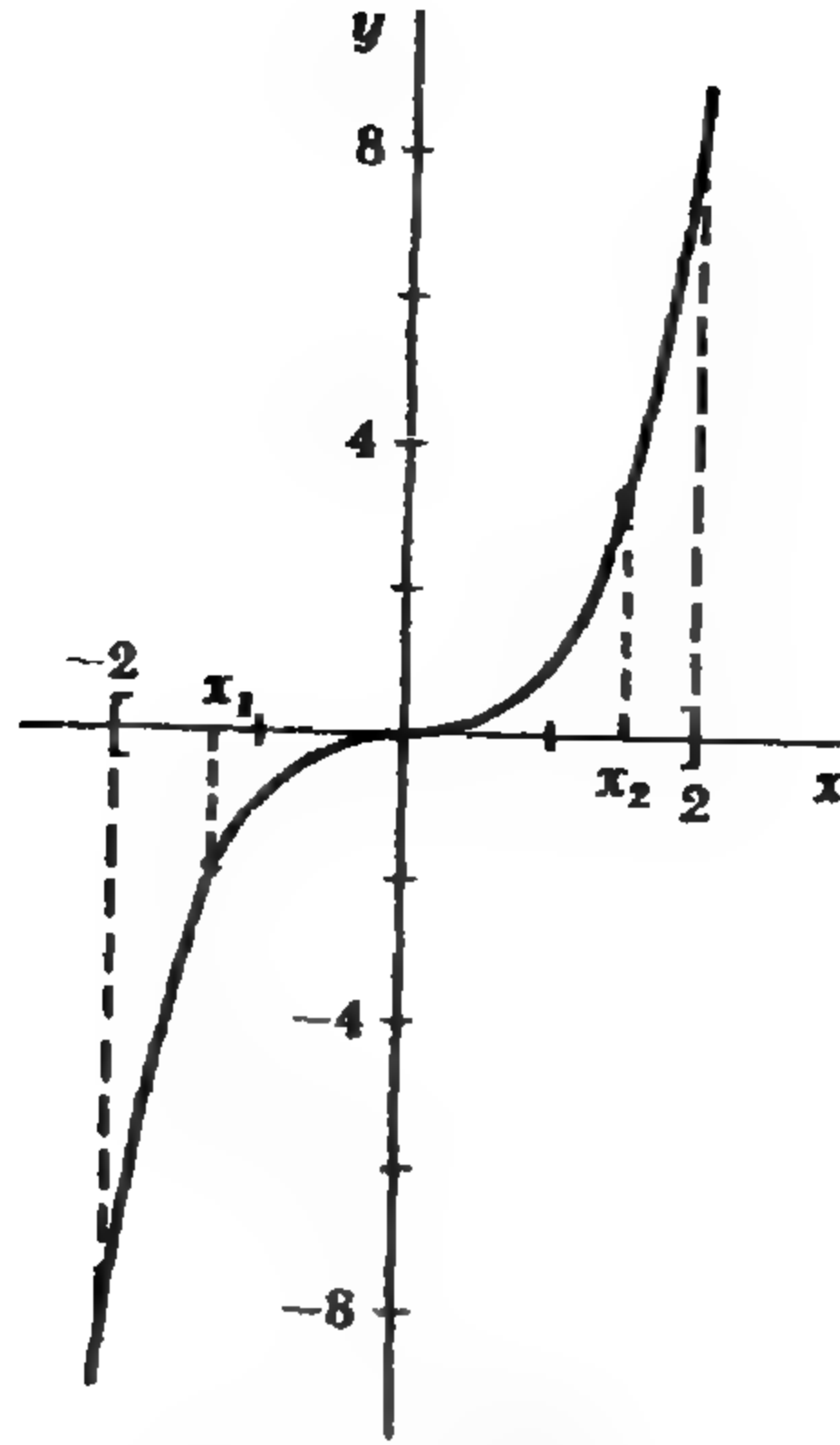
البرهان . (أولا) التعريف ٤-٩ يتطلب أن نثبت أن $f(x_1) < f(x_2)$ لكل زوج من الأعداد x_1, x_2 في I حيث $x_1 < x_2$. وعلى ذلك نفرض أن x_1 و x_2 أي عددين في I حيث $x_1 < x_2$. بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الفترة الجزئية $[x_1, x_2]$ ، توجد z في (x_1, x_2) بحيث أن

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(z).$$

بما أن z داخل الفترة I ، إذن $f'(z) > 0$. أيضا $x_2 - x_1 > 0$. إذن $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ومنها $f(x_2) > f(x_1)$. برهان (ثانيا) مماثل .

لاحظ أنه رغم أن $f'(b) = 0$ في الشكل ٤-١٨ ، النظرية تجيز لنا أن نستنتج أن f متناقصة في الفترة المقفلة $[b,c]$ ، حيث $f(b) > f(x)$ لجميع $b < x \leq c$.

عكس النظرية ٤-١٠ ليس صحيحا . من الممكن أن تكون دالة متزايدة أو متناقصة في فترة ما مع أن $f'(x) = 0$ عند نقطة أو أكثر هناك . خذ في الاعتبار الدالة $f(x) = x^3$ المخططة في الشكل ٤-٢٠ . الدالة f متزايدة في الفترة $[-2,2]$ رغم أن $f'(x) = 0$ لـ x ما في الفترة هي 0 . لتوضيح ذلك ، نرجع الى التعريف اذ لا يمكننا استخدام النظرية . اذا كانت x_1 و x_2 في $[-2,2]$



شكل ٤ - ٢٠

الدالة $f(x) = x^3$ متزايدة في $[-2, 2]$ رغم أن $f'(0) = 0$.

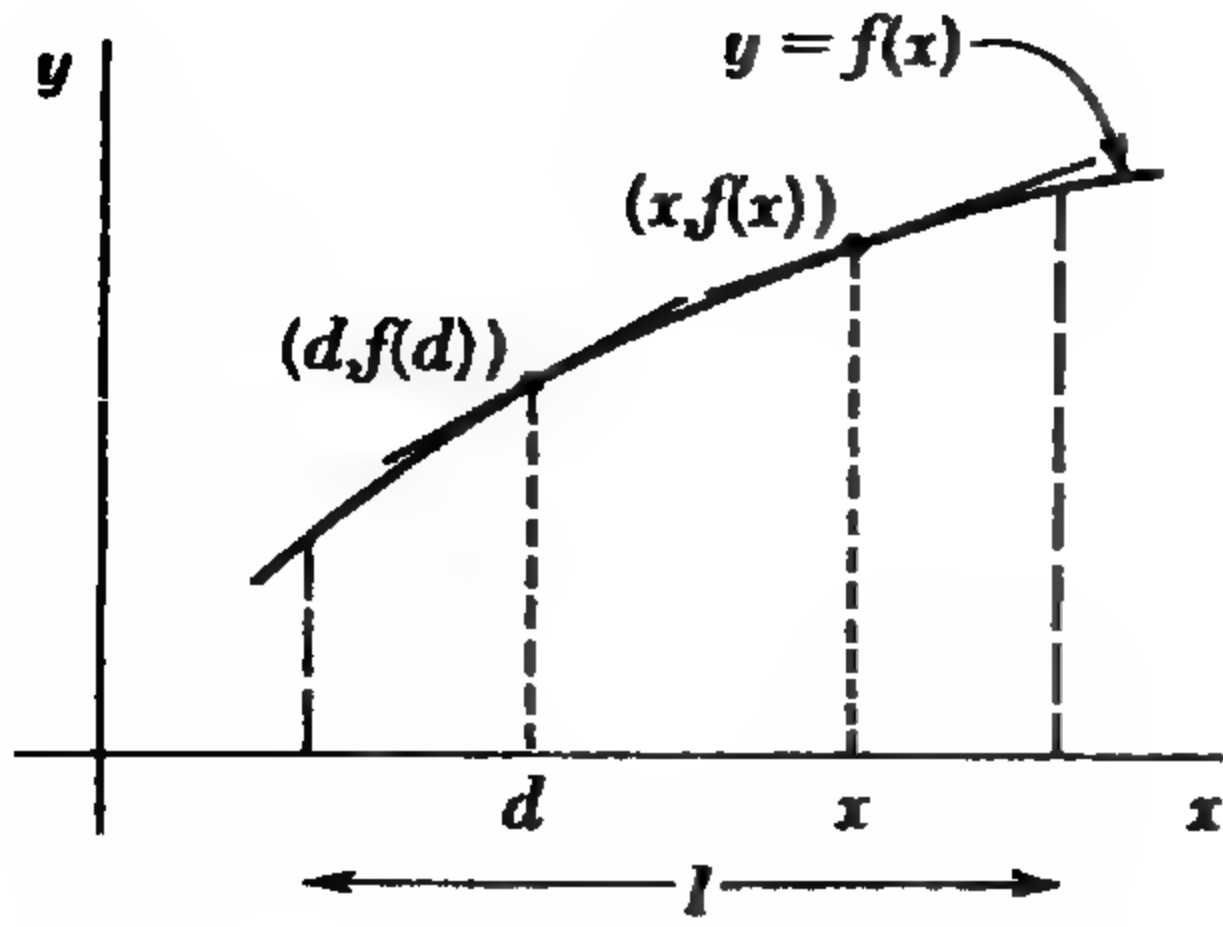
حيث

$x_1 < x_2$ ، فإن من المسألة ١٧ بيند ١ - ٣ ، $f(x_1) = x_1^3 < x_2^3 = f(x_2)$.

النظرية الآتية تثبت حقيقة مفضلة هندسيا وهي أن بين الأعداد الحرجة الدالة تكون بالضرورة متزايدة أو متناقضة .

٤ - ١١ نظرية . لتكن الدالة f متصلة في الفترة I ، التي قد تكون لانهائية ، ولتكن f ليس لها حرج داخل I . حينئذ إما $f'(x) > 0$ لجميع x في الداخل وتكون f متزايدة في I ، وإما $f'(x) < 0$ لجميع x في الداخل وتكون f متناقضة في I .

البرهان . الفرض يتضمن أن f لها مشتقة غير صفرية في كل مكان داخل الفترة I . اختر أي عدد d داخل I . ستثبت أنه إذا كانت $f'(d) > 0$ ، فإن $f'(x) > 0$ لجميع x داخل I ، لكن إذا كانت $f'(d) < 0$ فإن $f'(x) < 0$ لجميع x داخل I . [لماذا لا يمكن أن تكون $f'(d) = 0$ ؟] . برهانا الحالتين متشابهان ، لذلك نعطي فقط برهان الحالة الأولى . نفرض أن $f'(d) > 0$ (شكل ٤ - ٢١) . لتكن x أي عدد داخل I ولنعتبر أولا الحالة الفرعية $x > d$. حيث أن f ليس لها عدد حرج داخل الفترة $[d, x]$ فإن قيمتها العظمى في هذه الفترة الجزئية يجب أن تحدث عند d أو x بالنظرية ٤ - ٥ . القيمة العظمى لا يمكن حدوثها عند d ، لأنه إذا حدث ذلك لكانت $f'(d) \leq 0$ بالتمهيدية ٤ - ٢ . إذن يجب حدوثها عند x ، ومن ثم ، بالتمهيدية ٤ - ٢ أيضا تكون $f'(x) \geq 0$. لكن التساوي يكون مستحيلا (لماذا ؟) ، واذن $f'(x) > 0$. إذا كانت $x < d$ فإن برهانا مماثلا مستخدما القيمة الصغرى للدالة f في $[x, d]$ يثبت أن $f'(x) > 0$. بما أن x كانت اختيارية ، فإن $f'(x) > 0$ لجميع x داخل الفترة I والدالة f تكون متزايدة في I بالنظرية ٤ - ١٠ .



شكل ٢١-٤
إذا كانت $f'(d) > 0$ ، فإن
 $f'(x) > 0$ لجميع x داخل الفترة I

نستخدم هذه النظرية بأى من طريقتين لتحديد ما إذا كانت الدالة f التى ليس لها عدد حرج داخل الفترة I متزايدة أم متناقصة فى الفترة . فالنظرية تعمل باحدى الطريقتين أو الأخرى . الطريقة الأولى أن نحسب $f'(c)$ لنقطة ما مناسبة ، فى الداخل . إذا كانت $f'(c) > 0$ ، فإن $f'(x) > 0$ لجميع x فى الداخل وتكون f متزايدة فى I . بالمثل ، إذا كانت $f'(c) < 0$ فإن f تكون متناقصة فى I . الطريقة الأخرى هى أن نختار أى عددين x_1 و x_2 فى الفترة I حيث $x_1 < x_2$ ، ونحسب $f(x_1)$ و $f(x_2)$ ، ونرى أيا منهما الأكبر . إذا كانت $f(x_1) < f(x_2)$ ، فإن f لا يمكن أن تكون متناقصة فى I واذن يجب أن تكون متزايدة هناك . بالمثل ، إذا كانت $f(x_1) > f(x_2)$ ، فإن f يجب أن تكون متناقصة فى I . إذا استخدمت الطريقة الأولى فإن c يجب اختيارها داخل الفترة . فى الطريقة الثانية x_1 و x_2 يمكن اختيارهما فى أى مكان فى الفترة حتى عند النقطتين الطرفيتين ، بشرط أن يكونا فى الفترة .

مثال ١ . حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 6x - x^2$ متزايدة أم متناقصة فى الفترة $I = (-1, 3]$.

نرى من المشتقة $f'(x) = 2(3 - x)$ أن العدد الحرج الوحيد للدالة f هو 3 . بما أن الدالة متصلة فى I وليس لها عدد حرج داخل الفترة I ، فهى يجب أن تكون إما متزايدة وإما متناقصة هناك . سنحدد ما إذا كانت متزايدة أم متناقصة بالطريقة الأولى . العدد I هو داخل الفترة I . بما أن $f'(1) > 0$ ، إذن $f'(x) > 0$ لجميع x داخل الفترة I والدالة f تكون متزايدة فى I . يمكن أيضا استخدام الطريقة الثانية ، كما يلى . العددان 0 و 3 هما فى I . بما أن $f(0) = 0 < f(3) = 9$ ، فإن f يجب أن تكون متزايدة فى I .

مثال ٢ . أوجد الفترات حيث الدالة

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$$

تكون متزايدة والفترات حيث تكون متناقصة .

توجد أولا الاعداد الحرجة للدالة f . هذا يجرى بالتعبير عن $f'(x)$ كحاصل ضرب

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x + 1)(x - 3)$$

من الواضح أن 3 و -1 هما صفران للمشتقة $f'(x)$ وبالنظرية ١ - ١٩ ، هما صفراهما الوحيدان .
لقد أوجدنا جميع الاعداد الحرجة . وهي تقسم محور x الى ثلاث فترات مقفلة هي

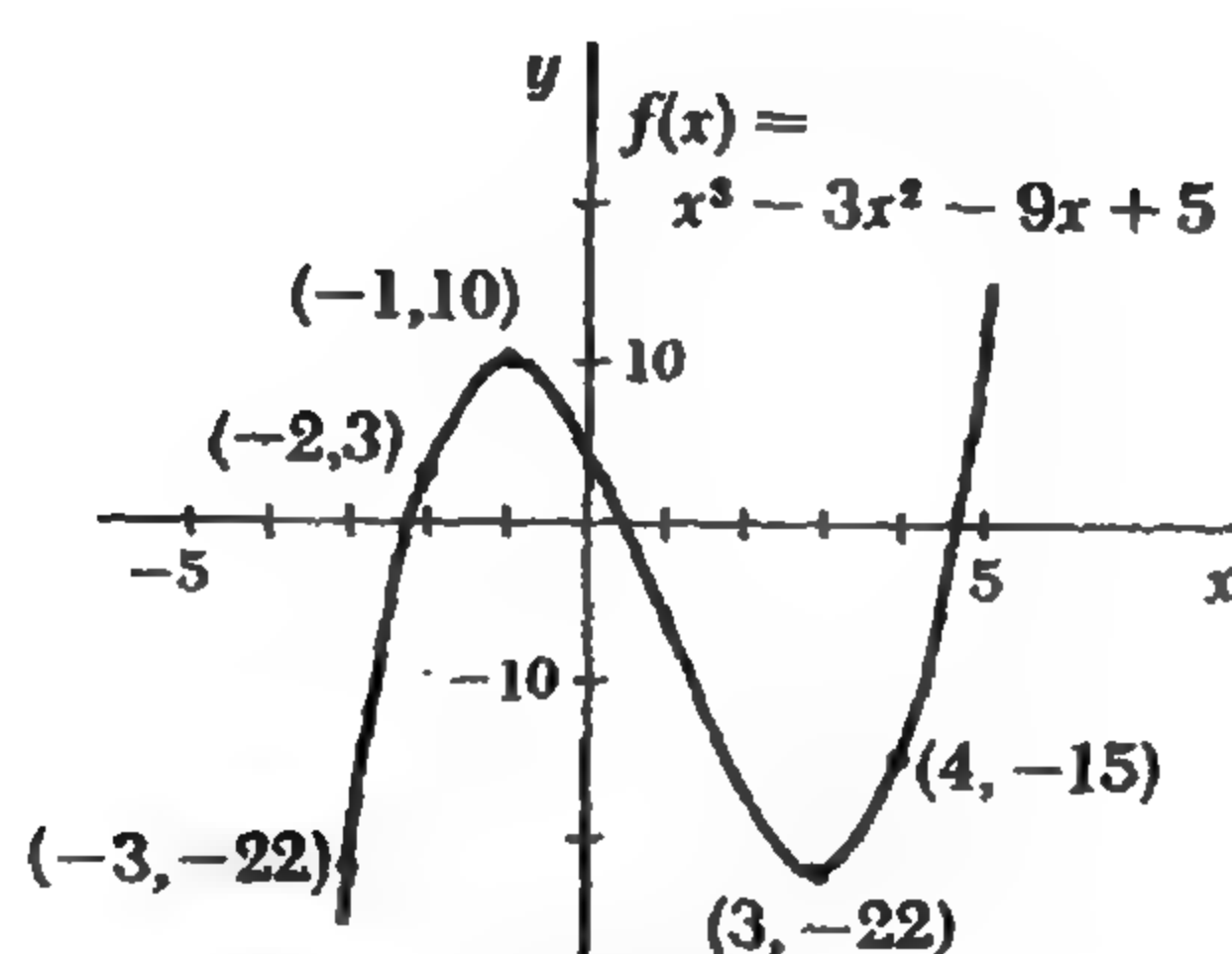
(١)

$$(-\infty, -1], \quad [-1, 3], \quad [3, \infty)$$

في كل منها تكون f متصلة ودخل كل منها f ليس لها عدد حرج . في كل منها الدالة تكون اما متزايدة واما متناقصة . لتحديد أيهما ، نختار 5, 0, -2 كأعداد مناسبة ، كل عدد داخل فترة .
صورة العوامل للمشتقة تبين أن $f'(-2) = 3(-1)(-5) > 0$ من ثم $f'(x) > 0$ لجميع x في $(-\infty, -1)$ ، وتكون f متزايدة في $(-\infty, -1]$ أو أي فترة جزئية منها . بما أن :
 $f'(0) = 3(1)(-3) < 0$ فإن $f'(x) < 0$ لجميع x في $(-1, 3)$ ، وتكون f متناقصة في :
 $[-1, 3]$. بما أن

$$f'(5) = 3(6)(2) > 0$$

فإن $f'(x) > 0$ لجميع x في $(3, \infty)$ ، وتكون f متزايدة في $(3, \infty)$. الشكل البياني مخطط في شكل ٤ - ٢٢ .



شكل ٤ - ٢٢

الدالة متزايدة في الفترتين في $(-\infty, -1]$ ، $[3, \infty)$ ومتناقصة في $[-1, 3]$.

يمكننا أيضا تعيين ما اذا كانت الدالة f متزايدة أو متناقصة في الفترات (١) بالطريقة الثانية ، كما يلي . العددان -2 و -3 يقعان في الفترة الاولى $(-\infty, -1]$ ، وبما أن :
 $f(-2) = 3 < f(-3) = -22$ ، إذن f يجب أن تكون متزايدة في الفترة . العددان 3 و -1 هما في الفترة الثانية $[-1, 3]$ ، وحيث أن $f(3) = -22 > f(-1) = 10$ إذن f يجب أن تكون متناقصة في الفترة . العددان 4 و 3 يقعان في الفترة الثالثة $[3, \infty)$ ، وحيث أن :
 $f(3) = -22 < f(4) = -15$ إذن f يجب أن تكون متزايدة في الفترة .

مسائل

عين ما اذا كانت الدالة متزايدة أم متناقصة في الفترات المعطاة . اذا كانت لا متزايدة ولا متناقصة ، فهل هي متزايدة باطراد أم متناقصة باطراد ؟

- ١ - $f(x) = -3x + 2; [1,2]$ ٢ - $g(x) = x^2 - 2; [-2,3]$
- ٣ - $f(x) = 5 + 4x - x^2; [-1,1], [0,6]$ ٤ - $H(u) = 6; [-2,3]$
- ٥ - $f(t) = \sqrt{t}; (1,4), [0,4]$ ٦ - $f(x) = -x^3 - 1; [0,2]$
- ٧ - $F(r) = r^3 - 6r^2 - 15r + 1; [0,4], (6,\infty)$ ٨ - $f(x) = |x|; (-4,0), [-4,0]$
- ٩ - $g(t) = \begin{cases} t, & t \leq 0, \\ t+1, & t > 0; (-\infty, \infty) \end{cases}$ ١٠ - $h(x) = [x]; (0,3.5)$
- ١١ - $f(x) = \begin{cases} x, & \text{وليس عدد صحيح} \\ x-1, & \text{عدد صحيح} \end{cases} \quad x \in (-\infty, \infty)$ ١٢ - $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1; (0,2) \end{cases}$
- ١٣ - $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ كسرية} \\ 0, & x \text{ غير كسرية} \end{cases} \quad x \in [-3,3]$

أوجد الفترات حيث تكون الدوال الآتية متزايدة والفترات حيث تكون متناقصة :

- ١٤ - $f(x) = x^2 - 5$ ١٥ - $f(x) = 2 - 4x$ ١٦ - $g(x) = -9x - x^2$
- ١٧ - $f(t) = (t-1)^3$ ١٨ - $F(x) = 6x - x^3$ ١٩ - $f(z) = 2z^3 + 3z^2 - 36z$
- ٢٠ - $f(x) = x^3 + 6x^2 - 9x - 2$ ٢١ - $f(x) = -(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x)$ ٢٢ - $u(t) = t(3-t)^2$
- ٢٣ - $f(x) = x^4$ ٢٤ - $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3$ ٢٥ - $g(u) = (u^2 - 16)^2$
- ٢٦ - $f(x) = -x^5$ ٢٧ - $h(x) = 1/x$ ٢٨ - $P(x) = x + 9/(x+1)$

- ٢٩ - أثبت أنه إذا كانت دالة f متزايدة في الفترتين $[c,b]$ و $[a,c]$ فإنها تكون متزايدة في اتحادهما $[a,b]$. وضع أن هذا قد لا يكون صحيحا إذا كانت الفترة الأولى مفتوحة. استخدم هذا والنظرية ٤ - ١٠، لتثبت أن الدالة $f(x) = x^3$ متزايدة في الفترة $[-2,2]$.
- ٣٠ - عين ما إذا كانت الدالة $f(x) = x^4 - 4x^3$ متزايدة أم متناقصة في الفترة $(-\infty, 3]$.
- ٣١ - عين ماذا كانت الدالة $g(z) = z^{1/3} + 1$ متزايدة أم متناقصة في الفترات $[-8,8]$ و $[1,8]$ و $[-8,-1]$.

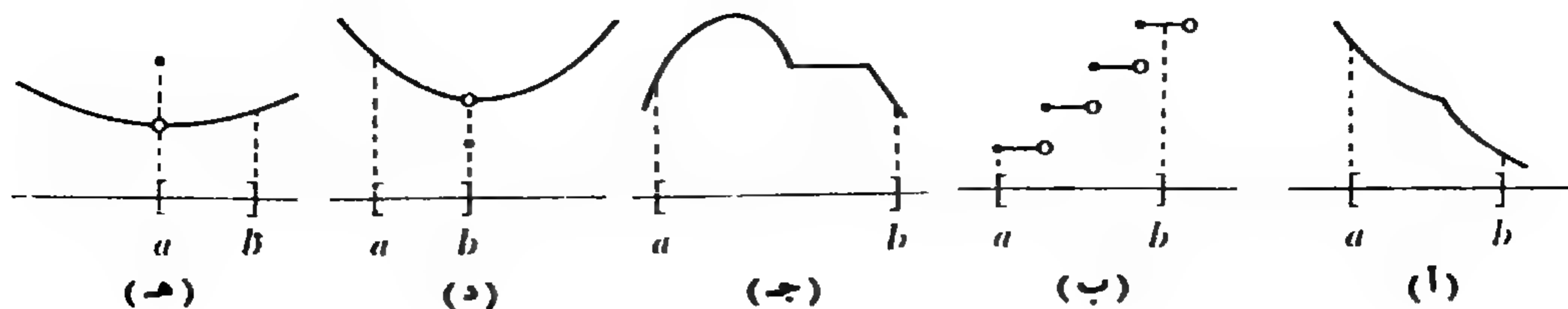
٣٢ - خطط الشكل البياني لدالة متناقصة في فترة رغم أن مشتقتها لا تكون سالبة في أي مكان داخل الفترة.

٣٣ - في الشكل ٤ - ١٩ إذا كانت النقطة المعزولة أعلى المنحنى بدلا من أدناه، هل الدالة تكون متزايدة في (a,b) ؟

٣٤ - هل الدوال المخططة في الشكل ٤ - ٢٣ متزايدة، متناقصة، مطردة الزيادة أم مطردة النقصان في الفترة المغلقة $[a,b]$ ؟ في الفترة المفتوحة (a,b) ؟

٣٥ - خطط الشكل البياني لدالة متزايدة في كل فترة لكن لاتصبح لانهائية.

٣٦ - إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ ، هل من الضروري أن تكون متزايدة بعد نقطة معينة ؟



شكل ٢٣-٤

- ٣٧- خطط الشكل البياني لدالة متصلة ، رغم أنه يكون متناقصا الا أنه يكون دائما أكبر من I .
 ٣٨- الدالة $f(x) = -1/x$ ليست متزايدة في الفترة $[-10, 10]$ ، لأن $f(-4) > f(3)$ ، مع أن $-4 < 3$. لكن $f'(x) = 1/x^2 > 0$ لماذا لا يتعارض ذلك مع النظرية ٤-١٠ ؟
 ٣٩- أثبت النظرية ٤-١٠ (ثانيا) .

٤٠- في برهان النظرية ٤-١٠ استخدمت نظرية القيمة المتوسطة . حقق أن افروض لنظرية القيمة المتوسطة تكون متحققة .

- ٤١- هل فرض الاتصال في النظرية ٤-١٠ ضروري ؟
 ٤٢- اثبت أنه اذا كانت f دالة متزايدة ، فان $f(x_1) < f(x_2)$ تتضمن أن $x_1 < x_2$ وأن $f(x_1) = f(x_2)$ تتضمن أن $x_1 = x_2$.

٤٣- رغم أن الدالة المخططة في الشكل ٤-٢٢ ليست مطردة في الفترة $[-3, 5]$ ، الا أن الفترة يمكن تقسيمها الى فترات جزئية $[3, 5]$ و $[-1, 3]$ و $[-3, -1]$ ، داخل كل منها تكون الدالة مطردة . هل من الممكن ، لكل دالة معرفة في فترة محدودة ، تقسيم الفترة الى عدد محدود من الفترات الجزئية وتكون الدالة مطردة داخل كل منها .

٤٤- اذا كانت دالتان f و g متزايدتين في فترة ما ، هل $f+g$ و fg تكونان متزايدتين في هذه الفترة ؟

٤٥- عكس النظرية ٤-١٠ (أولا) غير صحيح . لكن اثبت أنه اذا كانت الدالة f متزايدة في I وكانت $f'(x)$ موجودة داخل I ، فان $f'(x) \geq 0$ لجميع x داخل I . (ارشاد : افرض أن $f'(c) < 0$ لنقطة ما c داخل I . باستخدام التمهيدية ٢-٢٢ (ثانيا) اثبت أن هذا يتضمن أن $[f(x) - f(c)] / (x - c) < 0$ لجميع x في جوار منقوص لـ c محتوي في I الآن استخلص تناقضا .

٤٦- أكمل برهان النظرية ٤-١١ ، معالجا الحالات $x < d$ و $f'(d) > 0$ ، $f'(d) < 0$.

٤-٤

تخطيط المنحنى

لتخطيط الشكل البياني للدالة ، نوجد جميع الأعداد الحرجة ، نعين مواقع النقط المناظرة ، ثم نعين ما اذا كان الشكل البياني صاعدا أوهابطا بين هذه النقط ، بطرق البند السابق . الاجزاء

المقطوعة من المحورين لها أهميتها ، فإذا كان من السهل إيجادها ، تعيين مواقعها أيضاً . نوضح بتخطيط الشكل البياني الدالة

$$f(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3)$$

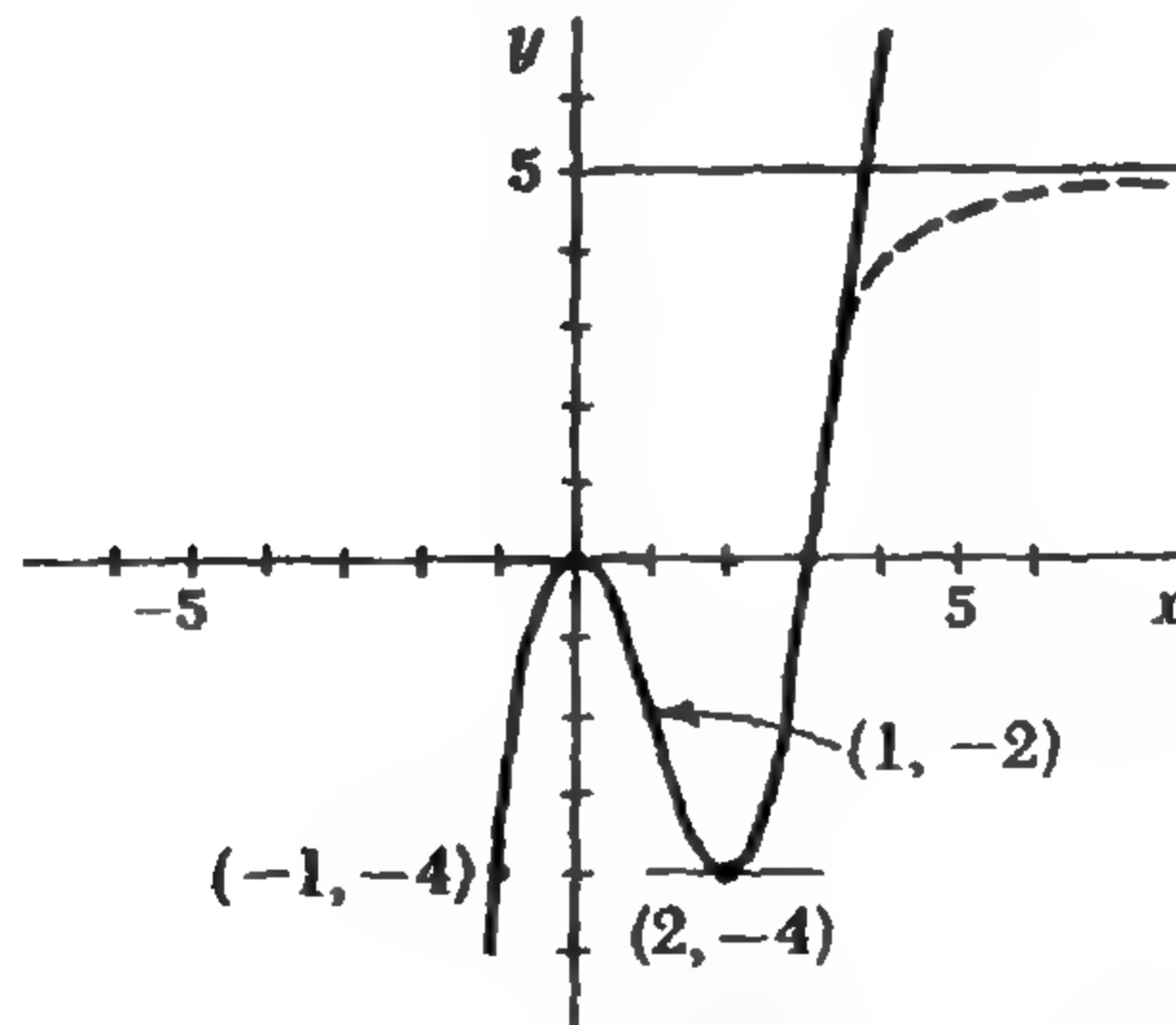
الجزء المقطوع من المحور y هو صفر ، والجزآن المقطوعان من المحور x هما 3 و 0 ، ونحصل على ذلك من صورة العوامل للدالة $f(x)$. بما أن

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

فالعقدان الحرجان الوحيدان للدالة f هما 2 و 0 . النقطتان المناظرتان على الشكل البياني هما $(2, -4)$ و $(0, 0)$. نوقع هاتين النقطتين (شكل ٤ - ٢٤) ونذكر أن عند كل منهما الشكل البياني له مماس أفقى . الأعداد الحرجة تقسم المحور x الى ثلاث فترات مغلقة ، هي

$$(-\infty, 0], [0, 2], [2, \infty)$$

فى كل منها f تكون متصلة وداخل كل منها f ليس لها عدد حرج . فى كل من هذه الفترات f تكون اما متزايدة واما متناقصة . بما أن $0 < f'(-1) = 3(-1)(-3)$ ، فإن f تكون متزايدة فى الفترة $(-\infty, 0]$ والشكل البياني يكون صاعدا الى النقطة $(0, 0)$. يمكننا تخطيط جزء المنحنى الى يسار نقطة الأصل . بما أن النقطة $(2, -4)$ تحت النقطة $(0, 0)$ ، فإن f تكون متناقصة فى الفترة $[0, 2]$ والشكل البياني يكون هابطا بين هاتين النقطتين . نخطط هذا الجزء . بما أن $0 < f'(4) = 3(4)(2)$ فإن f تكون متزايدة فى الفترة $[2, \infty)$ والشكل البياني يكون صاعدا على يمين النقطة $(2, -4)$. يمكننا تكملة التخطيط .



شكل ٤ - ٢٤

الشكل البياني للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2$.

عندما تكون x كبيرة جداً ، الحد x^3 فى التعبير عن الدالة $f(x)$ يكون أكبر كثيراً من الحد $3x^2$. إذن $f(x)$ لا تزداد فحسب فى الفترة $[2, \infty)$ بل لقيم x الكبيرة كبراً كافياً تكون أكبر من مليون أو بليون أو أى عدد نختاره مسبقاً أى أن ، $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. هذا يعنى أن جزء الشكل البياني الذى على يمين النقطة $(2, -4)$ يشبه المنحنى غير المشروط فى الشكل ٤ - ٢٤ وليس المنحنى المشروط .

بالمثل ، $f(x)$ تكون كبيرة وسالبة عندما تكون x كبيرة سالبة ، أى أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ والشكل البياني ينحدر الى أسفل على اليسار . لدينا الآن فكرة جيدة عن الشكل البياني ، ماذا يشبه . فى تخطيطنا عينا مواقع ثلاث نقط فقط . لقد أختيرنا اختياراً حسناً ، والمشتقة أعطت معلومات أكثر من 20 نقطة . اذا أردنا الآن تخطيطاً أدق فالتنا نوقع عدداً أكثر من النقط مثل $(-1, -4)$ و $(1, -2)$.

مثال ١ . خطط الشكل البياني للدالة g المعروفة بـ $g(x) = -3x^3 + 5x^2$

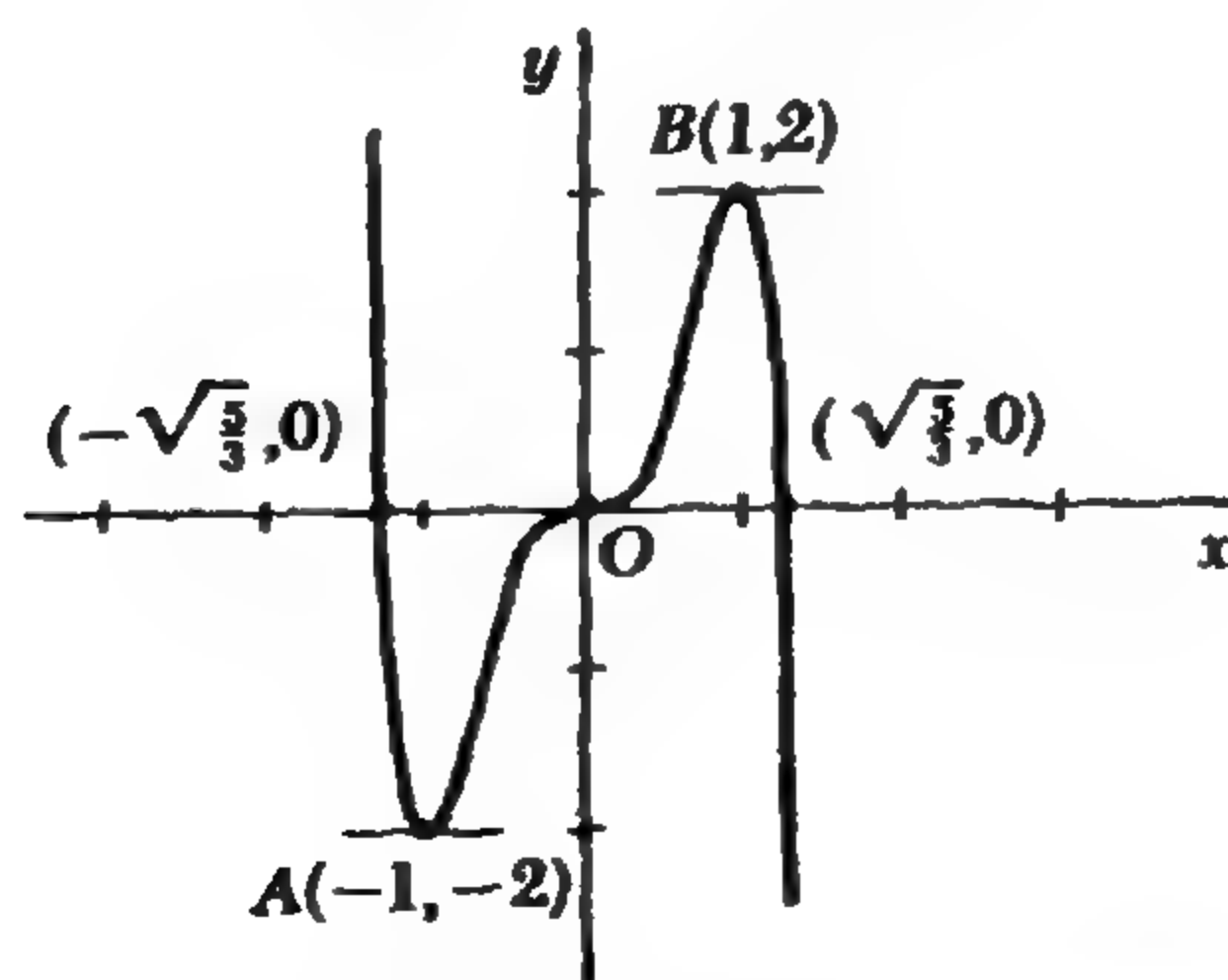
تعويض $-x$ عن x وتعويض $-y$ عن y فى $y = -3x^3 + 5x^2$ يعطى نفس المعادلة . من ثم المنحنى متماثل بالنسبة الى نقطة الأصل . واضح أن الجزء المقطوع من المحور الصادى هو صفر ، واذا كتبنا $g(x)$ على الصورة $g(x) = x^2(-3x + 5)$ فالتنا نرى أن الأجزاء المقطوعة من السينى هي $\pm 1.29 \approx \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$ و 0 . نوقع هذه النقط (شكل ٤ - ٢٥) . لايجاد الأعداد الحرجة ، نعبر عن المشتقة كحاصل ضرب :

$$g'(x) = -15x^2 + 10x = -15x^2(x + \frac{2}{3})(x - \frac{1}{3})$$

الأعداد الحرجة هي $-1, 0, 1$ ، وهذه الأعداد فقط . النقط المناظرة هي : $A(-1, -2), O(0,0), B(1,2)$ نوقع هذه النقط ونذكر أن الشكل البياني له مماس أفقى عند كل منها . الأعداد الحرجة تقسم المحور السينى الى أربع فترات مغلقة هي

$$(-\infty, -1], [-1, 0], [0, 1], [1, \infty)$$

فى كل منها الشكل البياني يكون صاعداً أوهابطاً . من المواضع النسبية للنقط A و O و B والجزءان المقطوعان من المحور السينى ، نرى أن الشكل البياني يهبط الى النقطة A ، يرتفع من A الى O ، يستمر فى الارتفاع من O الى B ، ثم يهبط بعد B . بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$ فالشكل البياني مستمر فى الهبوط على اليمين وفى الصعود على اليسار . كاختبار أخير ، نرى أن الشكل البياني متماثل بالنسبة الى نقطة الأصل ، كما يجب أن يكون . لاحظ أن المماس للمنحنى عند نقطة الأصل يقطع المنحنى هناك .



شكل ٤ - ٢٥

الشكل البياني للدالة $g(x) = -3x^3 + 5x^2$.

مثال ٢ . خطط المنحنى $y = x^{1/3}(x-8)$ المنحنى ليس متماثلاً بالنسبة إلى أى من المحورين ولا بالنسبة إلى نقطة الأصل . الجزء المقطوع من المحور الصادي هو صفر ، والجزءان المقطوعان من المحور السيني هما 8 و 0 (شكل ٢٦-٤) . ضبع $f(x) = x^{1/3}(x-8)$. فيكون

$$(1) \quad f'(x) = x^{1/3} + \frac{1}{3}x^{-2/3}(x-8) = \frac{4(x-2)}{3x^{2/3}}$$

بالإضافة إلى العدد الحرج 2 ، الذى عنده المشتقة تساوى صفراً ، يوجد العدد الحرج 0 ، الذى عنده f ليس لها مشتقة . النقطتان المناظرتان هما النقطة $(2, -6\sqrt[3]{2} \approx -7.56)$ ، التى عندها المنحنى له مماس أفقى ، والنقطة $(0,0)$. المعلومات

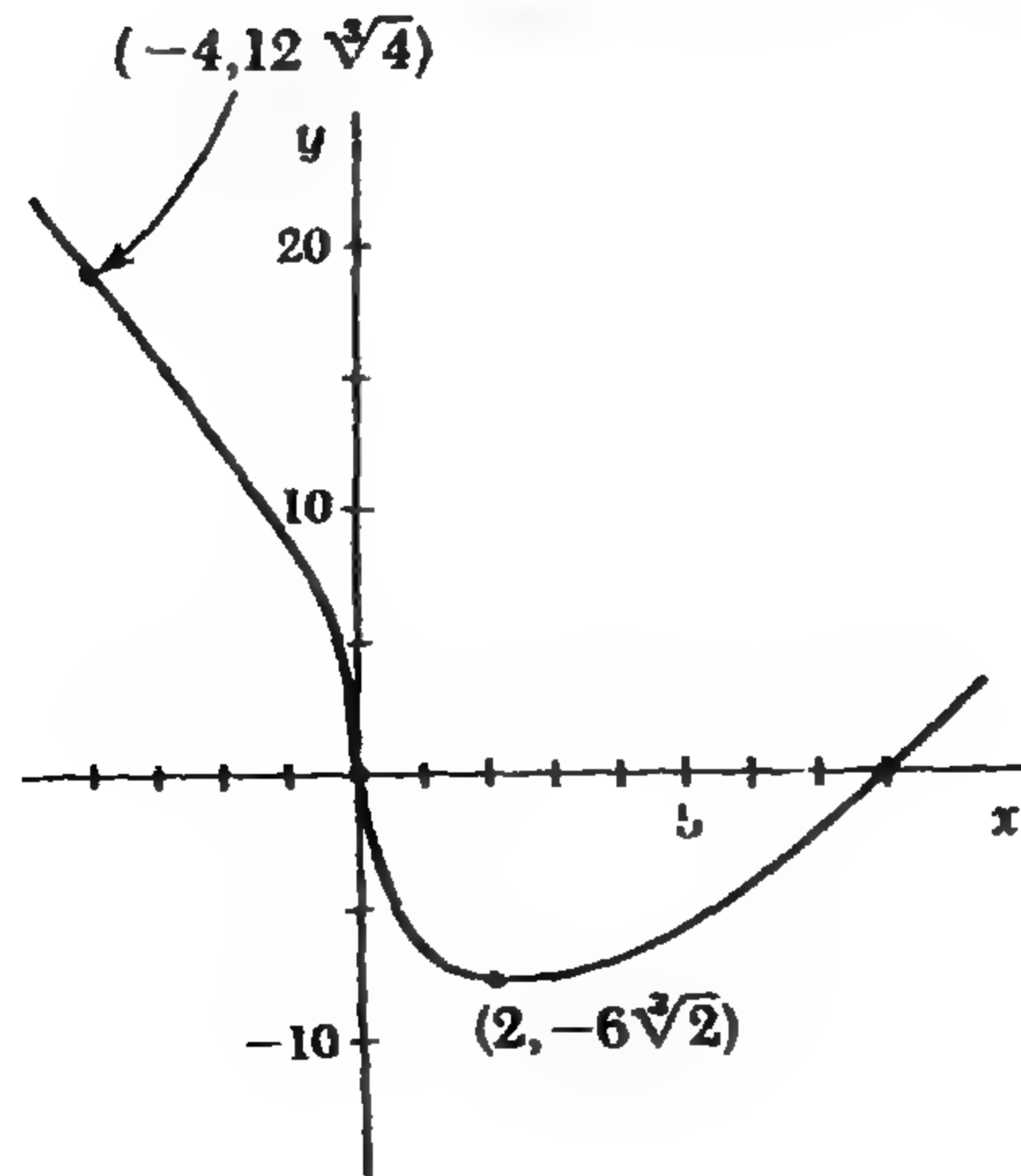
$$f'(-1) < 0, \quad f(0) = 0, \quad f(2) = -6\sqrt[3]{2}, \quad f(8) = 0$$

توضح أن المنحنى يكون هابطاً إلى نقطة الأصل ، يستمر فى الهبوط إلى النقطة $(2, -6\sqrt[3]{2})$ ، ثم يرتفع بعد ذلك . عندما لا توجد المشتقة عند عدداً ما ، كما فى المثال ، غالباً ما يكون من المفيد أن ندرس المشتقة عند قيم x القريبة . عندما تكون x قريبة من الصفر ، سواء أكانت موجبة أو سالبة ، البسط فى (١) يكون قريباً من -8 والمقام قريباً من 0 وموجباً . وعلى ذلك $f'(x)$ تكون عدداً كبيراً سالباً . أى أن ، $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$. هذا يعنى أن المنحنى شديد الانحدار بالسالب بالقرب من نقطة الأصل ويصبح تزايدياً كلما اقتربت x من الصفر . فى الواقع ، المحور الصادي يكون مماساً للمنحنى هناك . بما أن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ فالمنحنى يصعد بغير حدود على اليمين وعلى اليسار .

نلخص الطريقة العامة لتخطيط المنحنى (الخطوة ٣ لم تحدث فى مثال حتى الآن ؟ سنأخذها فى الاعتبار فى البند ٤-٨) .

١ - لاحظ أى تماثلات للشكل البياني .

٢ - عين مواقع الأجزاء المقطوعة إذا كان من السهل إيجادها .



شكل ٢٦-٤

الشكل البياني للدالة $y = x^{1/3}(x-8)$.

٣ - إذا كانت الدالة f غير متصلة عند عدد c ، افحص قيم $f(x)$ لقيم x القريبة من c وبذلك تعين سلوك الشكل البياني لمثل هذه القيمة x . أى أنك توجد $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ غالباً ما تكون القيم المناظرة للدالة f كبيرة وموجبة أو كبيرة وسالبة ، ويكون الخط المستقيم $x = c$ الخط التقاربى .

٤ - أوجد الأعداد الحرجة وعين مواقع النقط المناظرة ، ملاحظاً المواقع التى يكون عندها المماس أفقياً . هذا يجرى بسهولة إذا عبرنا عن المشتقة كحاصل ضرب أو كخارج قسمة بسيط ومقام فى صورة العوامل .

٥ - عين ما إذا كان المنحنى صاعداً أم هابطاً فى الفترات التى تحدها الأعداد الحرجة والأعداد حيث f غير معرفة .

٦ - إذا كانت f ليس لها مشتقة عند عدد حرج c ، افحص $f'(x)$ عند قيم x القريبة من c لترى مدى شدة انحدار المنحنى بالقرب من النقطة $(c, f(c))$. أى أوجد $\lim_{x \rightarrow c^-} f'(x)$ و $\lim_{x \rightarrow c^+} f'(x)$.

٧ - عين سلوك الشكل البياني عندما تكون x كبيرة . أى أوجد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

مسائل

خطط الشكل البياني للدوال أو المنحنيات الآتية . (نظرية العوامل ١ - ٢١ ونظرية الجذر الكسرى ١ - ٢٢ مفيدتان لإيجاد جذور كثيرات الحدود) .

- | | | |
|--|--|---|
| ١ - $f(x) = 5 - \frac{1}{2}x$ | ٢ - $f(x) = x^2 - 3$ | ٣ - $g(x) = -x^2 - 9$ |
| ٤ - $y = -4x - x^2$ | ٥ - $f(x) = 3x^2 - 8x + 1$ | ٦ - $F(t) = t^3$ |
| ٧ - $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 10$ | ٨ - $f(x) = 9x - x^3$ | ٩ - $g(z) = z^3/3 + z^2/2 - 2z - \frac{1}{3}$ |
| ١٠ - $v(s) = s(s - 2)^2$ | ١١ - $g(t) = t^2 - \frac{1}{2}t^3$ | ١٢ - $V(h) = \pi(36 - h^2)h$ |
| ١٣ - $y = x^3 + 3x$ | ١٤ - $u(x) = -(x - 3)^4$ | ١٥ - $f(x) = x^4 - 4x$ |
| ١٦ - $h(x) = x(x + 4)^3$ | ١٧ - $y = x^4 - x^3$ | ١٨ - $F(x) = x^4 - x^2 - 1$ |
| ١٩ - $z = (x^2 - a^2)^2, a > 0$ | ٢٠ - $f(x) = (2x^2 - 5x - 3)^2$ | ٢١ - $F(y) = (y + 2)^5$ |
| ٢٢ - $s = 5t^2 - 2t^5$ | ٢٣ - $y = \frac{1}{3}x^5 - 3x^3$ | ٢٤ - $y = \frac{1}{3}x^5 - 3x^3$ |
| ٢٥ - $y = \frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{3}x^4$ | ٢٦ - $h(x) = (x - 2)^2(x + 3)^3$ | ٢٧ - $f(x) = x^5/5 - 4x^3/3 + 4x$ |
| ٢٨ - $f(x) = x^5/5 - 4x^3/3 + 4x$ | ٢٩ - $y = x(c + x)^2(c - x)^3, c > 0$ | ٣٠ - $f(x) = 10/(x^2 + 2)$ |
| ٣١ - $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$ | ٣٢ - $y = c - a(x - b)^{1/3}; a, b, c > 0$ | ٣٣ - $f(x) = 8 - 2(x - 3)^{2/3}$ |
| ٣٤ - $y = x^{1/3}(4 - x)$ | ٣٥ - $y = c + b(x - a)^{2/3}; a, b, c > 0$ | ٣٦ - $g(r) = r^{2/3}(r - 10)$ |
| ٣٧ - $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$ | ٣٨ - $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 16x}$ | |

$$F(x) = |x| + x \quad - ٤٠ \quad f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-1} \quad - ٣٩$$

$$y = |x^3 - x| \quad - ٤١$$

خطط المنحنيات الآتية وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للميل فى الفترات المعطاة

$$y = x^4 - 4x - 2; [-1, 2] - ٤٣ \quad y = x^3 - x^2 - x - 1; [0, 2] - ٤٢$$

$$y = x^5 - 5x + 3; [-2, 2] - ٤٥ \quad y = 3x^4 - 4x^3; [0, 2], [0, 2), (0, 2] - ٤٤$$

$$y = x^4 + 2x^3 - 36x^2 + 12x; [-4, 4] - ٤٦$$

٤٧ - اثبت أن $x^2 - 2x + 3 > 0$ لجميع قيم x . (ارشاد : أوجد القيمة الصغرى للمقدار الجبرى)

٤٨ - اثبت أن $x^2 - x + 1$ يكون موجباً لجميع قيم x .

٤٩ - اثبت أن $-x^3 + 9x - 11$ يكون سالباً لجميع $x > -2$.

٥٠ - خطط المنحنى $y = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 2$ (أ) كم مرة يقطع المنحنى المحور السينى ؟ أين يكون ذلك بالتقريب ؟ (ب) أجب عن (أ) اذا أضفنا 4 الى جميع قيم y ، (ج) أجب عن (أ) اذا طرحنا 4 من جميع قيم y .

٥١ - اثبت أن المعادلة $x^9 + x + 7 = 0$ لها بالضبط جذر حقيقى واحد . (ارشاد : اعتبر الشكل البيانى لـ $y = x^9 + x + 7$).

٥٢ - اثبت أن المعادلة $x^5 + 3x^3 + 4x + 5 = 0$ لها جذر حقيقى واحد فقط وحدد موقعه بين عددين صحيحين متتاليين .

٥٣ - حدد مواقع الجذور الحقيقية للمعادلة $x^4 - 14x^2 - 2 = 0$ بين أعداد صحيحة متتالية .

٥٤ - اثبت أن جميع الجذور الحقيقية للمعادلة $x^3 + 6x^2 + 12x + 1 = 0$ سالبة .

٥٥ - لاي قيم b تكون المعادلة $x^4 - 4x + b = 0$ ليس لها جذر حقيقى ؟ (ارشاد : اعتبر الشكل البيانى لـ $y = x^4 - 4x + b$).

٥٦ - المعادلة من الدرجة الثالثة $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ لا يمكن أن يكون لها أكثر من ثلاثة جذور حقيقية لكن قد يكون لها أقل . وضع الاحتمالات بيانياً بتخطيط المنحنى $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. صف كيف يمكن استخدام المشتقة لتحديد عدد الجذور الحقيقية لمعادلة من الدرجة الثالثة . وضع بالمعادلة $2x^3 + 9x^2 + 9 = 0$.

٥٧ - لاي قيم a تكون المعادلة $x^3 + 3x^2 - 9x + a = 0$ لها بالضبط جذر حقيقى واحد ؟ لها جذران حقيقيان متباينان ؟ لها ثلاثة جذور حقيقية متباينة ؟

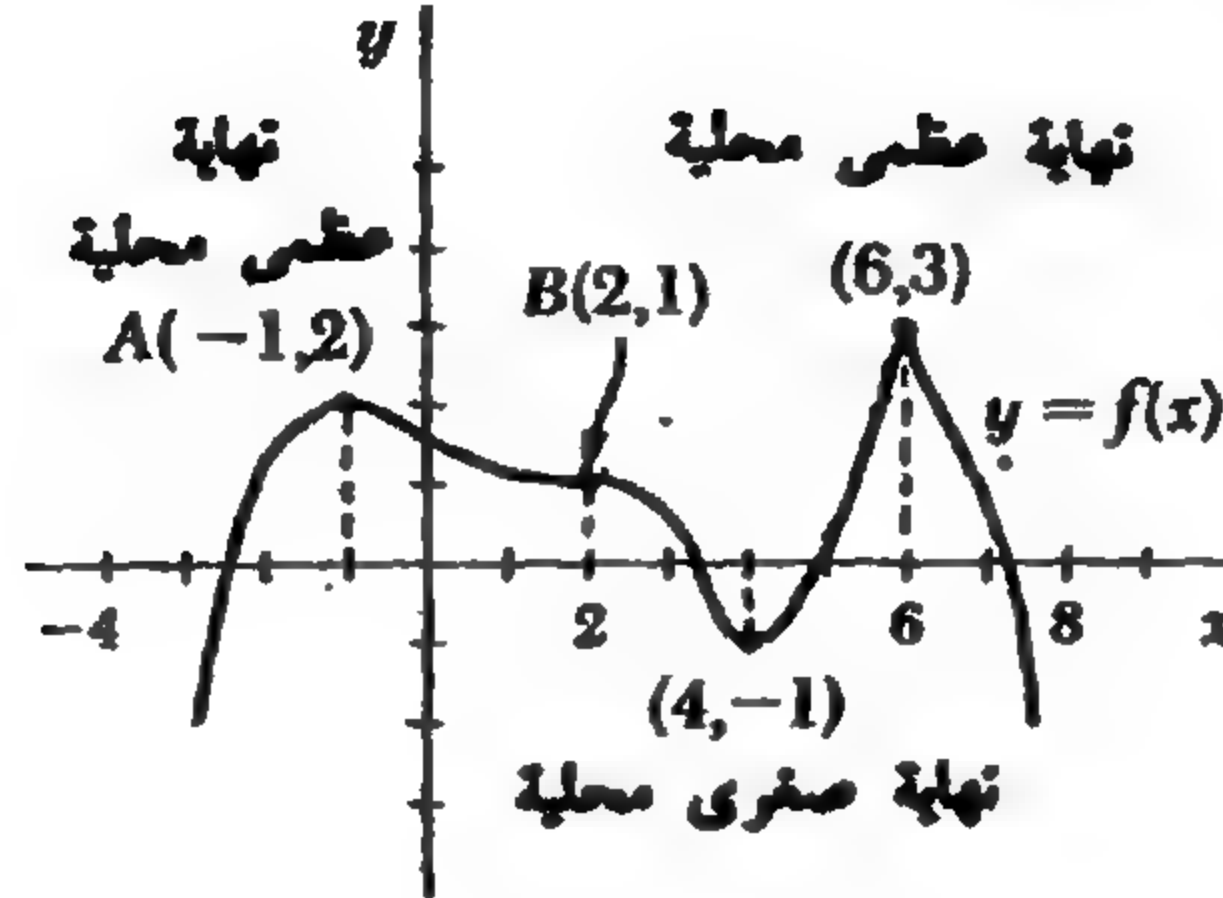
٥٨ - اذا كانت $ax + b/x \geq 0$ لجميع $x > 0$ ، حيث c و b و a ثوابت موجبة ، اثبت أن $ab \geq c^2/4$.

٥٩ - اذا كانت r عدداً كسرياً أكبر من 1 ، اثبت أن $x^r - 1 - r(x-1) \geq 0$ لجميع $x > 0$.

٦٠ - اثبت أن المعادلة $x^n - nx + c = 0$ ، حيث n عدد صحيح أكبر من 2 وحيث c مقدار ثابت ، لا يمكن أن يكون لها أكثر من جذر حقيقى واحد فى الفترة $[-1, 1]$.

النهايات العظمى والصغرى المحلية

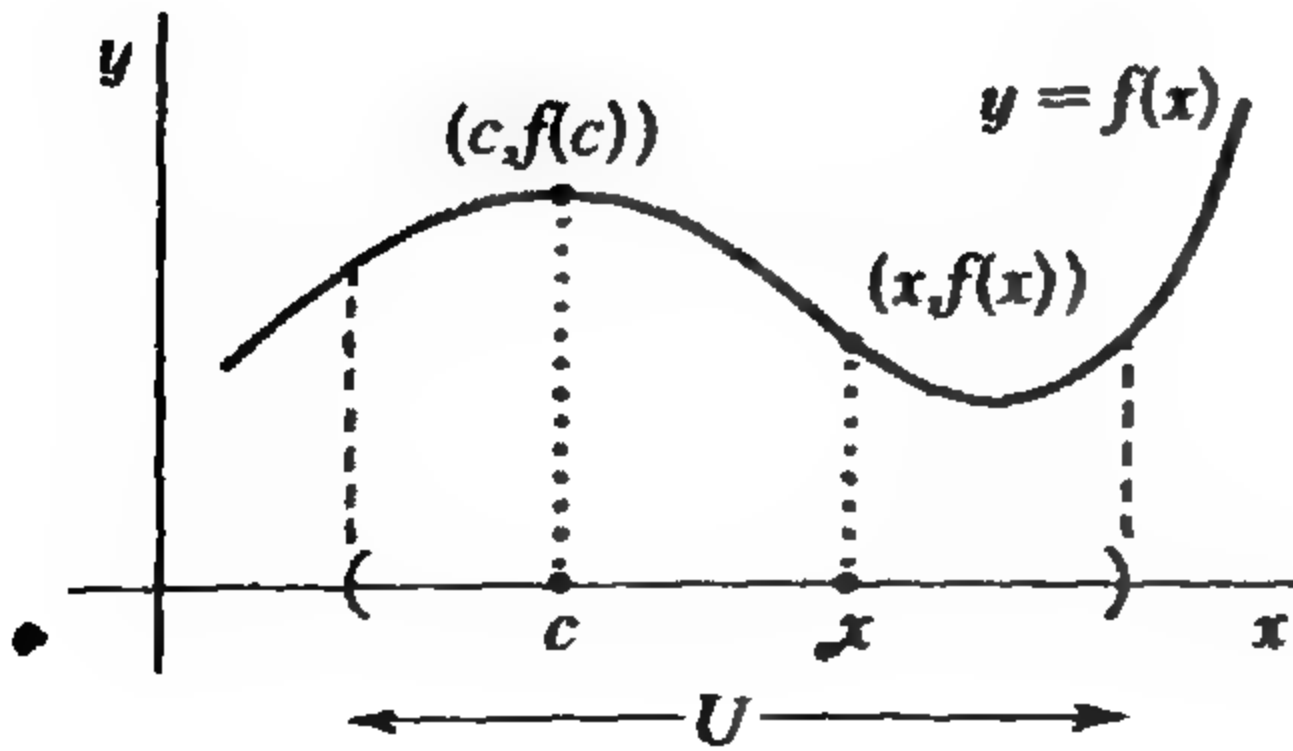
النقطة $A(-1,2)$ ليست أعلى نقطة على المنحنى $y=f(x)$ في الشكل ٤-٢٧ ، لكن هي أعلى نقطة في القرب المباشر . لهذا السبب تسمى A نقطة نهاية عظمى محلية على المنحنى ، والدالة f يقال أن لها نهاية عظمى محلية عند -1 ، بالمثل ، $(4,-1)$ هي نقطة نهاية صغرى محلية ، والدالة f لها نهاية صغرى محلية عند 4 . أيضاً الدالة لها نهاية عظمى محلية عند 6 ، لكن عند 2 الدالة ليس لها نهاية عظمى محلية ولا نهاية صغرى محلية . في التعريف الآتي ، الجوار U يعطى دقة للكلمتين القرب المباشر المستخدمتين أعلاه .



شكل ٤-٢٧

٤-٢٧ تعريف . الدالة f يكون لها نهاية عظمى محلية عند c اذا كان يوجد جوار U لـ c بحيث أن $f(x) < f(c)$ لجميع $x \neq c$ في U (شكل ٤-٢٨) . الدالة لها نهاية صغرى محلية عند c اذا كانت $f(x) > f(c)$ لجميع $x \neq c$ في U .

لاحظ أن المتباينة القاطعة ($>$ أو $<$) تكون مطلوبة للقيمة القصوى المحلية لكن المتباينة الضعيفة (\geq أو \leq) فقط ، تكون مطلوبة للقيمة القصوى في فترة . التعريف يتضمن أنه اذا كانت f لها نهاية عظمى محلية عند c ، فإن $f(c)$ هي القيمة العظمى للدالة f في الفترة المفتوحة U ، ومن ثم بالنظرية ٤-٣ ، c يجب أن تكون عدداً حرجياً . نفس الشيء يكون صحيحاً للنهاية الصغرى المحلية .



شكل ٤-٢٨
لها نهاية عظمى محلية عند c لان
 $f(x) < f(c)$ لجميع $x \neq c$ في U .

* القيمة العظمى المحلية تكون أكثر اتفاقاً مع اصطلاحنا السابق ، لكن سنستخدم هذا التمييز . المصطلح نهاية عظمى نسبية كثيراً ما يستخدم للنهاية العظمى المحلية .

٤-١٣ نظرية . كل قيمة قصوى محلية للدالة يجب أن تحدث عند عدد حرج .

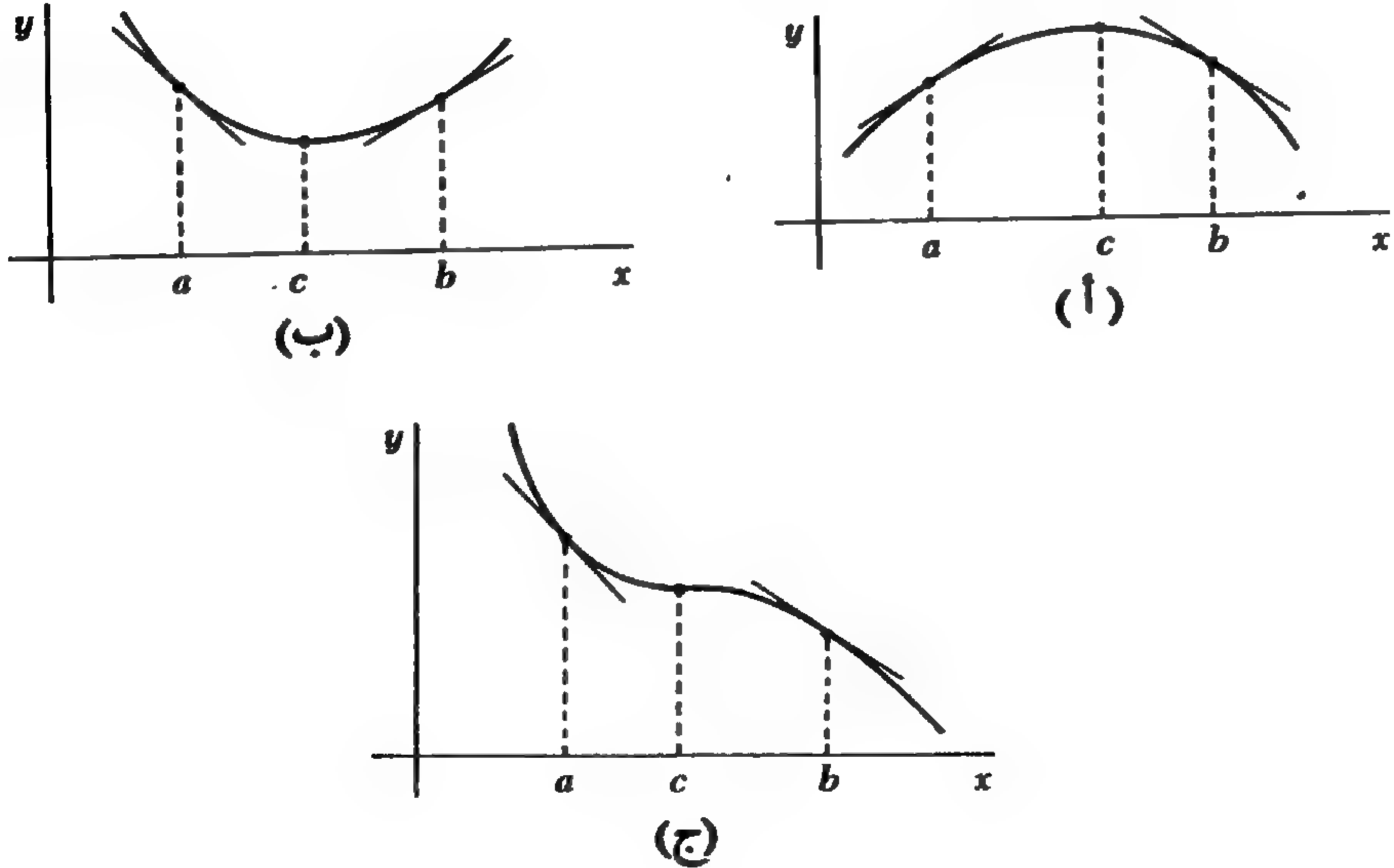
العكس ليس صحيحاً . الدالة ليس ضرورياً أن يكون لها قيمة قصوى محلية عند كل عدد حرج . مثل هذا الوضع يحدث عند B في شكل ٤-٢٧ . لكن واضح منطقياً أن f يكون لها نهاية عظمى محلية عند عدد c إذا كان المنحنى صاعداً قبيل النقطة $P(c, f(c))$ وهابطاً عقب P ويكون لها نهاية صغرى محلية إذا كان المنحنى هابطاً قبيل P وصاعداً عقب P . إذا كان المنحنى صاعداً على جانبي P أو هابطاً على جانبي P ، فإنه لا يمكن أن توجد قيمة قصوى محلية هناك . النظرية التالية اختبار لتحديد ما إذا كان العدد الحرج يعطى قيمة قصوى محلية وإذا كان كذلك فمن أى نوع .

٤-١٤ اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية . لتكن c عدداً حرجاً للدالة f . اختر عددين a و b حيث $a < c < b$ وبحيث أن f تكون متصلة في $[a, b]$ وليس لها عدد حرج في الفترة خلاف c .

(أولاً) إذا كانت $f'(b) < 0$ و $f'(a) > 0$ ، فإن f يكون لها نهاية عظمى محلية عند c (شكل ٤-٢٩ أ) .

(ثانياً) إذا كانت $f'(b) > 0$ و $f'(a) < 0$ ، فإن f يكون لها نهاية صغرى محلية عند c (شكل ٤-٢٩ ب) .

(ثالثاً) إذا كانت $f'(b)$ و $f'(a)$ كليهما موجبتين أو سالبتين ، فإن f لا يكون لها نهاية عظمى محلية أو نهاية صغرى محلية عند c (شكل ٤-٢٩ جـ) .



شكل ٤-٢٩

(أ) إذا كانت $f'(b) < 0$ و $f'(a) > 0$ فإن f لها نهاية عظمى محلية عند c (ب) إذا كانت $f'(b) > 0$ و $f'(a) < 0$ فإن f لها نهاية صغرى محلية عند c (جـ) إذا كانت $f'(b) < 0$ و $f'(a) < 0$ فإن f ليس لها نهاية عظمى محلية أو نهاية صغرى محلية عند c .

البرهان . نبرهن (ثانياً) ونترك (ثالثاً) و (أولاً) للقارئ (المسألة ٢٥) . نحتاج هنا الى صورة بديلة للنظرية ٤ - ١١ برهانها مماثل تماماً : لتكن f متصلة في الفترة I وليس لها عدد حرج في الداخل . عندئذ تكون f متزايدة أو متناقصة في الفترة حسب كون مشتقتها عند عدد ما في الفترة موجبة أو سالبة . بتطبيق هذه النظرية على الفترتين $[c, b]$ و $[a, c]$ هنا . نرى أن $f'(b) > 0$ و $f'(a) < 0$ تضمنان أن f تتناقص في الفترة $[a, c]$ وتزايد في الفترة $[c, b]$. ومن ثم $f(x) > f(c)$ لجميع $x \neq c$ في الفترة $[a, b]$ ، وهذا هو الشرط أن الدالة f يكون لها نهاية صفري محلية عند c .

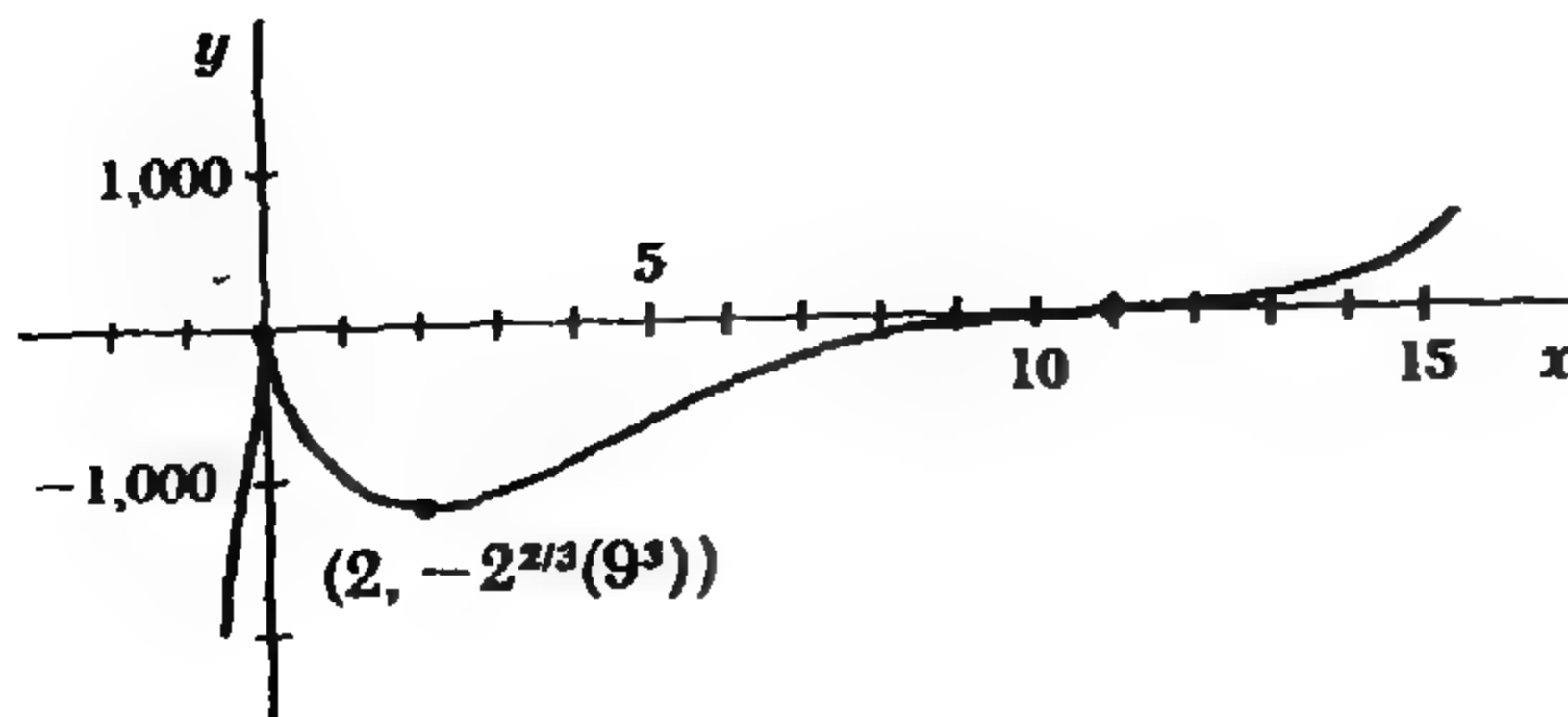
إذا خطط الشكل البياني لدالة بإيجاد الفترات حيث الدالة تكون متزايدة ومتناقصة ، كما فعلنا في الأمثلة بالبند ٤ - ٤ ، فالتناقص نتيجة لذلك على القيم القصوى المحلية . لكن أحياناً تكون القيم القصوى المحلية هي كل ما نريد . يمكننا إيجادها بدون تخطيط الشكل البياني بأن نوجد جميع الأعداد الحرجة . النظرية ٤ - ١٣ تضمن أن القيم القصوى المحلية ستكون من بينها ، رغم أنه قد توجد نقط أخرى أيضاً . يمكن عندئذ اختبار كل عدد حرج باختبار المشتقة الأولى ٤ - ١٤ لتحديد ما إذا كانت هناك قيمة قصوى محلية ومن أي نوع هي .

مثال ١ . أوجد أين تحدث القيم القصوى المحلية للدالة $g(x) = x^{2/3}(x-11)^3$.

الشكل البياني مخطط في الشكل ٤ - ٣٠ ، لكن سوف نحل المسألة بدون الرجوع اليه . من المشتقة

$$g'(x) = \frac{11(x-2)(x-11)^2}{3x^{1/3}}$$

نرى أن الأعداد الحرجة هي ١١ و ٢ و ٠ . وهي الاحتمالات الوحيدة حيث يمكن أن تحدث القيم المحلية . لكن قد يكون واحداً أو أكثر لا يعطى قيمة قصوى محلية . نختبر كل عدد حرج بدوره باختبار المشتقة الأولى ٤ - ١٤ . للعدد الأول ، نختار $a=-1, b=1$ الدالة g متصلة في الفترة $[-1, 1]$ وليس لها عدد حرج هناك غيره . بما أن $g'(1) < 0$ و $g'(-1) > 0$ فإن g لها نهاية عظمى محلية عند ٠ من ٤ - ١٤ (أولاً) . لاختبار العدد الحرج ٢ ، نأخذ $a=1, b=8$. بما أن $g'(8) > 0$ و $g'(1) < 0$ ، فإن g لها نهاية صفري محلية عند ٢ من ٤ - ١٤ (ثانياً) . للعدد الحرج ١١ ، نأخذ $a=10, b=12$ ، ونرى أن $g'(12) > 0$ و $g'(10) > 0$ فنستنتج من ٤ - ١٤ (ثالثاً) أن g ليس لها نهاية عظمى محلية أو نهاية صفري محلية عند ١١ .



شكل ٣٠ - ٤

الشكل البياني لـ $g(x) = x^{2/3}(x-11)^3$.

مسائل

١ - أى من الدوال المخططة فى الشكل ٤ - ٣١ لها نهاية عظمى محلية أو نهاية صغرى محلية عند c ؟

٢ - اثبت أن الدالة التى شكلها البيانى مخطط فى الشكل ٤ - ٢٤ لها نقطة نهاية عظمى محلية عند $(0,0)$ ونقطة نهاية صغرى محلية عند $(2,-4)$ وذلك بالتأشير على المحور السينى بجوارين للنقطتين 2 و 0 يحققان التعريف ٤ - ١٢ . الى أى مدى يساراً ويميناً يمكن اختيار النقطتين الطرفيتين لجوار 2 ؟

أوجد أين تحدث القيم القصوى المحلية للدوال الآتية ، باستخدام اختبار المشتقة الأولى .

$$٣ - f(x) = 10 - 2x^2 \quad - \quad ٤ - f(x) = x^2 - 2x - 3 \quad - \quad ٥ - f(x) = -x^3 + 1$$

$$٦ - v(y) = -y^3 - 7y + 1 \quad - \quad ٧ - f(u) = u^3 - 12u^2 + 36u \quad - \quad ٨ - g(t) = t^{5/3}$$

$$٩ - f(x) = 4x^3 - x^4 \quad - \quad ١٠ - f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 30x^2 - 36x - 1$$

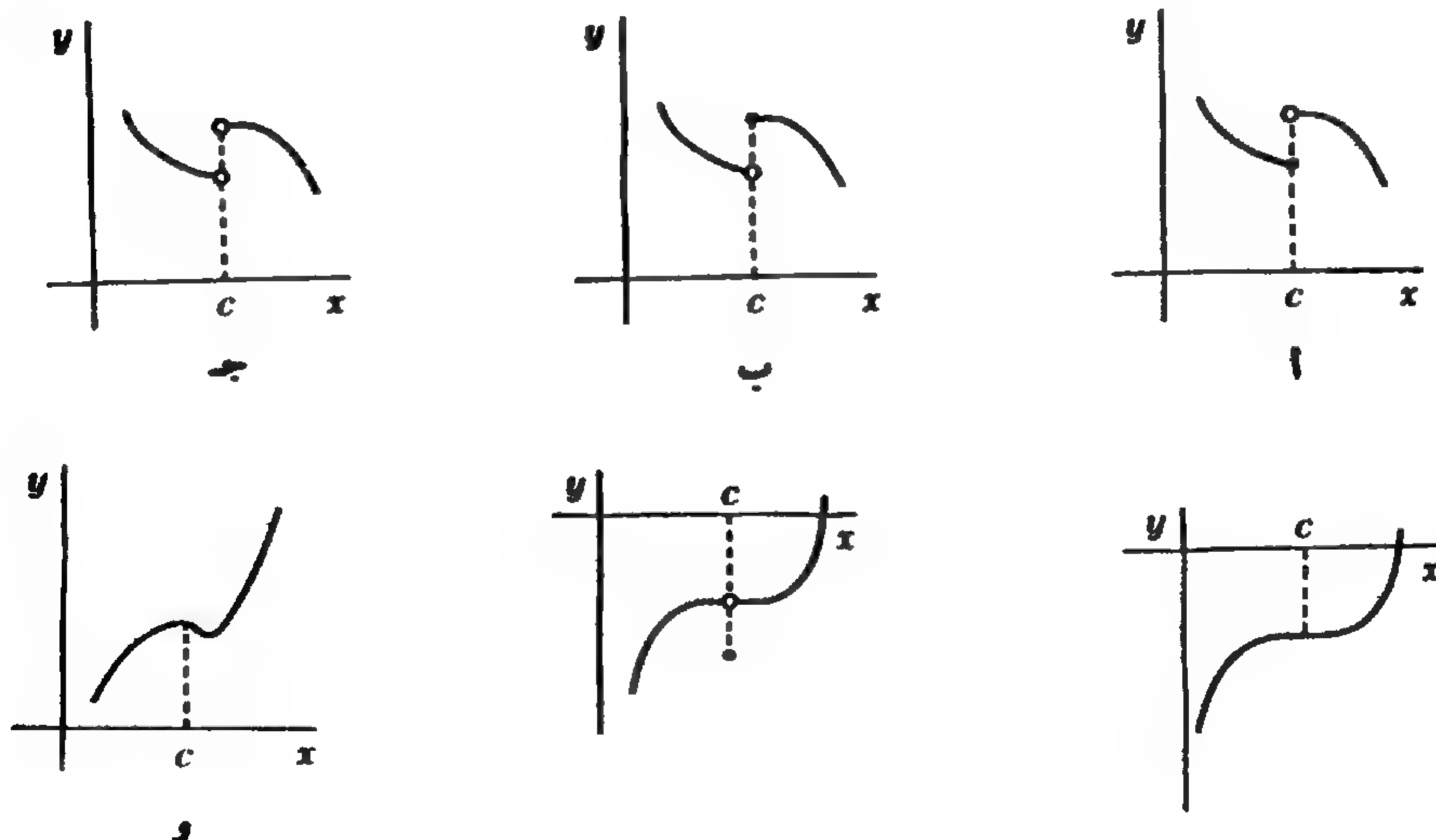
$$١١ - G(x) = -(x+4)^4 \quad - \quad ١٢ - s(r) = (r+2)^3(r-3)^2$$

$$١٣ - g(x) = x^n \text{ حيث } n \text{ عدد صحيح موجب } ١٤ - f(x) = x + 4/x$$

$$١٥ - f(z) = z^3 + 3/z \quad - \quad ١٦ - f(x) = x^3 - 3/x \quad - \quad ١٧ - F(x) = x^2 + 4/x^2$$

$$١٨ - h(x) = x^{1/3}(x-5) \quad - \quad ١٩ - f(x) = x^{5/3} + 5x^{2/3} \quad - \quad ٢٠ - f(t) = \sqrt[3]{t}(t-2)^2$$

$$٢١ - h(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4x}$$



شكل ٤ - ٣١

- ٢٢ - عین b و a بحيث تكون -1 عدداً حرجاً للدالة $g(x)=x^3+ax^2+bx$ وتكون $g(-1)=4$. هل
 نقطة نهاية عظمى محلية أم نقطة نهاية صفرى محلية للشكل البياني للدالة g ؟
 ٢٣ - اذا كانت الدالة لها نهاية عظمى محلية واحدة ونهاية صفرى محلية واحدة ، هل يتحتم أن
 تكون القيمة العظمى المحلية أكبر من القيمة الصفرى المحلية ؟
 ٢٤ - لتكن الدالة f متصلة في فترة ما ، قد تكون لا نهائية ، ولها عدد حرج واحد فقط c في
 الداخل . اثبت أنه حسب كون الدالة f لها نهاية عظمى محلية أو نهاية صفرى محلية عند c ،
 تكون f لها قيمة عظمى أو صفرى في الفترة وأن هذه تحدث عند c .
 ٢٥ - أثبت (أ) الجزء (أولاً) ، (ب) الجزء (ثالثاً) من اختبار المشتقة الأولى ٤ - ١٤ .
 ٢٦ - اذا كانت دالة f تتزايد في فترة الى يسار العدد c وتتناقص في فترة الى يمين c ، فان f يكون لها
 نهاية عظمى محلية عند c . هل العكس يكون صحيحاً ؟ أى اذا كانت الدالة لها نهاية عظمى
 محلية عند c ، فهل يجب أن توجد فترة ما $[a,b]$ تشمل c داخلها بحيث أن f تتزايد في $[a,c]$
 وتتناقص في $[c,b]$ ؟

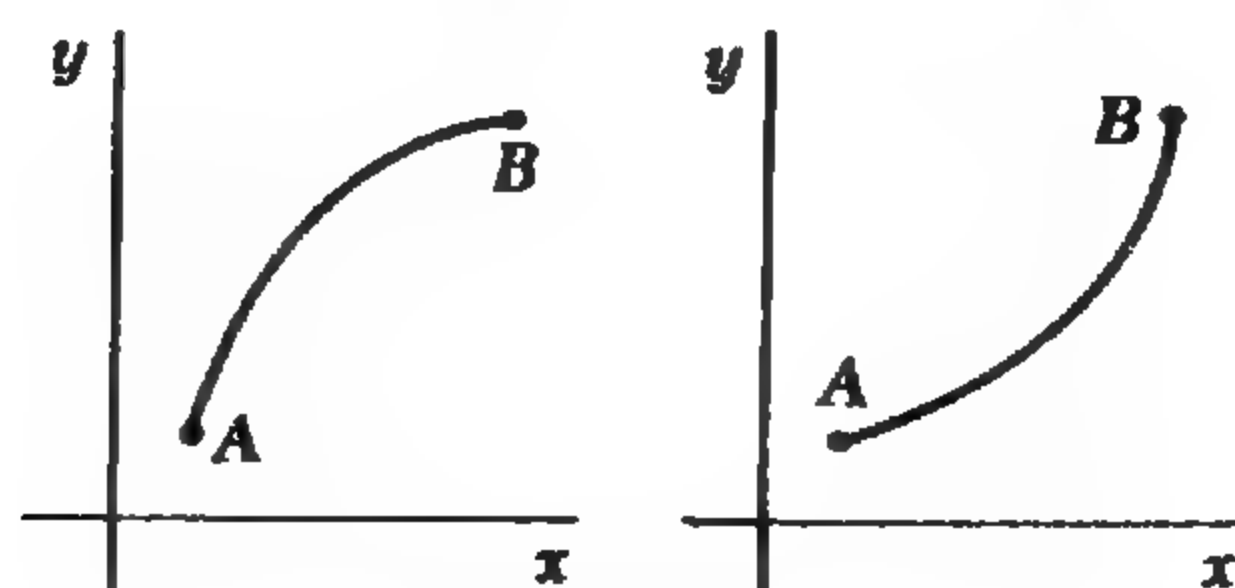
٦ - ٤

التفرع ونقط الانقلاب

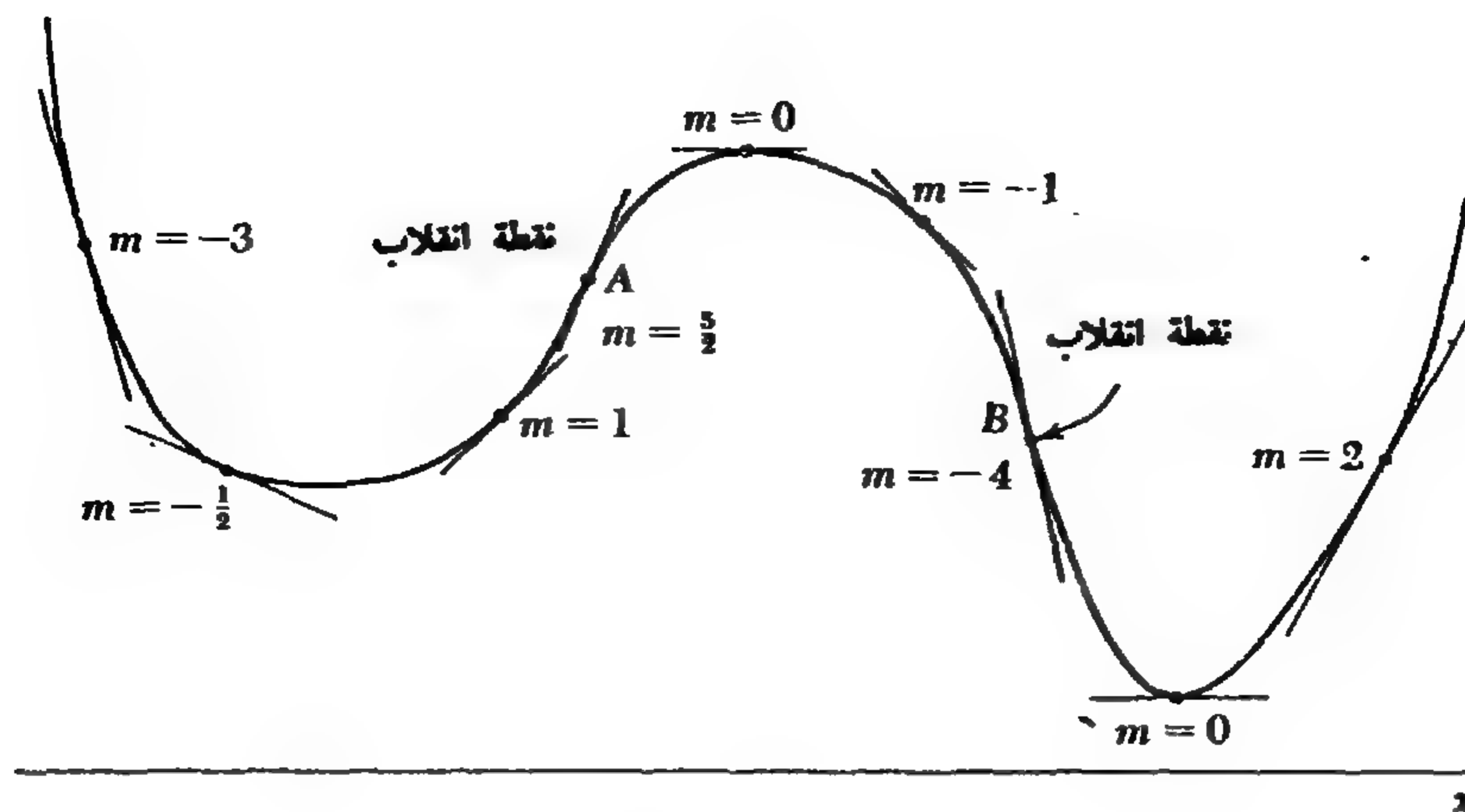
المنحنيان المخططان في الشكل ٤ - ٣٢ كلاهما يرتفع من A الى B لكن لهما شكلان بيانيان
 مختلفان تماماً . واضح أنه يمكننا عمل تخطيط أفضل للمنحنى اذا كنا نعلم في أى اتجاه ينحن
 عند صعوده أو هبوطه . المشتقة تعطينا معلومات عن ذلك أيضاً .

الشكل البياني لدالة نمطية مخطط في الشكل ٤ - ٣٣ . أجزاء الشكل البياني الى يسار النقطة A
 والى يمين النقطة B يقال أنها مقعرة الى أعلى والجزء بين A و B يقال أنه مقعر الى تحت .
 قبل أن نتمكن من ايجاد دليل للتفرع لأعلى أو لأسفل ، يجب أن نشرح بعناية أكثر ماذا نقصد بهذين
 التعبيرين .

عندما تتحرك نقطة من اليسار الى اليمين على المنحنى في شكل ٤ - ٣٣ ، الميل m يزداد حتى
 نصل الى النقطة A . بعد ذلك يبدأ الميل في التناقص ويستمر في التناقص حتى نصل الى النقطة
 B . الى يمين B يتزايد الميل مرة أخرى ويستمر في التزايد . بما أن هذه الخاصية يمكن التعبير
 عنها جبرياً فاننا نختارها كتعريف للتفرع .



شكل ٤ - ٣٢



شكل ٤-٣٣

الميل يزداد إلى A ، يتناقص من A إلى B ، ويزداد بعد B .

٤-١٥ تعريف : لتكن الدالة f لها مشتقة في الفترة I ، التي قد تكون لا نهائية . الشكل البياني للدالة f يكون مقعراً لأعلى أو مقعراً لأسفل في الفترة I حسب كون الدالة المشتقة f' تزايد أو تناقص في I .

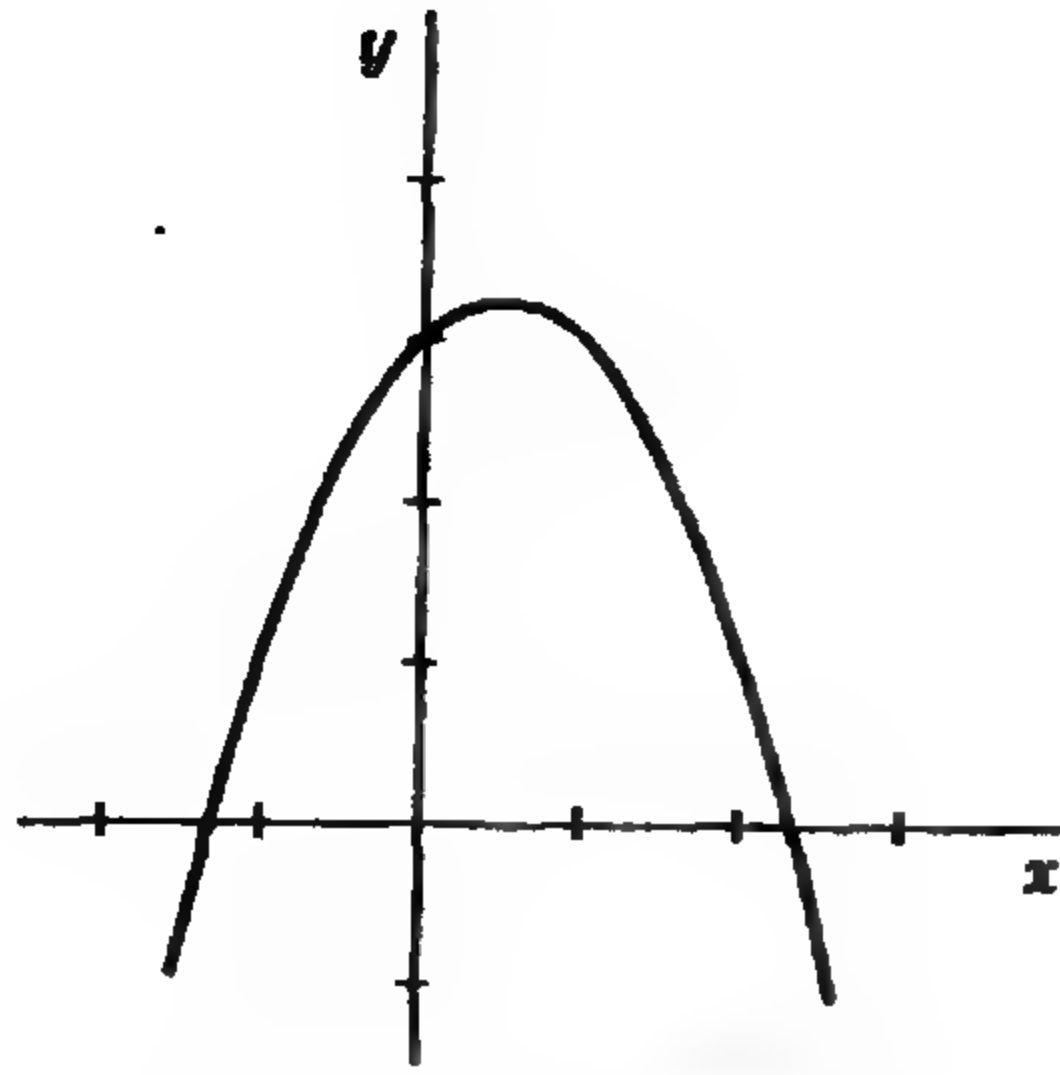
بمعنى آخر : الشكل البياني يكون مقعراً لأعلى في الفترة I اذا كانت $f'(x_1) < f'(x_2)$ لجميع x_1, x_2 في I حيث $x_1 < x_2$ ، وبالمثل بالنسبة الى التفرع لأسفل . النظرية القادمة تعطى اختباراً بسيطاً للتفرع لأعلى أو لأسفل .

٤-١٦ نظرية . لتكن الدالة f لها مشتقة متصلة في الفترة I ، التي قد تكون لا نهائية . (أولاً) الشكل البياني للدالة f يكون مقعراً لأعلى في I اذا كانت $f''(x) > 0$ لجميع x داخل الفترة I .

(ثانياً) الشكل البياني للدالة f يكون مقعراً لأسفل في الفترة I اذا كانت $f''(x) < 0$ لجميع x داخل الفترة I .

البرهان : النظرية ٤-١٥ تكون صحيحة لأي دالة تحقق فروض تلك النظرية . بوجه خاص ، يمكن تطبيقها على الدوال التي هي مشتقات دوال أخرى . من ثم اذا كانت $f''(x) = Df'(x) > 0$ لجميع x داخل الفترة I ، فان الدالة f' تكون متزايدة في I والشكل البياني يكون مقعراً لأعلى في I بالتعريف ٤-١٥ . بالمثل ، اذا كانت $f''(x) < 0$ لجميع x داخل الفترة I ، فان f' تكون متناقصة والشكل البياني يكون مقعراً لأسفل في I .

نوع التفرع يكون مستقلاً عما اذا كان المنحني صاعداً أم هابطاً . المنحني الصاعد يمكن أن يكون مقعراً لأعلى أو لأسفل (انظر الشكل ٤-٣٢) ، وبالمثل للمنحني الهابط . يمكننا أن نتذكر



شكل ٣٥-٤

الشكل البياني للدالة $g(x) = -x^2 + x + 3$ مقعر لأسفل في كل فترة .

يسرع الماء

يسقط الماء

شكل ٣٤-٤

الحالتين بأن نذكر أن : إذا كانت $f''(x)$ موجبة ، فإن المنحنى يكون على شكل كوب « ويحتفظ بالماء » ، وإذا كانت $f''(x)$ سالبة ، فإن المنحنى « يسقط الماء » (الشكل ٣٤-٤) .
الشكل البياني للدالة $g(x) = -x^2 + x + 3$ هو القطع المكافئ المخطط في شكل ٣٥-٤ . لأن $g''(x) = -2 < 0$ لكل x ، فإن الشكل البياني مقعر لأسفل في كل فترة .

نفرض أن f متصلة في الفترة I وأن $f''(x)$ موجودة في كل مكان في الداخل ولا تساوى صفرأ أبداً هناك . بتطبيق النظرية ١١-٤ على الدالة المشتقة f' ، أما $f''(x) > 0$ لجميع x في الداخل والشكل البياني للدالة f يكون مقعراً لأعلى في I ، وأما $f''(x) < 0$ لجميع x في الداخل والشكل البياني للدالة f يكون مقعراً لأسفل في I . يمكن تعيين أي الحالتين بإيجاد إشارة $f''(x)$ عند نقطة مناسبة x داخل الفترة I . سنوضح كيف نعين الفترات حيث المنحنى يكون مقعراً لأعلى أو لأسفل بعد أن ندرس نقط الانقلاب .

عند النقطتين A و B في الشكل ٣٣-٤ التغير يتغير من أعلى لأسفل أو العكس . مثل هذه النقط تسمى نقط انقلاب وتتميز بأنها النقط التي بالقرب المباشر منها يكون المنحنى مقعراً لأعلى على أحد جانبي النقطة ومقعراً لأسفل على الجانب الآخر . التعريف الآتي يجعل هذا محكماً .

١٧-٤ تعريف . النقطة $(c, f(c))$ تكون نقطة انقلاب للشكل البياني للدالة f إذا كانت f متصلة عند c إذا كان يوجد جوار (a, b) لـ c بحيث أن الشكل البياني يكون مقعراً لأعلى في (a, c) ومقعراً لأسفل في (c, b) أو العكس .

إذا كان عند نقطة انقلاب $(c, f(c))$ دالة المشتقة الثانية f'' متصلة وموجبة ، أي كانت $f''(c) > 0$ ، فإنه لابد أن يوجد (بالمسألة ٢٠ بيند ٩-٢) جوار لـ c تكون فيه $f''(x) > 0$ والمنحنى لا يمكنه تغيير اتجاهه تقعره عند c . بالمثل ، لا يمكن أن تكون f'' متصلة وسالبة عند c . هذا يتضمن أن أية نقطة انقلاب يمكن حدوثها فقط عند c حيث $f''(c) = 0$ تكون متصلة وحيث $f''(c) = 0$

أو حيث f'' لا تكون متصلة ، وهذا يكافئ أن $f''(c)=0$ أو f'' لا تكون متصلة عند c . بربط هذه الملاحظة مع التعريف ٤-١٧ ، يكون لدينا الدليل الآز لنقط الانقلاب .

٤-١٨ . نظرية . النقطة $(c, f(c))$ تكون نقطة انقلاب للشكل البياني للدالة f إذا وإذا فقط تحقق جميع ما يأتي :

- (أولاً) f متصلة عند c .
- (ثانياً) $f''(c)=0$ أو f'' غير متصلة عند c .
- (ثالثاً) يوجد جوار (a, b) لـ c بحيث أن الشكل البياني يكون مقعراً لأعلى في (a, c) ومقعراً لأسفل في (c, b) أو العكس .

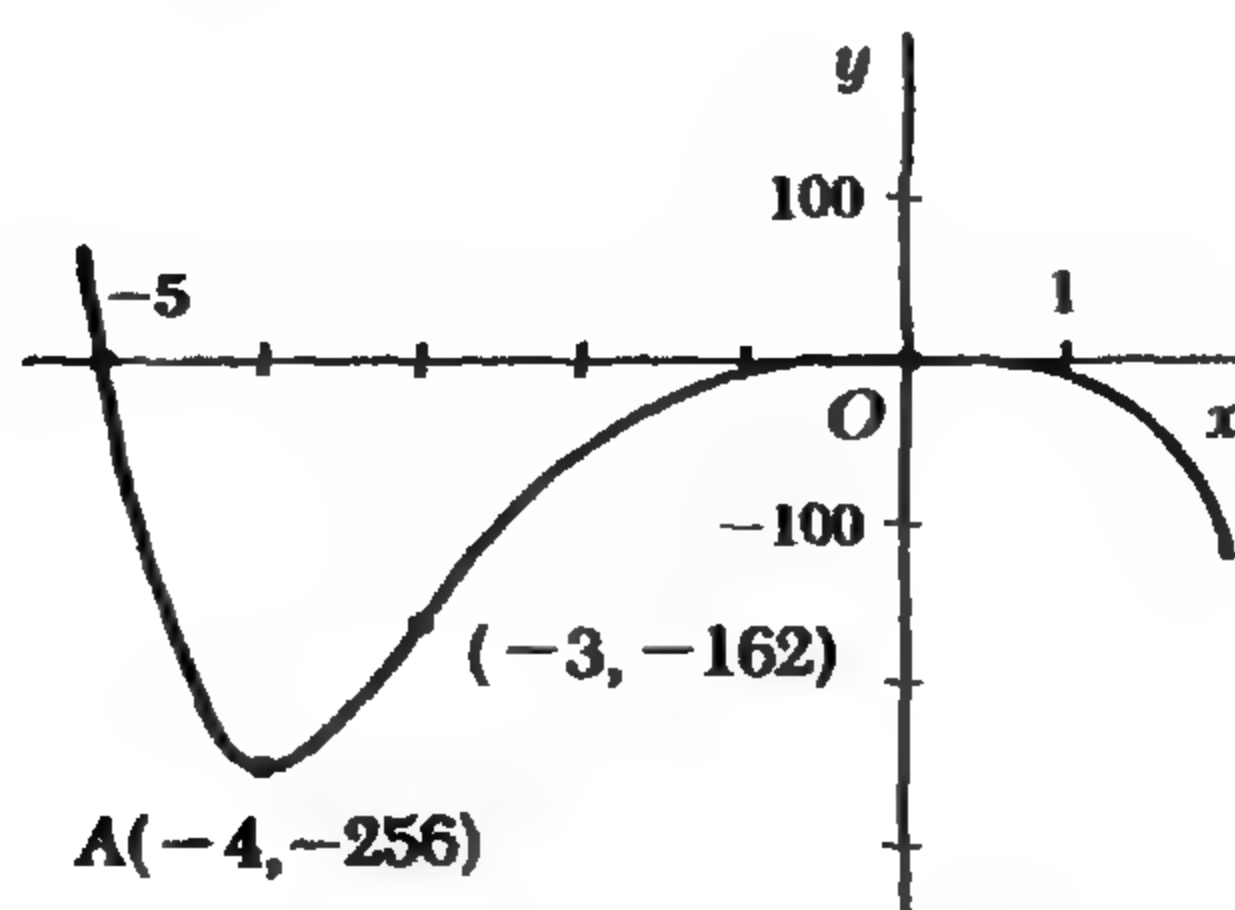
لاحظ أن الشرط (ثانياً) رغم أنه ضروري لنقطة الانقلاب ، فهو ليس كافياً . النقطة $(c, f(c))$ قد لا تكون نقطة انقلاب رغم أن $f''(c)=0$. هذه النظرية تمكنتنا من إيجاد نقط الانقلاب للمنحنى . نوجد أولاً جميع الأعداد c حيث $f''(c)=0$ أو حيث f'' ليست متصلة . الشرط (ثانياً) يؤكد لنا أن فئة النقط المناظرة على الشكل البياني ستحتوى جميع نقط الانقلاب ، إلا أن شبكتنا قد تكون اصطادات سمكاً آخر أيضاً . عندئذ نختبر كل c لنرى ما إذا كان المنحنى يغير تقعره هناك . لاحظ أن عند نقطة انقلاب ، المشتقة الأولى ، أن وجدت ، لها قيمة قصوى محلية والمماس يقطع المنحنى هناك ، (أنظر الشكل ٤-٣٣) أيضاً جدير بالذكر أن عند نقطة انقلاب حيث $f''(c)=0$ ، تكون c عدداً حرجياً للدالة f' .

مثال ١ . نخطط المنحنى $y = -x^5 - 5x^4$ ، مع إيجاد الفترات حيث يكون المنحنى مقعراً لأعلى ولأسفل وإيجاد نقط الانقلاب له .

لتكن $f(x) = -x^5 - 5x^4$. كما سبق ، نوجد أولاً أين تزايد f وأين تتناقص . لدينا

$$f'(x) = -5x^4 - 20x^3 = -5x^3(x + 4)$$

المنحنى له مماسان أفقيان عند $O(0,0)$ و $A(-4, -256)$ الجزءان المقطوعان من المحور السيني هما -5 و 0 . بتوقيع هذه النقط (شكل ٤-٣٦) ، نرى أن المنحنى يهبط حتى يصل A ، يرتفع من A إلى O ، ثم يهبط بعد ذلك .



شكل ٤-٣٦

الشكل البياني للمنحنى $y = -x^5 - 5x^4$.

ثم نوجد أين يكون المنحنى مقعراً لأعلى ولأسفل ونقط الانقلاب . بما أن

$$f''(x) = -20x^3 - 60x^2 = -20x^2(x + 3)$$

فإن $f''(x)$ تكون متصلة في كل مكان وتكون صفراً فقط عند -3 و 0 . النقطتان المناظرتان $(-3, -162)$ و $(0, 0)$ على المنحنى هما الاحتمالان الوحيدان لنقط الانقلاب ، لكن أياً منهما أو كلاهما قد لا تكون . العدان -3 و 0 ، اللذان هما العدان الحرجان للدالة f' ، يقسمان المحور السيني الى الفترات

$$(-\infty, -3], \quad [-3, 0], \quad [0, \infty)$$

حيث داخل كل منها $f''(x)$ تكون موجبة ولا تكون صفراً مطلقاً . لكل فترة ، أما $f''(x) > 0$ لجميع x في الداخل والمنحنى يكون مقعراً لأعلى في الفترة ، وأما $f''(x) < 0$ لجميع x في الداخل والمنحنى يكون مقعراً لأسفل في الفترة . يمكن تحديد أى الحالتين ، باختيار عدد في داخل كل فترة ، مثلاً 1 و -1 و -4 وإيجاد إشارة المشتقة الثانية هناك . بما أن $f''(-4) = -20(16)(-1) > 0$ إذن $f''(x) > 0$ لجميع x في الفترة $(-\infty, -3)$ والمنحنى يكون مقعراً لأعلى في $(-\infty, -3]$. بما أن $f''(-1) = -20(1)(2) < 0$ ، فإن $f''(x) < 0$ لجميع x في الفترة $(-3, 0)$ والمنحنى يكون مقعراً لأسفل في $[-3, 0]$. النقطة $(-3, -162)$ هي نقطة انقلاب لأن التغير يتغير هناك . بما أن $f''(1) = -20(1)(4) < 0$ فإن $f''(x) < 0$ لجميع x في الفترة $(0, \infty)$ والمنحنى يكون مقعراً الى أسفل في $[0, \infty)$. النقطة $(0, 0)$ ليست نقطة انقلاب لأن التغير لا يتغير هناك . هذا فقط ما نتوقعه اذا أننا وجدنا أن f لها نهاية عظمى محلية عند نقطة الأصل .

مثال ٢ . الدالة $f(x) = x^{1/3}(x-8)$ قد درست في مثال ٢ ، بيند ٤ - ٢٤ وخططت في الشكل ٤ - ٢٦ . أوجد الفترات حيث المنحنى يكون مقعراً لأعلى ولأسفل ونقط الانقلاب له .

لدينا

$$f''(x) = \frac{4(x+4)}{9x^{5/3}} \quad \text{و} \quad f'(x) = \frac{4(x-2)}{3x^{2/3}}$$

ونرى أن $f''(-4) = 0$ وأن $f''(0)$ لا توجد . واذا الاحتمالان الوحيدان لنقط الانقلاب هما النقطتان $(0, 0)$ و $(-4, 12\sqrt[3]{4})$. العدان 0 و -4 يقسمان المحور السيني الى الفترات

$$(-\infty, -4], \quad [-4, 0], \quad [0, \infty)$$

التي في كل منها يكون المنحنى مقعراً لأعلى أو لأسفل . بما أن

$$f''(-5) = \frac{4(-1)}{9(-5)^{5/3}} > 0, \quad f''(-3) = \frac{4(1)}{9(-3)^{5/3}} < 0,$$

$$f''(1) = \frac{4(5)}{9} > 0,$$

فان المنحنى يكون مقعراً لأعلى في الفترة الأولى ، وإلى تحت في الثانية ، وإلى أعلى في الثالثة ، فكلتا النقطتين $(0,0)$ و $(-4,12\sqrt[3]{4})$ هما نقطتا انقلاب .

معرفة أين يكون المنحنى مقعراً لأعلى أو لأسفل وتعيين مواقع نقط الانقلاب هي اجراءات ثانوية لتخطيط المنحنى ، مفيدة اذا أردنا تخطيطاً أكثر دقة . لأغراض كثيرة لا نحتاج الى مثل هذه الدقة .

مسائل

١ - خطط الشكل البياني لدالة f بحيث أن عند x تساوى 2 وبالقرب منها يتحقق أحد الشروط الآتية :

- أ - $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ ب - $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ ج - $f'(x) > 0, f''(2) = 0$
د - $f'(x) < 0, f''(x) > 0$ هـ - $f'(x) < 0, f''(x) < 0$ و - $f'(x) < 0, f''(2) = 0$
ز - $f'(2) = 0, f''(x) > 0$ ح - $f'(2) = 0, f''(x) < 0$ ط - $f'(2) = 0, f''(2) = 0$

٢ - خطط منحنى متصلاً $y=f(x)$ حيث $f''(x) > 0, f(2) = 0$ عند $x < 2$ و $f''(x) < 0$ عند $x > 2$.

٣ - خطط منحنى متصلاً $y=f(x)$ له الخواص الآتية :

$$f'(x) > 0, f(-3) = 0, f(0) = 2, f(4) = 5, f'(-3) = f'(4) = 0$$

اذا كانت : $f'(x) < 0, -3 < x < 4$. اذا كانت $x < -3$ أو $x > 4$: $f''(x) > 0$.

اذا كانت $x < 0$: $f''(x) < 0$ ، اذا كانت $x > 0$.

٤ - خطط منحنى متصلاً $y=f(x)$ حيث $f'(x) < 0$ عند $x < -1$ و $f'(x) > 0$ عند $x > -1$ ، وله إحدى

الخواص الآتية : (أ) $f'(x)$ توجد عند -1 (ب) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -1$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 1$

(ج) $f'(x) = -1$ عند $x < -1$ و $f'(x) = 1$ عند $x > -1$.

خطط المنحنيات الآتية ، مع ايجاد الفترات حيث المنحنى يكون مقعراً لأعلى ولأسفل ونقط الانقلاب له :

- ٥ - $y = x^2 + 3x - 4$ ٦ - $y = x^3$ ٧ - $y = 2x^3 + 3x^2 + 12x - 4$
٨ - $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ ٩ - $y = 4z^3 - 18z^2 + 15z$ ١٠ - $y = (x-1)^2(x+1)$
١١ - $y = x^4$ ١٢ - $V = 12r^2 - r^4$ ١٣ - $u = 3t^4 + 4t^3 + 1$
١٤ - $y = -3x^4 + 8x^3$ ١٥ - $y = (x^2 - 5)^2$ ١٦ - $y = (x-2)^4 - 24(x-2)^2$
١٧ - $y = -x^4 - 32x - 48$ ١٨ - $z = s^4 - 4s - 2$ ١٩ - $y = x^5 - 5x - 1$
٢٠ - $s = 3t^5 - 5t^3$ ٢١ - $y = -\frac{x^5}{5} + x^4$ ٢٢ - $y = x(x^2 - 10)^2$
٢٣ - $y = \frac{1}{x^2 + a^2}, a \neq 0$ ٢٤ - $y = \frac{4x}{1+x^2}$ ٢٥ - $y = (z-2)^{1/5}$
٢٦ - $y = x^{2/3} - 4$ ٢٧ - $y = x^{5/3}$ ٢٨ - $y = x^{2/3}(x+8)$
٢٩ - $y = 3x^{1/3} + 2x^2$ ٣٠ - $y = x^{2/3}(x-15)$

٣١- خطط المنحنى $y = 4 + 3x - x^3$ ، موضحاً الخط المماس عند نقطة الانقلاب أوجد معادلة المماس .

٣٢- أوجد معادلة المماس للمنحنى $y = x^3 - x^2 + x - 2$ عند نقطة الانقلاب .

٣٣- أوجد نقط الانقلاب للمنحنى $y = x^2 - 1/3x^3$ ومعادلات الخطوط المماسية هناك .

٣٤- عين b و a بحيث أن المنحنى $y = x^3 + ax^2 + bx$ يكون له نقطة انقلاب عند $(-3, 1)$.

٣٥- عين c بحيث أن العمودى للمنحنى $y = c(x^2 - 5)^2$ عند نقطة انقلاب تمر بنقطة الأصل .

٣٦- أثبت أن المنحنى التكعيبي العام $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ يكون متماثلاً بالنسبة الى نقطة الانقلاب . (ارشاد : انقل نقطة الأصل الى نقطة الانقلاب) .

٣٧- أوجد معادلة منحنى $y = f(x)$ بحيث أن $f'(x) > 0$ لـ x عند وقرب 0 و $f''(0) = 0$ ، ويحقق أحد الشروط الآتية : (أ) يكون مقعراً لأسفل على يسار 0 ومقعراً لأعلى على يمين 0 (ارشاد : ادرس $f''(x) = 6x$ ، (ب) يكون مقعراً لأعلى على كلا جانبي 0 ، (ج) لا يكون مقعراً لأعلى ولا مقعراً لأسفل على اليسار وعلى اليمين لنقطة الأصل 0 .

٣٨- هل عكس النظرية ٤- ١٦ (أولاً) صحيح ؟ أى اذا كان الشكل البيانى للدالة f مقعراً لأعلى في I ، فهل $f''(x) > 0$ لجميع x داخل I ؟

٣٩- لتكن a جذراً لكثيرة حدود $P(x)$. أثبت أن a تكون جذراً مزدوجاً لكثيرة الحدود $P(x)$ اذا واذا فقط كانت جذراً للمشتقة $P'(x)$. (ارشاد : استخدام نظرية العوامل ١- ٢١) .

٤٠- أثبت أن كثيرة الحدود $P(x)$ تكون مماسة للمحور السيني عند $(a, 0)$ اذا واذا فقط كانت a جذراً مكرراً .

٤١- أثبت أن كثيرة الحدود $P(x)$ يكون لها نقطة انقلاب عند $(a, 0)$ اذا كانت a جذراً لكثيرة الحدود $P(x)$ مكرراً ثلاث مرات .

٤٢- اذا كانت الدالة f قابلة للتفاضل مرتين في الفترة $[a, b]$ (أى اذا كانت $f''(x)$ موجودة في كل مكان في الفترة $[a, b]$) وكانت f'' ليس لها أصفار هناك ، فما هو أكبر عدد من الأصفار يمكن أن يكون للدالة f وللمشتقة f' في الفترة (a, b) ؟ وضح بأمثلة .

٧- ٤

اختبار المشتقة الثانية

المشتقة الثانية كثيراً ما تستخدم كبديل مناسب لاختبار المشتقة الأولى لتحديد ماذا كانت الدالة لها نهاية عظمى أو صغرى محلية عند عدد حرج c .

٤- ١٩ اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية

(أولاً) اذا كانت $f''(c) < 0$ و $f'(c) = 0$ ، فإن f تكون لها نهاية عظمى محلية عند c .
(ثانياً) اذا كانت $f''(c) > 0$ و $f'(c) = 0$ ، فإن f يكون لها نهاية صغرى محلية عند c .

البرهان (أولاً) من تعريف المشتقة والفرض يكون

$$f''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{x - c} < 0$$

التمهيدية ٢ - ٢٢ تتضمن وجود جوار (a, b) لـ c بحيث أن $f'(x)/(x - c) < 0$ لجميع $x \neq c$ في الفترة (a, c) . من ثم

$$f'(x) > 0 \text{ حيث } a < x < c$$

اذ أن $x - c < 0$ ، وايضاً

$$f'(x) < 0 \text{ حيث } c < x < b$$

اذ أن $x - c > 0$. واذن f تكون متزايدة في $[a, c]$ ومتناقصة في $[c, b]$ وبالتالي لها نهاية عظمى محلية عند c . بالمثل يمكن البرهنة على (ثانياً) .

من السهل تذكر الحالات اذا ربطنا النهاية العظمى المحلية بمماس أفقى وتقر الى أسفل (مشتقة ثانية سالبة) وربطنا النهاية الصغرى المحلية بمماس أفقى وتقر لأعلى (مشتقة ثانية موجبة) .

مثال ١ . أوجد أين تحدث القيم القصوى المحلية للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2$.

لدينا

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

العددان الحرجان للدالة f هما 2 و 0 نختبرهما باختبار المشتقة الثانية ٤ - ١٩ . بما أن $f''(2) = 6 > 0$ و $f''(0) = -6 < 0$ فالدالة f لها نهاية عظمى محلية عند 0 ولها نهاية صغرى محلية عند 2 . هذه الدالة درست في الجزء الأول من البند ٤ - ٤ وخططت في الشكل ٤ - ٧٤ .

لا يمكن استخلاص نتائج من اختبار المشتقة الثانية اذا كانت $f''(c) = 0$ أو كانت لا توجد . توجد دوال لها $f''(c) = 0$ ولها نهاية عظمى محلية عند c ، وأخرى لها نهاية صغرى محلية عند c ، وايضاً دوال أخرى ليس لها هذه أوزاك . (أنظر المسألة ٣٨) . لتحديد ماذا يحدث عند العدد الحرج c للدالة f حيث $f''(c) = 0$ أولاً توجد ، يجب أن نرجع الى اختبار المشتقة الأولى .

مثال ٢ . أوجد أين تحدث القيم القصوى المحلية للدالة $f(x) = -x^5 - 5x^4$.

هذه هي الدالة التي درسناها في مثال ١ بند ٤ - ٦ وخططت في شكل ٤ - ٣٦ ، لكن سنوجد القيم القصوى المحلية بدون الرجوع الى عملنا السابق . لدينا

$$f'(x) = -5x^4 - 20x^3 = -5x^3(x + 4)$$

$$f''(x) = -20x^3 - 60x^2 = -20x^2(x + 3)$$

العددان الحرجان للدالة f هما 0 و -4 . بما أن $f''(-1) > 0$ ، فإن f لها نهاية عظمى محلية عند 4 - . اختبار المشتقة الثانية لا يعطى معلومات عن 0 لأن $f''(0) = 0$. لنرى ماذا يحدث هناك ، يجب أن نستخدم اختبار المشتقة الأولى . بما أن $f'(1) < 0$ و $f'(-1) > 0$ فإن f لها نهاية عظمى محلية عند 0 .

فيما عدا للدوال معينة ، عادة لا تدرج في الرياضيات الأولية ، اختبار المشتقة الأولى دائماً يحدد ما إذا كانت الدالة لها نهاية عظمى محلية أو لها نهاية صغرى محلية أو ليس لها هذه أو ذاك عند العدد الحرج . اختبار المشتقة الثانية لا يميز بينهما دائماً لكن عندما يمكن تطبيقه فاستخدامه عادة يكون أسهل . حتى عندما يمكن استخدام اختبار المشتقة الثانية ، أحياناً يكون استخدام اختبار المشتقة الأولى أسهل من إيجاد المشتقة الثانية . هذا سيكون صحيحاً للدالة g في مثال ١ ، بند ٤ - ٥ .

مسائل

أوجد أين تحدث القيم القصوى المحلية للدوال الآتية باستخدام اختبار المشتقة الثانية إذا كان ذلك ممكناً :

$$\begin{array}{llll} f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x & - & ٣ & g(x) = 4x - x^2 & - & ٢ & f(x) = x^2 - 3 & - & ١ \\ h(x) = x^5 + x^4 & - & ٦ & F(t) = t(t-3)^2 & - & ٥ & u(t) = (12-2t)^2t & - & ٤ \\ f(x) = 4x + 2a^3/x^2, a > 0 & - & ٩ & g(x) = x^3 - 3/x & - & ٨ & f(z) = (z+1)^2(z-2)^3 & - & ٧ \end{array}$$

أوجد أين تحدث القيم القصوى المحلية للدوال الآتية

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^3 - 6x^2 & - ١١ \\ g(x) = 8x - x^4 & - ١٣ \\ G(t) = (2t^2 + 5t + 2)^2 & - ١٥ \\ f(x) = x(x^2 - 6)^2 & - ١٧ \\ f(x) = x^2 + 1/x & - ١٩ \\ f(x) = \frac{6x}{x^2 + 3} & - ٢١ \\ f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 3x + 5} & - ٢٣ \\ g(u) = u^{8/5} & - ٢٥ \\ f(t) = t\sqrt{t+8} & - ٢٧ \\ f(x) = 7x^{2/7} + 2x & - ٢٩ \\ f(y) = 5 + 3y - y^3 & - ١٠ \\ t(x) = -2 - 9x - 6x^2 - x^3 & - ١٢ \\ F(z) = (z^2 - 9)^2 & - ١٤ \\ f(u) = 3u^5 - 25u^3 + 60u - 1 & - ١٦ \\ g(v) = v^2(v+3)^3 & - ١٨ \\ V(r) = r^2 + \frac{1}{r^2} & - ٢٠ \\ h(t) = \frac{bt}{b^2 + t^2}, b > 0 & - ٢٢ \\ f(x) = x^{5/3} & - ٢٤ \\ A(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}, r \text{ const} & - ٢٦ \\ g(x) = 6x^{1/3} + 4x & - ٢٨ \end{array}$$

$$f(x) = x^{2/3}(x-4)^2 - 31$$

$$u(x) = x^{1/3}(x-a)^2, a > 0 - 30$$

$$f(x) = x^{2/3}(11-x)^3 - 32$$

للمنحنيات الآتية أوجد أين يكون الميل له قيمة القصوى المحلية وأوجد قيمة الميل هناك :

$$y = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 30 \quad y = x^3 + x^2 + 6x - 6 - 34 \quad y = -3x^2 + 2x + 1 - 33$$

$$y = x\sqrt{6-x^2} - 37 \quad y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 2 - 36$$

38 - اثبت أن الدالة يمكن أن يكون لها نهاية صغرى محلية ، أو نهاية عظمى محلية ، أو لا هذه ولا ذاك ، عند عدد حرج c حيث $f''(c) = 0$ ، بدراسة الأمثلة $f(x) = x^3$ و $f(x) = -x^4$ و $f(x) = x^4$. خطط الشكل البياني في كل حالة .

39 - عين a و b بحيث أن الدالة $g(x) = x^2 + ax + b$ يكون لها عدد حرج عند 2 ويكون $g(2) = 1$.

هل $(2,1)$ نقطة نهاية عظمى محلية أم نقطة نهاية صغرى محلية للشكل البياني للدالة g ؟

40 - عين a و b بحيث تكون 3 عدداً حرجاً للدالة $h(x) = ax + b/x$ ويكون $h(3) = 2$. هل $(3,2)$ نقطة نهاية عظمى محلية أم نقطة نهاية صغرى محلية للشكل البياني للدالة h ؟

41 - اثبت أنه إذا كانت $-1 \leq a \leq 1$ ، فإن المعادلة $4x^3 - 3x - a = 0$ يكون لها جذر وحيد في الفترة $[1,1]$. هذه المسألة تظهر في تعيين أى الزوايا يمكن تثليثها بمسطرة وفرجار ، العدد a هو

جيب تمام الزاوية .

42 - إذا كانت $f(x) = ax^2 + 2bx + c, a > 0$ ، فاثبت أن $f(x) \geq 0$ لجميع x الحقيقية إذا وإذا فقط كان $b^2 - ac \leq 0$.

43 - اثبت متباينة اشفارتز (Schwarz)

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

لجميع $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ الحقيقية . هذه المتباينة أداة هامة في التحليل

العالي . (ارشاد : ضع

$$f(x) = (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \dots + (a_nx + b_n)^2$$

واستخدم المسألة 42)

44 - إذا كانت دالتان موجبتان ، بمشتقاتهما اللازمة ، كل لها نهاية عظمى محلية عند نفس العدد ،

هل حاصل ضربيهما له نهاية عظمى محلية هناك ؟ إذا كان كل لها نقطة انقلاب عند نفس

العدد ، هل حاصل ضربيهما له نقطة انقلاب هناك .

45 - اثبت النظرية 4 - 19 (ثانياً) .

46 - النظرية أن الدالة المتصلة في فترة محدودة مقفلة لها قيمتان عظمى وصغرى هناك هي نظرية

أساسية في حساب التفاضل . أكتب قائمة بالنظريات في البنود 4 - 1 إلى 4 - 7 التي تستخدم

هذه النظرية بطريق مباشر أو غير مباشر في برهانها .

الخطوط التقاربية والمماسات الرأسية

الدوال التي نخططها حتى الآن كانت دوال متصلة . إذا لم تكن الدالة متصلة عند عدد c ، فعلى أن ندرس سلوكها لقيم x القريبة من c ، هذا بالإضافة إلى اتباع خطوات التخطيط التي شرحناها في بند ٤ - ٤ .

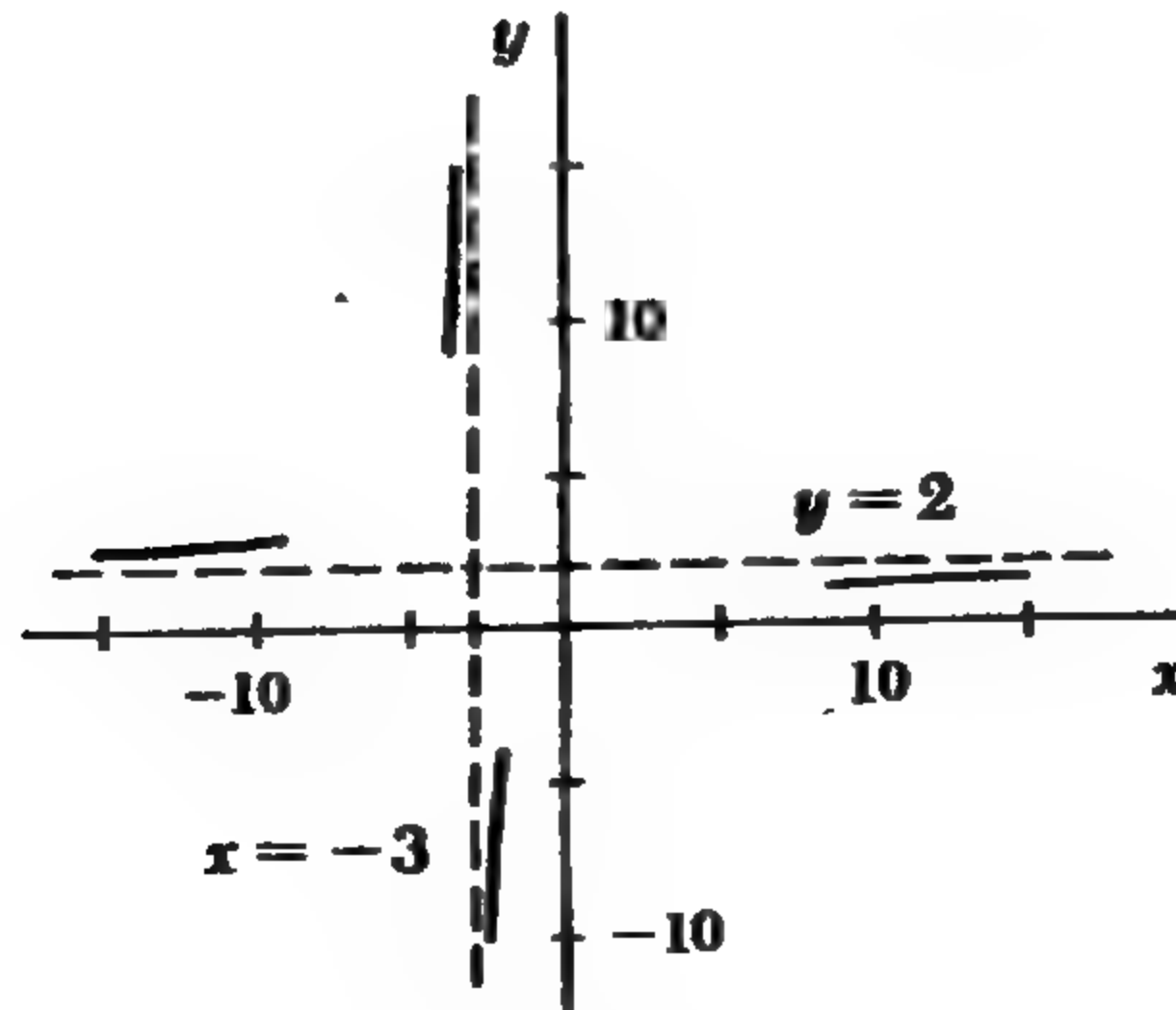
نفرض أننا نريد تخطيط الشكل البياني للدالة

$$(1) \quad f(x) = \frac{2x}{x+3}$$

نلاحظ أن f غير معرفة عند $x = -3$ ونبدأ بفحص قيم الدالة $f(x)$ لـ x قرب -3 . عندما تكون x أصغر قليلاً من -3 ، البسط في (١) يكون قريباً من -6 ، والمقام يكون قريباً من الصفر وسالباً ، ومن ثم $f(x)$ تكون كبيرة وموجبة . عندما تكون x أكبر قليلاً من -3 ، البسط والمقام لا يزالان قرب 0 و -6 ، لكن المقام يكون الآن موجباً وبالتالي $f(x)$ تكون كبيرة وسالبة . أى أن

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \infty$$

الشكل ٣٧ - ٤ يوضح سلوك الشكل البياني لـ x في القرب من -3 المنحنى يقترب أكثر فأكثر إلى الخط المستقيم $x = -3$ ، الذى هو بالتالى خط تقاربى . الحد الحرج فى هذا التحليل هو $x+3$ لا يكفى أن نعرف أن $x = +3$ تكون قريبة من الصفر عندما تكون x قريبة من -3 . بل يجب أن نعرف أيضاً اشارته لـ $f(x)$ كانت كبيرة وموجبة أم كبيرة وسالبة . هذا يكمل الخطوة ٣ فى ملخص تخطيط المنحنى ببند ٤ - ٤ . الآن نستمر كما فعلنا فى الأمثلة هناك ، لكن نجد أنه من المناسب أن نعكس ترتيب الخطوات فنحدد بعد ذلك سلوك الشكل البياني لقيم x الكبيرة . لمثل قيم x هذه ، (١) تعبر عن $f(x)$ كخارج قسمة عددين كبيرين ، وليس واضحاً مباشرة ما إذا كانت



شكل ٣٧ - ٤

شكل ياتى جزئى للدالة $f(x) = 2x/(x+3)$ لقيم x القريبة من -3 و لقيم x الكبيرة .

الدالة $f(x)$ كبيرة أو قرب الصفر ، أو قرب عدد ما متوسط مثل 173 . النهاية عندما x تصبح لا نهائية يمكن ايجادها بأن نقسم أولاً بسط ومقام الكسر على أعلى قوة لـ x ، في هذه الحالة x ذاتها اذا فعلنا ذلك ، يكون لدينا

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x+3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{1+3/x} = 2$$

واذن الشكل البياني لقيم x الكبيرة الموجبة والسالبة يتقارب الى الخط المستقيم $y=2$. في الحالة الأولى يقترب من الخط من أسفل اذ أن $x/(x+3) < 1$ لقيم x الكبيرة الموجبة ، وفي الحالة الثانية يقترب من الخط من أعلى اذ أن $x/(x+3) > 1$ لقيم x الكبيرة السالبة . جزء الشكل البياني لقيم x الكبيرة موضح في الشكل ٤-٣٧ . الجزء المقطوع الوحيد هو نقطة الأصل . المشتقة هي

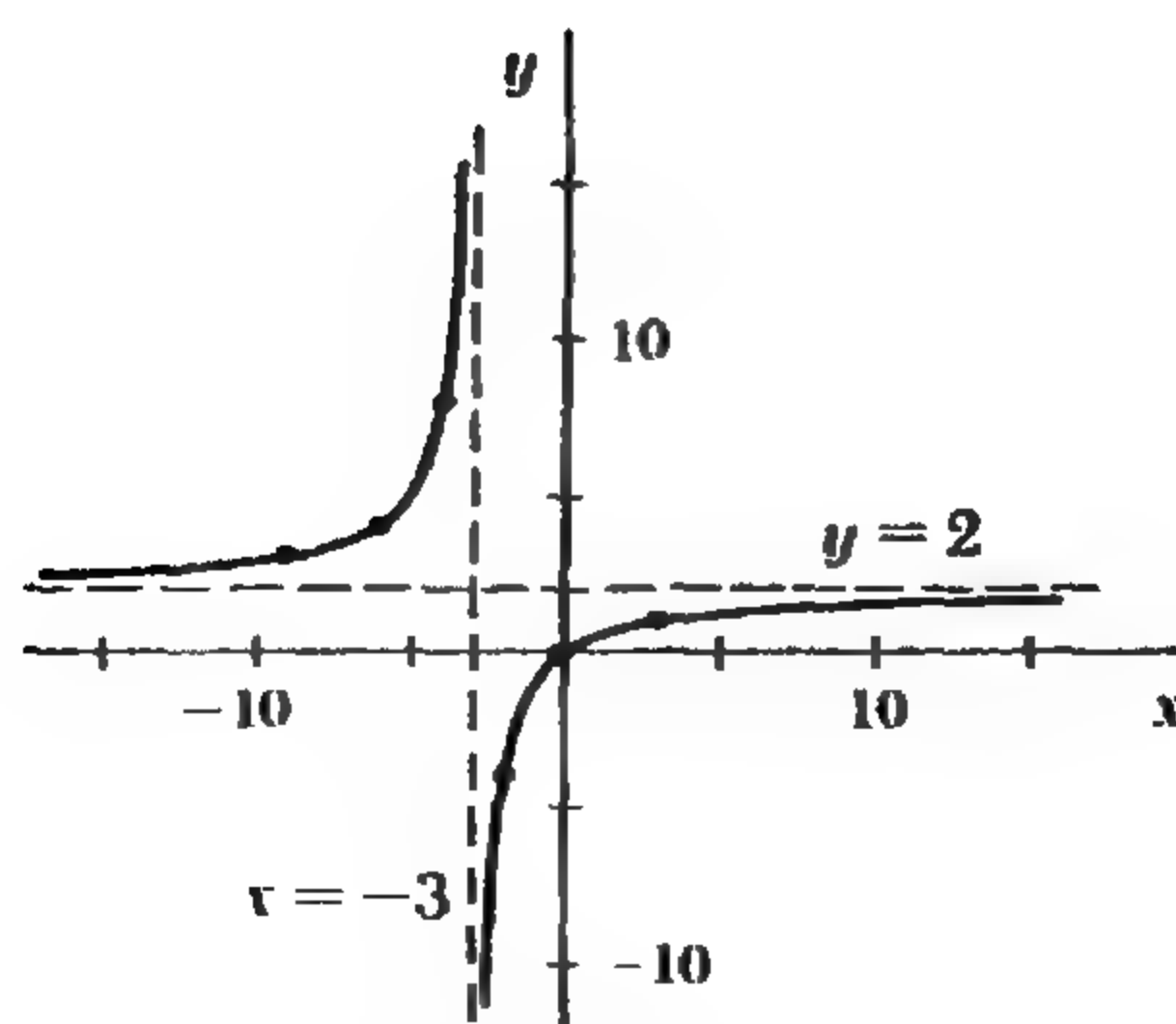
$$f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2}$$

العدد 3- ليس عدداً حرجاً لأن f ليست معرفة هناك . بالرغم من ذلك ، متضمنة مع الأعداد الحرجة ، ان وجد (في هذه الحالة لا يوجد) في تحديد الفترتين $(-3, \infty)$ و $(-\infty, 3)$ اللتين داخلهما المشتقة لا تغير اشارتهما . المشتقة توضح أن f تتزايد في كليهما . لم نعين بعد سوى نقطة واحدة ، لذلك نوقع عدداً قليلاً من النقاط لتخطيط المنحنى :

$(-4, 8)$, $(-6, 4)$, $(-9, 3)$, $(3, 1)$, $(-2, -4)$ التخطيط الكامل موضح في الشكل ٤-٣٨ .

مثال ١ . خطط الشكل البياني للدالة

$$g(x) = x + \frac{1}{x} \quad (٢)$$



شكل ٤-٣٨

الشكل البياني للدالة $f(x) = 2x/(x+3)$ له خطان تقاربان .

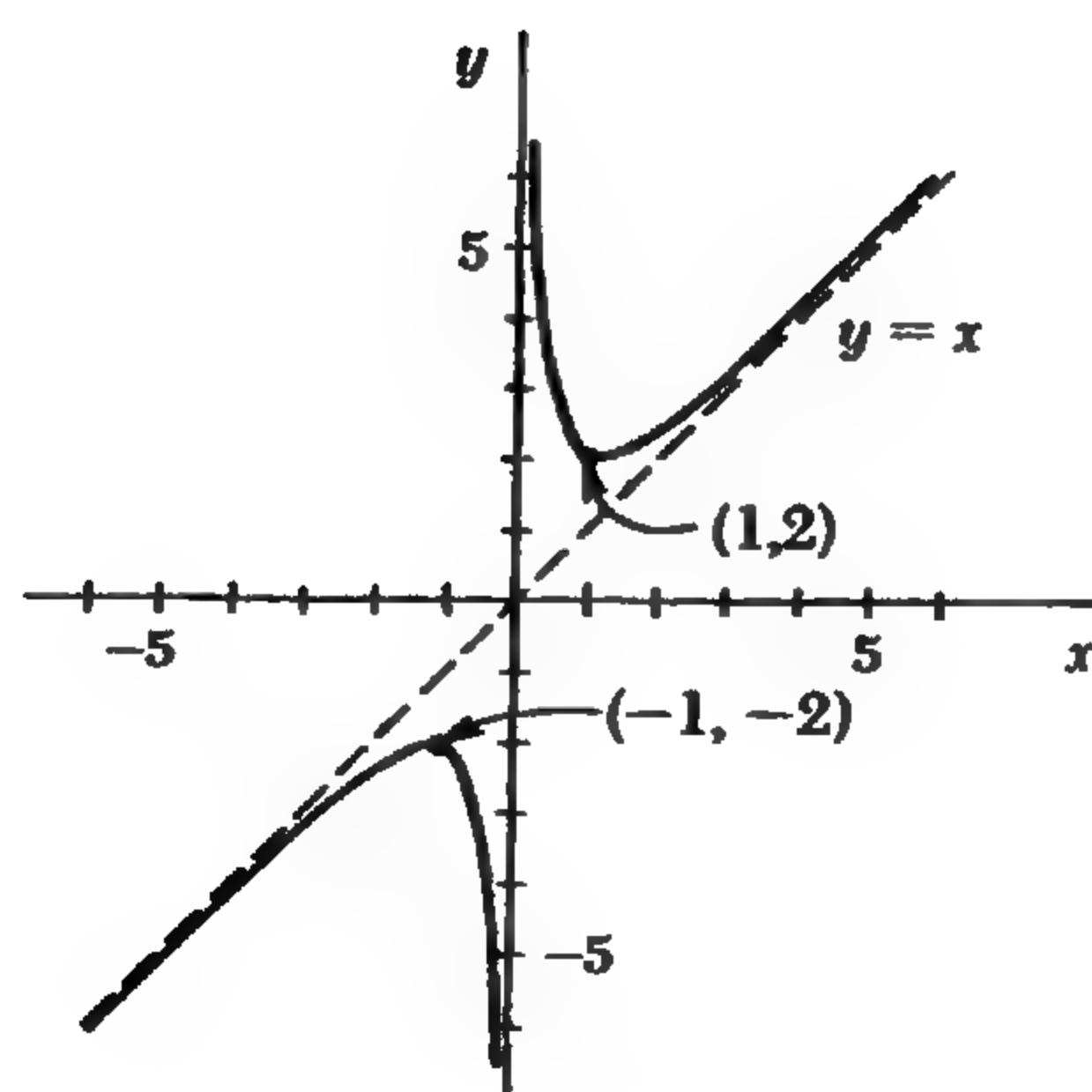
الشكل البياني متماثل بالنسبة الى نقطة الأصل ، والدالة g غير معرفة عند $x = 0$. بفحص الدالة $g(x)$ لقيم x القريبة من الصفر نرى أن

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \infty, \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$$

وهذه تبين أن المحور الصادي هو خط تقاربي (شكل ٤ - ٣٩) لا توجد أجزاء مقطوعة . المشتقة للدالة g هي $g'(x) = (x^2 - 1)/x^2$ العدان الحرجان الوحيدان هما $1, -1$ ، والشكل البياني له مماسان أفقيان عند النقطتين المناظرتين $(1, 2)$ و $(-1, -2)$ العدان الحرجان والعدد 0 حيث g غير معرفة تقسم المحور السيني الى أربع فترات هي $(1, \infty)$ و $(0, 1)$ و $(-1, 0)$ و $(-\infty, -1)$ ، داخل كل منها المشتقة لا تغير اشارتها . الشكل البياني يرتفع في الفترتين الأولى والأخيرة ويهبط في الثانية والثالثة . بما أن

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

فالشكل البياني غير محدود من أعلى وأسفل لقيم x الكبيرة الموجبة والسالبة . الا أنه لا يرتفع منحدرأ بشدة . المعادلة (٢) توضح أنه لقيم x الكبيرة ، الدالة $g(x)$ تكون أكبر قليلا من x . الشكل البياني يقترب أكثر فأكثر الى الخط المستقيم $y = x$ ، الذي هو بالتالي خط تقاربي ، والشكل البياني يقع أعلاه لقيم x الموجبة . بالمثل ، لقيم x الكبيرة السالبة ، والشكل البياني يتقارب الى نفس الخط المستقيم ، لكن من تحته .



شكل ٤ - ٣٩

المنحنى $y = x + 1/x$ يقترب الى المحور الصادي والى الخط المستقيم $y = x$.

مثال ٢ . خطط الشكل البياني للدالة

$$y^2 = \frac{4(2-x)}{x} \quad (٣)$$

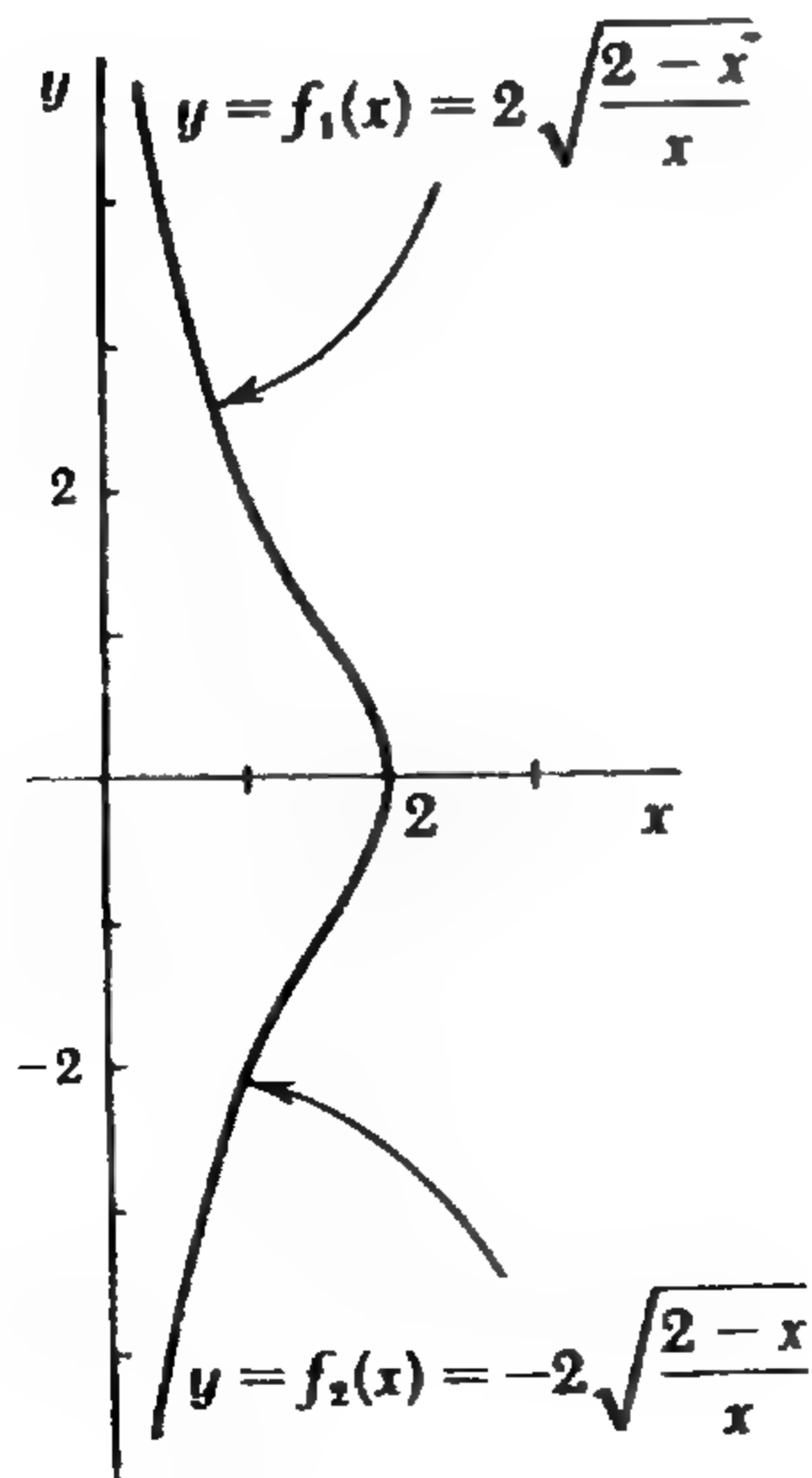
المنحنى متماثل بالنسبة الى المحور السيني . حيث أن y^2 تكون موجبة أو صفراً فقط اذا كان البسط والمقام في (٣) لهما نفس الاشارة فان x يجب أن تقيد بالفترة $0 < x \leq 2$ واذن الشكل البياني يقع بين المحور الصادي والخط المستقيم $x = 2$. المعادلة تعرف ضمناً دالتين في x ، نحصل عليهما بحل (٣) لـ y :

$$f_2(x) = -2\sqrt{\frac{2-x}{x}} \quad \text{و} \quad f_1(x) = 2\sqrt{\frac{2-x}{x}}$$

الشكل البياني لكل منهما هو انعكاس الشكل البياني للآخرى في المحور السيني . بأخذهما معاً هما يكونان الشكل البياني لـ (٣) . سنخطط f_1 ثم نحصل على f_2 من التماثل . بما أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = \infty$ ، فالشكل البياني لـ f_1 يتقارب الى المحور الصادي الموجب من اليمين . الجزء المقطوع الوحيد هو $(2, 0)$. مشتقة f_1 هي

$$f_1'(x) = \frac{-2}{\sqrt{x^3(2-x)}}$$

فالعدد 2 هو العدد الحرج الوحيد . وحيث أن المقام دائماً موجب ، فان f_1 تكون متناقصة في الفترة $(0, 2]$. لا توجد مشتقة عند 2 ، لكن $\lim_{x \rightarrow 2^-} f_1'(x) = -\infty$ ، وهذا يبين أن الشكل البياني ينحدر بشدة بالقرب من $(2, 0)$. الشكل البياني مخطط في الشكل ٤ - ٤٠ .



شكل ٤ - ٤٠

الرسم البياني لـ $y^2 = 4(2-x)/x$.

مع أننا لم نعمل ذلك في الأمثلة السابقة فقد كان في إمكاننا تحديد الفترات حيث يكون المنحنى مقعراً لأعلى أو لأسفل باستخدام المشتقة الثانية .

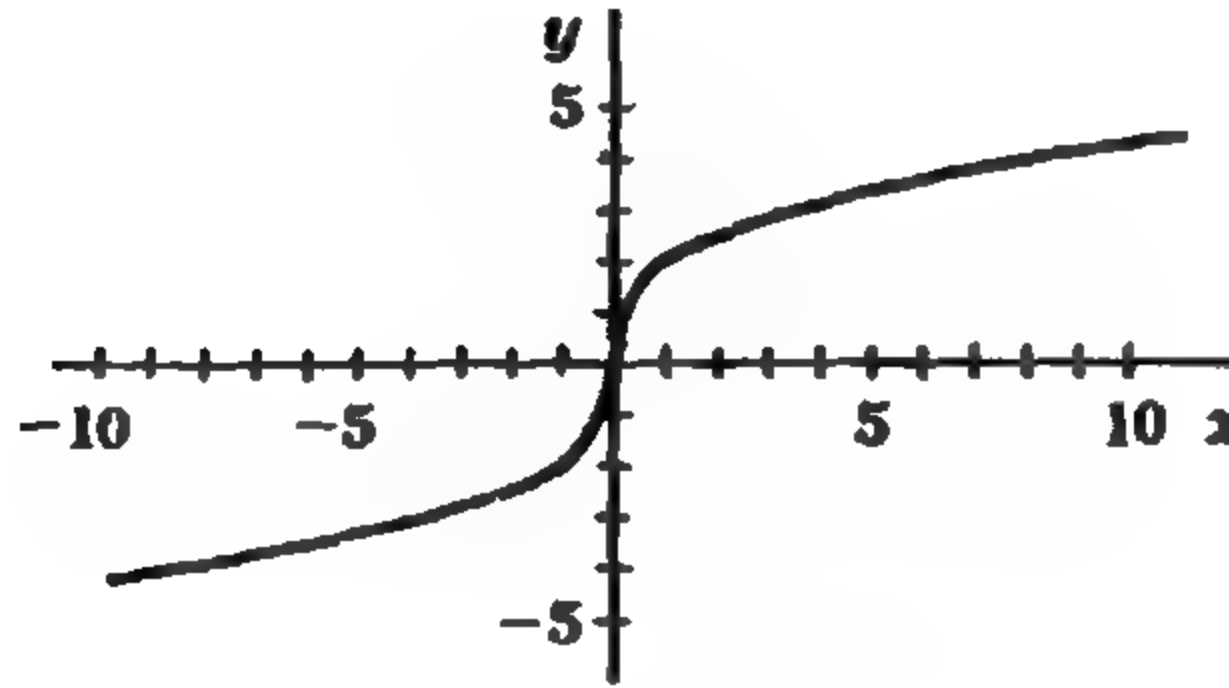
في البند ٣ - ١ عرفنا المماس للمنحنى $y = f(x)$ عند النقطة $P(a, f(a))$ بأنه الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة P وميله $f'(a)$. طبقاً لهذا التعريف ، f يجب أن يكون لها مشتقة عند a ليكون هناك مماس . المنحنى $y = g(x) = 2x^{1/3}$ مخطط في الشكل ٤ - ١١ . لدينا

$$(٤) \quad g'(x) = \frac{2}{3}x^{-2/3} = \frac{2}{3x^{2/3}}$$

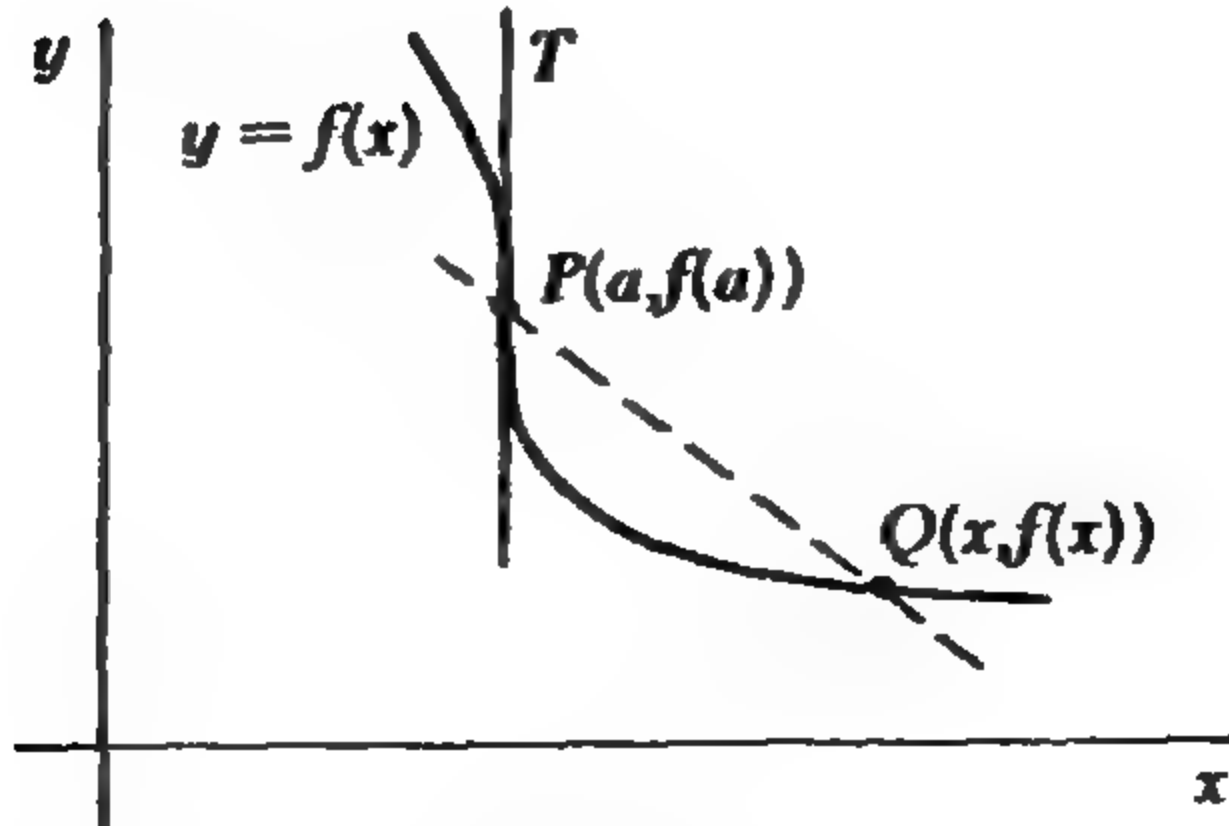
بما أن $g'(0)$ لا توجد ، فإنه لا يوجد مماس عند نقطة الأصل طبقاً لتعريفنا . بل ليس من العدل أن ننكر أن هذا المنحنى له مماس بينما واضح أن المحور الصادي يجب أن يحتسب مماساً له . من المناسب أننا نعدل تعريف المماس ليسمح بمماسات رأسية .

إذا كان المنحنى $y = f(x)$ في الشكل ٤ - ١٢ سيُعتبر له مماساً رأسياً عند نقطة $P(a, f(a))$ فإننا نتوقع أن ميل الوتر PQ سيصبح لا نهائياً موجباً أو سالباً عندما تقترب x من a . أي أن ،

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| = \infty$$

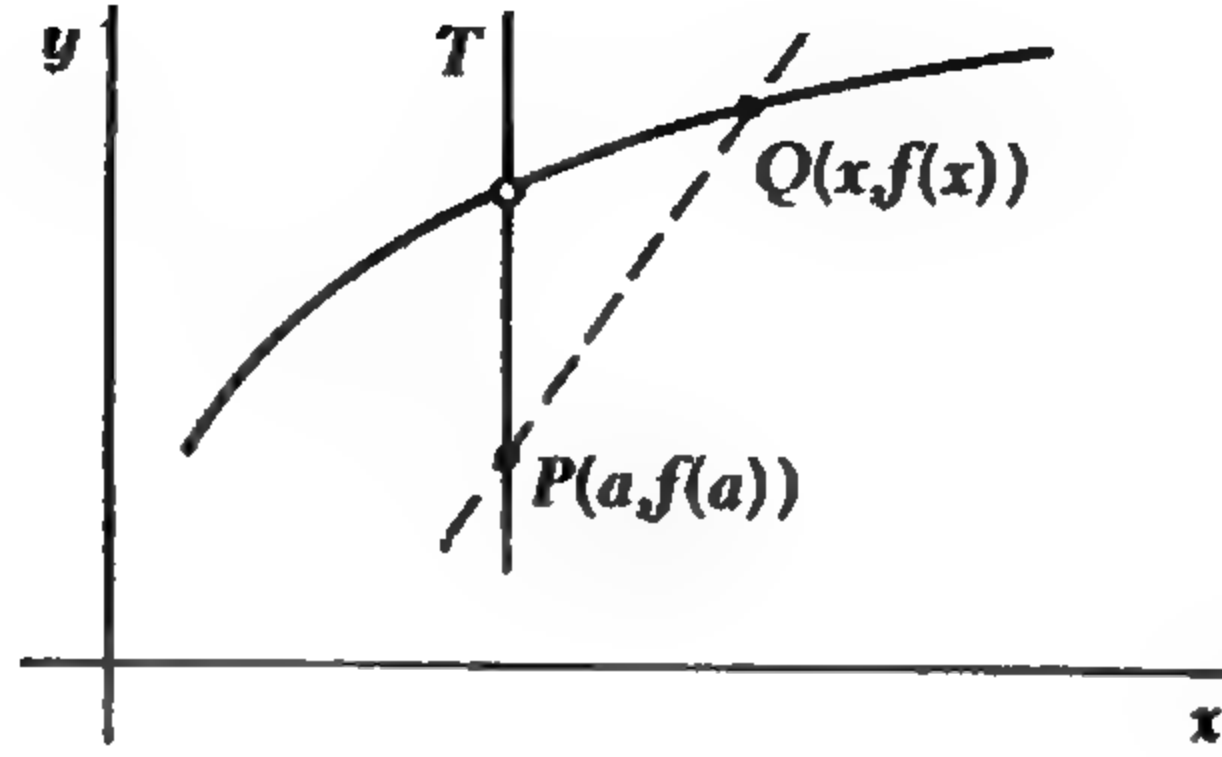


شكل ٤ - ١١
الشكل اليتي للدالة $g(x) = 2x^{1/3}$.



شكل ٤ - ١٢
إذا كان T ليحسب مماساً رأسياً فإن ميل PQ يجب أن يصبح لا نهائياً عندما تقترب x من a .

لكن هذا المطلوب غير كاف . فهو سيسمح لبعض المنحنيات بأن يكون لها مماسات رأسية عند نقط حيث منطقياً لا يوجد مماس . ميل الوتر PQ في الشكل ٤ - ٤٣ يصبح لا نهائى عندما تقترب x من a ، لكن من الواضح أننا لا نطلب أن يكون الخط الرأسى المار بالنقطة P مماساً . يمكننا علاج ذلك بأن نتطلب علاوة على (٤) أن تكون f متصلة عند a . هذان الشرطان يعطيان تعريفاً منطقياً وعملياً للمماس الرأسى .



شكل ٤ - ٤٣

رغم أن (٤) متحققة ، T لا يبنى أن يكون مماساً . أيضاً الاتصال عند a مطلوب للمماس الرأسى .

٤ - ٢٠ تعريف . المنحنى $y = f(x)$ يكون له مماس رأسى عند النقطة $(a, f(a))$ اذا كانت f متصلة عند a وكان

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| = \infty$$

الدالة $g(x) = 2x^{1/3}$ المخططة في الشكل ٤ - ٤١ متصلة عند 0 ، وأيضاً

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{2}{x^{2/3}} \right| = \infty$$

اذن الشكل البيانى له مماس رأسى عند 0 .

مثال ٣ . حدد اذا كان المنحنى $y = f(x) = (x - 2)^{2/5}$ له مماساً رأسياً .

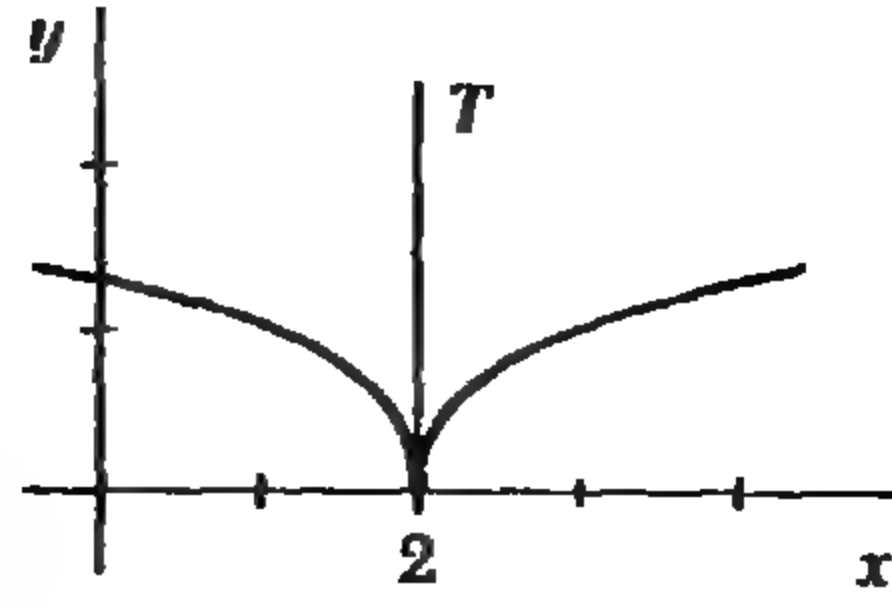
لدينا

$$f'(x) = \frac{2}{5(x - 2)^{3/5}}$$

المشتقة توجد لجميع $x \neq 2$ ، فلاحتمال الوحيد لمماس رأسى هو عند $(2, 0)$. نختبر هذه النقطة . الدالة متصلة عند 2 ، وأيضاً

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left| \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right| = \lim_{x \rightarrow 2} \left| \frac{1}{(x - 2)^{3/5}} \right| = \infty$$

اذن يوجد مماس رأسى عند $(2, 0)$. المنحنى مخطط في الشكل ٤ - ٤٤ .



شكل ٤ - ٤٤

المنحنى $y = (5 - 2)^{2/3}$ له مماس رأسي عند النقطة $(2, 0)$.

مسائل

خطط الشكل البياني للدوال أو المنحنيات الآتية :

$$F(x) = \frac{x-2}{x+1} \quad - \quad ٣ \quad y = \frac{2}{x-2} \quad - \quad ٢ \quad f(x) = 3 + \frac{2}{x} \quad - \quad ١$$

$$s(t) = t^2 + \frac{16}{t} \quad - \quad ٦ \quad G(z) = \frac{z^2-5}{z+1} \quad - \quad ٥ \quad f(t) = t - \frac{1}{t} \quad - \quad ٤$$

$$y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \quad - \quad ٩ \quad f(x) = \frac{1}{x^2} \quad - \quad ٨ \quad f(x) = x^3 - \frac{3}{x} \quad - \quad ٧$$

$$g(t) = \frac{t}{t^2-2t-3} \quad - \quad ١٢ \quad y = \frac{x-2}{(x-1)^2} \quad - \quad ١١ \quad s = \frac{t-4}{t(t-3)} \quad - \quad ١٠$$

$$y = \frac{(x-2)(1+x)}{x^2} \quad - \quad ١٥ \quad f(s) = \frac{as}{s^2+a^2}, a > 0 \quad - \quad ١٤ \quad y = \frac{x-1}{x^2+8} \quad - \quad ١٣$$

$$y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \quad - \quad ١٨ \quad f(x) = \frac{x^2}{x^2+a^2} \quad - \quad ١٧ \quad y = \frac{2x^2}{x^2+2x-8} \quad - \quad ١٦$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3-x} \quad - \quad ١٩$$

خطط الشكل البياني للمنحنيات الآتية :

$$y = -\sqrt{x+5} \quad - \quad ٢٢ \quad y^2 = x(x+2) \quad - \quad ٢١ \quad y^2 = 1+x^3 \quad - \quad ٢٠$$

$$y^2 = x(9-x^2) \quad - \quad ٢٥ \quad y^2 = \frac{1}{2}(x-1)^2 \quad - \quad ٢٤ \quad y^2 + y^2x^2 = 1 \quad - \quad ٢٣$$

$$y^2 = x^4/(1-x^2) \quad - \quad ٢٦$$

٢٧ - خطط المنحنى $y = 4/(x^2 + 1)$ وأوجد نقط الانقلاب .

٢٨ - هل يمكن للمنحنى أن يقطع خطه التقاربي الأفقي عدداً لا نهائياً من المرات عندما يسير الى اللانهاية ؟

٢٩ - أوجد نقط الانقلاب للمنحنى $y = x + 1/(x^2 + 1)$ وخطط المنحنى .

أوجد النهاية للتعبيرات الجبرية الآتية عندما $x \rightarrow \infty$ وعندما $x \rightarrow -\infty$ إذا كانت النهاية محدودة ، عين ما إذا كان التعبير الجبري يقترب من نهايته من أعلى أم من أسفل .

$$\begin{array}{lll} \frac{x+3}{x^2+6} & -30 & \frac{-3x+7}{7x+1} - \frac{6}{x^2} + 10 & -31 \\ \frac{x^2+6x}{x^3-x^2+2} & -32 & \frac{5x^4+7x+10}{-3x^3+2} & -33 \\ \frac{\sqrt{3x^2+1}}{x+1} & -35 & \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+3x+1}} & -34 \end{array}$$

اثبت أن كلا من المنحنيات الآتية له مماس رأسى عند النقطة المعطاة وخطط المنحنى .

$$y = x^{1/3}; (0,0) \quad -36 \quad y = 2 + (x+1)^{1/3}; (-1,2) \quad -37 \quad y = x^{1/3}(8-x); (0,0) \quad -38$$

خطط كلا من المنحنيات الآتية وعين ما إذا كان له مماس رأسى :

$$\begin{array}{lll} y = \sqrt{x^2-8x+18} & -40 & g(x) = \begin{cases} 4-x^2, & x \leq 2 \\ 4-(x-4)^2, & x > 2 \end{cases} & -39 \\ y = x\sqrt[3]{3x-5} & -42 & y = x(8-x)^{1/3} & -41 \\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{16-x^2}, & -4 \leq x \leq 4, \\ \sqrt{4-(x-6)^2}, & 4 < x \leq 8. \end{cases} & -44 & y = x^{5/3}(x-1) & -43 \end{array}$$

٤٥ - اشرح بدلالة الميل الفرق بين

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$$

خطط الشكل البيانى لدالة تتحقق لها العبارة الأولى ولا تتحقق لها العبارة الثانية .

٩-٤

النهايات العظمى والصغرى التطبيقية

نتجه الآن الى تطبيقات عملية للمشتقة ، واحدة من أهمها تختص بمسائل النهايات العظمى والصغرى . نعلم أن الدالة المتصلة فى فترة محدودة مغلقة لها قيمة عظمى وقيمة صغرى هناك . النظرية التالية تعطى شرطاً اذا تحقق فإن الدالة المتصلة فى فترة ليست بالضرورة مغلقة يكون لها قيمة قصوى هناك .

٤-٢١ نظرية . لتكن الدالة f متصلة فى فترة ، قد تكون لا نهائية ، ولها عدد حرج واحد c فى الداخل . اذا كانت f لها نهاية عظمى محلية أو نهاية صغرى محلية ، عند c ، فإنه يكون لها ، على التناظر ، قيمة عظمى أو قيمة صغرى ، فى الفترة ، وهذه تحدث عند c .

رغم أن النظرية صحيحة لأي فترة ، إلا أن فائدتها الرئيسية تكون في معالجة الفترات المفتوحة ، حيث نظرية الفترة المغلقة لا يمكن استخدامها .

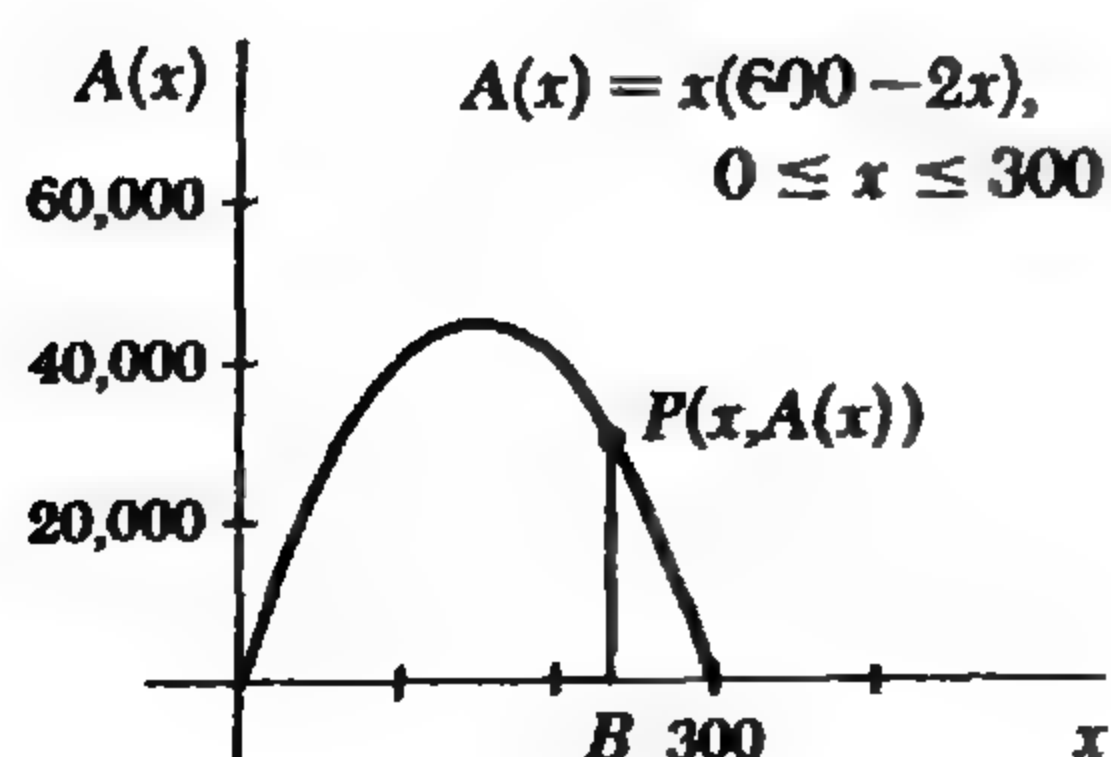
البرهان . سنعطى البرهان في حالة الفترة المحدودة المفتوحة . البرهان مماثل للفترات الأخرى . لتكن (a, b) هي الفترة ولنفرض أن عند c الدالة f لها نهاية صغرى محلية . بما أن f ليس لها عدد حرج في الفترة الجزئية (a, c) ، فإن f تكون إما متزايدة وإما متناقصة في (a, c) ، ولأن f لها نهاية صغرى محلية عند c ، فيجب أن تكون الحالة الثانية . استدلال مماثل يوضح أن f تكون متزايدة في $[c, b)$. ومن ثم $f(c)$ هي القيمة الصغرى للدالة f في (a, b) . البرهان للنهاية العظمى مماثل .

مثال ١ . مزارع لديه 600 yd من الأسياج ، يرغب في أن يحيط بها حقلا مستطيلا على أرض ملاصقة لنهر مستقيم . لا يحتاج لإقامة سور جانب النهر . ما هي أبعاد الحقل حتى يحيط أكبر مساحة ؟

حقل مطابق لشروط المسألة ، لكن ليس بالضرورة الأكبر ، موضح في الشكل ٤ - ٤٥ . لتكن x طول الجانب العمودي على النهر ، فيكون $600 - 2x$ هو طول الجانب الموازي للنهر ، وتكون مساحة الحقل هي $A(x) = x(600 - 2x)$ حيث $0 \leq x \leq 300$. واضح أن x يجب ألا تكون سالبة ولا أكبر من 300 إذا كان للمسألة معنى . بما أن المساحة تعتمد على x ، فهي دالة ونستخدم الرمز الدالي $A(x)$ لقيمتها .

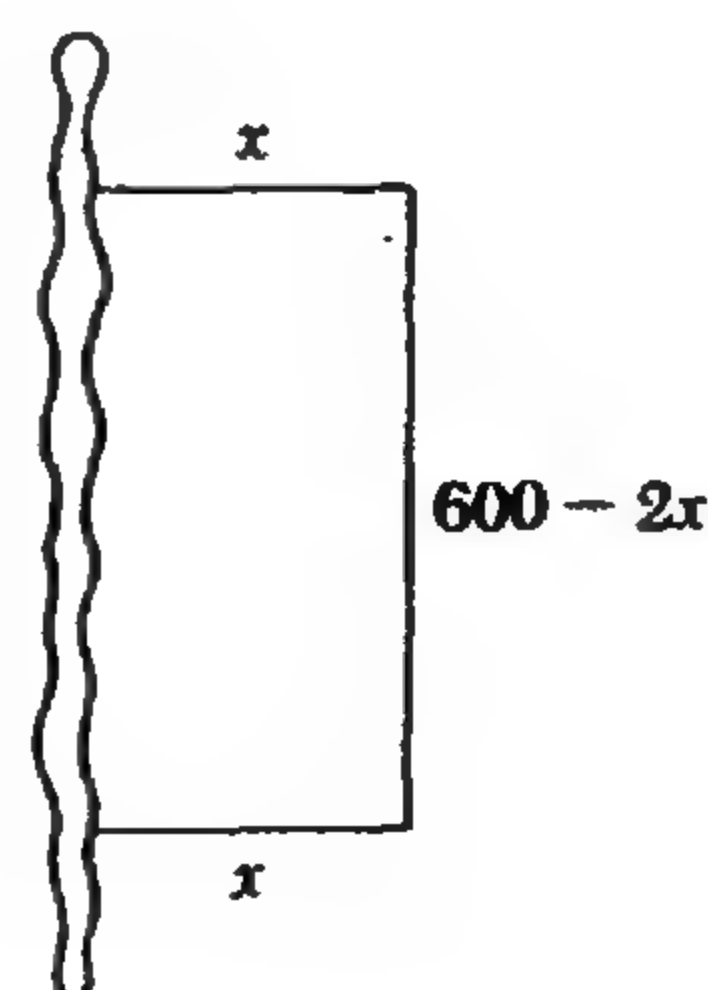
الدالة معرفة فقط لـ $0 \leq x \leq 300$ ، وشكلها البياني موضح في الشكل ٤ - ٤٦ . الاحداثي الصادي عند كل نقطة $(x, A(x))$ على الشكل البياني هو مساحة الحقل الذي طول ضلعه x . يجب أن توجد قيمة x في الفترة $[0, 300]$ حيث $A(x)$ هي القيمة العظمى لـ A . لدينا الاختيار بين طريقتين .

الطريقة ١ . لأن A متصلة في الفترة المغلقة ، فيجب أن يكون لها قيمة عظمى ، وهذه القيمة العظمى ستحدث عند عدد حرج أو عند نقطة طرفية ، مشتقة A هي $A'(x) = 600 - 4x$ فالعدد



شكل ٤ - ٤٦

طول الخط المستقيم BP هو مساحة الحقل الذي طول ضلعه x .



شكل ٤ - ٤٥

الحرج الوحيد هو 150 . نحسب قيمة A عند 150 وعند النقطتين الطرفيتين ونرى أيا منها تكون الأكبر :

$$A(0) = 0, \quad A(150) = 45,000, \quad A(300) = 0$$

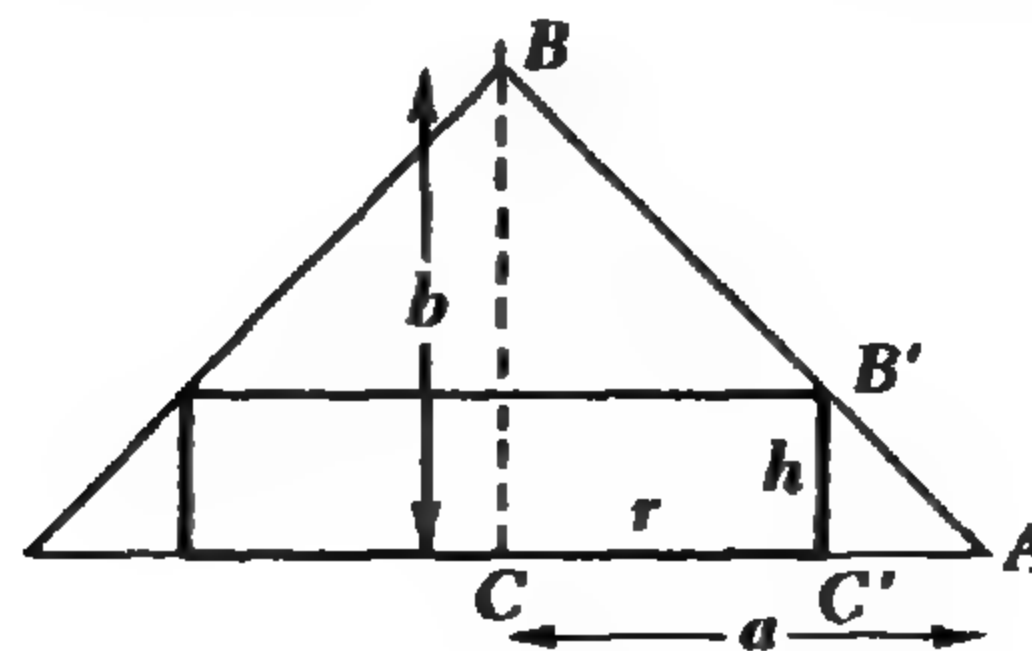
القيمة العظمى تحدث عند 150 ، وبهذا الحقل ذات أكبر مساحة هما 150×300 yd والضلع الأكبر يوازي النهر .

الطريقة ٢ . A لها عدد حرج واحد في الفترة $[0, 300]$ ، وحيث أن $A''(x) = -4$ لجميع x ، فاختبار المشتقة الثانية يبين أن A لهما نهاية عظمى محلية عند $x = 150$ بالنظرية ٤ - ٢١ ، القيمة العظمى لـ A يجب أن تحدث هناك .

حلت هذه المسألة بتفصيل غير عادي لتؤكد وضوح الطريقة والاستنتاج . الطريقة الثانية أقصر ، لكن الأولى ينبغي دراستها بعناية اذ توجد حالات لا يمكن أن تستخدم فيها الطريقة الثانية . لاستخدام الطريقة ١ ، من الضروري أن تكون A معرفة في فترة محدودة مغلقة ، والا لا نستطيع ضمان وجود نهاية عظمى . لقد كان هذا هو السبب لأن نسمح لـ x أن تكون 0 و 300 بالرغم من عدم وجود حقل ، بالمفهوم العادي ، لهاتين القيمتين . في مسائل كثيرة حيث نستخدم الطريقة ١ من الممكن قطع بعض الأجزاء . فمثلاً ، من الاعتبارات الطبيعية ، واضح أن المساحة تساوى صفراً عند 300 و $x = 0$ وأنها موجبة عند $0 < x < 300$ النهاية العظمى اذن لا يمكن حدوثها عند نقطة طرفية ويجب أن تحدث عند العدد الحرج . لاحظ أنه لكي نوجد الحقل ذات أكبر مساحة أوجدنا أولاً تعبير المساحة لجميع الحقول الممكنة المسورة من ثلاثة جوانب .

مثال ٢ . اثبت أن حجم الأسطوانة الدائرية القائمة ذات أكبر حجم التي يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم معلوم هو $\frac{1}{3}$ من حجم المخروط .

مقطع عرضي للمخروط والأسطوانة ماراً بمحورهما المشترك موضح في الشكل ٤ - ٤٧ . رغم أنه في الواقع طلب منا إيجاد حجم أكبر اسطوانة ، إلا أن الطريقة الوحيدة لإجراء ذلك هي إيجاد أبعاد أكبر اسطوانة . أولاً نوجد تعبيراً لحجم جميع الاسطوانات الممكنة التي يمكن وضعها داخل المخروط . إذا كانت h و r هما نصف القطر وارتفاع الاسطوانة ، فإن حجمها هو $V = \pi r^2 h$. h و r كلاهما متغيران . يجب أن نعبر عن الحجم بدلالة متغير واحد . التعبير للحجم V هو عام



شكل ٤ - ٤٧

جداً . ويطبق لاي اسطوانة وليس فقط لتلك التي داخل المخروط . من الواضح أن لكل r توجد اسطوانة واحدة داخل المخروط ومن ثم لها ارتفاع h مناظر وحيد . بمعنى آخر ، h تتعين عندما تعطى r . سنوجد هذه العلاقة . بما أن أبعاد المخروط غير معطاة فافترض أن a طول نصف قطره وأن b ارتفاعه . المثلثان ACB و $AC'B'$ في الشكل ٤-٧ متشابهان . من ثم

$$(١) \quad \frac{b}{a} = \frac{h}{a-r}$$

$$(٢) \quad h = \frac{b}{a} (a-r)$$

نعوض الطرف الأيمن بدلا من h في التعبير الجبري للحجم ، فنحصل على

$$V = \pi r^2 \frac{b}{a} (a-r), \quad 0 \leq r \leq a$$

V معبر عنها الآن بدلالة متغير واحد . الحجم دالة في r ، نسميها $f(r)$:

$$(٣) \quad V = f(r) = \pi \frac{b}{a} r^2 (a-r), \quad 0 \leq r \leq a$$

نبحث عن قيمة r في $[0, a]$ أو $(0, a)$ إذا أردنا أخذ فترة مفتوحة [التي تجعل f أكبر ما يمكن . مشتقة f هي

$$f'(r) = \pi \frac{b}{a} (2ra - 3r^2) = \pi \frac{b}{a} r(2a - 3r)$$

والعددان الحرجان هما $2a/3$ و 0 .

الطريقة ١ . إذا قفلنا الفترة ، فلأن f متصلة هناك ، توجد قيمة عظمى وتحديث اما عند نقطة طرفية أو عند عدد حرج . من اعتبارات طبيعية أو من (٣) ، من الواضح أن $f(0) = 0 = f(a)$ وأن $f(x)$ تكون موجبة عند $0 < r < a$. القيمة العظمى لذلك لا يمكن حدوثها عند طرفية واذن يجب حدوثها عند العدد الحرج $2a/3$.

الطريقة ٢ . شروط النظرية ٤-٢١ متحققة سواء كانت الفترة مفتوحة أو مغلقة . من التعبير الجبري للمشتقة الثانية للدالة f

$$f''(r) = \pi \frac{b}{a} (2a - 6r)$$

نرى أن

$$f''\left(\frac{2a}{3}\right) = \pi \frac{b}{a} (-2a) < 0$$

فالدالة لها نهاية عظمى محلية عند $2a/3$ ومن ثم قيمتها العظمى هناك .

القيمة المناظرة لـ h يمكن إيجادها الآن بتعويض $2a/3$ لـ r في (٢) ، وهي $h = b/3$. الحجم الأقصى للأسطوانة هو $\frac{4}{9} \frac{\pi a^2 b}{3}$ ، الذي هو $\frac{4}{9}$ من حجم المخروط .

بدلاً من التعبير عن V بدلالة r ، كما عملنا في (٣) ، يمكننا أيضاً حل (١) لـ r ثم التعبير عن V بدلالة h . إذا عملنا ذلك فإننا نحصل على V كدالة لـ h :

$$(٤) \quad V = g(h) = \pi \frac{a^2}{b^2} (b-h)^2 h, \quad 0 \leq h \leq b$$

نستمر كما سبق ، لكن مع (٤) بدلاً من (٣) ، ونحصل على

$$g'(h) = \pi \frac{a^2}{b^2} (b^2 - 4bh + 3h^2) = \pi \frac{a^2}{b^2} (b-h)(b-3h)$$

العددان الحرجان لـ g هما $b/3$ و b . أي من الطريقتين ١ أو ٢ تبين أن القيمة العظمى لـ g تحدث عند $h = b/3$ ، كما سبق .

كما في المثال السابق ، كثيراً ما تكون الكمية التي نريد جعلها أكبر ما يمكن ، يمكن التعبير عنها بأكثر من صورة واحدة ، تعتمد على المتغير المستقل المختار . في المثال السابق الصورتان كانتا مناسبين ، لكن عادة تكون واحدة أسهل في العمل عن الأخرى .

مثال ٣ . صاحب مصنع يريد صنع علبة من الصفيح تسع k cu in . ما هي الأبعاد التي تجعل كمية المعدن المستخدمة أقل ما يمكن ؟

المطلوب هو أن نجعل المساحة الكلية لأسطوانة دائرية قائمة حجمها k أقل ما يمكن . لنعمل ذلك ، نوجد أولاً المساحة الكلية لجميع الأسطوانات الممكنة التي حجمها k . المساحة الجانبية لأسطوانة نصف قطرها r وارتفاعها h هي $2\pi rh$ والقاعدة والغطاء كل مساحته πr^2 . المساحة الكلية A للأسطوانة هي

$$(٥) \quad A = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

h و r كلاهما متغير . يجب أن نعبر عن A بدلالة متغير واحد . سنرى ماذا نعمل عندما ندرك أن (٥) تعطي المساحة الكلية لجميع الأسطوانات ، وليس فقط لتلك التي حجمها k . لأي نصف قطر r معطى توجد أسطوانة واحدة فقط حجمها k ، وهذا بدوره يعين h . العلاقة بين h و r هي

$$(٦) \quad \text{الحجم} = \pi r^2 h = k$$

يمكننا حل هذه إما لـ h وإما لـ r وتعويض النتيجة في (٥) نعبر عن A بدلالة r أو h . يبدو أنه من الأسهل التعويض عن h . من (٦)

$$(٧) \quad h = \frac{k}{\pi r^2}$$

$$A = A(r) = \frac{2k}{r} + 2\pi r^2, \quad r > 0 \quad \text{واذن}$$

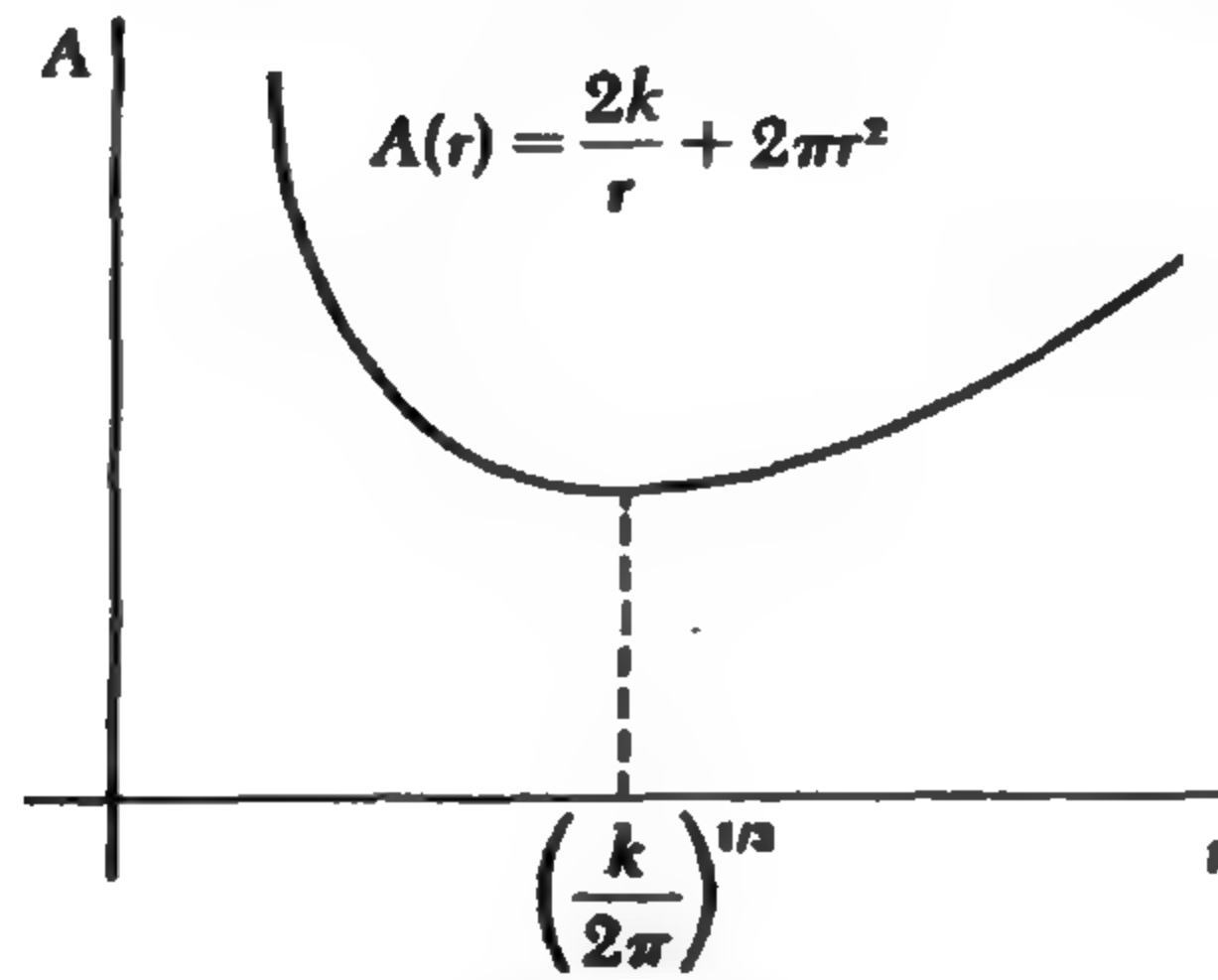
A يعبر عنها الآن كدالة في r ، معرفة في فترة مفتوحة لا نهائية $(0, \infty)$. نريد إيجاد قيمتها الصغرى في هذه الفترة . نظرية تحديد موضع القيمة الصغرى في فترة متناهية مقفلة لا يمكن استخدامها لأن الفترة ليست مقفلة . نأمل وجود عدد حرج واحد فقط في الداخل حتى يمكن استخدام النظرية ٤-٢١ . الشكل البياني لـ $A(r)$ موضع في الشكل ٤-٤٨ . المشتقة لـ A هي

$$A'(r) = -\frac{2k}{r^2} + 4\pi r = \frac{2(-k + 2\pi r^3)}{r^2}$$

العدد الحرج الوحيد لـ A في الفترة هو $r = (k/2\pi)^{1/3}$. المشتقة الثانية

$$A''(r) = \frac{4k}{r^3} + 4\pi$$

موجبة لجميع $r > 0$ ، فالدالة A لها نهاية صغرى موضعية عند $r = (k/2\pi)^{1/3}$ ومن ثم قيمتها الصغرى هناك . ارتفاع الاسطوانة لأقل مساحة ، كما نحصل عليه من (٧) ، هو $2r = 2(k/2\pi)^{1/3}$. العلبة لأقل مساحة ، ارتفاعها يساوي قطرها ، بصرف النظر عن حجمها .



شكل ٤-٤٨

مثال ٤ . شركة أتوبيس للرحلات تعرف من التجربة أن عند أخذ \$20 عن كل شخص جميع المقاعد وعددها 30 ستحجز لكن لكل زيادة قدرها \$1 سيبقى مقعدان غير مشغولين . تكاليف الرحلة هي \$100 مضافاً إليها \$11 عن كل شخص . ما هو الثمن الذي يجب أن تتقاضاه الشركة ليكون ربحها أكبر ما يمكن ؟

لتكن x هي الزيادة بالدولار في الثمن ، فيكون الثمن لكل شخص هو $20 + x$ دولار . لهذا الثمن $30 - 2x$ من الأشخاص سيذهبون في الرحلة ، ومجموع الدخل للشركة سيكون $(20 + x)(30 - 2x)$ دولاراً . التكاليف هي $100 + 11(30 - 2x)$ دولاراً . الربح P هو الدخل الاجمالي مطروحاً منه التكاليف ، فهو

$$\begin{aligned} P &= (20 + x)(30 - 2x) - [100 + 11(30 - 2x)] \\ &= 170 + 12x - 2x^2, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

بما أن $dP/dx = 12 - 4x$ ، العدد الحرج لـ P هو 3 ويعطى نهاية عظمى موضعية . الشركة تزيد أرباحها لأقصى حد عندما تتقاضى \$23 عن كل شخص .

مثال ٥ . أوجد النقطة على المنحنى $y = \sqrt{8x}$ التي تكون أقرب ما يمكن من النقطة $(1, 0)$.

المنحنى هو النصف الأعلى من قطع مكافئ (شكل ٤ - ٤٩) . إذا كانت u هي المسافة بين النقطة $(1, 0)$ وأي نقطة $P(x, y)$ على المنحنى ، فإن

$$(٨) \quad u^2 = (x-1)^2 + y^2$$

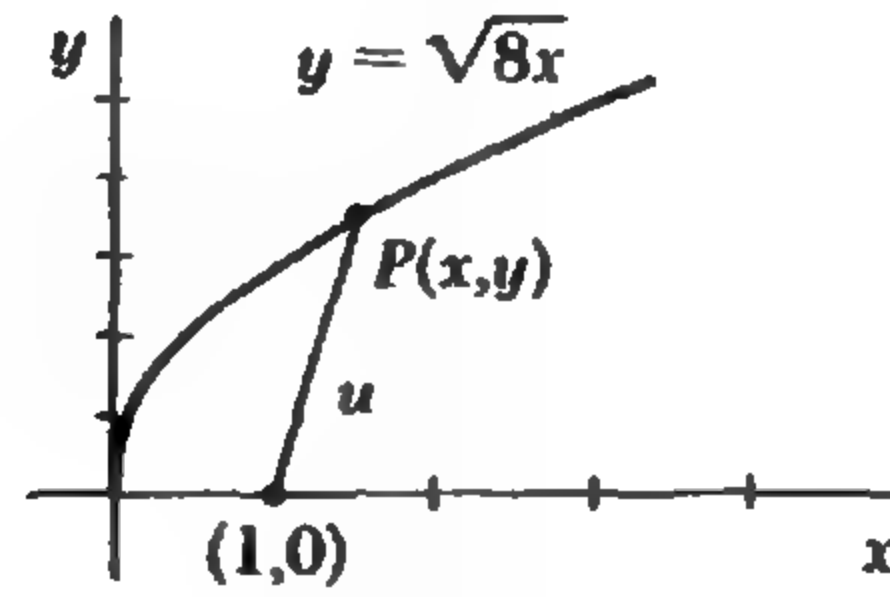
يجب أن نعبر عن u بدلالة x أو y فقط . بما أن P تكون على المنحنى ، فاحداثياتها يحققان معادلة المنحنى ، لذلك يمكن تعويض $8x$ عن y^2 في (٨) ونحصل على u^2 بدلالة x ، فيكون

$$u^2 = (x-1)^2 + 8x, \quad x \geq 0$$

المشتقة du/dx نحصل عليها بسهولة بالتفاضل الضمني :

$$2u \frac{du}{dx} = 2(x-1) + 8, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} (x+3)$$

المشتقة موجودة لجميع x لأنه لا توجد x يكون عندها $u = 0$ ولأن u ليس لها عدد حرج في نطاقها والنطاق لا نهائي ، فانه لا يمكننا استخدام أى الطرق التي استخدمت من قبل . لكن المشتقة توضح أن u متزايدة في الفترة $[0, \infty)$ ، واذن قيمتها الصغرى يجب حدوثها عند 0 . أى أن ، النقطة الأقرب الى $(1, 0)$ هي نقطة الأصل .



شكل ٤ - ٤٩

نلخص النقط الرئيسية في حل مسائل النهايات العظمى والصغرى :

- ١ - ارسم الشكل اذا كان مناسباً .
- ٢ - أوجد تعبيراً جبرياً للكمية التي ستجعل أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن ، مستخدماً أى حروف لازمة . التعبير يجب أن يكون صحيحاً لجميع الأشكال الممكنة التي تحقق شروط المسألة ، وليس فقط لذلك الذي يعطى قيمة قصوى . لاحظ أى الحروف تكون ثابتة وأى تكون متغيرة .
- ٣ - اذا كان التعبير يعتمد على أكثر من متغير واحد ، فيجب كتابة التعبير بدلالة متغير واحد فقط . أنظر الى الشكل واقنع نفسك بأن اختيار متغير واحد يعين المتغيرات الأخرى . ثم أوجد العلاقة

بينها . اذا لم تعط العلاقة مباشرة كمعادلة ، عادة يمكن ايجادها بدراسة مثلثات متشابهة أو مثلثات قائمة ، أو ربما تكون المتغيرات احداثيات نقطة على منحنى معادلته يمكن تعيينها .
 ٤ - استخدم العلاقة التى حصلت عليها للتعبير عن الكمية المطلوب جعلها أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن ، بدلالة متغير واحد ولاحظ الفترة التى يمكن أن يتغير فوقها هذا المتغير .
 ٥ - أوجد قيمة المتغير حيث الدالة تكون نهاية عظمى أو صغرى ، مستخدماً النظرية لتعيين مواضع القيم القصوى فى فترة محدودة ومقفلة أو نظرية ٤ - ٢١ .

نذكر القارىء أن الكمية المتغيرة y تتناسب مع الكمية x اذا كان يوجد عدد ثابت $k \neq 0$ ، يسمى ثابت التناسب ، بحيث أن $y = kx$ لجميع قيم y و x . الكمية y تتناسب عكسياً مع x اذا كان يوجد ثابت $k \neq 0$ بحيث أن $y = k/x$ لجميع y و x غير الصفرية .

مسائل

- ١ - القدرة المتولدة بمولد $120 - \text{volt}$ بمقاومة داخلية 5 ohms هي $120i - 5i^2 \text{ watts}$ ، حيث i التيار بالأمبير . لى تيار يعطى المولد أكبر قدرة .
- ٢ - مزارع يريد أن يحيط حقلاً مستطيلاً بسور وبعد ذلك يقسم الحقل بسور آخر مواز لأحد أضلاعه . اذا كان لديه 1200 yd لعمل السور ، ما هى أبعاد الحقل التى تجعل المساحة المحددة بهذه الكيفية أكبر ما يمكن ؟
- ٣ - قطعة أرض مستطيلة الشكل يراد تحويرها من جوانبها الأربعة . السور للضلع الأمامى سيكون مزخرفاً عن الباقي وتكلفته $\$3$ للقدم ، بينما السور على الاضلاع الثلاثة الأخرى سيتكلف $\$1$ للقدم . ما هى أبعاد أكبر قطعة أرض يمكن تسويرها بهذه الطريقة اذا كانت $\$320$ على الأكثر ستصرف على السور ؟
- ٤ - أين نقطع قطعة مستقيم طولها 10 in اذا كان حاصل ضرب طولى القطعتين أكبر ما يمكن ؟
- ٥ - أثبت أن حاصل جمع أى عدد حقيقى موجب ومعكوسة هو على الأقل 2 .
- ٦ - بطارية معينة مقاومتها الداخلية $r \text{ ohms}$. تعطى $E \text{ volts}$. الشغل W المبذول كل ثانية فى مرور تيار خلال دائرة كهربية مقاومتها $R \text{ ohms}$ يعطى بالعلاقة $W = [E^2 R / (r + R)^2] 10^6 \text{ ergs}$. مع ثبوت E و r اثبت أن W تكون أكبر ما يمكن عندما $R = r$.
- ٧ - صندوق مفتوح (ليس له غطاء) يراد صنعه بقطع مربعات من أركان قطعة مستطيلة من الصفيح $18 \times 24 \text{ in}$ وثنى الجوانب الى أعلى . أوجد أبعاد الصندوق الذى يمكن صنعه بهذه الكيفية ليكون الحجم أكبر ما يمكن ؟ ما هى الأبعاد اذا كان ارتفاع الصندوق لا يزيد عن 2 in ؟
- ٨ - مستطيل محيطه P يدور حول أحد أضلاعه ، لينشئ اسطوانة . ما هى أبعاد المستطيل التى تجعل حجم الاسطوانة أكبر ما يمكن .
- ٩ - مخروط ينشأ من دوران مثلث قائم حول احدى ساقيه . لجميع المثلثات القائمة ذات وتر معلوم ، أوجد المثلث الذى ينشئ المخروط ذات أكبر حجم .

- ١٠ - اثبت أن من بين المستطيلات ذات المحيط المعلوم يكون المربع هو ذات أكبر مساحة .
- ١١ - أوجد أبعاد المستطيل ذات أكبر مساحة الذى يمكن رسمه داخل نصف دائرة .
- ١٢ - أوجد مساحة أكبر مستطيل حيث الرأسان العلويان على المنحنى $y = 18 - x^2$ والرأسان السفليان على المنحنى $y = \frac{1}{2}(x^2 - 18)$ والذي يقع داخل المنطقة المحددة بالمنحنيين .
- ١٣ - أوجد أبعاد المستطيل ذات أكبر مساحة الذى يمكن رسمه داخل القطع الناقص : $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ وتقع رؤوسه على القطع .
- ١٤ - مستطيل ضلعان فيه على المحور السيني والمحور الصادي وأحد رؤوسه على المنحنى $y = 1/x^2$. أوجد أبعاد المستطيل اذا كانت الاسطوانة المكونة من الدوران حول المحور الصادي حجمها أكبر ما يمكن .
- ١٥ - أوجد النقطة التى تقع على الدائرة $x^2 + y^2 = 4$ وتكون أقرب ما يمكن من النقطة $(1, 0)$.
- ١٦ - ثلاثة أضلاع من شبه منحرف كل منها b in فى الطول . ما طول الضلع الرابع اذا كانت المساحة أكبر ما يمكن ؟
- ١٧ - كل من القاعدة والارتفاع لمستطيل معين يجب أن يكون أكبر من أو يساوى 4 ft وأقل من أو يساوى 6 ft والمحيط هو 20 ft . لاي أبعاد تكون مساحة المستطيل أقل ما يمكن .
- ١٨ - مزارع لديه 200 yd للتسوير ويرغب فى تسوير حقل مستطيل الشكل له أكبر مساحة ، جاعلا جزءاً من المحيط كله حائطاً حجرياً مستقيماً طوله 100 yd . التسوير يمكن أن يكمل جانب الحقل الذى به الحائط كجزء . ما هى أبعاد الحقل لأبزر مساحة يمكن تكوينها بهذه الطريقة ؟ (ارشاد : لتكن x هى عدد الياردات للتسوير المستخدمة فى اكمال الناحية المحتوية على الحائط) .
- ١٩ - صندوق قاعدته مربعة ومفتوح من أعلى يراد صنعه من 27 sq ft من مادة معينة . ما أبعاد الصندوق حتى يكون الحجم أكبر ما يمكن ؟
- ٢٠ - اناء اسطوانى مفتوح من أعلى ويحتوى c cu in يراد صنعه بأقل كمية من المادة ، أوجد أبعاده .
- ٢١ - صندوق مقفل قاعدته مربعة ، ويسع 20 cu ft ، يراد صنعه من الخشب مع قاعدة من الزنك . اذا كانت تكاليف الخشب 10 cents للقدم المربع وللزنك 20 cents للقدم المربع ، ما هى أبعاد الصندوق التى تجعل التكاليف أقل ما يمكن ؟
- ٢٢ - أثبت أن مساحة المستطيل ذات أكبر مساحة الذى يمكن رسمه داخل مثلث واحد أضلاعه على قاعدة المثلث هى نصف مساحة المثلث . لماذا تختلف الأبعاد فى هذه المسألة عن تلك التى فى مثال ٢ ؟
- ٢٣ - أوجد أبعاد الاسطوانة الدائرية القائمة ذات أكبر حجم التى يمكن عملها داخل كرة .
- ٢٤ - أوجد أبعاد المخروط الدائرى القائم ذات أكبر حجم الذى يمكن عمله داخل كرة .

- ٢٥ - مستطيل ضلعاه المتجاوران على المحور السيني والمحور الصادي الموجبين والرأس المقابل على المنحنى $y = 1/x^2$. أوجد أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أقل ما يمكن .
- ٢٦ - صلابة قضيب مستطيل الشكل يتناسب مع حاصل ضرب عرضه ومكعب عمقه . أوجد أبعاد القضيب ذات أكبر صلابة الذي يمكن قطعه من كتلة معلوم نصف قطرها .
- ٢٧ - من النقطة $P(a, b)$ في الربع الأول رسم خط مستقيم قاطعاً المحورين السيني والصادي في A و B . أوجد احداثيات A و B اذا كانت (أ) مساحة المثلث OAB أكبر ما يمكن حيث O هي نقطة الأصل ، (ب) حاصل جمع الجزئين المقطوعين أكبر ما يمكن ، (ج) المسافة من نقطة الأصل الى الخط المستقيم AB أكبر ما يمكن .
- ٢٨ - رجل في قارب يبعد 2 miles عن أقرب نقطة A على الشاطئ المستقيم ، يرغب الذهاب الى نقطة B على الشاطئ تبعد 2 miles عن A . يمكن الرجل أن يرسو في أى مكان على الشاطئ بين A و B ويمشى الباقي من الطريق . اذا كان في امكانه أن يجدف 3 mph (ثلاثة أميال في الساعة) ويمشى 5 mph ، أين ينبغي أن يرسو ليصل B في أقل وقت .
- ٢٩ - حل المسألة 28 مفترضاً أن الرجل يمكنه أن يجدف بسرعة 4 mph .
- ٣٠ - محطة سكة حديد يراد بناؤها لتخدم مدينتين على نفس الجانب من السكة . بعدا المدينتين من السكة هما a و b ، والمسافة بين مسقطيهما على السكة هي c . أين ينبغي أن تقع المحطة لتجعل حاصل جمع المسافتين بين المدينتين والمحطة أقل ما يمكن ؟
- ٣١ - موقدان على بعد 20 ft ، أحدهما يعطى حرارة ثمانية أمثال الآخر . عند نقطة على الخط الواصل بينهما وعلى مسافة x من الأصغر ، تعطى كمية الحرارة H المستقبل من الموقدين بالعلاقة $H = 60/x^2 + 480/(20 - x)^2$. أوجد أبرد نقطة على الخط بين الموقدين .
- ٣٢ - نافذة على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة ، بحيث ينطبق قطر نصف الدائرة على الضلع الأعلى للمستطيل . جميع هذه النوافذ لها محيط ثابت . ما هي أبعاد النافذة ذات أكبر مساحة .
- ٣٣ - سلك طوله a in قطع الى جزئين ، عملت دائرة من جزء وعمل مربع من الجزء الآخر ، أين ينبغي أن يقطع السلك اذا كان حاصل جمع مساحة الدائرة ومساحة المربع أكبر ما يمكن ؟ أصغر ما يمكن ؟ (يوجد تفسيران للمسألة) .
- ٣٤ - اذا كان حاصل جمع مساحتي مكعب وكرة مقداراً ثابتاً ، أوجد النسبة بين طول ضلع المكعب وطول نصف قطر الكرة عندما يكون حاصل جمع حجميهما أقل ما يمكن ؟ أكبر ما يمكن ؟ (يوجد تفسيران لهذه المسألة) .
- ٣٥ - مستطيل ثابت معطى . أوجد النسبة بين مساحة القطع الناقص المحيط به ومساحته أقل ما يمكن ، ومساحة المستطيل . (ارشاد : مساحة القطع الناقص هي πab ، حيث a و b نصفاه طولى المحورين) .
- ٣٦ - المنحنى $10x^2 + 6xy + 2y^2 = 11$ هو قطع ناقص مركزه عند نقطة الأصل ، لكن محوريه

لا يوازىان محورى الاحداثيات . أوجد احداثيات أطراف محورية بإيجاد أكبر مسافة وأصغر مسافة من المركز لنقطة على القطع الناقص .

٣٧- أوجد طول أقصر قطعة محصورة بين المحورين من المماس للقطع الناقص $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

٣٨- سلم الغرض منه الوصول من الأرض الى مبنى ويستند على حائط ارتفاعه a ft ويبعد مسافة b ft من المبنى . ما طول أقصر سلم يمكن استعماله ؟

٣٩- أوجد النقطة على المنحنى $y = x^2$ التى تكون أقرب ما يمكن الى النقطة $(4, \frac{7}{2})$

٤٠- أوجد النقطة على النصف الأعلى للقطع المكافئ $y^2 = 4x$ التى تكون أقرب ما يمكن الى النقطة $(c, 0)$.

٤١- أوجد النقطة على القطع المكافئ $y^2 = 4x$ التى تكون أقرب ما يمكن الى النقطة : $(\frac{15}{4}, -\frac{3}{2})$.

٤٢- أوجد النقطة على الدائرة $(x-a)^2 + y^2 = b^2$ التى تكون أقرب ما يمكن الى نقطة الأصل .

٤٣- المنطقة المحدودة بالمحورين والقطع المكافئ $y = 9x^2 - 28x + 24$ والخط الرأسى المرسوم من المحور السينى الى رأس القطع المكافئ أدبرت حول المحور الصادى ، ليتولد جسم مصمت . أوجد نصف قطر الاسطوانة الدائرية القائمة داخل هذا الجسم التى حجمها أكبر ما يمكن ومحورها على المحور الصادى

[C.S. Ogilvy, Am. Math. Monthly, vol. 64, p. 504 (1957).]

٤٤- أوجد نصف قطر المخروط الذى مساحته الجانبية أكبر ما يمكن ورأسه عند نقطة الأصل ، ومحوره على المحور السينى ، وحافة القاعدة على السطح المتولد بدوران القطع الناقص $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, a \geq b$ حول المحور السينى .

٤٥- اثبت أن $6x - x^2 - x^3$ يكون سالباً لجميع $x \leq -\frac{2}{3}$.

٤٦- اثبت أن $3x^4 + 4x^3 + 2$ موجب لجميع قيم x .

أوجد مدى الدوال الآتية :

$$g(t) = -t^3 + 9t - 2 \quad - ٤٨$$

$$f(x) = x^2 + 4x + 7 \quad - ٤٧$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 36} \quad - ٥٠$$

$$f(t) = \frac{10}{t^2 + 5} \quad - ٤٩$$

٥١- مصنع يمكنه انتاج 120 units على الأكثر فى اليوم . اذا كان ثمن بيع الوحدة هو \$ 10 ، فانه

يمكنه بيع جميع الـ 120 units ، لكن لكل زيادة قدرها 50-cent فى الثمن ، يفقد المصنع بيع واحدة . كم وحدة فى اليوم ينبغي أن يعملها المصنع ليكون دخله أكبر ما يمكن ؟

٥٢- بفرض أن فى المسألة ٥١ تكاليف العمل هى \$ 200 مضافاً الى ذلك \$ 5 لكل وحدة ، كم

وحدة فى اليوم ينبغي أن يعملها المصنع حتى يكون دخله أكبر ما يمكن .

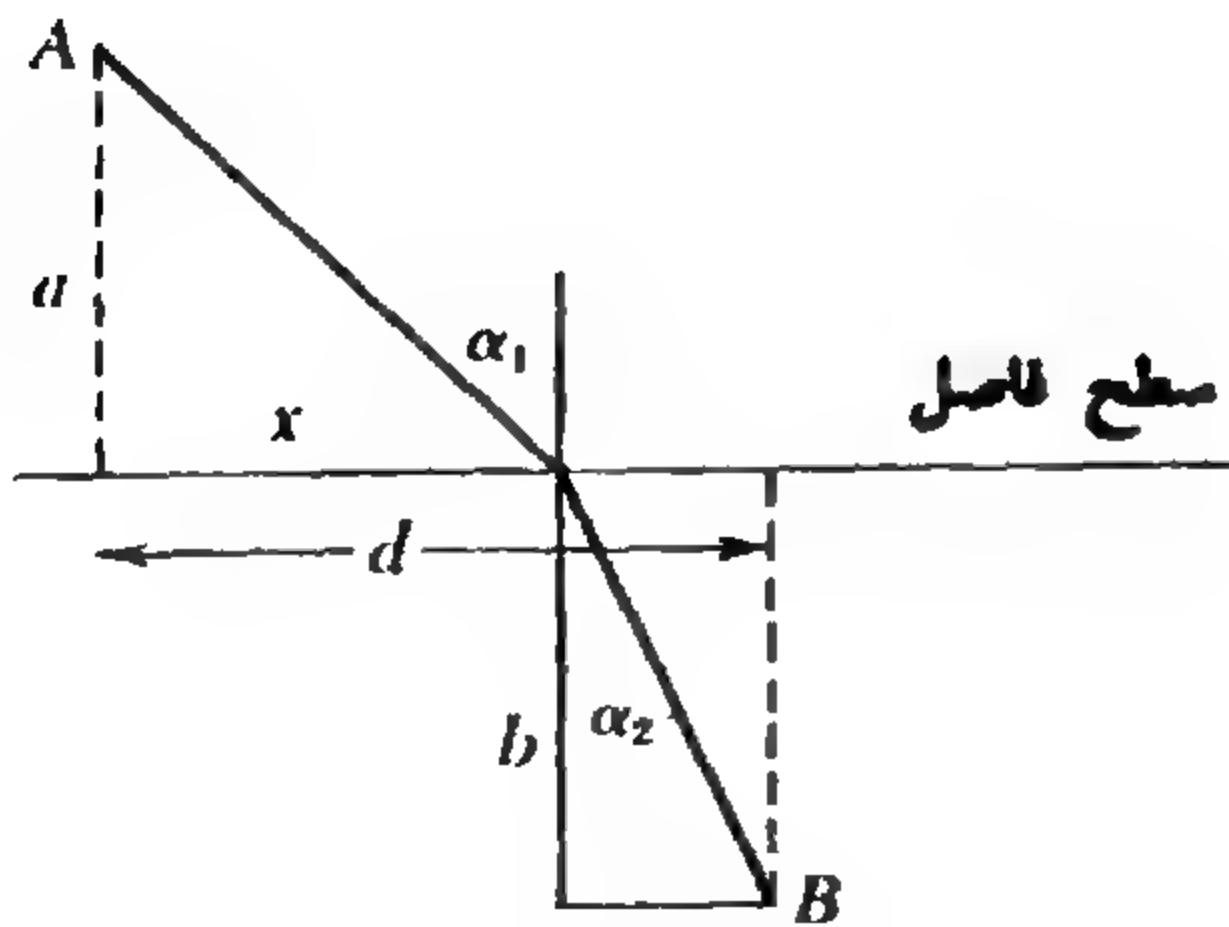
٥٣ - المتوسط x لعدد من يدخل يومياً أى ملعب للعبة اليبسبول يتبع القانون $x = a/p + b$ ، حيث p ثمن تذكرة الدخول وحيث b و a ثابتان تعتمد قيمتهما على الملعب الخاص . ملعب بيسبول معين به 10,000 مقعد . المالك يعرف من تجربته أنه عندما يكون ثمن تذكرة الدخول هو \$2.50 ، فإن متوسط عدد الداخلين يومياً هو 5000 ، لكن عندما يخفض الثمن الى \$2 ، فإن متوسط عدد الداخلين يومياً يرتفع الى 8000 . أوجد b و a لهذا الملعب وعين ثمن تذكرة الدخول الذى يجعل متوسط الدخل اليومى أكبر ما يمكن .

٥٤ - صانع اطارات يمكنه كل يوم عمل x من مئات الاطارات من صنف واحد بمكسب صاف p دولار لكل اطار وعمل y من مئات الاطارات من صنف آخر بربح صاف $3yp$ دولاراً لكل اطار ، حيث y و x ترتبطان بالمعادلة $x = 40 - 8y$. طاقة عمل y هي $0 \leq y \leq 4$. كم اطاراً من كل صنف ينبغي أن يعمل يومياً ليكون ربحه الكلى الصافى أكبر ما يمكن ؟

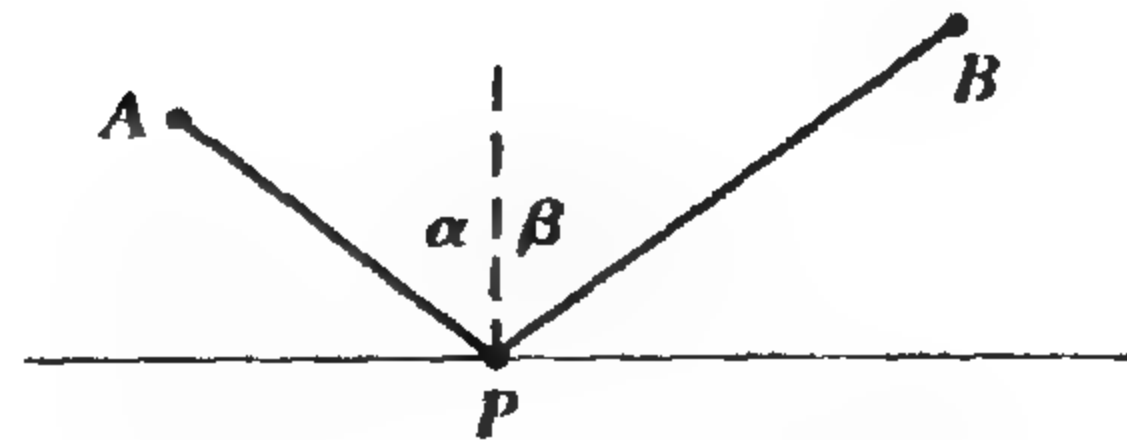
٥٥ - مصنع منسوجات يمكنه انتاج x من مئات الدست من الشرايات فى اليوم من نوع معين وانتاج y من مئات الدست من الشرايات فى اليوم من نوع أرخص ، حيث y و x ترتبطان بالمعادلة $y = (24 - 6x)/(5 - x)$ ، $0 \leq x \leq 4$. اذا كان الربح الصافى على الشراب الجيد ضعفه للشراب الأرخص ، كم من كل نوع ينبغي للمصنع أن ينتج حتى يكون مجموع ربحه الصافى أكبر ما يمكن ؟

٥٦ - مثلث محيطه واحد أضلاعه ثابتان . وضع أنه لجميع هذه المثلثات المثلث المتساوى الساقين هو ذات أكبر مساحة . (ارشاد : اذا كانت a, b, c أطوال الأضلاع وكانت $s = (a + b + c)/2$ ، فإن المساحة $= \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$)

٥٧ - شعاع من الضوء يصدر من نقطة A وينعكس على مرآة مستوية الى النقطة B (شكل ٤ - ٥٠) . بفرض أن الضوء يسير من نقطة الى أخرى على مسار أقل وقت فاوجد النقطة على المرآة حيث ينعكس الشعاع ووضح أن زاوية السقوط α تساوى زاوية الانعكاس β .



شكل ٤ - ٥١



شكل ٤ - ٥٠

انكسار الضوء : $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$

انعكاس الضوء : $\alpha = \beta$.

٥٨ - شعاع من الضوء يسير من نقطة A في وسط مثل الهواء الى نقطة B في وسط آخر مثل الماء ، السطح الفاصل بين الوسطين مستوي (شكل ٤ - ٥١) . تبعاً للسرعتين المختلفتين للضوء في الوسطين ينشئ الشعاع ، أى ينكسر ، عند الحد الفاصل . نفترض أن الضوء يسير من نقطة لأخرى على مسار أقل وقت . اذا كانت السرعتان في الوسط الأول والثاني هما v_1 و v_2 ، على الترتيب ، اثبت أن $v_1/v_2 = (\sin \alpha_1)/(\sin \alpha_2)$ ، حيث α_1 و α_2 هما زاويتا السقوط والانكسار ، كما هو موضح في الشكل . هذه المعادلة تعرف بقانون $Snell$ للانكسار (ارشاد : أوجد تعبيراً جبرياً للوقت T بدلالة المسافة x الموضحة في الشكل . اثبت أن $(dT/dx = (\sin \alpha_1)/v_1 - (\sin \alpha_2)/v_2$.

٥٩ - اذا كانت النقطة Q على المنحنى $y = f(x)$ أقرب نقطة الى p ، اثبت أن الخط المستقيم pQ يكون عمودياً على المنحنى عند Q . ما هي الافتراضات التي تعملها عن f ؟

٦٠ - طول قضيب يراد تعيينه بدقة بقدر الامكان n من قياسات الطول أخذت بالقراءات l_1, l_2, \dots, l_n ، وتختلف قليلاً بعضها عن البعض . اذا كانت x هي الطول الحقيقي للقضيب ، فان $|x - l_i|$ هو الخطأ في القياس رقم i . طريقة معروفة لحساب x هي طريقة المربعات الصغرى ، التي تنص على أن القيمة الأكثر احتمالاً لـ x هي القيمة التي تجعل حاصل جمع مربعات الأخطاء

$$(x - l_1)^2 + (x - l_2)^2 + \dots + (x - l_n)^2$$

أقل ما يمكن . اثبت أن القيمة الأكثر احتمالاً لـ x هي المتوسط الحسابي للقياسات ، : $(l_1 + l_2 + \dots + l_n)/n$.

٦١ - وضع عن طريق التخطيط أنه إذا كان شرط الاتصال في النظرية ٤ - ٢١ محذوفاً ، فإن النظرية قد لا تكون صحيحة .

٦٢ - لتكن f دالة متصلة في الفترة المفتوحة (a, b) ، التي قد تكون لا نهائية ، ولتكن $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$. أثبت أن f لها قيمة صغرى في (a, b) ووضح كيف توجد لها . (ارشاد : لتكن c أى عدد مناسب في (a, b) . اختر x_1 في (a, c) و x_2 في (c, b) بحيث أن $f(x) > f(c)$ لجميع x في $(a, x_1]$ وفي $[x_2, b)$. اعتبر الفترة $[x_1, x_2]$.)

٤ - ١٠

الحركة على خط مستقيم

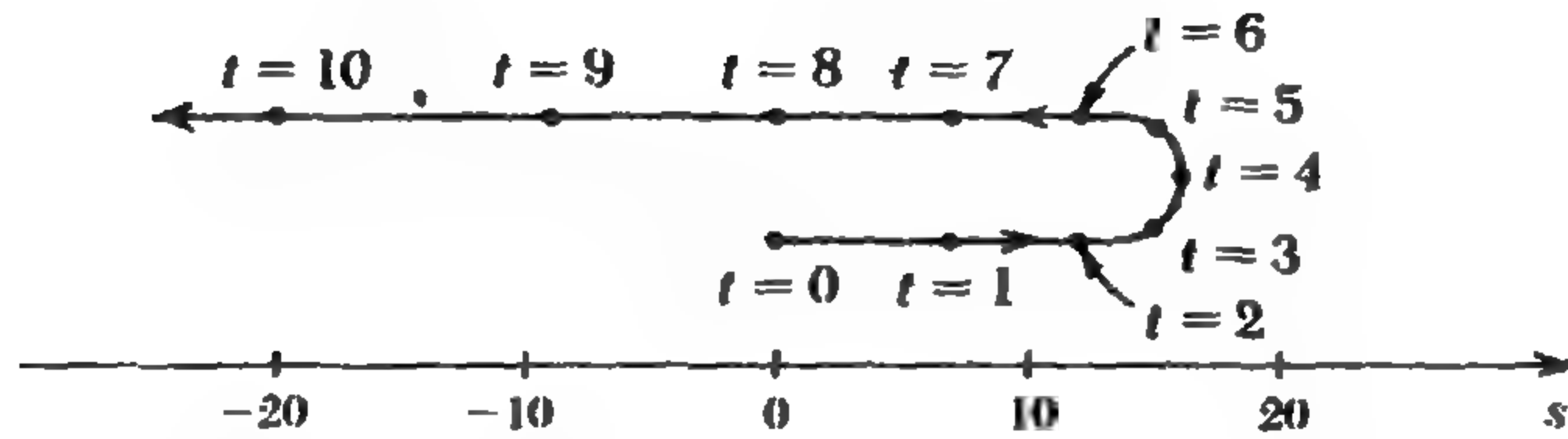
أحد التطبيقات الأكثر أهمية للمشتقة هو دراسة حركة الأشياء . فهي حيوية في دراسة الميكانيكا السماوية ، الخيوط المهتزة ، الكهرباء ، البنيان الذري ، وفي الحقيقة أجزاء كثيرة للفيزياء . لقد كانت الحاجة الى حل مسائل صادفت نيوتن في فحصه لحركة الكواكب هي التي قادته الى اختراع

حساب التفاضل . سنحدد لأنفسنا هنا الحالة البسيطة لكن المهمة لشيء يتحرك في خط مستقيم ، مثال ذلك ، حركة سقوط جسم بدون مقاومة أو حركة ثقل معلق من نهاية خيط مهتز .

عندما تتحرك نقطة على خط للاحداثيات ، سندع s مسافته المتجهة من نقطة الأصل عند الزمن t . العدد s هو اذن الاحداثى للنقطة . كمثال بسيط لمثل هذه الحركة ، يمكننا أن نتصور نقطة تتحرك على خط للاحداثيات بحيث أن المسافة بالقدم من نقطة الأصل بعد t sec تعطى بالعلاقة .

$$(1) \quad s = 8t - t^2, \quad t \geq 0$$

الجدول في الهامش يعطى احداثيات النقطة لقيم متعددة للزمن t . مبتدئة من نقطة الأصل ، النقطة تتحرك الى اليمين لمدة أربع ثوان . بعد ذلك تعكس اتجاهها وتتحرك الى اليسار ، مارة بنقطة الأصل ثانية بعد 8 sec وتستمر في أن تتحرك الى اليسار أسرع فأسرع . الحركة صورت بيانياً في الشكل ٥٢-٤ . الرسم هو لمجرد التوضيح ، إذ في الواقع ، النقطة تكون دائماً على خط الاحداثيات . لاحظ أن s تعطى المسافة الموجهة للنقطة من نقطة الأصل وليست المسافة الكلية المقطوعة .



شكل ٥٢-٤

موضع نقطة تتحرك وفقاً للعلاقة $s(t) = 8t - t^2, t \geq 0$.

t ثانية	$s = s(t)$, قدم
0	0
1	7
2	12
3	15
4	16
5	15
6	12
7	7
8	0
9	-9
10	-20
20	-240

فى جميع حالات الحركة على خط مستقيم قيمة لـ s تناظر كل قيمة لـ t . أى أن s دالة للزمن t ، ومن المناسب أن نستخدم الرمز الدالى $s(t)$ للإشارة الى ذلك . فى التوضيح السابق $s(2) = 12$ و $s = s(t) = 8t - t^2$ العلاقة الدالية كانت واضحة جداً فى هذا المثال اذ أن اعتماد s على t معطى صراحة بـ (١) ، لكن حتى عندما لا توجد معادلة معبرة عن s بدلالة t فإن s تظل دالة للزمن t .

عربة مسافرة من Boston الى New York تتحرك بسرعات مختلفة وربما أيضاً تتوقف بعض الأوقات . رغم أنه لا توجد معادلة تعطى مسافتها من Boston بعد زمن t hours ، إلا أنها عند أى لحظة تكون على مسافة محددة من Boston . فالمسافة دالة للزمن .

لتكن $s(t)$ هى الاحداثى عند الزمن t لنقطة تتحرك على خط الاحداثيات s . عند الزمن t_1 النقطة تكون عند $s(t_1)$ وعند الزمن t_2 النقطة تكون عند $s(t_2)$. المسافة الموجهة من $s(t_1)$ الى $s(t_2)$ هى $s(t_2) - s(t_1)$ وهى المسافة المقطوعة فعلاً بين الزمنين t_1 و t_2 . هذه المسافة مقسومة على فرق الزمنين $t_2 - t_1$ تسمى السرعة المتوسطة للنقطة فى الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$.

٤-٢٢ تعريف . إذا كانت $s(t)$ هى الموضع عند الزمن t لنقطة تتحرك على خط الاحداثيات ، فإن السرعة المتوسطة للنقطة فى الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هى

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

لنقطة التى موضعها يعطى بالمعادلة (١) ، $s(t) = 8t - t^2$ السرعة المتوسطة فى الفترة الزمنية $[1, 3]$ هى

$$\frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{15 - 7}{2} = 4 \text{ ft/sec}$$

السرعة المتوسطة فى الفترة الزمنية $[2, 8]$ هى

$$\frac{s(8) - s(2)}{8 - 2} = \frac{0 - 12}{6} = -2 \text{ ft/sec}$$

الإشارة السالبة تشير الى أن النقطة تكون متحركة الى اليسار بعضاً من الوقت . السرعة المتوسطة فى الفترة الزمنية $[2, 6]$ هى

$$\frac{s(6) - s(2)}{6 - 2} = \frac{12 - 12}{4} = 0 \text{ ft/sec}$$

السرعة المتوسطة صفر لا تعنى أن النقطة لم تتحرك . فهى فى هذا الزمن قد تحركت الى الامام ثم رجعت الى الخلف الى نقطة الابتداء .

كما يوضح هذا المثال الأخير ، السرعة المتوسطة لا تعطى معلومات عن السرعة عند أى لحظة خاصة . العربة قد تقطع الـ 225 miles من Boston إلى New York فى 5 hr . فسرعتها المتوسطة تكون 45 mph ، لكن هذا لا يتضمن أن سرعتها عند أى لحظة كانت 45 mph .

هذا يشير السؤال كيف يمكننا إيجاد سرعة النقطة عند لحظة معطاة . لكن أولاً يجب أن نقرر ماذا نقصد بالسرعة اللحظية . نريد تعريفاً يعكس أفكارنا المنطقية عن السرعة . دعنا نعتبر أولاً النقطة المتحركة التي موضعها يعطى بالمعادلة (١) ، $s(t) = 8t - t^2$ ونحاول تعريف ماذا نقصد بسرعة النقطة عند $t = 2$. السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية $[2, 4]$ هي

$$\frac{s(4) - s(2)}{4 - 2} = \frac{16 - 12}{2} = 2 \text{ ft/sec}$$

كما رأينا ، هذه ليست بالضرورة السرعة عند $t = 2$ ، لكن إذا كانت السرعة لا تتغير تغيراً ملحوظاً ، فهذه تعطي تقريباً غير دقيق للسرعة عندئذ ، وأيضاً للسرعة عند أى وقت بين 2 و 4 . تقريب أفضل يعطى بالسرعة المتوسطة في الفترة الزمنية الأقصر $[2, 3]$.

$$\frac{s(3) - s(2)}{3 - 2} = \frac{15 - 12}{1} = 3 \text{ ft/sec}$$

لأزالت تقريبات أفضل يمكن إيجادها بحساب السرعة المتوسطة

$$\frac{s(t') - s(2)}{t' - 2}$$

في فترات زمنية $[2, t']$ أصغر فأصغر ، كما هو موضح في الجدول الآتي

السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية $[2, t']$ قدم / ثانية			
t'	$s(t')$	$s(t') - s(2)$	
4	16	4	2
3	15	3	3
2.1	12.39	0.39	3.9
2.01	12.0399	0.0399	3.99
1.999	11.995999	-0.004001	4.001
t'	$8t' - t'^2$	$8t' - t'^2 - 12$	$6 - t'$

السطر الأخير هو حساب السرعة المتوسطة لفترة زمنية اختيارية $[2, t']$ (أو $[t', 2]$ إذا كانت $t' < 2$) . عندما تكون t' قريبة من 2 ، تكون السرعة المتوسطة قريبة من 4 وفي الواقع

$$\lim_{t' \rightarrow 2} \frac{s(t') - s(2)}{t' - 2} = \lim_{t' \rightarrow 2} (6 - t') = 4 \text{ ft/sec}$$

من المعقول عندئذ تعريف السرعة عند $t = 2$ لتكون 4 ft/sec .

الحالة العامة تعالج بالمثل . السرعة عند لحظة معطاة t تعرف بأنها نهاية السرعة المتوسطة في فترات زمنية أقصر فأقصر $[t, t']$. أى أن السرعة عند الزمن $t =$ نهاية (السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية $[t, t']$)
 $t' \rightarrow t$

$$= \lim_{t' \rightarrow t} \frac{s(t') - s(t)}{t' - t}$$

لكن هذه هي تماماً $s'(t)$ ، مشتقة s عند t . لدينا إذن تعريف منطقي قوى ومناسب للسرعة .

٤- ٢٣ . تعريف إذا كانت $s(t)$ هي الموضع عند الزمن t لنقطة متحركة على خط الاحداثيات فإن سرعة النقطة عند الزمن t تعرف بأنها المشتقة $s'(t)$.

سنرمز للسرعة بالرمز $v(t)$ ، مستخدمين الأسلوب الدالي لأن السرعة قد تتغير هي أيضاً مع الزمن . بما أننا نتعامل مع مواضيع فيزيائية ، فسوف نأخذ في الاعتبار فقط الدوال التي توجد مشتقاتها

السرعة كما عرفت أعلاه تسمى أحياناً السرعة اللحظية لتؤكد إنها مختلفة عن السرعة المتوسطة . سوف لا نفعل ذلك هنا . السرعة سنعني بها السرعة عند الزمن t كما عرفت في ٤- ٢٣ . السرعة المتوسطة هي دائماً بالنسبة إلى فترة زمنية . السرعة هي دائماً بالنسبة إلى لحظة معطاه .

سرعة النقطة التي موضعها يعطى بالمعادلة (١)

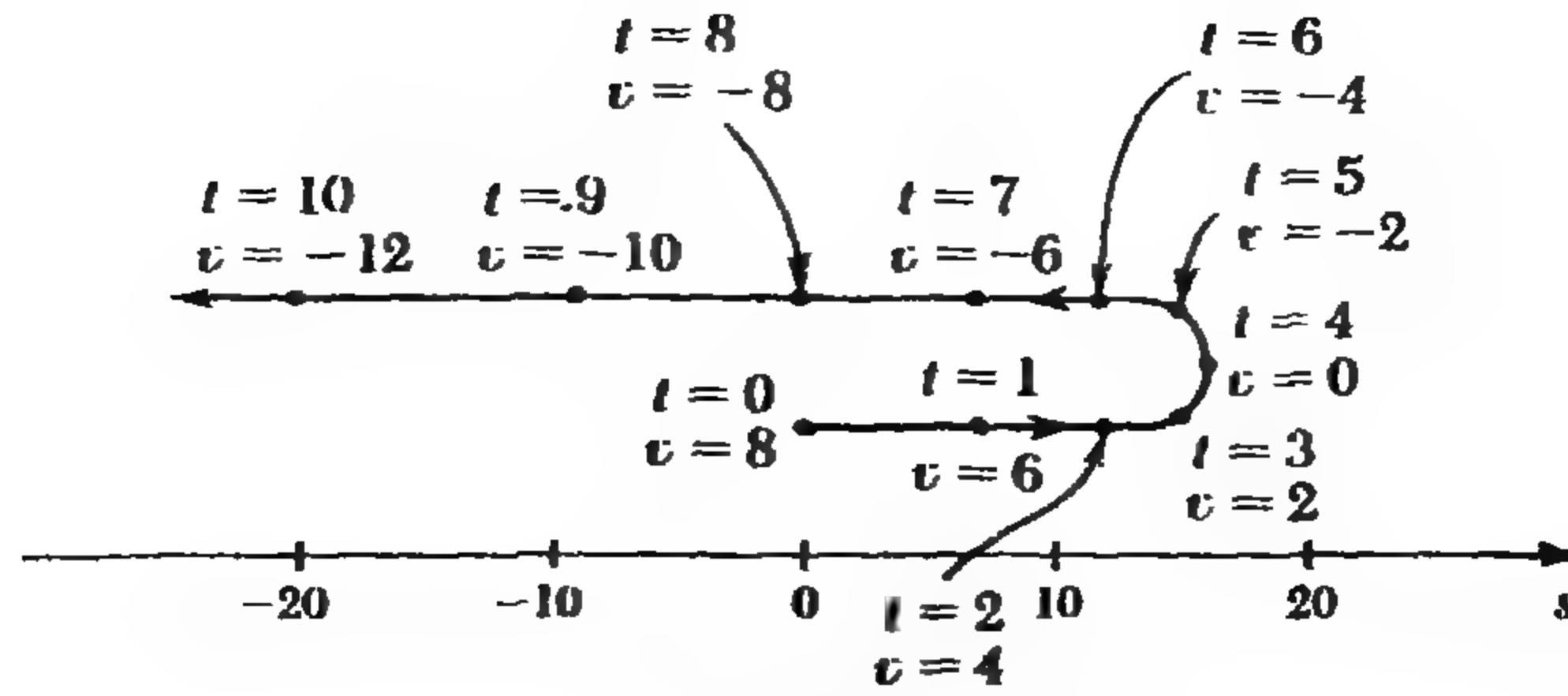
$$(١) \quad s(t) = 8t - t^2, \quad t \geq 0$$

هي

$$(٢) \quad v(t) = s'(t) = 8 - 2t$$

نكتب ثانية جدول المواضع المعطى سابقاً ونجمع السرعات عند الأوقات المناظرة . الشكل ٤- ٥٣ هو نفس الشكل ٤- ٥٢ لكن يوضح السرعات عند النقط .

ثانية t	$s(t)$, قدم	$v(t)$, قدم/ثانية
0	0	8
1	7	6
2	12	4
3	15	2
4	16	0
5	15	-2
6	12	-4
7	7	-6
8	0	-8
9	-9	-10
10	-20	-12
20	-240	-32



شكل ٤-٣

الموضع والسرعة لحظة تتحرك وفقاً للقاعدة $s(t) = 8t - t^2$ و $t \geq 0$.

إشارة $v(t)$ تشير إلى الاتجاه الذي تتحرك فيه النقطة . إذا كانت $v(t) > 0$ لجميع t في الفترة الزمنية (t_1, t_2) ، فإن s تزايد في $[t_1, t_2]$ والنقطة تكون متحركة إلى اليمين . إذا كانت $v(t) < 0$ ، فإن s تكون متناقصة والنقطة تكون متحركة إلى اليسار . من الجدول نرى أن النقطة تتحرك إلى اليمين أثناء الـ 4 sec الأولى لكن متباطئة بالتدريج . تصل للسكون لحظياً عند $t = 4$ وعندئذ تتحرك إلى اليسار أسرع فأوسع . القيمة المطلقة للسرعة $|v(t)|$ تسمى السرعة غير الموجهة للنقطة . في المثال السابق ، سرعة النقطة هي 4 عند $t = 2$ وعند $t = 6$ ، لكن في الحالة الأولى النقطة تكون متحركة إلى اليمين وفي الثانية إلى اليسار .

القارئ الملم بالمتجهات يلاحظ أن السرعة هي بالضبط متجه وهي مثل جميع المتجهات يمكن تمثيلها بقطعة مستقيمة متجهة . عندما تكون الحركة على خط مستقيم ، المتجه يقع على الخط المستقيم ، مشيراً لاتجاه الحركة . الكمية $v(t)$ كمية عادية لكن تعطى معلومات كاملة عن المتجه . طول المتجه هو $|v(t)|$ ، واتجاهه يعطى بإشارة $v(t)$ المتجه يشير إلى اليمين إذا كانت $v(t) > 0$ وإلى اليسار إذا كانت $v(t) < 0$.

التغير في السرعة يسمى العجلة ويقاس بمشتقة $v(t)$. أي أن ، إذا كانت $a(t)$ ترمز إلى العجلة عند الزمن t ، فإن $a(t) = v'(t) = s''(t)$. العجلة الموجبة تعني أن السرعة متزايدة ، والعجلة السالبة تعني أن السرعة متناقصة . العجلة السالبة عامة تسمى عجلة تقصيرية . عجلة النقطة التي موضعها وسرعتها تعطيان بـ (١) و (٢) هي $a(t) = v'(t) = -2$ ft/sec/sec . السرعة متناقصة بمعدل ثابت هو 2 ft/sec/sec ، كما هو واضح أيضاً من جدول السرعات . هذا لا يعني أن السرعة غير المتجهة دائماً متناقصة . عندما تكون $t \geq 4$ ، السرعة غير المتجهة تزايد عندما تتحرك النقطة إلى اليسار بسرعة أكثر فأكثر .

العجلة هي معدل التغير في السرعة . كما أن السرعة يعبر عنها بدلالة المسافة في الثانية ، مثلاً قدم/ثانية ، فإن العجلة يعبر عنها بدلالة السرعة في الثانية ، مثلاً قدم/ثانية/ثانية . مثل السرعة ،

الاعجلة هي متجه . رغم أننا سنشير إلى $a(t)$ كالاعجلة ، فهي في الواقع مقدار الاعجلة وإشارتها ، لمتجه الاعجلة .

مثال ١ . صف الحركة لنقطة يتعين موضعها على خط الاحداثيات عند الزمن t بالعلاقة $s(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 2, t \geq 0$.

نوجد الفترات الزمنية التي خلالها تكون السرعة موجبة وسالبة ، لكي نعين اتجاه الحركة . لهذا الغرض ، نوجد أولاً متى تكون السرعة صفراً . بما أن

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 18t + 15 = 3(t-1)(t-5) \quad \bullet$$

فان $v(t) = 0$ عند فقط عند $t = 1$ و $t = 5$. عند هذين الزمنين $s(1) = 9$ و $s(5) = -23$ العدان 1 و 5 يقسمان الفترة الزمنية اللانهائية $[0, \infty)$ الى الفترات الجزئية

$$[0,1], \quad [1,5], \quad [5,\infty)$$

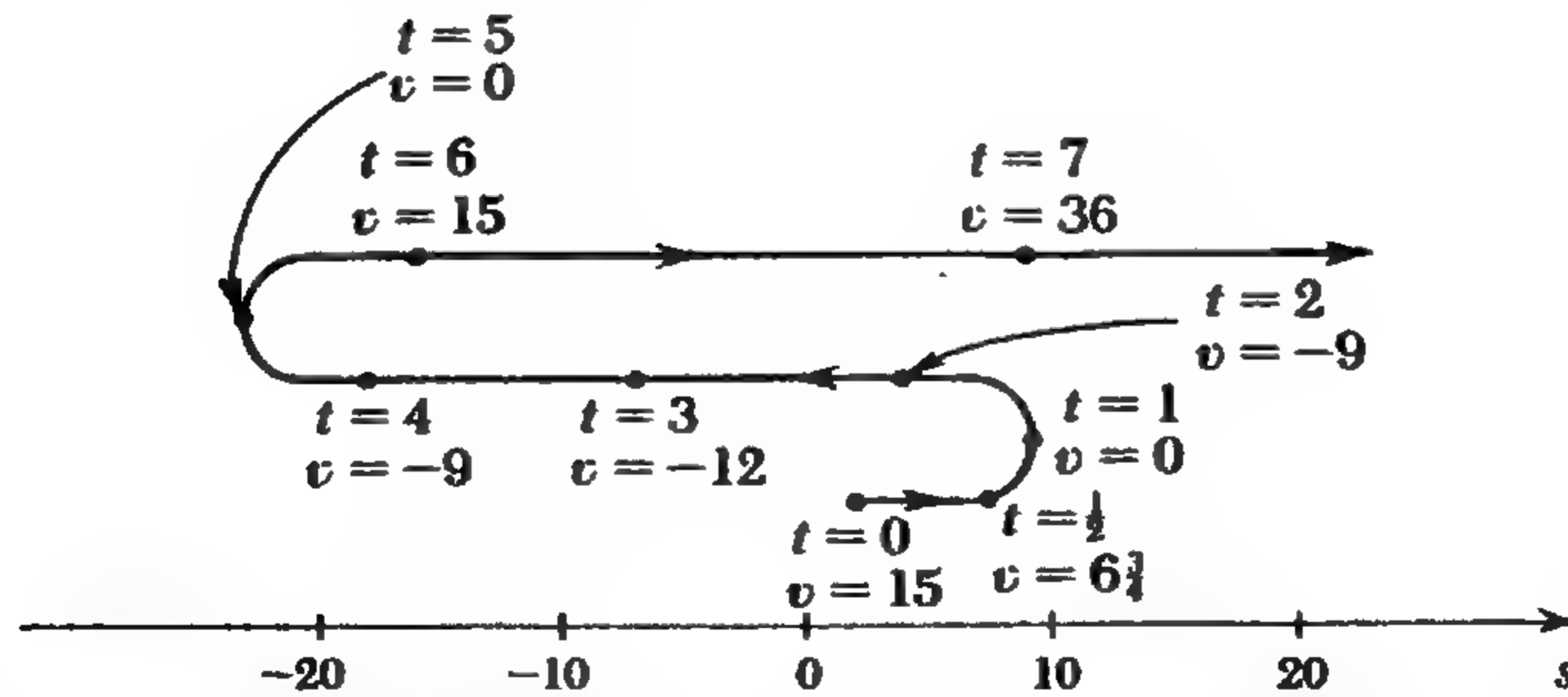
التي في كل منها السرعة تكون موجبة دائماً أو سالبة دائماً ومن ثم في كل منها تكون s اما متزايدة • واما متناقصة .

في الفترة $(0, 1)$ ، $v(t) > 0$ ، وتكون s متزايدة في $[0, 1]$ ، والنقطة تتحرك الى اليمين .

في الفترة $(1, 5)$ ، $v(t) < 0$ ، وتكون s متناقصة في $[1, 5]$ ، والنقطة تتحرك الى اليسار .

في الفترة $(5, \infty)$ ، $v(t) > 0$ ، وتكون s متزايدة في $[5, \infty)$ ، والنقطة تتحرك الى اليمين .

الحركة صورت في الشكل ٤ - ٥ . عندما $t = 0$ النقطة تكون عند $s = 2$ وتتحرك الى اليمين بسرعة 15 . وهي تستمر في الحركة الى اليمين حتى $t = 1$ ، حيث تقف لحظياً عند $s = 9$. ثم تعكس اتجاهها وتتحرك الى اليسار حتى $t = 5$ ، عندما تقف لحظياً عند $s = -23$. الآن تتحرك الى اليمين ثانية وتستمر في ذلك متحركة بعيداً الى ما لا نهاية .



شكل ٤ - ٥

حركة نقطة يتعين موضعها بالعلاقة $s(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 2, t \geq 0$. السرعة لها نهاية صفري موضعية عند $t = 3$ حيث $a(t) = 0$.

• لكي لا نغيب الموقف العام ، الوحدات في المعالجة الرياضية للمسائل الطبيعية غالباً ما لا تذكر . اذا كانت s مقاسة بالياردات ، t بالدقائق ، فان v تقاس بالياردات لكل دقيقة . اذا كان s, t بالستيمترات والثواني ، فان تقاس بالستيمترات لكل ثانية .

العجلة تعطى بـ $a(t) = v'(t) = 6(t-3)$ وهي تبين أن السرعة متناقصة لـ $0 \leq t \leq 3$ ومتزايدة لـ $t \geq 3$. عندما $t = 3$, $v = -12$ والنقطة تكون متحركة الى اليسار أسرع من نهاية صفري موضعية للسرعة. قيم v المعطاة في الشكل ٤ - ٥ توضح ذلك. لاحظ أن في الفترة $3 \leq t \leq 5$ النقطة تتحرك الى اليسار مع أن السرعة تكون متزايدة.

سرعة النقطة قد لا تكون صفراً عند $t = 0$. الزمن $t = 0$ يشير فقط الى اللحظة التي نبدأ منها قياس الزمن. اذا كان الزمن مقيساً بالساعات، فان $t = -2$ تعني ساعتين قبل تشغيل الساعة.

مثال ٢ صف حركة النقطة التي موضعها على خط الاحداثيات عند الزمن t يتعين بالعلاقة $s(t) = 5t^3 - 3t^5$.

لدينا

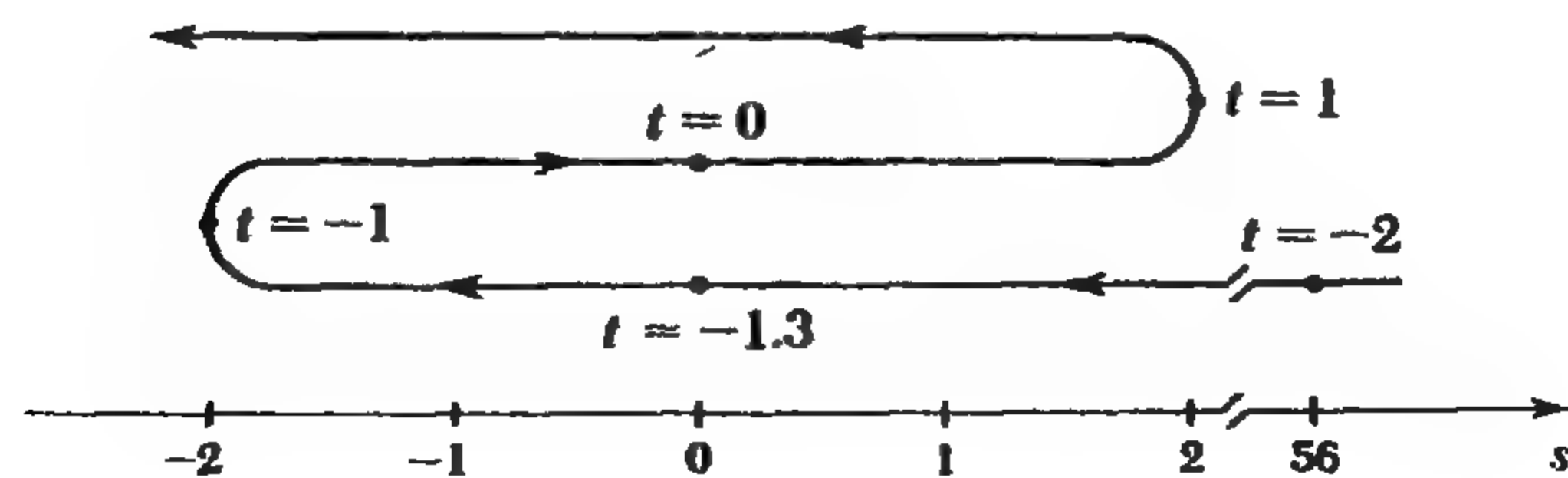
$$v(t) = s'(t) = 15t^2 - 15t^4 = 15t^2(1 - t^2),$$

$$a(t) = v'(t) = 30t - 60t^3 = 30t(1 - 2t^2).$$

السرعة تساوي صفراً عند $t = 1$ و $t = 0$ و $t = -1$ ، وعند هذه اللحظات $s(1) = 2$ و $s(0) = 0$ و $s(-1) = -2$.

في الفترة $[-\infty, -1]$ ، $v(t) < 0$ ، وتكون s متناقصة في $[-\infty, -1]$.
في الفترة $(-1, 0)$ ، $v(t) > 0$ ، وتكون s متزايدة في $[-1, 0]$.
في الفترة $(0, 1)$ ، $v(t) > 0$ ، وتكون s متزايدة في $[0, 1]$.
في الفترة $(1, \infty)$ ، $v(t) < 0$ ، وتكون s متناقصة في $[1, \infty)$.

نلاحظ أن s تكون كبيرة وموجبة عندما تكون t سالبة وكبيرة. واذن من على بعد كبير جداً على المحور s الموجب تتحرك النقطة الى اليسار أثناء الفترة الزمنية $[-\infty, -1]$ حتى $t = -1$ حيث تقف لحظياً عند $s = -2$ (شكل ٤ - ٥٥). ثم تتحرك الى اليمين حتى $t = 0$ حيث تقف لحظياً عند نقطة الأصل. وتستمر في التحرك الى اليمين حتى $t = 1$ حيث تقف عند $s = 2$. ثم تعكس اتجاهها وتتحرك الى اليسار الى اللانهاية السالبة.



شكل ٤ - ٥٥

حركة نقطة موضعها يعطى بالملاقة $s(t) = 5t^3 - 3t^5$.

مثال ٣ . عند أى زمن t السرعة لنقطة تتحرك على خط الاحداثيات تعطى بالعلاقة $v(t) = t - 1$ اذا كانت النقطة عند $s = 2$ عندما $t = 0$ ، أوجد موضعها عندما $t = 5$.

دالة الموضع $s(t)$ هي المعكوس التفاضلى ، أو التكامل غير المحدد ، لـ $v(t)$.

$$(٣) \quad s = s(t) = \int v(t) dt = \int (t - 1) dt = \frac{1}{2}t^2 - t + C$$

الثابت C يمكن تعيينه من الشرط الحدى $s(0) = 2$. بتعويض $t = 0$ و $s = 2$ فى (٣) نحصل على

$$2 = 0 - 0 + C$$

اذن $C = 2$ ودالة الموضع الخاصة هي

$$s(t) = \frac{1}{2}t^2 - t + 2$$

$$\text{عندما } t = 5, s = s(5) = \frac{1}{2}(5)^2 - 5 + 2 = \frac{13}{2}$$

مثال ٤ . عند أى زمن t العجلة لنقطة متحركة على خط الاحداثيات تعطى بالعلاقة $a(t) = 2t$. من المعلوم أن عند $t = 0$ ، النقطة تكون عند نقطة الأصل وسرعتها 3 . أوجد سرعة النقطة عندما $s = 18$.

لدينا

$$v(t) = \int a(t) dt = \int 2t dt = t^2 + C$$

حيث C ثابت . من الشرط الحدى $v(0) = 3$ ، نرى أن $C = 3$ ، ومن ثم

$$(٤) \quad v(t) = t^2 + 3$$

باجراء التكامل مرة ثانية ، نجد أن $s(t) = \frac{1}{3}t^3 + 3t + C'$ حيث C' ثابت آخر . بما أن $C' = 0$ و $s(0) = 0$ وتكون

$$s(t) = \frac{1}{3}t^3 + 3t$$

المعادلة (٤) تعطى v بدلالة t . لايجاد السرعة عندما $s = 18$ يجب أولا ايجاد قيمة t حيث $s = 18$ ، أى قيمة حيث

$$\frac{1}{3}t^3 + 3t = 18$$

التي هي

$$(٥) \quad t^3 + 9t - 54 = 0$$

بالتجريب والخطأ نجد أن $t = 3$ هي جذر ، وفى الواقع الجذر الوحيد (الحقيقى) اذ ان

$$t^3 + 9t - 54 = (t - 3)(t^2 + 3t + 18)$$

والعامل الثانى ليس له جذر حقيقى . السرعة عند $s = 18$ ، كما نحصل عليها من (٤) ، هي $v(3) = 12$. نظرية العوامل ١-٢١ قد استخدمت لتحليل الطرف الأيسر من (٥) .

لا يلتبس عليك الأمر بين السرعة المتوسطة ومتوسط السرعات . السرعة المتوسطة في فترة زمنية قد لا تكون نفس الشيء مثل متوسط السرعتين عند بداية ونهاية الفترة .

فكرة معدل التغير ليست خاصة بالسرعة فقط . اذا أسقط حجر في بركة فانه يرسل سلسلة من الموجات المتحدة المركز . المساحة A للدائرة المتكونة من الموجة الأكثر بعداً تعتمد على الزمن ولذلك فهي دالة للزمن ، $A = g(t)$. مشتقة g هي معدل تغير A بالنسبة الى t وتقاس سرعة تزايد A . اذا سلطت الحرارة على نهاية واحدة لقضيب حديدى ، درجة الحرارة T عند أى نقطة ثابتة على القضيب دالة للزمن ، $T = f(t)$ ، المشتقة للدالة f هي معدل تغير f بالنسبة الى t وتقاس سرعة تغير درجة الحرارة هناك .

مسائل

فى المسائل الآتية $s(t)$ هي الموضع عند الزمن t لنقطة تتحرك على خط الاحداثيات . عين اذا كانت النقطة تتحرك يمينا أو يساراً أثناء الفترات المعطاة .

- | | |
|---|--------------------------------------|
| ١ - $s(t) = -3t + 5; [1,3]$ | ٢ - $s(t) = t^2 - 6; [2,6], [-4,-2]$ |
| ٣ - $s(t) = \sqrt{t+4}; [-1,5]$ | ٤ - $s(t) = 7t - t^2; [0,5], [0,3]$ |
| ٥ - $s(t) = 3 + 4t - t^2; [3,\infty), [0,10]$ | ٦ - $s(t) = t^3 - 6t; [-1,1], [0,4]$ |

فى المسائل الآتية $s(t)$ هي المسافة الموجهة من نقطة الأصل الى النقطة التى تتحرك على خط الاحداثيات . صف وصور الحركة .

- | | | |
|------------------------------------|--|-------------------------------|
| ٧ - $s(t) = t^2 - 7t + 10$ | ٨ - $s(t) = 6 + 10t - t^2$ | ٩ - $s(t) = t^3$ |
| ١٠ - $s(t) = t^3 - 3t$ | ١١ - $s(t) = 9t - t^3$ | ١٢ - $s(t) = t(t-3)^2$ |
| ١٣ - $s(t) = t^2 - \frac{1}{2}t^3$ | ١٤ - $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t$ | ١٥ - $s(t) = t^4 - 4t$ |
| ١٦ - $s(t) = t^4 - t^3$ | ١٧ - $s(t) = 5t^2 - 2t^5$ | ١٨ - $s(t) = t + 16/t, t > 0$ |
| ١٩ - $s(t) = \frac{6}{t^2 + 1}$ | ٢٠ - $s(t) = t^2 + \frac{36}{t+1}, t > -1$ | |

٢١ - قذف جسم رأسياً لأعلى بسرعة ابتدائية 160 ft/sec ، وكان ارتفاع الجسم $s \text{ ft}$ فوق الأرض وبعد زمن قدره $t \text{ sec}$ يعطى بالدالة $s(t) = 160t - 16t^2$. ما أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم ؟ ما المسافة التى يتحركها فى الثانية الثالثة ؟ أثناء الثانية السابعة ؟

٢٢ - قذفت كرة رأسياً لأعلى . مسافتها $s \text{ ft}$ فوق الأرض بعد $t \text{ sec}$ تعطى بالعلاقة $s = -16t^2 + 48t$. أوجد سرعتها عندما تصطدم بالأرض .

٢٣ - اذا كان موضع نقطة تتحرك على خط الاحداثيات يعطى بالعلاقة $s = \sqrt{t} + 25/\sqrt{t}, t > 0$ أوجد موضعه وعجلته عندما يقف أولاً .

- ٢٤ - موضع نقطة تتحرك على خط الاحداثيات يعطى بالعلاقة $s(t) = 6t^2 - t^3$ حيث s بالقدم والزمن t بالدقيقة . ما المسافة الكلية المقطوعة خلال 5 min الأولى .
- ٢٥ - طاقة الحركة لجسم كتلته m متحرك بسرعة v هي $\frac{1}{2}mv^2$ موضع الجسم الذى كتلته m متحركاً على خط الاحداثيات يعطى بالعلاقة $s = 1 + t^2$ حيث s بالستيمترات والزمن t بالثوانى . ما طاقة الحركة للجسم بعد 5 sec ؟
- ٢٦ - أوجد أقصى سرعة للنقطة فى مثال ٢ .
- ٢٧ - أوجد أكبر وأصغر سرعة للنقطة فى المسألة ١٠ فى الفترة الزمنية $[-1, 5]$.
- ٢٨ - أوجد أكبر وأصغر سرعة للنقطة فى المسألة ٨ . فى الفترة الزمنية $[0, 12]$.
- ٢٩ - موضع نقطة تتحرك على خط الاحداثيات يعطى بالعلاقة $s = t^3 - 6t^2 + 8t$ أوجد أصغر سرعة ومقدارها .
- ٣٠ - أوجد السرعتين الكبرى والصغرى للنقطة فى المسألة ١٨ .
- ٣١ - موضع نقطة متحرك على خط الاحداثيات يعطى بالعلاقة $s = t^3 - 2t^2 - 3t + 10$ أوجد السرعة المتوسطة فى الفترة الزمنية $[2, 4]$ ومتوسط السرعتين عند $t = 2$ و $t = 4$.
- ٣٢ - أثبت أنه اذا كانت معادلة الحركة خطية أو من الدرجة الثانية ، فإن السرعة المتوسطة فى أى فترة زمنية يساوى متوسط السرعتين عند بداية ونهاية الفترة . (ارشاد : خذ المعادلة $s(t) = at^2 + bt + c$ وخذ $[t_1, t_2]$ الفترة الزمنية) . هل النتيجة صحيحة اذا كانت المعادلة من الدرجة الثالثة ؟
- ٣٣ - موضع نقطة تتحرك على خط الاحداثيات يعطى بالعلاقة $s = \sqrt{t+2}$ ، أثبت أن العجلة تكون دائماً سالبة وتتناسب مع مكعب السرعة .
- ٣٤ - نقطة تتحرك على خط الاحداثيات بسرعة تساوى $\sqrt[3]{t}$ ft/sec . ما هى المسافة التى تقطعها فى الثانية الرابعة ؟
- ٣٥ - السرعة لنقطة تتحرك على خط الاحداثيات تتناسب دائماً مع الجذر التربيعى للزمن . أوجد دالة المسافة $s(t)$ ، بفرض أن $s = 2$ عند $t = 0$ وأن $s = 3$ عند $t = 1$.
- ٣٦ - عند الزمن t تكون عجلة نقطة متحركة على خط الاحداثيات هي $6t$. عندما $t = 1$ ، النقطة تكون عند نقطة الأصل وتتحرك فى الاتجاه السالب بسرعة مقدارها 4 . أين تكون النقطة عند $t = 4$. هل النقطة تكون عند نقطة الأصل لقيم أخرى لـ t غير 1 ؟
- ٣٧ - نقطة تتحرك على خط الاحداثيات فى الفترة الزمنية $[0, 4]$ لها عجلة تعطى بالعلاقة $a(t) = 6 - 6t$. عندما $t = 0$ ، النقطة تكون ساكنة وعند نقطة احداثياتها 1 . أوجد دالة الموضع $s(t)$ وارسم شكلاً بيانياً للحركة . أوجد الموضع النهائى على اليمين الذى تصل اليه النقطة وأوجد الزمن عندما تكون هناك . أوجد السرعة المتوسطة أثناء الثانية الثانية .
- ٣٨ - العجلة لنقطة تتحرك على خط الاحداثيات تعطى بالعلاقة $a(t) = 2$. اذا كانت $s(1) = 10$ و $v(1) = 4$ فأوجد السرعة عندما $s = 22$.

٣٩ - ينزلق الفحم لأسفل بعجلة 12 ft/sec/sec . اذا كان عند لحظة معينة ينزلق بسرعة 4 ft/sec . ما المسافة التي ينزلقها أثناء ال 5 sec التالية .

٤٠ - قطار سرعته 80 ft/sec ، يستخدم السائق فرامله ، ليحصل على عجلة تقصيرية مقدارها $\frac{1}{2} \text{ ft/sec/sec}$ أوجد متى يقف القطار ، أوجد طول المسافة التي يقطعها خلال هذا الزمن .

٤١ - صاروخ مبتدىء من سكون يتحرك بعجلة ثابتة ، مسافة 600 ft في 5 sec ، ما هي عجلته ؟

٤٢ - بالبدء من سكون ، باى عجلة ثابتة يجب أن تتحرك عربة لتقطع 200 ft في 5 sec ؟

٤٣ - حجر ينزلق على الجليد بسرعة ابتدائية قدرها 30 ft/sec . الاحتكاك يبطئه بعجلة ثابتة

سالبة . اذا كان في 3 sec السرعة تنقص الى 24 ft/sec ، الى أى مسافة سينزلق الحجر ؟

٤٤ - بفرض أنه عندما تستخدم فرامل العربة فانها تعطى عجلة تقصيرية مقدارها $k \text{ ft/sec/sec}$.

ما قيمة k التي تجعل عربة تقف بعد أن تقطع مسافة قدرها 300 ft اذا كانت سرعتها

60 mph ($60 \text{ mph} = 88 \text{ ft/sec}$) ؟ بنفس قيمة k ، ما طول المسافة التي تقطعها عربة

سرعتها 30 mph قبل أن تقف ؟

٤٥ - من قمة تل طوله 110 ft ، بدأت كرة تتدحرج لأسفل . اذا كانت عجلتها دائماً 8 ft/sec/sec

وتقطع مسافة 20 ft في ال 2 sec الأولى ، فمتى تصل قاعدة التل .

٤٦ - قطار بدأ من السكون متجهاً الى مدينة تبعد 10 miles . ظل يتحرك بعجلة ثابتة خلال ال

2 miles الأولى وبعد ذلك ظل يتحرك بعجلة مقدارها صفر . ما هي العجلة الثابتة اذا وصل

الى المدينة في 15 min ؟

٤٧ - السرعة لنقطة تتحرك على خط الاحداثيات دائماً تساوى \sqrt{s} أوجد عجلتها عند $s = 3$

$$\left(\text{ارشاد : } \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} \right)$$

٤٨ - أثبت أن الصيغة $d = rt$ ، المعروفة في الجبر الابتدائي ، للمسافة d التي يقطعها جسم في

فترة زمنية طولها t يتحرك بمعدل أو سرعة r ، صحيحة للسرعات الثابتة .

١١ - ٤

الأجسام الساقطة

أحد اضافات نيوتن العظمى في العلوم هو اكتشافه أن حركة الجسم تحدد بالكامل بالقوى المؤثرة عليه . قانونه الثاني للحركة يشير الى أن حاصل ضرب الكتلة m والعجلة a للجسم هو في كل الأوقات مساوياً لحاصل الجمع F للقوى المؤثرة عليه . أى أن ،

$$(1) \quad ma = F \quad *$$

القوة تعطى عجلة تتناسب مع القوة . الكميتان F و a متجهتان . اذا كان الجسم متحركاً على خط الاحداثيات موازياً لاتجاه القوة فان (١) تكافئ معادلة غير متجهة

* نيوتن أعطى قانونه في صورة أهم ، حيث لجسم كتلة ثابتة ينزول الى (١)

$$(٢) \quad ma = -F \quad \text{و} \quad ma = F$$

طبقاً لكون القوة F تعمل على زيادة أو نقص احداثى الجسم فى (٢) ، a هو المقدار بإشارته لمتجه العجلة ، أى أن ، $a = a(t) = v'(t)$ ، F تكون مقدار القوة . هذه هى المعادلة الأساسية التى تحكم كل حركة على خط مستقيم مسببة بقوة . المقدار F للقوة ، هو طول متجهه ، فهو لا يكون سالباً أبداً .

التطبيق الهام لقانون نيوتن $ma = F$ هو على الأجسام الساقطة . القوة الأساسية المؤثرة على الجسم الساقط ناشئة عن الجاذبية الأرضية ، للتبسيط ، سنفترض أنها القوة الوحيدة فقط . القوة تتوقف على بعد الجسم من مركز الأرض ، لكن بالقرب من سطح الأرض هى ثابتة بالتقريب ومقدارها $F = mg$ ، حيث m كتلة الجسم وحيث g ثابت ، يسمى عجلة الجاذبية الأرضية وقيمتها تعتمد على الوحدات المستخدمة . فى النظام قدم - باوند - ثانية (ق . ب . ث) تكون $g = 32 \text{ ft/sec/sec}$ بالتقريب ؛ وفى النظام سنتيمتر - جرام - ثانية (سم . جم . ث) (ارج) (ergs) تكون $g = 980 \text{ cm/sec/sec}$ بالتقريب . إذا كانت $s = s(t)$ هى احداثى الجسم عند الزمن t ، فإن $a = d^2s/dt^2$. بتعويض a بـ mg و F فى (٢) ، يكون لدينا

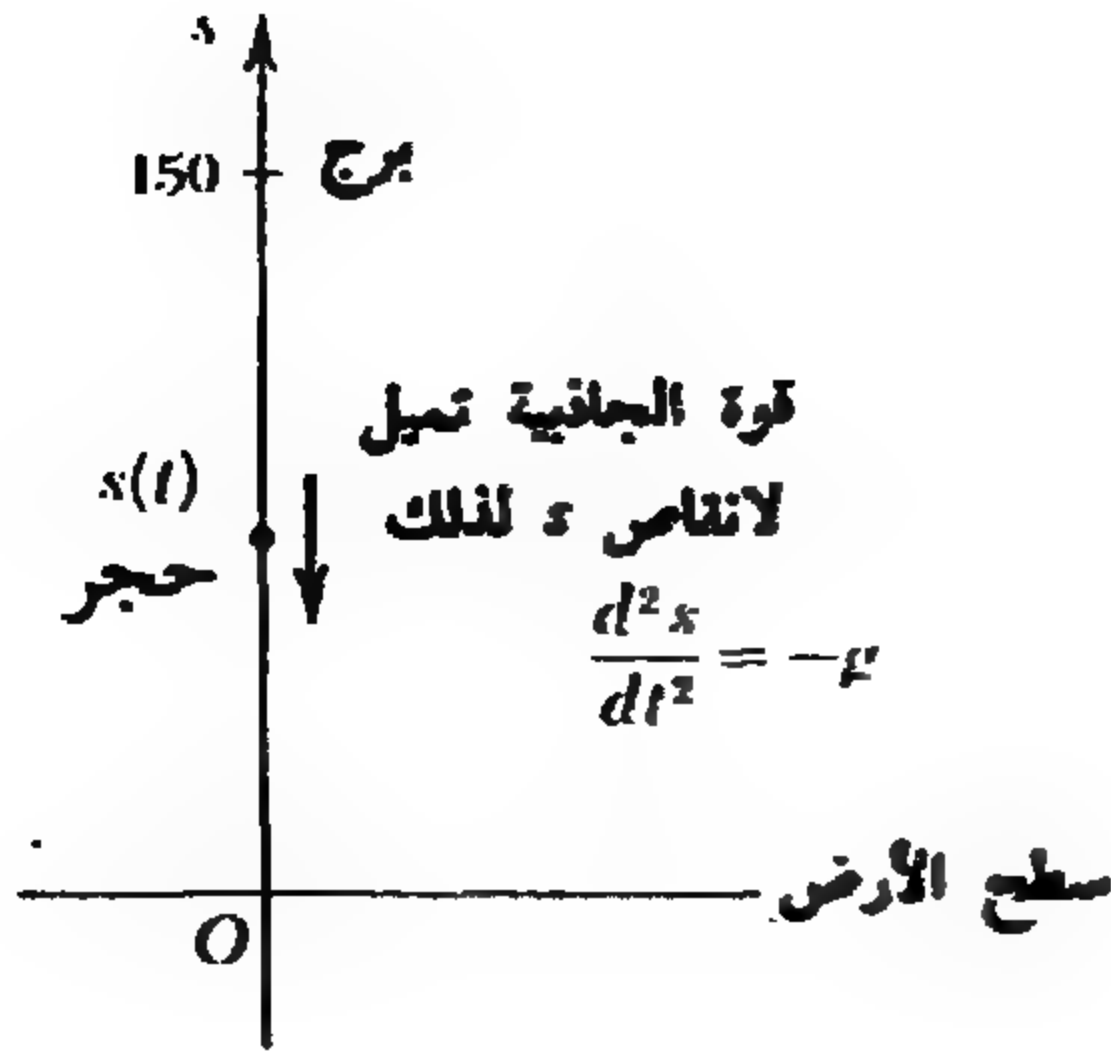
$$(٣) \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -g \quad \text{أو} \quad \frac{d^2s}{dt^2} = g$$

تبعاً لكون قوة الجاذبية تعمل على زيادة أو انقاص الاحداثى s للجسم . هذه هى معادلة تفاضلية تحكم حركة الجسم الساقط قرب سطح الأرض تحت الافتراض أن الجاذبية هى القوة الوحيدة المؤثرة على الجسم . المعادلة توضح أن الجسم يسقط بعجلة ثابتة g وأن تلك الحركة لا تعتمد على كتلة الجسم : الجسم الخفيف يسقط سريعاً مثل الجسم الثقيل . فى الأمثلة أدناه سنوضح كيف تستخدم (٣) لإيجاد السرعة وموضع الجسم عند أى لحظة .

مثال ١ . ألقى ولد حجراً رأسياً لأسفل من برج ارتفاعه 150 ft بسرعة ابتدائية قدرها 20 ft/sec باهمال جميع القوى ما عدا القوة التى تنشأ عن الجاذبية الأرضية ، أوجد سرعة الحجر عندما يرتطم بسطح الأرض .

ندخل خط الاحداثيات s متجهاً الى أعلى بنقطة الأصل عند سطح الأرض (شكل ٤ - ٥٦) ولتكن $s = s(t)$ هى احداثى الحجر عند الزمن t . القوة الناشئة عن الجاذبية تكون دائماً متجهة لأسفل ، هذه ستكون صحيحة حتى إذا كان الحجر قد قذف لأعلى . ولأن القوة تعمل على انقاص s ، فالمعادلة الثانية فى (٣) هى التى تصف الحركة ، $d^2s/dt^2 = -g$. فى نظام الوحدات قدم - باوند - ثانية ، الذى سنستخدمه ، $g = 32$ ، والمعادلة تصبح

$$(٤) \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -32, \quad t \geq 0$$



شكل ٤-٥٦
 $s(t)$ هي بعد الحجر فوق سطح الأرض عند الزمن t

بتكامل (٤) ، يكون لدينا

$$(٥) \quad v = \frac{ds}{dt} = -32t + C$$

لايجاد قيمة الثابت C ، نبحث عن قيمة t التي عندها تكون v معلومة . عندما $t = 0$ تكون $v = -20$ (ب) يجب اختبارها سالبة لأن s تناقص عند $t = 0$. ومن ثم $C = -20$ ، وتصبح (٥) .

$$(٦) \quad v(t) = \frac{ds}{dt} = -32t - 20$$

لا يمكننا ايجاد السرعة التي بها يرتطم الحجر بالأرض الى أن نعلم الزمن لارتطام الحجر . لتعيين الزمن ، نحتاج لدالة المسافة التي توجد بتكامل (٦) ، ويكون

$$(٧) \quad s = s(t) = -16t^2 - 20t + C'$$

لايجاد C' نبحث عن قيمة t تكون عندها s معلومة . عندما $t = 0$ ، تكون $s = 150$. ومن ثم $C' = 150$ ، وتصبح (٧)

$$(٨) \quad s(t) = -16t^2 - 20t + 150$$

هذه تعطي موضع الحجر عند أي زمن t . الحجر سيصل الأرض عند قيمة t حيث $s = 0$. الطرف الأيمن من (٨) يحلل الى

$$(٩) \quad s(t) = -2(4t + 15)(2t - 5)$$

ومنه $s = 0$ عندما $t = \frac{5}{2}$. الجذر الآخر لـ (٩) ، يكون سالباً ، فيستبعد بالاعتبارات الطبيعية وأيضاً بالقيود في (٤) أن $t \geq 0$. الآن وقد علمنا متى يرتطم الحجر بالأرض ، يمكننا من (٦) ايجاد السرعة التي يرتطم بها وهي

$$v\left(\frac{5}{2}\right) = -32\left(\frac{5}{2}\right) - 20 = -100 \text{ ft/sec}$$

الاشارة السالبة توضح أن s تكون عندئذ متناقصة .

مثال ٢ . قذفت كرة رأسياً الى أسفل من قمة مبنى . اذا كانت تسقط 20 ft في الثانية الاولى ، ما هي سرعتها الابتدائية ؟ باهمال كل القوى ماعدا التي تنشأ عن الجاذبية الأرضية .

فى أى مسألة يكون الاختلاف فى اختيار نقطة الأصل واتجاه خط الاحداثيات أمراً ليس له أهمية . تفاصيل الحل ستختلف باختيارات مختلفة ، لكن الاجابات ستكون نفس الشيء . هذه المرة سنوجه خط الاحداثيات لأسفل ونضع نقطة الأصل عند قمة المبنى (شكل ٤ - ٥٧) . ندع $s = s(t)$ موضع الحجر بعد t sec . القوة الناتجة عن الجاذبية اتجاهها لأسفل . بما أن القوة تعمل على زيادة s ، فإن الحركة توصف بالمعادلة الأولى فى (٣) ، وتكون $d^2s/dt^2 = g$ مرة ثانية $g = 32$ والمعادلة تصبح

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 32, \quad t \geq 0$$

التكامل يعطينا

$$(10) \quad v(t) = \frac{ds}{dt} = 32t + C$$

بما أنه لا توجد معلومات عن قيمة $v(t)$ عند زمن معين t ، فإنه لا يمكن إيجاد الثابت C الآن . التكامل مرة ثانية يعطينا

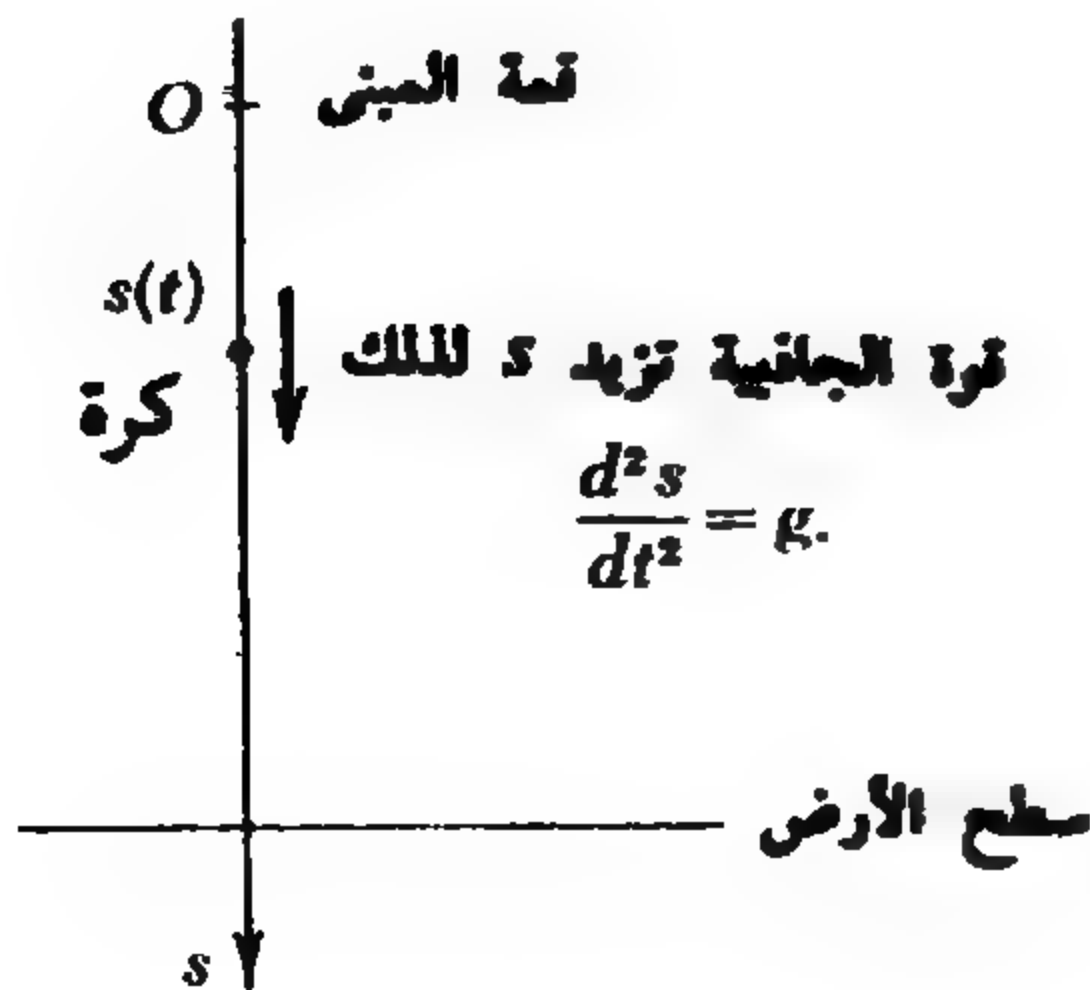
$$s(t) = 16t^2 + Ct + C'$$

من المعروف أن $s(0) = 0$. ومن ثم $C' = 0$.

(11) $s(t) = 16t^2 + Ct$ أيضاً نعلم حقيقة أخرى عن $s(t)$ هي $s(1) = 20$ وبذلك نستطيع إيجاد C . بتعويض $s(1) = 20$ و $t = 1$ فى (11) ، يكون $20 = 16 + C$. ومن ثم $C = 4$ ، وتصبح (10) على الصورة $v(t) = 32t + 4$ السرعة الابتدائية تعطى الآن بـ $v(0) = 4$. الحقيقة أنها موجبة تعنى أن الكرة قذفت لأسفل وليس لأعلى .

نلخص الخطوات لحل مسائل الحركة على خط مستقيم الناشئة عن تأثير قوة .

- ١ - اختر خط الاحداثيات s منطقياً على خط الحركة .
- ٢ - قرر أى المعادلتين فى (٢) تصف الحركة . هذا يحدد بما تعمله القوة على الجسم ، وليس على الاتجاه الذى يتحرك فيه الجسم . للأجسام الساقطة ، الحالة الخاصة من (٢) المعطلة فى (٣) تكون أكثر ملاءمة لوصف الحركة .



شكل ٤ - ٥٧

$s(t)$ هي المسافة تسقطها الكرة فى t sec .

٣ - اجر تكامل المعادلة التفاضلية . ثوابت التكامل توجد ، عندما يمكن ايجادها ، بالبحث عن قيمة t حيث تكون $v(t)$ أو $s(t)$ معلومة . اشارة السرعة عند هذا الزمن t يحدد بالاتجاه الذى يكون الجسم متحركاً فيه عند ذلك الزمن .

٤ - بما أن $s(t)$ و $v(t)$ تكتبان بدلالة t ، فالاستفسارات عنهما يمكن اجابتهما فقط بأن نوجد أولاً متى يحدث الحادث .

مسائل

في المسائل الآتية المحتوية على الأجسام الساقطة افترض أن الجاذبية هي القوة الوحيدة المؤثرة على الجسم .

١ - قذف حجر رأسياً الى أسفل من قمة جرف عال بسرعة ابتدائية 15 ft/sec . ما طول المسافة التى يسقطها أثناء الـ 3 sec الأولى .

٢ - لقياس ارتفاع الجرف ، اسقط حجر من القمة فارتطم بسطح الأرض بعد $2\frac{1}{2} \text{ sec}$. ما ارتفاع الجرف ؟

٣ - اثبت أن الجسم الساقط البادىء من السكون فيقطع 16 ft فى الثانية الأولى ، 48 ft فى الثانية الثانية ، 80 ft فى الثانية الثالثة ، 112 ft فى الثانية الرابعة .

٤ - اشتق صيغة طبيعية $s = \frac{1}{2}gt^2$ للمسافة التى يقطعها جسم مبتدئاً من السكون فى $t \text{ sec}$. كيف يجب اختيار نظام الاحداثيات للحصول على هذه الصيغة ؟ وضح أن سرعة الجسم عند سقوطه مسافة $s \text{ ft}$ هي $\sqrt{2gs}$.

٥ - اشتق صيغة للمسافة التى يسقطها جسم فى $t \text{ sec}$ اذا كانت سرعته ابتدائية $v_0 \text{ ft/sec}$ لأسفل .

٦ - اثبت أنه اذا كانت لا توجد قوة تؤثر على نقطة تتحرك على خط الاحداثيات ، فان السرعة تكون ثابتة .

٧ - رجل واقف على سطح مبنى ارتفاعه 256 ft يقذف حجراً رأسياً لأعلى بسرعة ابتدائية قدرها 96 ft/sec . متى وبأى سرعة سيصطدم الحجر بسطح الأرض ؟

٨ - رجل على سطح مبنى ارتفاعه 30 meters ، بأى سرعة ينبغي أن يقذف الرجل حجراً رأسياً لأعلى اذا كان الحجر يصل الى سطح الأرض بعد زمن قدره 5 sec ؟

٩ - رجل يقذف حجراً رأسياً لأعلى بسرعة قدرها $v_0 \text{ cm/sec}$ الى أى ارتفاع يصل الحجر ؟

١٠ - بأى سرعة ، مقيسة بالسنتيمتر/ثانية ، يجب قذف حجر رأسياً لأعلى من سطح الأرض اذا كان سيرجع لسطح الأرض ثانية بعد مرور 12 sec ؟

١١ - ولد على سطح الأرض يرغب فى قذف كرة رأسياً لأعلى لصديق له على سطح بعده 48 ft فوق سطح الأرض . بأى سرعة ينبغي أن يقذف الكرة اذا كانت الكرة لمنجرد أن تصل الى صديقه ؟

١٢ - رجل واقف على سطح الأرض يقذف كرة رأسياً لأعلى . اثبت أن الكرة تأخذ وقتاً فى الصعود الى أعلى مثل وقت الهبوط لأسفل وأن الكرة ترتطم بـ سطح الأرض بسرعة مقدارها نفس مقدار سرعتها الابتدائية .

١٣ - طاقة الحركة لجسم كتلته m يتحرك بسرعة v تعرف بأنها $\frac{1}{2}mv^2$. أثبت أن طاقة الحركة عند أي لحظة لجسم قذف رأسياً لأسفل هي $mgs + K_0$ حيث s هي المسافة التي سقطها ، K_0 هي طاقة الحركة الابتدائية .

١٤ - صاروخ بعيد في الفراغ يسقط متجهاً نحو الأرض بسرعة تتناسب عكسياً مع \sqrt{x} ، حيث x هي مسافته من مركز الأرض . اثبت أن العجلة تتناسب مع x^2 .

١٥ - قوة الجاذبية على القمر هي سدس ($1/6$) تلك على الأرض . إذا كان شخص يستطيع أن يقفز إلى ارتفاع $3H$ عن الأرض ، فما الارتفاع الذي يستطيع أن يقفز إليه عن القمر ؟

١٦ - على أحد الأجرام الخرافية قوة الجاذبية تساوي 32 ft/sec/sec إلى ارتفاع $10,400 \text{ ft}$ لكن لأعلى من ذلك الارتفاع تكون فقط 20 ft/sec/sec . وقع حجر من ارتفاع $11,400 \text{ ft}$ متى سيصل سطح الكوكب ؟

١٢-٤

المعدلات المرتبطة ببعضها

في الفيزياء ندرس العالم الحقيقي بإيجاد علاقات بين الكميات . فمثلاً ، المعادلة $K = \frac{1}{2}mv^2$ تربط طاقة الحركة K لجسم متحرك كتلته m وسرعته v . المعادلة $pV = c$ تربط الضغط p للغاز بالحجم V للأناء الذي يحتويه ، وحيث c مقدار ثابت . عادة في المسألة الفيزيائية تتغير الكميات من الزمن . إذا كان معدل التغير لكمية واحدة معلوماً ، فكيف يمكننا إيجاد معدل تغير كمية مرتبطة ؟ الأمثلة توضح الطريقة جيداً .

مثال ١ . رمى حجر في بركة ، صانعاً سلسلة من التموجات المتحدة المركز . نصف قطر الدائرة المتكونة بآبعد موجه يتزايد بمعدل 2 ft/sec . ما هي سرعة تزايد مساحة الدائرة بعد 5 sec ؟
 هنا لدينا كميتان ، نصف القطر والمساحة ، اللذان يعتمدان على الزمن . نعلم معدل تغير إحدى الكميتين ونريد إيجاد معدل تغير الأخرى . إذا فرضنا أن r و A هما نصف القطر والمساحة للدائرة ، فإن r و A دالتان للزمن t :

$$r = f(t), \quad A = g(t)$$

في هذه المسألة وما يماثلها سنفترض أن g و f قابلتان للتفاضل . معدل التغير لـ A و r يعطيان بمشتقيهما بالنسبة إلى t ، وهما dA/dt و dr/dt . لقد أعطينا أن

$$\frac{dr}{dt} = f'(t) = 2 \text{ ft/sec} \quad (1)$$

وعلينا أن نوجد dA/dt ، أي $g'(t)$. نبحث الآن عن علاقة تربط r و A . من السهل إيجادها وهي $A = \pi r^2$. بما أن كلا الطرفين لهذه المعادلة دالتان للزمن t ، فإن مشتقيهما بالنسبة إلى t متساويتان . نفاضل كلا الطرفين ، ونفرض العمل في عمودين متوازيين ، أحدهما يستخدم الرمز r و A والآخر الرمز r والدالين .

$$\begin{aligned}
A &= \pi r^2 & g(t) &= \pi f^2(t) \\
\frac{dA}{dt} &= \frac{d}{dt} \pi r^2 & Dg(t) &= D[\pi f^2(t)] \\
&= 2\pi r \frac{dr}{dt} & g'(t) &= 2\pi f(t) f'(t) \\
&= 4\pi r. & &= 4\pi f(t).
\end{aligned}$$

فى الخطوة الثالثة على اليمين استخدمت قاعدة القوة المصممة لإيجاد $Df^2(t)$ ، وفى الخطوة الأخيرة على اليسار أبدلنا dr/dt بقيمتها 2 . المساحة تزايد بمقدار $4\pi r$ sq ft/sec . المعدل لا يكون ثابتاً بل يعتمد على نصف القطر . الدوائر الكبرى تزداد بسرعة أكبر عن الدوائر الصغرى ولزيادة فى نصف قطر دائرة كبيرة يضيف للمساحة أكثر مما تضيفه عن نفس الزيادة فى نصف القطر لدائرة صغيرة . عندما $r = 1$ يكون $dA/dt = 4\pi$ sq ft/sec وعند :

$r = 12$ ، $dA/dt = 48\pi$ sq ft/sec . لإيجاد dA/dt عند $t = 5$ ، يجب أولاً إيجاد r عند $t = 5$. حل المعادلة التفاضلية (١) يعطينا $r = 2t + C$ الثابت . C يجب أن يكون صفراً لأن $r = 0$ عند $t = 0$ وبناء على ذلك ، عندما $t = 5$ ، $r = 10$ وتكون $dA/dt = 40\pi$ sq ft/sec .

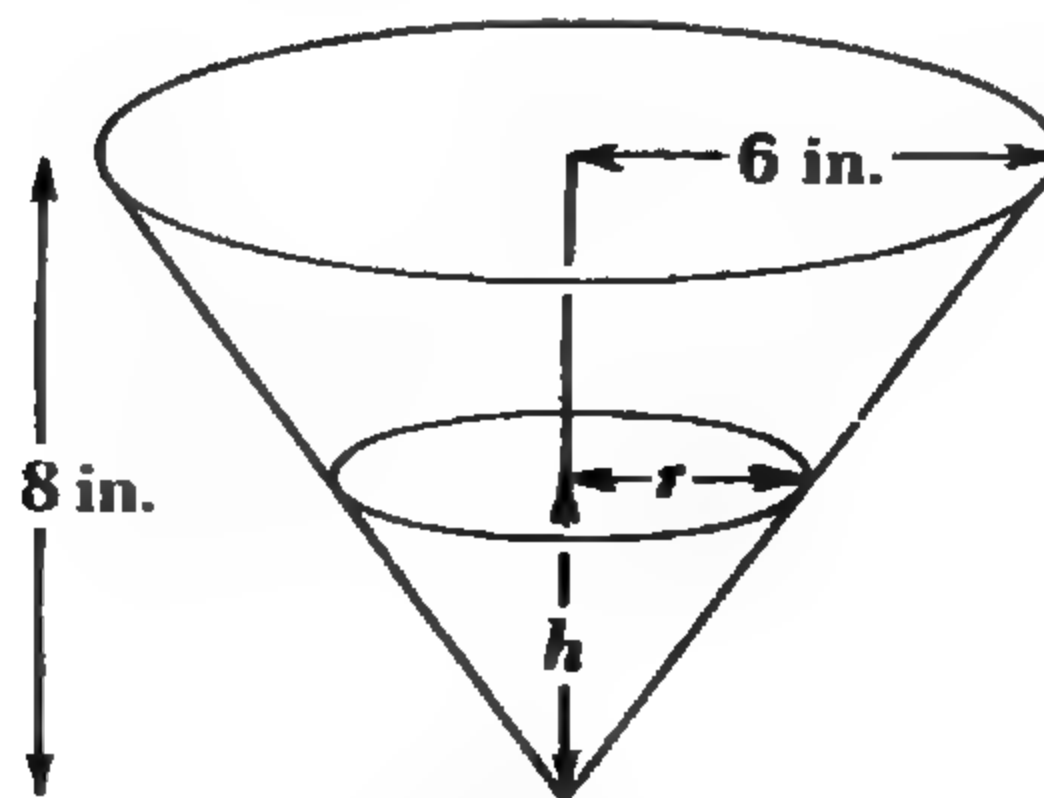
مثال ٢ . اناء مخروطى دائرى قائم نصف قطره 6 in. وعمقه 8 in. محوره رأسى ورأسه الى أسفل . ينساب الماء الى الاناء ، الذى كان أولاً فارغاً ، بمعدل 3 cu in./ sec . ما معدل ارتفاع مستوى سطح الماء عندما يكون الماء 4 ft عمقاً ؟

الخطوة الأولى لحل المسألة هو التعبير عنها فى لغة رياضية . المخروط موضح فى شكل ٤-٥٨ . لتكن V و h العمق وحجم الماء بعد زمن قدره t sec . كلاهما دالتان لـ t

$$h = f(t), \quad V = g(t)$$

المعلومات أن الماء ينساب الى المخروط بمقدار 3 cu in./ sec تعنى أن V تزداد بمعدل 3 cu in./ sec أى أن ،

$$(٢) \quad \frac{dV}{dt} = g'(t) = 3$$



شكل ٤-٥٨

علينا أن نوجد $dh/dt = f'(t)$ عندما $h = 4$. لاجراء ذلك نبحث عن علاقة تربط h و V . اذا كانت r هي نصف قطر سطح الماء عند الزمن t ، فان

$$(3) \quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

هذا التعبير يعطى V بدلالة r وايضاً بدلالة h ، وهذه حالة غير مرضية لأننا لا نعلم معدل تغير r . سنحاول أن نعبر عن r بدلالة h . من الواضح من شكل ٤ - ٥ أن h و r ليسا مستقلين كل عن الآخر لكن r تتعين في الحال عندما تعطى h . العلاقة بين الاثنين يمكن ايجادها من المثلثين المتشابهين في الشكل، وهي $6/r = 8/h$ أو $r = 3h/4$. باستبدال r في (٣) بـ $3h/4$ ، يكون لدينا

$$(4) \quad V = \frac{3\pi}{16} h^3$$

بما أن h و V تفرضان دالتين تفاضليتين للزمن فيمكننا تفاضل كلا الطرفين لهذه المعادلة بالنسبة الى t . مرة أخرى نوضح العمل في عمودين متوازيين لتجنب سوء الفهم الذي قد ينجم عن الرمزين h و V .

$$\begin{aligned} V &= \frac{3\pi}{16} h^3 & g(t) &= \frac{3\pi}{16} f^3(t) \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{3\pi}{16} h^3 \right) & Dg(t) &= D \left[\frac{3\pi}{16} f^3(t) \right] \\ &= \frac{9\pi}{16} h^2 \frac{dh}{dt} & g'(t) &= \frac{9\pi}{16} f^2(t) f'(t). \end{aligned}$$

بالتعويض في (٥) المعلومة المعطاة وهي $dV/dt = 3$ ثم حلها لـ dh/dt ، يكون لدينا

$$(5) \quad \frac{dh}{dt} = \frac{16(3)}{9\pi h^2} = \frac{16}{3\pi h^2} \text{ in./sec.}$$

عندما $dh/dt = 1/3 \pi \text{ in./sec}$ و $h = 4$. لاحظ أننا أوجدنا معدل تغير h أولاً لاي h وبعد ذلك لـ h الخاصة التي نريدها. من مميزات مسائل المعدلات المرتبطة أننا نوجد أولاً الحل العام ثم بعد ذلك الحل الخاص.

سنعطى حلاً آخر لهذه المسألة نعبر فيه عن h صراحة كدالة لـ t . نجرى العمل كما سبق الى المعادلة (٤). بحل هذه المعادلة بالنسبة الى h ، يكون لدينا

$$(6) \quad h = \left(\frac{16}{3\pi} V \right)^{1/3}$$

الكمية V يمكن التعبير عنها بدلالة t بحل المعادلة التفاضلية (٢). هذا يعطى $V = 3t + C$ ، وحيث أن $V = 0$ عندما $t = 0$ فيكون لدينا $V = 3t$ و $C = 0$. بتعويض $3t$ لـ V في (٦)، نحصل على

$$(7) \quad h = \left(\frac{16}{\pi} t \right)^{1/3} = \left(\frac{16}{\pi} \right)^{1/3} t^{1/3}$$

$$(٨) \quad \frac{dh}{dt} = \left(\frac{16}{\pi}\right)^{1/3} \frac{1}{3} t^{-2/3} \text{ in./sec.}$$

هذا يعطى معدل تغير h لاي زمن t . عندما $h = 4$ ، نحصل من (٧) على

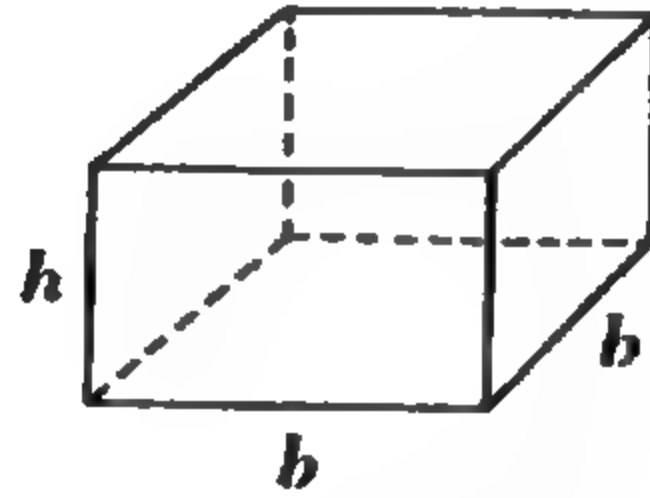
$$t = \frac{\pi}{16} 4^3 = 4\pi$$

وبتعويض هذه القيمة في (٨) نحصل على

$$\frac{dh}{dt} = \left(\frac{16}{\pi}\right)^{1/3} \frac{1}{3(4\pi)^{2/3}} = \frac{1}{3\pi} \text{ in./sec.}$$

في مثال ٢. الحجم V ازداد عندما ازدادت t . هذا يعني أن dV/dt موجبة. لو كانت V تتناقص، كما هو الحال اذا كان الماء ينساب خارج المخروط، فاننا نضع $dV/dt = -3$ في (٢).

مثال ٣. أبعاد متوازي مستطيلات (شكل ٤ - ٤٩). تتغير. طول ضلع القاعدة، التي هي دائماً مربع، يزداد بمقدار 3 ft/min ، والارتفاع يتناقص بمقدار 5 ft/min . ما معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة 4 ft والارتفاع 3 ft ؟



شكل ٤-٤٩

لتكن b طول ضلع القاعدة، h الارتفاع، V حجم الجسم، عند الزمن t . الكميات الثلاث دوال للزمن t . قد أعطينا أن

$$\frac{db}{dt} = 3 \quad \text{و} \quad \frac{dh}{dt} = -5$$

حيث اشارتا المشتقتين تعكسان الحقيقة أن b تزايد، h تتناقص. نرغب في ايجاد dV/dt عندما $h = 3$ و $b = 4$ ، لكن لاجراء ذلك يجب أولاً ايجاد dV/dt حيث h و b اختياريان. نبحث عن علاقة بين h و b و V . هذه هي

$$(٩) \quad V = b^2 h$$

الموقف غير مشابه لذلك في مثال ٢، لا يمكننا أن نعبر عن V بدلالة b أو h على حدة، لأن b و h لا تعتمدان على بعضهما. لكن هذا لا يكون عقبة اذ أننا نعلم dh/dt و db/dt . بتذكر أن h و b و V دوال للزمن t ، نفاضل كلا طرفي (٩) بالنسبة للزمن t ، فنحصل على

$$\frac{dV}{dt} = b^2 \frac{dh}{dt} + 2bh \frac{db}{dt} = -5b^2 + 6bh$$

عندما $dV/dt = -8$ cu ft/min و $h = 3$ و $b = 4$. الحجم يتناقص بمعدل 8 cu ft/min عند تلك اللحظة .

مسائل

في المسائل من ١ الى ٥ ، z و y و x دوال للزمن t .

- ١ - اذا كانت $y = x^3 + x$ فأوجد D_y عندما $D_x = 4$ و $x = 2$.
- ٢ - اذا كانت $y = x/(x + 1)$ ، فأوجد D_x عندما $D_y = -3$ و $x = 1$.
- ٣ - اذا كانت $z = x^2 + y^2$ ، فأوجد dz/dt عندما $dy/dt = 2$ و $dx/dt = -1$ و $y = 2$ و $x = 1$.
- ٤ - اذا كانت $z = x + x^2y$ ، فأوجد dx/dt عندما $dz/dt = -2$ و $dy/dt = 1$ و $y = \frac{1}{2}$ و $x = 1$.
- ٥ - اذا كانت $z^3 + z = x/y$ ، فأوجد dz/dt عندما $dy/dt = -5$ و $dx/dt = -3$ و $y = 3$:
و $x = 6$.

٦ - طول ضلع مربع يتناقص بمعدل 2 ft/min . ما معدل تناقص المساحة عندما يكون طول الضلع 4 ft ؟

٧ - يتسرب الهواء من بالون للعب بمعدل 10 cu in./min عندما يكون نصف القطر 6 in. ما معدل تناقص نصف القطر والمساحة السطحية ؟

٨ - حل مثال ١ بالتعبير عن A صراحة كدالة لـ t .

٩ - نقطة تتحرك على المنحنى $5 = x^3 + xy + y^3$ بحيث أن إحداثياتها الصادي يتزايد بمعدل 2 وحدة في الثانية . ما معدل تغير الإحداثي السيني عند النقطة $(2, -1)$ ؟

١٠ - نقطة تتحرك على المنحنى $y = 5x - x^3$ بحيث أن إحداثياتها الصادي يتناقص بمعدل $\frac{1}{2}$ وحدة في الثانية . ما معدل تغير ميل المنحنى عندما $x = 3$ ؟

١١ - قوة الجذب F بين جسمين سمائيين كتلتاهما m و m' grams ويتباعدان عن بعضهما مسافة r cm تعطى بالعلاقة $F = Gmm'/r^2$ ، حيث G ثابت . اذا كانت r تتناقص بمعدل 3×10^7 cm/sec . فأوجد معدل تغير F .

١٢ - ولد يحرك طائرة ورقية على ارتفاع 200 ft الطائرة تتحرك بعيداً عنه على خط مستقيم أفقي بمعدل 5 ft/sec . ما هو المعدل الذي يجب على الولد أن يركب به الخيط عندما يكون قد فك منه 300 ft ؟

١٣ - القانون الذي يحكم العلاقة بين الضغط p والحجم v لكمية معينة من الغاز داخل إناء مغلق ، يعطى بالعلاقة $pv^{1.4} = k$ ، حيث k مقدار ثابت . إذا كان عند لحظة معينة $p = 30$ lbs/sq in و $v = 50$ cu in وكانت v تتناقص بمعدل 2 cu in/sec ، فما هو معدل تغير p ؟

١٤ - قارب يجذب الى المرفأ بحبل مربوط بمقدمته بدا الرجل الذي يشد الحبل على ارتفاع 5 ft من مقدمة المركب . اذا كان الحبل يجذب بمعدل $\frac{3}{4}$ ft/sec ، ما معدل اقتراب المركب من المرفأ عندما يكون على بعد 12 ft ، مقيسة أفقياً ؟

- ١٥ - طائرة على ارتفاع 1 mile تطير في خط أفقى فى اتجاه المطار . اذا كانت سرعة الطائرة هى 400 mph ، ما هو معدل تغير المسافة بين الطائرة والمطار عندما تكون الطائرة على بعد 10 miles من المطار ، مقيسة أفقياً ؟
- ١٦ - يصف الرمل على قمة كومة مخروطية بمعدل 12 cu ft/min ، ارتفاع الكومة دائماً يساوى قطر القاعدة . ما معدل تغير الارتفاع عندما يكون 8 ft .
- ١٧ - يصعد منطاد رأسياً لأعلى بمعدل 100 ft/min عندما يكون ارتفاعه 300 ft فوق الأرض ، يصبح رجل يسير بسرعة 300 ft/min على مسار مستقيم ، تحته مباشرة . ما معدل تغير المسافة بينهما بعد دقيقة واحدة ؟
- ١٨ - سلم طوله 20 ft يرتكز على حائط رأسى . اذا كانت قاعدة السلم تنسحب بعيداً عن الحائط بمعدل 2 ft/sec ، فما معدل انزلاق قمة السلم على الحائط لأسفل عندما تكون قاعدته على بعد 12 ft من الحائط ؟
- ١٩ - حوض أفقى طوله 12 ft مقطعه الرأسى على شكل مثلث قائم متساوى الساقين . إذا كان الماء يصب فيه بمعدل 10 cu ft/min فما هو معدل ارتفاع مستوى الماء عندما يكون الماء على عمق 2 ft ؟
- ٢٠ - كل ضلع لمثلث متساوى الاضلاع فى الابتداء طوله 6 in . معدل زيادة كل ضلع هو 2 in./min . ما معدل زيادة المساحة عندما يكون طول الضلع 9 in ؟ ما معدل زيادة المساحة بعد 3 min ؟
- ٢١ - صهرىج مخروطى دائرى قائم ارتفاعه 500 cm وقطره 400 cm ، محوره رأسى ورأس الصهرىج الى أسفل ، وملئ بالماء . عمل ثقب فى قاعدة الصهرىج وكان الماء يتدفق بمعدل $500,000 \text{ cu cm/min}$. ما معدل تناقص العمق عندما يكون 200 cm ؟
- ٢٢ - حل المسألة ٢١ مفترضاً أن المخروط قائماً على قاعدته بثقب فى القاعدة .
- ٢٣ - تتغير أبعاد مستطيل ، القاعدة تزداد بمعدل 3 cm/min والارتفاع يتناقص بمعدل 2 cm/min . ما معدل تغير المساحة وهل هى تكون متزايدة أم متناقصة عندما يكون طول القاعدة 10 cm والارتفاع 6 cm ؟
- ٢٤ - قاعدة مثلث تتناقص بمعدل 5 in./sec ، وارتفاعه يتزايد بمعدل 3 in./sec ما معدل تغير المساحة وهل تتزايد أم تتناقص عندما يكون طول القاعدة 20 in والارتفاع 4 in ؟
- ٢٥ - عند لحظة معينة الطول ، والعرض ، والارتفاع لمتوازى مستطيلات هى $10, 8, 4$. الطول والعرض يتزايدان بمعدل 2 in./sec و 3 والارتفاع يتناقص بمعدل 2 in./sec . ما معدل تغير الحجم وهل بالتزايد أم بالتناقص ؟
- ٢٦ - قضيب من الصلب تجرى دلفته بحيث تكون حافته دائماً على شكل مربع . عندما يكون طوله 10 ft وطول ضلع حافته المربعة 1 ft ، يتزايد طوله بمعدل 2 ft/min . أوجد معدل تناقص طول حافته عندئذ .

- ٢٧ - نصف قطر مخروط دائري قائم يتناقص بمعدل 2 cm/min وارتفاعه يتزايد بمعدل 6 cm/min . أوجد معدل تغير المساحة الكلية للمخروط (المساحة الجانبية مضافاً إليها مساحة القاعدة) عندما يكون نصف القطر 5 cm والارتفاع 12 cm .
- ٢٨ - عند لحظة معينة نصف القطر والارتفاع لاسطوانة دائرية قائمة هما 4 in. و 20 . اذا كان نصف القطر يتزايد بمعدل $\frac{1}{4} \text{ in./sec}$ ، ماذا ينبغي أن يكون معدل تغير الارتفاع عند تلك اللحظة للاحتفاظ بحجم الأسطوانة ثابتاً؟
- ٢٩ - تبحر سفينة شمالاً بمعدل 24 mph . وتبحر سفينة أخرى شرقاً بمعدل 16 mph وتقطع مسار السفينة الأولى على بعد 80 miles منها. ما معدل تباعد السفينتين بعد زمن قدره ساعة؟ متى تكون السفينتان أقرب ما يمكن من بعضهما؟
- ٣٠ - تبحر سفينة شمالاً بمعدل 10 mph وسفينة أخرى تبحر شرقاً بمعدل 20 mph وتقطع مسار السفينة الأولى على بعد 60 miles منها. أثناء الساعات الثلاث التالية متى تكون السفينتان أكثر تباعداً؟
- ٣١ - ملعب البايستول مستطيل طوله 90 ft . Smith هو الضارب ويكون Jones عند القاعدة الأولى. Smith يضرب الكرة ويجري اتجاه القاعدة الأولى بمعدل 25 ft/sec . في نفس الوقت Jones يجري اتجاه القاعدة الثانية بمعدل 30 ft/sec . متى يكون الرجلان أقرب ما يكون الى بعضهما؟
- ٣٢ - جزء صغير من مادة انشطر وجسيمان منها طاراً بسرعة $b \text{ cm/sec}$ و $a \text{ cm/sec}$ على خطين مستقيمين متقاطعين بزاوية 120° . ما معدل تباعدهما بعد $t \text{ sec}$ ؟ (إرشاد: استخدم قانون الـ cosine)
- ٣٣ - حل مثال ٢ باجراء تفاضل (٣) كما هي، تذكر أن h و r دالتان للزمن t ، ثم أوجد dr/dt بدلالة dh/dt من العلاقة $r = 3h/4$.
- ٣٤ - مصباح في قمة برج ارتفاعه 60 ft . من نقطة على بعد 40 ft من المصباح وعلى نفس الارتفاع سقطت كرة. ما معدل تحرك ظل الكرة على الأرض بعد ثانية واحدة؟
- ٣٥ - يعبر رجل كوبري ماشياً بمعدل 6 ft/sec وارتفاع الكوبري 20 ft عن النهر. عندما كان في المنتصف، كانت مركب تبحر في النهر بمعدل 10 ft/sec تمر مباشرة تحته. ما معدل تباعد الرجل والمركب بعد 30 sec ؟
- ٣٦ - رجل طوله 6 ft ويمشي بمعدل 5 ft/sec في اتجاه نور الشارع الذي ارتفاعه 12 ft فوق الأرض. ما معدل تحرك ظل رأسه عندما يكون على بعد 20 ft من عمود الاضاءة؟ ما معدل تغير طول ظله؟
- ٣٧ - صهريج ارتفاعه 10 ft وجوانبه رأسية وقاعدته مربعة طول ضلعها 6 ft . ينصرف منه الماء خلال ثقب في القاعدة بمعدل (ft/min.) مساو لضعف الجذر التربيعي للعمق في هذه اللحظة. ما معدل تغير العمق عندما يكون 5 ft ؟

- ٣٨ - كرة ثلجية تذوب بمعدل يتناسب مع مساحة سطحها . إذا كان الزمن مقيساً بالساعة ، ما معدل تغير نصف القطر ، المساحة السطحية ، والحجم عندما يكون نصف القطر 2 in. ؟
- ٣٩ - نصف قطر الدائرة ، عند الابتداء كان 2 ft ، فجأة ابتداء في الزيادة بمعدل $2^{1/3}$ ft/min ، حيث t زمن الزيادة . ما معدل زيادة مساحة الدائرة بعد 8 min ؟
- ٤٠ - صهريج اسطوانى نصف قطره 2 ft وارتفاعه 10 ft قائماً على طرف ، فى الأصل كان الصهريج فارغاً ، ويملاً بالماء بمعدل $10/\sqrt{t+1}$ cu ft/min ، حيث t هو زمن سريان الماء . ما معدل ارتفاع مستوى الماء . عندما يكون الصهريج ملىء الى نصفه ؟ ما الزمن الذى سيأخذه الماء لملء الصهريج ؟
- ٤١ - عند اللحظة $t=0$ كان نصف قطر اسطوانة دائرية قائمة 4 cm وكان ارتفاعها 20 cm . نصف قطرها يزداد بمعدل $2t$ cm/sec ، وارتفاعها يتناقص بمعدل $3\sqrt{t}$ cm/sec . ما معدل تغير الحجم بعد 4 sec ، وهل هو متزايد أم متناقص عندئذ ؟
- ٤٢ - سقط حجر من قمة جرف ، وبعد b sec سقط حجر آخر . أثبت أن المسافة بينهما تزداد بمعدل $32b$ ft/sec .

١٣-٤

تطبيقات فى الاقتصاديات

منذ زمن بعيد كانت الرياضيات الوسيلة الأساسية التى لا مفر منها فى العلوم الفيزيائية ، الآن طبقت على مسائل فى العلوم الاجتماعية . فى هذا البند سنعطى بعض أمثلة لاستعمال حساب التفاضل فى الاقتصاديات . المبادئ والتكنولوجيا فى هذه الأمثلة لا تشمل شيئاً جديداً لكن المصطلحات الفنية تحتاج للشرح .

عدد الوحدات x لسلعة يمكن أن يبيعها الصانع أو البائع فى كل وحدة زمن يسمى الطلب للسلعة ، ويعتمد على الثمن p فى السوق لوحدة السلعة ، الارتفاع فى السعر عادة ينتج عنه طلب أقل للسلعة . العدد x إذن دالة لـ p ،

$$(1) \quad x = \phi(p)$$

هذه المعادلة تعطى عدد الوحدات التى يمكن بيعها فى وحدة الزمن عندما تكون p الثمن لكل وحدة . معادلات الطلب النمطية هى

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= 16 - \frac{3}{2}p \\ x &= \frac{23.7}{p+6} + 18 \\ x &= 2(2.7^{-1.41p}) \end{aligned}$$

إذا حلت (١) فى p ، الثمن يعبر عنه كدالة للطلب ، ويكون

$$p = \psi(x) \quad (٣)$$

فمثلاً ، عندما تحل (٢) فى p ، نحصل على $p = \frac{2}{3}(16 - x)$. كل من المعادلتين المتكافئتين (١) أو (٣) تسمى معادلة الطلب للسلعة . سنفترض أن x و p ليسا سالبين وأن أى دوال تقابلها لها المشتقات اللازمة فى الحياة الواقعية هى عادة قد لا تكون حتى متصلة ، لكن هذا الافتراض يكون منطقياً لجعل المواقف المدروسة هنا مثالية . سوف نستخدم دائماً p لثمن الوحدة ، ونستخدم x لعدد الوحدات المباعة بذلك الثمن .

إذا كانت x من وحدات السلعة تباع بالثمن p عن الوحدة فإن ، الدخل الكلى ، أو الإيراد ، R يعطى بالعلاقة

$$R = xp = x\psi(x)$$

الدالة $x\psi(x)$ تسمى دالة الدخل الكلى . مشتقتها dR/dx هى دالة الدخل الهامشى . وهى تقيس كيف يؤثر تغيير بسيط فى عدد الوحدات المباعة على الدخل الكلى .

التكاليف الكلية لإنتاج سلعة تعتمد على عدد الوحدات المنتجة . سنستخدم $F(x)$ ، وتسمى دالة التكلفة الكلية ، لنشير الى التكلفة الكلية لإنتاج x من الوحدات ونفترض أنها تزايدية وقابلة للتفاضل . التكاليف عادة تتكون من تكاليف ثابتة مثل استثمار المباني والآلات ، التى تكون مستقلة عن عدد الوحدات المنتجة ، وتكاليف متغيرة تبعاً لبعض الأشياء مثل المواد الخام والعمال ، التى تزداد مع عدد الوحدات المنتجة . دالة تكلفة للتوضيح هى

$$F(x) = \frac{1}{10}x^2 + 4x + 170$$

هنا $\frac{1}{10}x^2 + 4x$ هى التكلفة المتغيرة ، 170 هى التكلفة الثابتة . دالة التكلفة المتوسطة هى $F(x)/x$ وهى تعطى التكلفة لكل وحدة عندما ينتج x من الوحدات . وهى عادة ليست ثابتة . رجال الأعمال يأملون أن التكلفة المتوسطة تهبط عند إنتاج وحدات أكثر . دالة التكلفة الهامشية هى المشتقة $F'(x)$. وهى تقيس كيف يؤثر تغير صغير فى عدد الوحدات المنتجة على التكلفة الكلية .

مثال ١ . صاحب مصنع آلات تصوير يمكنه عمل x آلة تصوير فى اليوم بتكلفة كلية $60x + 200$ دولاراً . معادلة الطلب هى $p/2 = 90 - x$. كم آلة تصوير ينبغي صنعها فى اليوم ليكون ربحه الكلى أكبر ما يمكن ؟

معادلة الطلب تعطى عدد آلات التصوير التى يمكن بيعها كل يوم عندما يكون ثمن الآلة p دولاراً . الدخل الكلى اليومى هو xp دولاراً ، والربح الكلى p هو الدخل ناقصاً التكلفة .

$$P = xp - (60x + 200)$$

نمبر عن P بدلالة x فقط ، باستخدام دالة الطلب $p = 180 - 2x$ ، فيكون

$$P = x(180 - 2x) - (60x + 200) \\ = -2x^2 + 120x - 200, \quad x \geq 0$$

يجب أن توجد قيمة x التي تجعل P أكبر ما يمكن . لدينا

$$\frac{dP}{dx} = -4x + 120$$

ليس واضحاً مباشرة أن العدد الحرج $x = 30$ يعطى قيمة عظمى لـ P . فلربما تكون قيمة صفري . بما أن $d^2P/dx^2 = -4$ ، فإن $x = 30$ تعطى نهاية عظمى موضعية ومن ثم قيمة عظمى لـ P . الأرباح ستكون أكبر ما يمكن عندما تصنع 30 آلة تصوير في اليوم وتباع بمبلغ \$ 120 لكل منها .

مثال ٢ . صاحب مصنع معين يتكلف $500 + 200x - 23x^2 + x^3$ دولاراً في الأسبوع لإنتاج x من وحدات إنتاجه . بسبب إمكانيات المصنع المحدودة ، لا يمكنه إنتاج أكثر من 15 من الوحدات في الأسبوع . معادلته للطلب هي $p = 100 - 2x$. أوجد عدد الوحدات التي ينبغي إنتاجها كل أسبوع ليكون ربحه أكبر ما يمكن .

ربحه P يعطى بالعلاقة

$$P = xp - (x^3 - 23x^2 + 200x + 500)$$

أو ، بدلالة x فقط

$$P = f(x) = x \left(50 - \frac{x}{2} \right) - (x^3 - 23x^2 + 200x + 500) \\ = -x^3 + \frac{45}{2}x^2 - 150x - 500, \quad 0 \leq x \leq 15$$

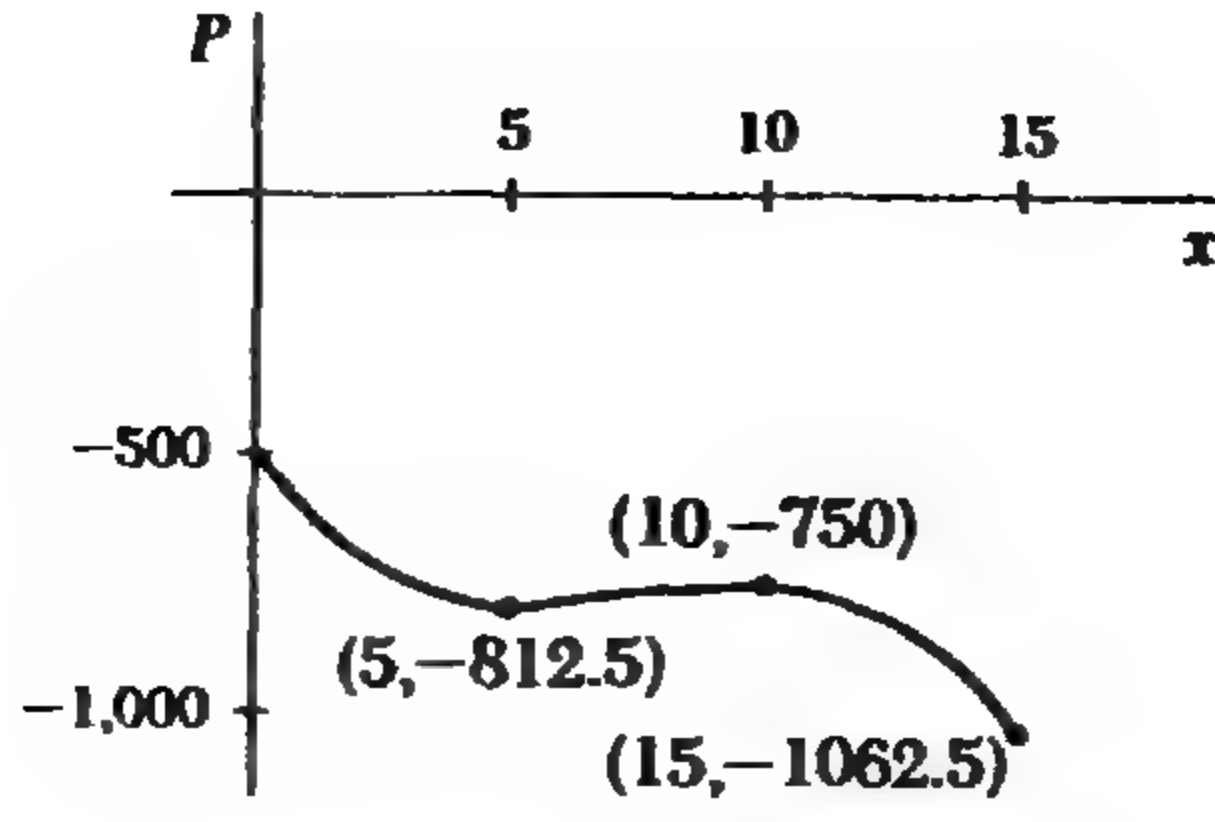
بما أن

$$\frac{dP}{dx} = -3x^2 + 45x - 150 = (-3x + 15)(x - 10)$$

العدان الحرجان لـ P هما 10 و 5 . لدينا

$$f(0) = -500, \quad f(5) = -812.5, \quad f(10) = -750, \quad f(15) = -1062.5$$

ربح صاحب المصنع يكون أكبر ما يمكن عندما ينتج صفراً من الوحدات في الأسبوع . بما أنه يجد خسارة \$ 500 في الأسبوع ، فهو يجب أن يراجع خطة العمل أو يترك العمل . صعوبته تبدو أن تكون في التكاليف المتغيرة المرتفعة على نحو استثنائي . الشكل البياني لـ P موضح في شكل ٤ - ٦٠ .



$$P = -x^3 + \frac{45}{2}x^2 - 150x - 500, \\ 0 \leq x \leq 15$$

شكل ٤ - ٦٠

الشكل الياى للربح P عندما x من الوحدات تباع فى الاسبوع .

مسائل

- ١ - خباز يشتري دقيقاً بسعر 7 cents لكل باوند . مصاريفه غير المباشرة هى \$ 500 فى الشهر . أوجد التكلفة الشهرية الكلية كدالة لعدد الباوندات المشتراة فى الشهر . اثبت أن التكلفة المتوسطة تتناقص كلما ازدادت المشتريات الشهرية .
- ٢ - عدد الركاب x المسافرين كل يوم على خط جوى معين بين مدينتين يعتمد على أجرة السفر p ، العلاقة هى $p = 30 - x^2/10,000$ ، خطط منحني الدخل الكلى وأوجد أجرة السفر التى تجعل الدخل أكبر ما يمكن .
- ٣ - أثبت أن منحني الطلب $p = m/(x + a) - b$ ، حيث m و b و a موجبة ، يكون هابطاً ومقعرأً لأعلى . هل نفس الشيء يكون صحيحاً لمنحني الدخل الهامشى المناظر ؟
- ٤ - التكلفة بالدولار لانتاج x من المفردات فى اليوم لانتاج معين هى $2x^2 + 5x + 600$. كم ينبغي أن ينتج فى اليوم لكى تكون التكلفة المتوسطة أقل ما يمكن ؟
- ٥ - اثبت أنه مع أن التكلفة الكلية تزداد ، التكلفة الهامشية تتناقص عندما تكون دالة التكلفة على الصورة $F(x) = \sqrt{ax+b} + c$ ، حيث $a > 0$.
- ٦ - اذا كانت $\psi(x) = a/x - b$ ، حيث a و b ثابتان موجبان ، أثبت أن الدخل الكلى يتناقص عندما يزداد الانتاج وأن الدخل الهامشى هو ثابت سالب .
- ٧ - اذا كانت F هى دالة التكلفة الكلية ، فان مرونة التكلفة الكلية تعرف بأنها $F'(x)/F(x)$. أثبت أن لدالة التكلفة $F(x) = ax^2 + bx$ ، حيث $a > 0$ و $b > 0$ ، مرونة التكلفة الكلية أكبر من أو أنها دالة تزايدية .
- ٨ - مصنع صلب دالة التكلفة له هى $\frac{1}{2}x^2 + 10x + 180$ دولار لانتاج x طناً من الصلب فى الاسبوع . السعر الثابت بالسوق هو p دولاراً للطن . عين الانتاج الاسبوعى x بدلالة p الذى

يجعل ربح المصنع أكبر ما يمكن ؟ ما هو السعر الذى يتقاضاه المصنع حتى يتج المصنع ١٥٠
 طناً أسبوعياً ويربح أكثر ما يمكن ؟ ما هو أقل ثمن يمكن المصنع أن يتقاضاه ولا يخسر ؟
 ٩ - صاحب مصنع يمكنه عمل x ثلاجة فى اليوم بتكلفة كلية $600 + 11x + \frac{1}{2}x^2$ دولاراً . معادلة
 الطلب هى $5x = 750 - 3p$. بسبب امكانيات المصنع المحدودة ، لا يمكنه أن يصنع أكثر من
 80 ثلاجة فى اليوم . كم ثلاجة ينبغي أن يصنعها فى اليوم وما هو ثمن بيع الوحدة الذى يجعل
 الربح أكبر ما يمكن ؟

١٠ - حل مسألة ٩ اذا كانت معادلة الطلب هى $5x = 1010 - 3p$.

١١ - التكلفة الكلية بالدولار لصنع أنابيب تليفزيون ملون عددها x فى اليوم هى
 $600 + 2x + \frac{x^2}{10}$ معادلة الطلب للإنتاج هى $x = 300 - 3p$ حيث p هو ثمن الوحدة
 بالدولار . أوجد عدد الوحدات التى ينبغي إنتاجها فى اليوم لجعل الربح أكبر ما يمكن والـ
 المناظر للوحدة .

١٢ - بالرجوع الى مثال ١١ ، نفرض أن الحكومة تضع ضريبة على صاحب المصنع قدرها t دولاراً
 لكل وحدة . صاحب المصنع يضيف هذا الى تكاليفه ثم يعين مستوى انتاجه والـ
 ربح . أثبت أن الثمن يزداد بأقل قليلاً عن 40 فى المائة من الضريبة . للإنتاج الذى يجعل
 ربح صاحب المصنع أكبر ما يمكن ، ما هى الضريبة الكلية بدلالة t ، التى تسلمها
 الحكومة ؟ ما هى الضريبة التى ينبغي أن تضعها الحكومة على صاحب المصنع حتى تكون
 الضريبة الكلية أكبر ما يمكن ؟ أثبت أن بهذه الضريبة الثمن الذى يعطى صاحب المصنع أكبر
 ربح يزيد تقريباً بمقدار 30 فى المائة .

١٣ - التكلفة الكلية لإنتاج x من الوحدات ، من سلعة ما ، فى الشهر الواحد هى $ax^2 + bx + c$
 دولاراً ، يضاف إليها ضريبة حكومية موضوعة على صاحب المصنع قيمتها t دولاراً عن
 الوحدة . معادلة الطلب هى $p = d - ex$. الكميات a, b, c, d, e موجبة . أثبت أنه اذا كان
 صاحب المصنع لا يزال يرغب فى أن يجعل ربحه الكلى أكبر ما يمكن ، فانه يجب أن يمتص
 جزءاً من الضريبة . أى أن ، الزيادة فى الثمن بسبب الضريبة يجب أن تكون أقل من
 الضريبة . أثبت أنه اذا كان صاحب المصنع يجعل ربحه الكلى أكبر ما يمكن ، فان الضرائب
 الكلية المتسلمة تكون أكبر ما يمكن عندما تضع الحكومة $t = \frac{1}{2}(d - b)$.

١٤ - صاحب مصنع يريد أن يعين عدد الوحدات x من انتاجه الذى ينبغي أن ينتجه كل أسبوع حتى
 يجعل ربحه أكبر ما يمكن . وهو يعلم أن دالة التكلفة الكلية فى أسبوع هى $F(x)$ ، وشروط
 السوق تثبت سعر الوحدة من انتاجه عند p . وضح له كيف يعين x .

١٥ - اذا كانت $\psi(x)$ هى ثمن الوحدة فى السوق لسلعة معينة عندما ينتج x من الوحدات ، أثبت أن
 الدخل الهامشى يساوى $\psi(x) + x\psi'(x)$ وأن للإنتاج حيث الدخل الهامشى يكون صفراً ،
 يكون $\psi'(x) = -\psi(x)/x$.

١٦ - اعط تفسيراً هندسياً للتكاليف الهامشية والمتوسطة .

- ١٧ - يقال فى كتب الاقتصاد أن صافى الربح لصاحب المصنع يكون أكبر ما يمكن عندما يكون مستوى انتاجه بحيث أن دخله الهامشى يساوى تكاليفه الهامشية . هل هذا صحيح ؟
- ١٨ - اذا كانت $\psi''(x) > 0$ لجميع x ، وبالتالي منحنى الطلب $p = \psi(x)$ مقعراً لأعلى ، اثبت أن منحنى الدخل الهامشى سيكون أيضاً مقعراً لأعلى اذا كانت $\psi'''(x) > -3\psi''(x)/x$.
- ١٩ - اذا كانت $F(x)$ ترمز الى تكلفة انتاج x من الوحدات من سلعة ما ، فاثبت أن التكلفة المتوسطة تكون أقل ما يمكن عندما تكون التكلفة المتوسطة والتكلفة الهامشية متساويتين ، $F'(x) > 0$.

٢٠ - اذا كانت $x = \phi(p)$ هي معادلة الطلب ، فان مرونة الطلب η تعرف بأنها

$$\eta = -p \frac{\phi'(p)}{\phi(p)}$$

اثبت أن $dR/dx = p(1 - 1/\eta)$ ، حيث R دالة الدخل الكلى .

١٤ - ٤

العناصر التفاضلية

مشتقة دالة f عند x عرفت بأنها

$$(1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

العدد h هو الفرق بين الاعدائين السينيين للنقطتين $Q(x+h, f(x+h))$ و $P(x, f(x))$ على المنحنى $y = f(x)$ فى شكل ٤ - ٦١ . الرمز التقليدى لهذا الفرق هو Δx . وهي تمثل الكمية التي يجب اضافتها الى الاعدائى السينى للنقطة P لكي نحصل على الاعدائى السينى للنقطة Q . وهي تكون موجبة أو سالبة وفقاً لكون النقطة Q على يمين أو يسار النقطة P ، عندما تستبدل h بالرمز Δx ، (١) تصبح

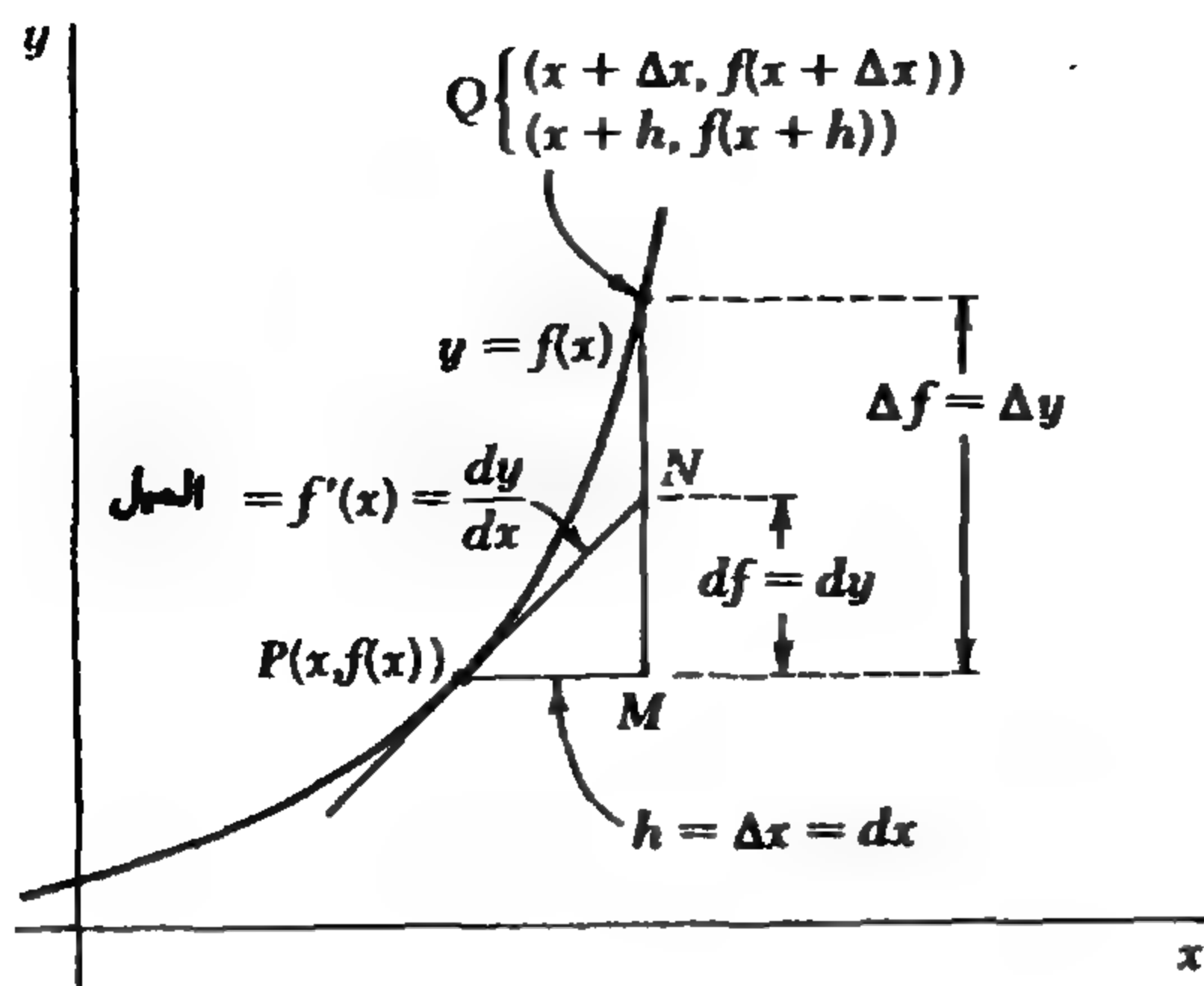
$$(2) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

البسط فى (١) و (٢) هو المسافة الرأسية من P الى Q والمسافة الموجهة \overline{MQ} فى الشكل ويرمز

لها عادة بالرمز Δy أو Δf

$$\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = \overline{MQ}$$

هي الكمية التي يجب اضافتها الى الاعدائى الصادى للنقطة P للحصول على الاعدائى الصادى للنقطة Q وتكون موجبة أو سالبة تبعاً لكون النقطة Q أعلى أو أسفل النقطة P . عندما تتحرك نقطة



شكل ٦١-٤
المقدار معطى Δx تكون df و Δf
المسافتين الرأسيتين من M الى المنحنى
والى المماس على الترتيب .

على المنحنى من P الى Q ، فان Δy و Δx هما التغيران الحادثان فى الاحداثيين السينى والصادى .

إذا كانت $y = f(x)$ فان العبارة $\Delta x f'(x)$ ، حيث Δx و x عددان ، تسمى العنصر التفاضلى لـ y أو f ويرمز لها بالرمز dy أو df . من المعتاد عند استخدام العناصر التفاضلية ، كتابة dx ، وتسمى العنصر التفاضلى لـ x ، بدلا من Δx ، وعليه فان $dy = f'(x) dx$.

٤-٢٤ تعريف : إذا كانت $y = f(x)$ ، فإن $dx = \Delta x$ ، والعنصر التفاضلى لـ y أو f هو

$$dy = df = f'(x) dx$$

فمثلا ، اذا كانت $y = f(x) = x^2$ فان

$$(٣) \quad dy = df = f'(x) dx = 2x dx^*$$

بما أن $\overline{MN}/\Delta x$ هو ميل المماس عند P فى شكل ٦١-٤ ، فإن

$$\frac{\overline{MN}}{\Delta x} = \frac{\overline{MN}}{dx} = f'(x)$$

$$dy = f'(x) dx = \overline{MN}$$

وتكون

أى dy هى المسافة الموجهة من M الى النقطة التى تقع مباشرة أعلى (أو أسفل) M على المماس عند P .

• حتى الآن فى دراستنا يمكن افتراض عدم وجود علاقة بين العنصر التفاضلى dx والد dx المستخدمة فى الرمز للتكامل . فيما بعد سنرى أنه توجد علاقة .

العنصر التفاضلي $dy = df$ لا يعتمد فقط على x لكن أيضاً على الزيادة $h = dx$. بمعنى آخر ، dy هي دالة لتغيرين هما h و x تعطى بالعلاقة

$$df(x,h) = dy(x,h) = f'(x)h$$

فمثلاً ، إذا كانت $y = f(x) = x^2$ ، فإن قيمة $dy(x,h)$ عندما $dx = 0.5$ و $x = 1$ تكون من (٣)

$$dy(1,0.5) = 2(1)(0.5) = 1$$

بالمثل ، نكتب $\Delta f(x,h)$ عندما نرغب تأكيد اعتماد Δf على h و x .

من التعريف ٤ - ٢٤ ، لدينا $dy/dx = f'(x)$ ، فالمشتقة يمكن اعتبارها النسبة بين العنصرين التفاضليين dy و dx ، هذا هو الأصل في استخدام الرمز dy/dx للمشتقة .

بيانياً ، $dy(x, h)$ تقيس المسافة الرأسية MN من M الى المماس في الشكل ٤ - ٦١ بهذا المعنى هي مقدار تقريبي للتغير في y عندما تتغير x من x الى $x + h$. التغير الفعلي في y هو المسافة الرأسية \overline{MQ} من M الى المنحنى .

دع x تتغير من x_0 الى x . فتكون $h = dx = x - x_0$. الشكل البياني للدالة g المعرفة بـ

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x_0) + f'(x_0)h \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

هو خط مستقيم يمر بالنقطة $(x_0, f(x_0))$ وميله $f'(x_0)$ ومن ثم فهو الخط المماس للشكل البياني للدالة f عند النقطة $(x_0, f(x_0))$. إذا كانت $h = 0.5$ و $x_0 = 1$ و $f(x) = x^2$ ، فإن

$$g(x) = 1 + 2(x - 1)$$

الفرق بين التغير الفعلي والتغير التقريبي في f هو

$$(٤) \quad r(h) = [f(x_0 + h) - f(x_0)] - f'(x_0)h$$

لدينا

$$(٥) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = 0$$

أي أن $r(h)$ يجب أيضاً أن تقترب من الصفر عندما تقترب h من الصفر . بما أن $x_0 + h = x$ ، فيكون لدينا من (٤)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(h) = g(x) + r(h)$$

حيث $\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = 0$ الدالة g يقال أنها تقرب من الرتبة الأولى (أو خطي) لـ f في جوار x_0 . هذه الفكرة ستعمم في الفصل السادس عشر عندما ندرس نظرية تايلور . معادلة (٥) توضح أن $r(h)$

ليست فقط صغيرة عندما تكون h صغيرة بل هي صغيرة بالمقارنة بـ h . ومن ثم Δy تكون مقربة الى حد بعيد بـ dy . فمثلاً ، اذا كانت $h = 0.1$ و $x_0 = 1$ و $y = f(x) = x^2$ فإن

$$dy(x_0, h) = 2x_0 h = 0.2$$

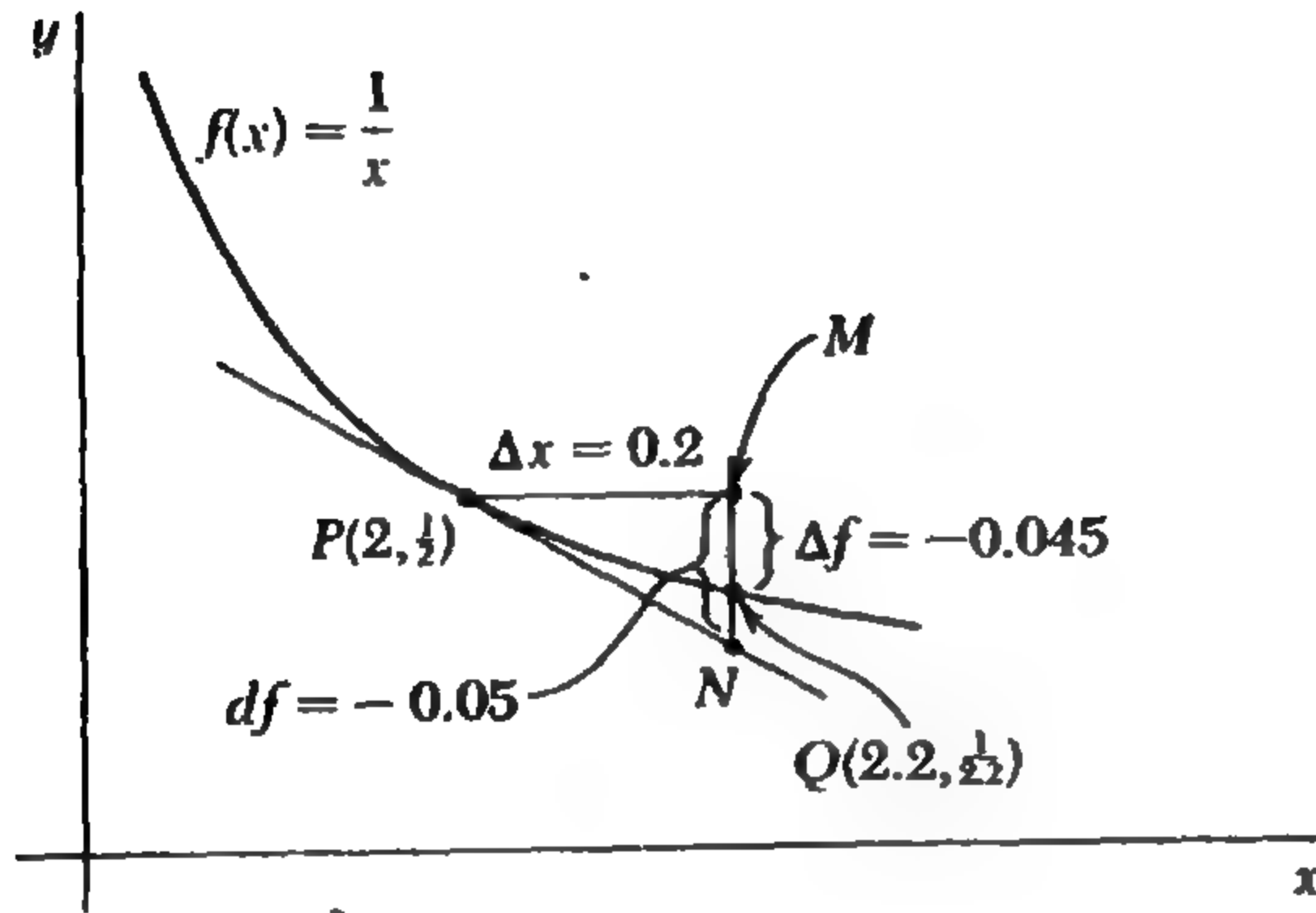
$$\Delta y(x_0, h) = f(x_0 + h) - f(x_0) = 1.1^2 - 1^2 = 0.21$$

$$r(h) = 0.21 - 0.2 = 0.01$$

وتكون

ليس نادراً أن يتحتم علينا ايجاد التغير في قيمة الدالة $f(x)$ الذي يناظر تغيراً صغيراً Δx في قيمة x . التغير المضبوط في f يعطى بالرمز Δf ، لكن اذا كانت Δx صغيرة وكنا لا نتطلب دقة عالية ، فإن Δf يمكن تقريبها بـ df التي يمكن ايجادها بسهولة .

مثال ١ . استخدم العناصر التفاضلية لايجاد التغير بالتقريب في قيمة الدالة $f(x) = 1/x$ عندما تزداد x من 2 الى 2.2 .



شكل ٦٢-٤

عندما تزداد x من 2 الى 2.2 ، التغير $\Delta f = \overline{MQ}$ في $f(x)$ يقرب بـ $df = \overline{MN}$

التغير المضبوط في f يعطى بالعلاقة

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

عندما $\Delta x = 0.2$ و $x = 2$ هذه هي المسافة MQ في شكل ٦٢-٤ . وهو يقرب بالعنصر التفاضلي

$$df = f'(x) dx = -\frac{1}{x^2} dx$$

لنفس قيم $dx = \Delta x$ و x هذه هي المسافة \overline{MN} في الشكل . عندما $dx = 0.2$ و $x = 2$ ، التغير في f هو بالتقريب

$$df = -\frac{1}{4}(0.2) = -0.05$$

الاشارة السالبة تبين أن قيمة الدالة تنقص . للمقارنة ، ستوجد أيضاً التغير المضبوط في f هذا التغير هو

$$\Delta f = f(2.2) - f(2) = \frac{1}{2.2} - \frac{1}{2} = -0.045$$

لثلاثة أرقام عشرية . حساب df أسهل ويختلف عن Δf بمقدار 0.005 فقط .

مثال ٢ . حوض للسباحة دائري نصف قطره 20 ft محاط بمشاية حجرية عرضها 1.5 ft . أوجد باستخدام العناصر التفاضلية المساحة التقريبية للمشاية .

مساحة الدائرة التي نصف قطرها x هي $f(x) = \pi x^2$. مساحة المشاية هي الكمية التي تتغير بها f عندما تزداد x من 20 الى 21.5 (شكل ٤ - ٦٣) . التغير يعطى بالضبط بـ

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

وبالتقريب بـ

$$df = f'(x) dx$$

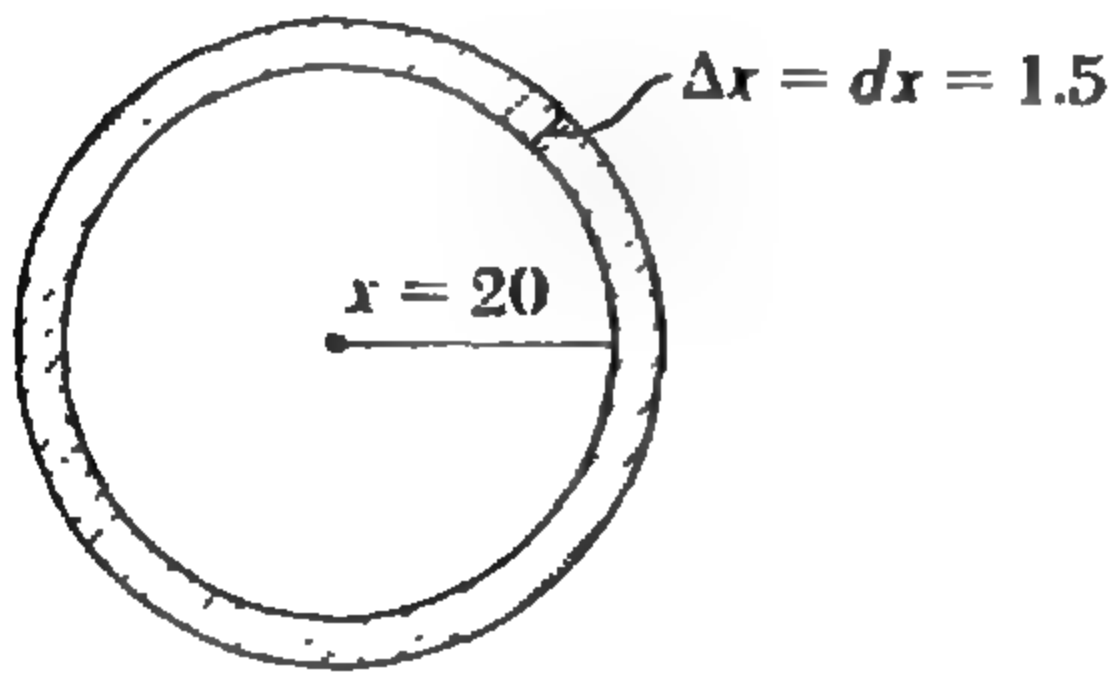
وذلك عندما $x = 20$ و $\Delta x = dx = 1.5$. العنصر التفاضلي df لاي dx و x هو

$$df = 2\pi x dx$$

وعندما $dx = 1.5$ و $x = 20$ ، يكون

$$df = 2\pi(20)(1.5) = 60\pi \text{ sq ft.}$$

هذه هي المساحة التقريبية للمشاية . كان في امكاننا أيضاً أن نأخذ $dx = -1.5$ و $x = 21.5$ ونحصل على التقريب $df = -64.5\pi$ ، لكن الحساب يكون أصعب .



شكل ٤ - ٦٣

لكن $f(x) = \pi x^2$. مساحة الحلقة تعطى بالضبط بـ $\Delta f = \pi (x + \Delta x)^2 - \pi x^2$ وبالتقريب بـ $df = 2\pi x dx$.

مثال ٣ . أوجد تقريباً عشرياً للمقدار $\sqrt{35}$.

الجذر التربيعي للعدد 35 قريب من 6 ، وسنوجد تقريباً له بإيجاد التصحيح التقريبي الذي يجب تطبيقه على العدد 6 ليعطي $\sqrt{35}$. دع $f(x) = \sqrt{x}$. التصحيح هو التغير في f عندما x تنقص من 36 الى 35 . هذا يعطى بالتقريب بـ df عندما $dx = -1$ و $x = 36$. لدينا

$$df = f'(x) dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

عندما $dx = -1$ و $x = 36$ تكون $df = -\frac{1}{12}$. الآن نضيف التصحيح $-\frac{1}{12}$ الى 6 لنحصل على القيمة التقريبية لـ $\sqrt{35}$. بما أن

$$df \approx f(x + \Delta x) - f(x) = f(35) - f(36) = \sqrt{35} - \sqrt{36},$$

$$\sqrt{35} \approx \sqrt{36} + df = 6 - \frac{1}{12} = 5.9167$$

قيمة $\sqrt{35}$ صحيحة الى أربعة أرقام عشرية هي 5.9161 . فلدينا خطأ حوالى 0.0006 .

نجاح العناصر التفاضلية فى تقريب $\sqrt{35}$ الى حد بعيد يرجع الى وجود مربع كامل قرب 35
اذا طلب منا ايجاد $\sqrt{31}$ ، فالتقريب سوف لا يكون جيداً .

لتكن $h(x)$ و $g(y)$ دالتين قابلتين للتفاضل بالنسبة x و y .
المعادلة

$$(٦) \quad g(y) = h(x)$$

تعرف y ضمناً كدالة لـ x : $y = f(x)$ من الممكن ايجاد العنصر التفاضلى dy بدون حل (٦)
صراحة لـ y . باجراء التفاضل الضمنى لـ (٦) بالنسبة الى x ، يكون

$$g'(y) \frac{dy}{dx} = h'(x)$$

$$(٧) \quad dy = \frac{h'(x)}{g'(y)} dx$$

ومنها $g'(y)dy = h'(x)dx$. الطرفان الأيسر والأيمن لهذه المعادلة هما العنصران التفاضليان لـ
 g و h . واذن لايجاد dy ، يمكننا ايجاد العنصرين التفاضليين $h'(x)dx$ و $g'(y)dy$ لـ h و g ، ثم
نساويهما ونحل هذه المعادلة لـ dy ، كما فى (٧) . لتوضيح ذلك ، سنوجد dy بهذه الطريقة
للدالة $y = f(x)$ المعرفة ضمناً بالمعادلة

$$y^3 - 2y = x^2 - x + 3$$

بأخذ العناصر التفاضلية لكلا الطرفين والحل لـ dy ، يكون

$$(3y^2 - 2) dy = (2x - 1) dx,$$

$$dy = \frac{2x - 1}{3y^2 - 2} dx$$

مسائل

أوجد العنصر التفاضلى لـ y أو f لما يأتى :

$$١ - y = 3x^2 - 5x \quad ٢ - f(t) = 6t^4 + 6t^2 - t + 10 \quad ٣ - y = \sqrt{u} + u^2$$

$$٤ - f(x) = x/(x+1) \quad ٥ - y = \sqrt[3]{x^7 + x^5 + 1} \quad ٦ - f(w) = w\sqrt{w^2 - 1}$$

$$٧ - x^2 - x = y^3 + y - 6 \quad ٨ - (2y + 1)/(y^2 - 1) = x$$

أوجد قيمة dy أو df للقيم المعطى لـ x ، dx أو Δx :

$$٩ - f(x) = 3x - 5; x = 3, \Delta x = \frac{1}{2}$$

$$١٠ - f(x) = x^2 - 2; x = -2, dx = 0.3; x = -2, dx = 0.1$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + 3; x = 1, \Delta x = -0.1; x = 1, \Delta x = 0.2 \quad ١١ -$$

$$y = x^5 + 6x^4 + x^3 + 3; x = 1, dx = -0.001 \quad ١٢ -$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2}; x = 5, \Delta x = -0.001 \quad ١٣ -$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}; x = 2, \Delta x = 1 \quad ١٤ -$$

$$y = \frac{x+1}{x-1}; x = 7, dx = 0.01 \quad ١٥ -$$

$$y^2 + 3y - \frac{5}{4} = \frac{x^3}{x+1}; x = 1, y = \frac{1}{2}, dx = \frac{1}{2} \quad ١٦ -$$

استخدم العناصر التفاضلية لإيجاد التغير التقريبي في القيمة لكل من الدوال الآتية للتغير المعطى في المتغير المستقل :

$$g(t) = t^3 - 2t; t = 1 \text{ to } t = 0.95 \quad ١٨ - \quad f(x) = x^2 - 6x + 10; x = 0 \text{ to } x = 0.1 \quad ١٧ -$$

$$f(x) = \sqrt[3]{z}; z = 27 \text{ to } z = 26.98 \quad ٢٠ - \quad F(s) = -\sqrt{s+1}; s = 0.96 \text{ to } s = 0.94 \quad ١٩ -$$

$$G(u) = 1/(u^2 + 1); u = 2 \text{ to } u = 2.02 \quad ٢٢ - \quad F(x) = \sqrt{x^2 + 7}; x = -3 \text{ to } x = -3.01 \quad ٢١ -$$

٢٣ - على الشكل البياني للدالة $y = 1/x$ وضع المسافتين اللتين تمثلان df و Δf عندما $dx = 0.5$ و $x = -1$.

٢٤ - ميدان قروى على هيئة مربع طول ضلعه 500 ft ، محاط بمشاية جانبية عرضها 5 ft . أوجد بالتقريب مساحة الطريق .

٢٥ - كرة من الصلب قطرها 4 in. غطيت بالسيراميك بسمك $\frac{1}{16}$ in أوجد بالتقريب كمية السيراميك اللازمة .

٢٦ - نصف دائرة قيس نصف قطرها فوجد 6 in. بخطأ محتمل $\frac{1}{32}$ in . ما هو الخطأ التقريبي المحتمل في حساب المساحة .

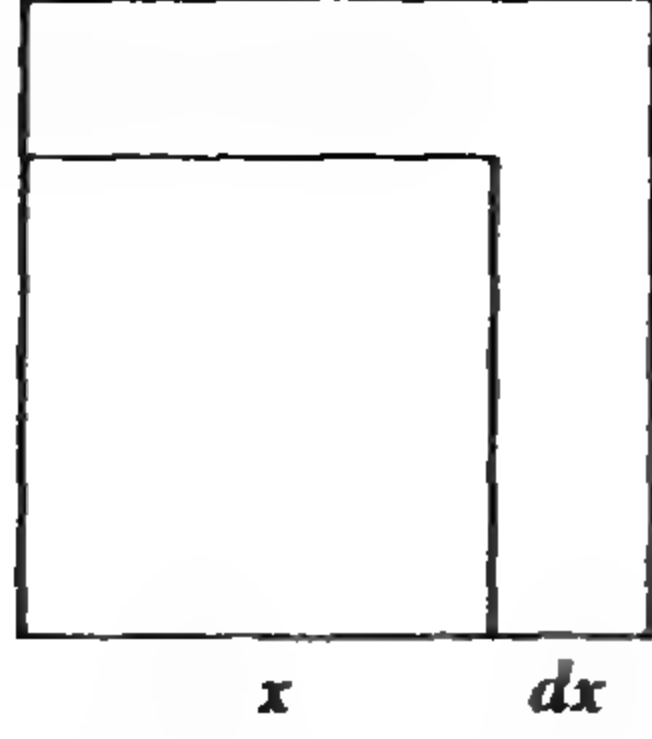
٢٧ - صندوق على هيئة مكعب عمل لیسع 1728 cu in. أوجد بالتقريب الدقة التي يجب أن يعمل بها طول ضلعه حتى يكون الحجم صحيحاً إلى 5 cu in. ؟

٢٨ - أوجد تعبيراً جبرياً يعطى بالتقريب حجم قشرة اسطوانية نصف قطرها الداخلي r ، وارتفاعها h ، وسمكها d .

٢٩ - المسافة s ft التي يسقطها جسم في t sec تعطى بالعلاقة $\frac{1}{2}gt^2 = s$. أوجد بالتقريب كيف يؤثر خطأ صغير في قياس t على حساب المسافة والسرعة .

٣٠ - إذا كانت $f(x) = x^2/(x+1)$ ، أوجد بالتقريب كم تختلف x عن 3 ومع ذلك لا تؤثر في $f(x)$ بأكثر من $\frac{1}{4}$.

٣١ - إذا كانت A هي مساحة المربع الأصغر الذي طول ضلعه x في شكل ٤ - ٦٤ ، ما هما المنطقتان المناظرتان لـ dA و ΔA عندما تزداد x بمقدار dx ؟



شكل ٤-٦٤

٣٢- تبعاً لقانون Boyle ، العلاقة بين الضغط p والحجم v لغاز في إناء مقفل هي $p_v = k$ ، حيث k ثابت . باستخدام العناصر التفاضلية ، أوجد تعبيراً جبرياً يعطى بالتقريب التغير في الضغط الذى يناظر تغيرات صغيرة فى الحجم اذا كانت $p = 20$ grams/ square centimeter عندما $v = 8000$ cu cm ، أوجد k واستخدم تعبيرك لايجاد التغير التقريبى فى p اذا كانت v تتناقص الى 7900 cu cm .

٣٣- كميتان متغيرتان t و s ترتبطان بالمعادلة $st^2 = c$ ، حيث c ثابت . اذا كانت $s = 5$ عندما $t = 10$ ، أوجد c . باستخدام العناصر التفاضلية ، أوجد التعبير الذى يعطى بالتقريب التغير فى s الذى يناظر تغيراً صغيراً فى t . استخدم تعبيرك لتقريب s عندما $t = 10.2$.

٣٤- القانون الادياباتي الذى يحكم العلاقة بين الضغط p والحجم v لغاز فى إناء مغلق هو : $pv^{1.4} = k$ ، حيث k ثابت . اذا كانت $p = 25$ grams/ sq. centimeter عندما $v = 5000$ cu cm ، أوجد الضغط بالتقريب عندما v تزداد الى 5200 cu cm .

٣٥- ارسم الشكل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ جوار النقطة $(36, 6)$ بمقياس y أربعة أمثال مقياس x . وضع مثال ٣ بتعليم المسافتين اللتين تمثلان df و Δf عندما $\Delta x = -1$ و $x = 36$. أى المسافتين تمثل $\sqrt{35}$ وأيهما تمثل التقريب الى $\sqrt{35}$ الذى أوجدناه .

٣٦- أوجد تقريباً عشرياً لـ $\sqrt{31}$ بنفس الطريقة المستخدمة فى مثال ٣ لايجاد $\sqrt{35}$. وضع أن التقريب الى $\sqrt{31}$ ليس جيداً مثل التقريب الى $\sqrt{35}$. وضع على الشكل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ لماذا يكون ذلك .

استخدم العناصر التفاضلية لايجاد تقريب عشري للآتى :

$$\sqrt[3]{28} - ٤٢ \quad \frac{1}{1.62} - ٤١ \quad \sqrt[3]{123} - ٤٠ \quad \sqrt{97.4} - ٣٩ \quad \sqrt{0.17} - ٣٨ \quad \sqrt{51} - ٣٧$$

$$27.1^{2/3} - ٤٦ \quad \sqrt[3]{0.99} - ٤٥ \quad 1.9^5 - ٤٤ \quad \frac{1}{\sqrt{60}} - ٤٣$$

٤٧- اذا كانت $f(x) = x^5 - 3x + 7$ ، فأوجد بالتقريب $f(2.01)$. هل هذا التقريب أكبر أو أصغر عن القيمة الحقيقية ؟

٤٨- أوجد تقريباً عشرياً لـ $\frac{3.98}{3.98} + 7\sqrt{3.98} - 3.98^3$. (إرشاد : أوجد دالة f بحيث أن $f(3.98)$ هو التعبير المعطى .

٤٩ - اثبت أن نسبة التغير في x' إلى x' ، حيث r كسر ، الذي يناظر تغيراً بسيطاً في x يكون بالتقريب r من المرات لنسبة التغير في x إلى x .

٥٠ - قوة الجذب بين جسمين سماويين كتلتاهما m و m' وعلى بعد r تعطى بالعلاقة $F = Gmm'/r^2$ ، حيث G ثابت . أوجد بالتقريب التغير في القوة الذي ينشأ عن تغير بسيط في r وبين أن النسبة لهذا التغير إلى F هو ، باستبعاد الإشارة ، تقريباً ضعف النسبة للتغير في r إلى r .

٥١ - مدة الدورة للبندول هي الزمن المطلوب لتردد كامل ذهاباً ومجيئاً . الزمن t بالثانية لبندول بسيط يعطى بالعلاقة $t = 2\pi \sqrt{l/g}$ ، حيث l طول البندول بالقدم و g عجلة الجاذبية ($g = 32 \text{ ft/sec/sec}$) ، (أ) أوجد طول البندول الذي زمن دورته 1 sec (ب) إذا كان طول البندول في (أ) يتزايد بمقدار 0.0001 في يوم حر ، كم بالتقريب يؤثر ذلك على زمن الدورة ؟ إذا كان هذا البندول في ساعة ، كم تقدم أو تأخر هذه الساعة في اليوم ؟ (ج) قيمة g ليست ثابتة بل تتغير طفيفاً عند النقط المختلفة على سطح الأرض . البندول الذي زمن دورته 1 sec عند نقطة حيث $g = 32 \text{ ft/sec/sec}$ نقل إلى نقطة حيث $g = 32.1 \text{ ft/sec/sec}$. كم يتأثر زمن الدورة بهذا التحرك ؟

٥٢ - لأي دوال تكون df و Δf متساويتين لجميع Δx و x ؟

١٥ - ٤

المعادلات التفاضلية القابلة للفصل*

لأن المعادلات التفاضلية التي درسناها كانت على الصورة

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = g(x)$$

حيث $g(x)$ ترمز إلى تعبير يعتمد على x فقط . لكن مسائل فيزيائية كثيرة تؤدي إلى معادلات تفاضلية حيث الطرف الأيمن (١) يشتمل على y أيضاً كما يشتمل على x ، مثل

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = xy^2$$

باعتبار المشتقة dy/dx النسبة بين العنصرين التفاضليين dy و dx من الممكن أحياناً كتابة مثل هذه المعادلات في صورة فيها كل الكميات المشتملة على y تكون مع dy ، على طرف واحد للمعادلة وجميع الكميات المشتملة على x تكون مع dx على الطرف الآخر . مثل هذه المعادلات تسمى قابلة للفصل . المعادلة (٢) قابلة للفصل إذ يمكن كتابتها في هذه الصورة :

$$(3) \quad \frac{1}{y^2} dy = x dx$$

• هذا البند يمكن تأجيله إلى ما قبل البند ٦-٧ .

المعادلات التفاضلية القابلة للفصل يمكن حلها . نوضح الطريقة بحل المعادلة (٢) وحل بعض الأمثلة الأخرى . فى نهاية هذا البند نشرح لماذا تكون هذه الطريقة صحيحة .

لحل المعادلة ، نفصل أولاً المتغيرين ، كما فى (٣) . الآن نجرى تكامل الطرف الأيسر من (٣) بالنسبة إلى y والطرف الأيمن بالنسبة إلى x ، فيكون

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int x dx$$

فنحصل على

$$-y^{-1} = \frac{1}{2}x^2 + C \quad (٤)$$

لأى ثابت C . سنشرح فيما بعد لماذا لا يلزم إضافة ثابت للطرف الأيسر أيضاً . حل هذه المعادلة لـ y يعطينا

$$y = \frac{-2}{x^2 + 2C} \quad (٥)$$

نذكر القارئ بأن حل المعادلة التفاضلية هو دالة f بحيث أن عندما نعوض $f'(x)$ لـ dy/dx فى المعادلة التفاضلية وكذلك $f(x)$ لـ y ، إذا كانت موجودة ، فإن المعادلة الناتجة تكون صحيحة لجميع x حيث الكميات المشتملة تكون معرفة . ندعى أن الدالة f المعرفة بالطرف الأيمن من (٥) وهى

$$f(x) = \frac{-2}{x^2 + 2C}$$

حل لـ (٢) لأى ثابت C . لنرى ذلك ، نوجد مشتقة f

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 2C)^2}$$

ونعوض الطرفين الأيمنين لهذه وللمعادلة (٦) لـ dy/dx و y فى (٢) :

$$\frac{4x}{(x^2 + 2C)^2} = x \left(\frac{-2}{x^2 + 2C} \right)^2$$

وهذا صحيح لأى ثابت C ولجميع x حيث المقامات لا تساوى صفراً .

قد أوجدنا عدداً لا نهائياً من الحلول لكن لا نضمن أنه لا توجد حلول أخرى . فى الواقع ، $f(x) = 0$ هو حل لا يمكن إيجادها بإعطاء C فى (٥) قيمة خاصة .

طريقة مماثلة ستحل أى معادلة تفاضلية متغيرها قابلان للفصل ، بفرض أن التكاملات يمكن إجراؤها .

مثال ١ . أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$(٧) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4x(x^2 + 1)^2}{\sqrt{y} - 1}$$

الذى يحقق $y = 5$ عند $x = 0$

لدينا ، عند فصل المتغيرين ،

$$\int \sqrt{y} - 1 \, dy = \int 4x(x^2 + 1)^2 \, dx$$

$$\frac{2}{3}(y - 1)^{3/2} = \frac{4}{3}(x^2 + 1)^3 + C \quad \text{ومن ثم}$$

أو

$$(٨) \quad (y - 1)^{3/2} = (x^2 + 1)^3 + C'$$

حيث $C' = \frac{2}{3}C$. الشرط الحدى $y = 5$ عند $x = 0$ يتضمن ، عند التعويض فى (٨) ، أن $8 = 1 + C'$ إذن $C' = 7$ ، والمعادلة (٨) تصبح

$$(٩) \quad (y - 1)^{3/2} = (x^2 + 1)^3 + 7$$

تعبير صريح لـ y بدلالة x يمكن إيجاده بحل هذه المعادلة لـ y ، لكن من الممكن أيضاً اعتبار المعادلة كتعريف ضمنى للحل $y = f(x)$ ونتركها على ذلك . إذا اخترنا هذه الطريقة فانه يمكننا أيضاً أن نحقق أن الدالة المعرفة ضمناً هى حل كما يلى . لتكن $f(x)$ هى الدالة المعرفة ضمناً بـ (٩) . عندئذ تكون المعادلة

$$[f(x) - 1]^{3/2} = (x^2 + 1)^3 + 7$$

صحيحة لجميع x فى فترة ما . نوجد $f'(x)$ بإجراء التفاضل الضمنى :

$$\frac{3}{2}[f(x) - 1]^{1/2} f'(x) = 3(x^2 + 1)^2 2x,$$

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 + 1)^2}{[f(x) - 1]^{1/2}}$$

بتعويض هذه القيمة لـ $f'(x)$ عن dy/dx فى (٧) وتعويض $f(x)$ عن y ، يكون لدينا

$$\frac{4x(x^2 + 1)^2}{[f(x) - 1]^{1/2}} = \frac{4x(x^2 + 1)^2}{\sqrt{f(x) - 1}}$$

وهذه صحيحة لجميع x حيث $f(x) > 1$ لقد اثبتنا أن f هى حل للمعادلة (٧) .

مثال ٢ . حل المعادلة التفاضلية

$$(1 + 2y + 5y^4)y' - 4x = 0$$

لدينا

$$(1 + 2y + 5y^4) \, dy = 4x \, dx$$

(١٠)

$$y + y^2 + y^5 = 2x^2 + C$$

ومن ثم

هنا من المستحيل أن نحل لـ y ، ويجب أن نعتبر حل المعادلة التفاضلية معروفاً ضمناً بواسطة (١٠) .

في حل المعادلة التفاضلية ، ثابت التكامل يجب اضافته مباشرة بعد التكامل ، وليس في وقت متأخر . فمثلاً ، ليس صحيحاً عند حل (٣) كتابة $y^{-1} = x^2/2$ — مكان (٤) والحل لـ y ، فتكون $y = -2/x^2$ ، ثم إضافة C ، لنحصل على

$$y = \frac{-2}{x^2} + C$$

المعادلة الثانية صحيحة وهي حل لـ (٢) لكن الثالثة ليست حلاً ما لم تكن $C = 0$. مثال ٣ . صهريج على هيئة متوازي مستطيلات ارتفاعه 10 ft وقاعدته مربعة وطول الضلع 6 ft ، ملىء بالماء . فتح صمام في أسفل الصهريج . ما الزمن الذي يتقضى ليفرغ الصهريج ؟

سنحل المسألة بإيجاد تعبير للحجم V للماء المتبقى في الصهريج بعد t min وسنفعل بأن نوجد أولاً المعادلة التفاضلية التي تربط t و V . هذه المعالجة هي الأكثر مباشرة لأن الفيزيائيين يعلمون بعض الشيء عن معدلات انسياب السوائل . النظرية الفيزيائية والقياسات العملية تبين أن المعدل الذي يتدفق به الماء من الصهريج يتغير ، وعند أى لحظة يكون متناسباً مع الجذر التربيعي لعمق الماء المتبقى في الصهريج عند هذه اللحظة . هذا أمر مقبول لأن المعدل يكون أكبر عند الابتداء ، حيث يكون الضغط على الثقب أكبر ، وأقل عندما يهبط مستوى الماء . وصحيح أيضاً أن المعدل لا يعتمد على شكل أو حجم قاعدة الصهريج . إذا كان V هو حجم الماء في الصهريج عند الزمن t ، فإن V تكون دالة لـ t . المعدل الذي يتدفق به الماء هو معدل تغير V عند الزمن t ، وهذا يعطى بالمشتقة dV/dt . افترضنا هو أن

$$\frac{dV}{dt} = k\sqrt{h} \quad (11)$$

حيث h هو العمق عند الزمن t و k ثابت التناسب وهو غير معلوم بعد . نفس القانون يحكم تدفق السوائل الأخرى ، وثابت التناسب k يعتمد على السائل الخاص وحجم الثقب ، فهو يكون أقل لسائل لزج مثل العسل الأسود عنه للماء . لحل (١١) يجب أولاً التعبير عن h بدلالة V . العلاقة هي $h = V/36$ ، و (١١) تصبح

$$\frac{dV}{dt} = \frac{k}{6} \sqrt{V} \quad (12)$$

هذه هي المعادلة التفاضلية التي تربط t و V . نحل (١٢) بفصل المتغيرين وإجراء التكامل .

$$\frac{dV}{\sqrt{V}} = \frac{k}{6} dt$$

$$2V^{1/2} = \frac{k}{6} t + C \quad (13)$$

لايجاد C ، نبحث عن قيمة للزمن t حيث V تكون معلومة . نعلم أن $V = 36(10)$ عند $t = 0$.
اذن $C = 2 \sqrt{36(10)} = 12\sqrt{10}$ ، (١٣) تصبح

$$(14) \quad 2V^{1/2} = \frac{k}{6} t + 12\sqrt{10}$$

لايجاد k ، يجب أن نعرف قيمة V لقيمة أخرى للزمن t . والا أننا لا نعلم ، فيجب أن نرجع الى الجداول الفيزيائية التي تعطى قيم k لسوائل متنوعة وسعات مختلفة للثقوب أو نقيس الحجم عند زمن ما . لنفرض أن بعد 1 min مستوى الماء انخفض 1 ft . فيكون $V = 36(9)$ عندما $t = 1$ ، ويتعويض هذه القيم في (١٤) ، يكون لدينا

$$2[36(9)]^{1/2} = \frac{k}{6} + 12\sqrt{10}$$

ومن ثم $k = 72(3 - \sqrt{10})$. ببدال k في (١٤) بهذه القيمة والحل لـ V نحصل على

$$(15) \quad V = 36[(3 - \sqrt{10})t + \sqrt{10}]^2$$

وبذلك نكون قد أوجدنا تعبيراً جبرياً لكمية الماء المتبقية بعد $t \text{ min}$. يمكننا الآن الاجابة عن السؤال الأصلي . بوضع $V = 0$ في ١٥ والحل لـ t ، نرى أن الصهريج سيكون فارغاً عند $t = \sqrt{10}/(\sqrt{10} - 3) \approx 19.5 \text{ min}$

الطريقة المستخدمة في الأمثلة السابقة يمكن تطبيقها لمعظم المعادلات التفاضلية التي تظهر في النواحي العملية حيث تكون المتغيرات قابلة للفصل . بفصل المتغيرين يمكن كتابة المعادلة في الصورة

$$(16) \quad g(y) dy = h(x) dx$$

حيث $h(x)$ و $g(y)$ تشتملان فقط على x و y على الترتيب . هذا يعنى أن المعادلة التفاضلية الأصلية يمكن التعبير عنها في الصورة .

$$(17) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{h(x)}{g(y)}$$

إذا كانت $h(x)$ و $g(y)$ متصلتين ، يمكننا اجراء تكامل طرفى (١٦)

$$(18) \quad \int g(y) dy = \int h(x) dx$$

لنحصل على

$$(19) \quad G(y) = H(x) + C$$

حيث $H(x)$ و $G(y)$ هما أى معكوسين تفاضليين خاصين لـ $h(x)$ و $g(y)$ وحيث C أى ثابت . بالطبع ، يوجد أيضاً ثابت C' يأتى من تكامل $g(y)$ ، لكن هذا يمكن نقله إلى الطرف الأيمن وإعادة

تسمية $C - C'$ بالاسم C . عادة يمكن حل (١٩) لـ y وبالتالي يمكن التعبير عن الحل كدالة صريحة في x , $y = f(x)$, أما إذا لم يمكن حل (١٩) لـ y , فيمكننا أن نعتبر (١٩) تعريفاً ضمناً للحل .

الطريقة المستخدمة لحل المعادلة التفاضلية القابلة للفصل (١٧) بكتابة (١٦) , وعندئذ تكون (١٩) لها مظهر سطحي للصلاحيه , تحتاج إلى تبرير . هذا يرجع إلى أن dx و dy في (١٦) هما عنصران تفاضليان نحصل عليهما من المشتقة dy/dx , لكن في (١٨) هما جزء من رمز التكامل دون شخصية منفصلة . عند حل المعادلة $dy/dx = xy^2$ ومرة أخرى في مثال ١ تحققنا بالتعويض أن الاجابات التي حصلنا عليها كانت حلولاً . لتجنب إجراء ذلك في كل مرة , سنثبت أن الطريقة التي شرحناها لحل المعادلات القابلة للفصل دائماً تعطى إجابة صحيحة , وذلك بإثبات أن الدالة $y = f(x)$ المعرفة ضمناً بـ (١٩) حل للمعادلة التفاضلية (١٧) .

الطريقة هي مثل تلك التي استخدمت لتحقيق الحل في مثال ١ . يمكن اثبات , وسنفترض , أن المعادلة (١٩) تعرف ضمناً دالة لـ x قابلة للتفاضل $y = f(x)$. هذا يعني أن : $G(f(x)) = H(x) + C$ لجميع x في فترة ما . نوجد $f'(x)$ بتفاضل طرفي هذه المعادلة , باستخدام قاعدة السلسلة (في الواقع , نفاضل ضمناً) :

$$G'(f(x))f'(x) = H'(x),$$

$$f'(x) = \frac{H'(x)}{G'(f(x))} \quad \text{أى}$$

$$G'(y) = g(y) \quad \text{و} \quad H'(x) = h(x) \quad \text{بما أن}$$

فإن

$$f'(x) = \frac{h(x)}{g(f(x))}$$

بتعويض هذه القيمة لـ $f'(x)$ عن dy/dx في (١٧) وتعويض $f(x)$ عن y , يكون لدينا

$$\frac{h(x)}{g(f(x))} = \frac{h(x)}{g(f(x))}$$

التي هي صحيحة لجميع x حيث تكون الكميات المشتملة معرفه . هذا يوضح أن f المعرفة بـ (١٩) هي حل لـ (١٧) .

من المفهوم , طبعاً , أنه عند حل المعادلة التفاضلية بطريقة فصل المتغيرين , نقيّد أنفسنا بقيم x التي تجعل الحدود المحتوية على y وأيضاً الحدود المحتوية على x معرفة . أننا لا ندعى أن

(١٩) للقيم المختلفة لـ C تعطى جميع الحلول (١٧) . مسألة لإيجاد جميع حلول المعادلة التفاضلية يمكن أن تكون صعبة ، وهي مدروسة في كتب عن الموضوع .

مسائل

أوجد حلولاً للمعادلات التفاضلية الآتية

$$1 - \frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y} \quad - \quad 2 - \frac{dy}{dx} = y^2 \quad - \quad 3 - \frac{ds}{dt} = \frac{t^2+3}{s^3}$$

$$4 - (y+y^2)y' = x^2 - 3 \quad - \quad 5 - \frac{dy}{dx} = 3y^{2/3} \quad - \quad 6 - \frac{2}{y^2} \frac{dy}{dx} = x^2$$

$$7 - \theta^2 r \frac{dr}{d\theta} = 1 + \theta^2 \quad - \quad 8 - \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{(x+a)^4} \quad - \quad 9 - (1+x) \frac{dx}{dt} = tx^3$$

$$10 - y' = \frac{3}{y + \sqrt{t}} \quad - \quad 11 - y\sqrt{2x^2-3} \frac{dy}{dx} + x\sqrt{6+y^2} = 0 \quad - \quad 12 - y'' = \frac{2}{\sqrt{y'}}$$

$$13 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^2$$

للمعادلات التفاضلية الآتية ، أوجد حلاً يحقق الشرط الحدى المعطى :

$$14 - \frac{dy}{dx} = y^2; y = 5 \text{ عند } x = 2 \quad - \quad 15 - \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}; y = -3 \text{ عند } x = 0$$

$$16 - x^2(3+2y)y' = 1; y = 1 \text{ عند } x = -2 \quad - \quad 17 - \frac{dy}{dx} = \frac{x}{(x^2-1)^2 y}; y = 5 \text{ عند } x = 0$$

في المسائل الآتية عين الثابت k بحيث أن المعادلة التفاضلية يكون لها حل يحقق الشروط الحدية المعطاة وأوجد الحل :

$$18 - \frac{dV}{dt} = k\sqrt{V}; V = 10 \text{ عند } t = 0 \text{ و } V = 9 \text{ عند } t = 3$$

$$19 - h^2 \frac{dh}{dt} = k\sqrt{h}; h = 1 \text{ عند } t = 0 \text{ و } h = \frac{1}{4} \text{ عند } t = 8$$

$$20 - f'(t) = 4k/f(t); f(0) = 0, f(-1) = 2$$

$$21 - \frac{dy}{dx} = kxy^3; y = -4 \text{ عند } x = 0 \text{ و } y = -\frac{1}{2} \text{ عند } x = 1$$

$$22 - \text{حقق أن التعبير لـ } V \text{ في (١٠) ، مثال ٣ ، هو حل للمعادلة التفاضلية (١٢) عندما } k = 72(3 - \sqrt{10}).$$

$$23 - \text{أوجد صيغة صريحة للحل في مثال ١ وحقق بالتعويض المباشر أنه حل للمعادلة التفاضلية (٧) .}$$

$$24 - \text{أثبت أن الدالة } f(x) \text{ المعرفة ضمناً بالمعادلة } y^2 + (x-a)^2 = a^2 \text{ هي حل للمعادلة التفاضلية}$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y}\right)^2$$

٢٥ - حل المعادلة التفاضلية $y' = (3x^4 - 4)/(y^2x^2 + 4x^2)$ وحقق أن الإجابة هي حل .
 ٢٦ - أوجد معادلة منحنى ميله عند أى نقطة (x, y) عليه هو x/y ويمر بالنقطة $(4, 2)$.
 ٢٧ - أوجد معادلة المنحنى الذى ميله عند أى نقطة (x, y) عليه هو $(y/x)^2 - 5xy^2$ ويمر بالنقطة $(2, 2)$.

٢٨ - أوجد المعادلة $y = f(x)$ لمنحنى بحيث أن $y'' = 3\sqrt{y}$ عند كل نقطة (x, y) عليه ويمر بالنقطة $(0, 3)$ بميل 4 هناك .

٢٩ - أوجد المعادلة $y = g(x)$ لمنحنى بحيث أن $y'' = 6x$ عند كل نقطة (x, y) عليه ويمر بالنقطة $(-1, 2)$ و $(2, 6)$ و $(1, 3)$.

٣٠ - أوجد المعادلة $y = f(x)$ لمنحنى بحيث أن $y'' = 2/\sqrt[3]{x}$ عند كل نقطة (x, y) عليه ويمر بالنقطة $(-1, 0)$ و $(1, 2)$ و $(0, 1)$.

٣١ - سرعة نقطة تتحرك على خط الاحداثيات تتناسب مع مربع بعدها s عن نقطة الأصل . اذا كانت $s = 2$ عند $t = 0$ وكانت $s = 4$ عند $t = 5$ ، ما هى المسافة s عند $t = 9$ ؟ ما هى السرعة عند $t = 9$ ؟

٣٢ - قارب مزود بمحرك يسير فى خط مستقيم يبطل محركه على مسافة ما قبل الرصيف حيث يريد الوقوف . بعد ابطال المحرك تكون سرعة القارب تساوى $\sqrt{100-s}$ ft/sec حيث s هى المسافة التى قد أبحرها . اذا كان القارب مجرد يصل الى الرصيف ، ما الزمن الذى يأخذه ليفعل ذلك ؟

٣٣ - صهريج زيت اسطوانى قائم نصف قطره 3 ft وارتفاعه 8 ft يفرغ خلال ثقب فى القاع . اذا كان فى الأصل الصهريج ملىء بالزيت وبعد 15 min فرغ لنصفه ، ما مقدار الزيت الذى يبقى بعد 30 min ؟ متى يكون الصهريج فارغاً ؟

٣٤ - صهريج بيولوجى بحرى على شكل متوازي مستطيلات قاعدته 3 × 4 ft وعمقه 3 ft . الصهريج ، فى الأصل كان مليئاً ، ويفرغ خلال ثقب فى القاعدة . عندما يصل مستوى الماء العلامة 2-ft وذلك يستغرق 15 min ، يترك الثقب مفتوحاً ويضاف ماء جديد بمعدل ثابت ليحتفظ بمستوى الماء عند هذه العلامة ، ما هو هذا المعدل ؟

٣٥ - ينسكب الرمل من قادوس مخروطى من ثقب فى القاعدة . ارتفاع القادوس هو 6 ft ، ونصف قطر قمته هو 3 ft . اذا كان فى الأصل القادوس ملآن وهبط مستوى الرمل 2 ft فى الدقيقتين الأوليين ، فمتى يكون القادوس فارغاً ؟ (ارشاد : الحل يكون أسهل اذا اخترنا الارتفاع وليس الحجم كمتغير مستقل .)

٣٦ - دن (وعاء ضخم) نصف كروى نصف قطره 4 ft يتزح خلال ثقب فى القاع . اذا كان الوعاء فى الأصل ملىء بالماء وبعد 20 min كان عمق السائل 3 ft ، متى يصبح الوعاء فارغاً ؟ (ارشاد : حجم القطعة الكروية التى ارتفاعها h هى $\pi h^2(3a - h)/3$ حيث a نصف قطرة الكرة .)

٣٧ - نصف القطر r لدائرة ، الذي كان أولاً 2 ft بدأ فجأة في الزيادة بمعدل $\sqrt{r} \text{ ft/min}$. ما معدل زيادة مساحة الدائرة بعد 8 min ؟

٣٨ - طبقاً لقانون نيوتن للجاذبية ، يكون الجسم الساقط في الفراغ نحو الأرض عجلة تتناسب عكسياً مع s ، حيث s هي بعده عن مركز الأرض . بفرض أن الجسم بدأ من السكون بعيداً في الفراغ ، أثبت أن سرعته تتناسب عكسياً مع \sqrt{s} .

ارشاد : $\left(\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds} \right)$

٣٩ - طبقاً لقانون نيوتن للجاذبية ، يتجاذب جسمان كرويان متجانسان كتلتاهما M و m بقوة تساوي GmM/r^2 ، حيث r هي المسافة بين مركزيهما وحيث G هي الثابت العام للجاذبية ، الذي تعتمد قيمته على الوحدات المستخدمة فقط . بفرض أنه لا توجد مقاومة للهواء ، أثبت أن أقل سرعة تقذف بها قذيفة كتلتها m من الأرض الى الفراغ ولا ترجع أبداً هي $\sqrt{2gR}$ ، حيث g هي عجلة الجاذبية وحيث R نصف قطر الأرض . هذه السرعة ، التي هي حوالي 7 miles/sec تسمى سرعة الإفلات

(ارشاد : $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = v \frac{dv}{dr}$ ، عند سطح الأرض قوة الجذب بين

القذيفة والأرض هي mg . واذن G يمكن تعيينها بدلالة R و g وكتلة الأرض M . إذا كانت القذيفة لا ترجع ثانية ، فالسرعة يجب أن تكون دائماً موجبة .)

الفصل الخامس

التكامل المعين

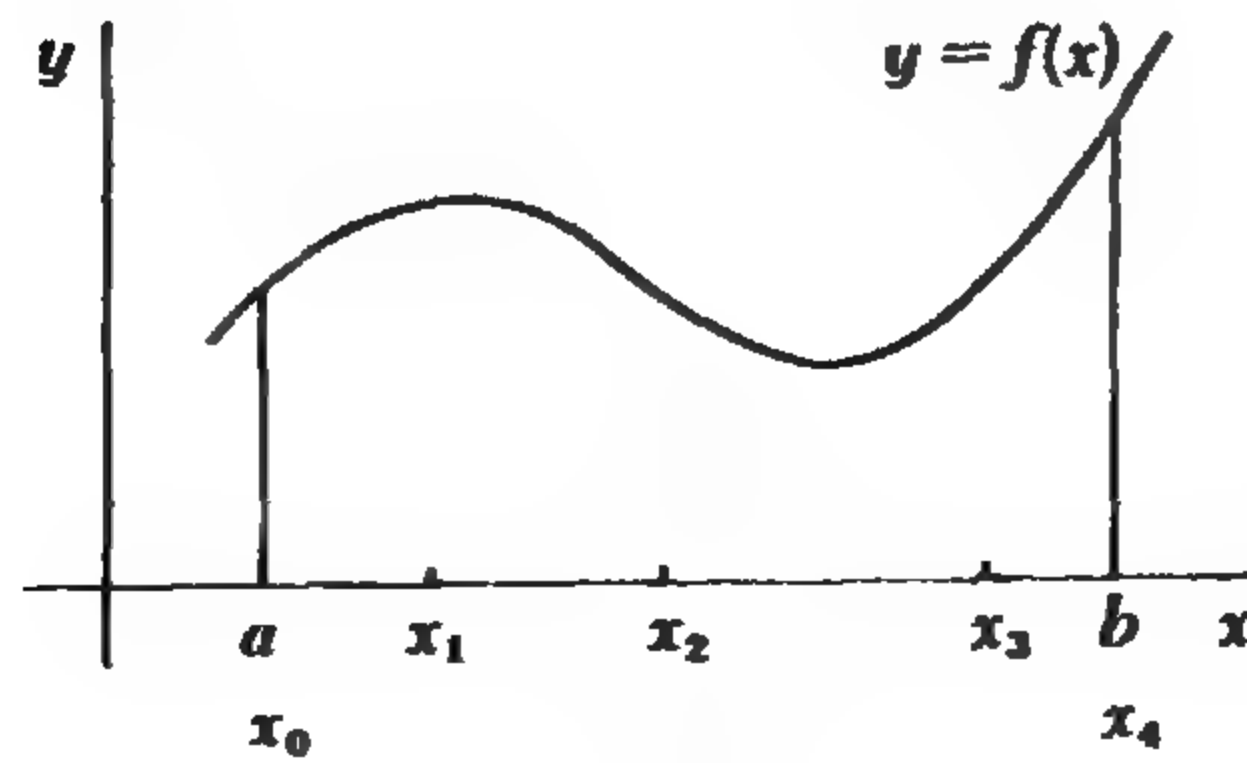
١-٥

التكامل المعين

الآن نتقل من النهايات والمشتقات الى موضوع مختلف تماماً هو ايجاد مساحة منطقة . نبدأ بالحالة البسيطة للمنطقة تحت الشكل البياني للدالة $y = f(x)$ وفوق المحور السيني وبين الخطين المستقيمين الرأسين $x = a$ و $x = b$ (شكل ١-٥) للتبسيط ، سنشير الى هذه المنطقة بأنها « المنطقة تحت المنحنى $y = f(x)$ بين a و b »

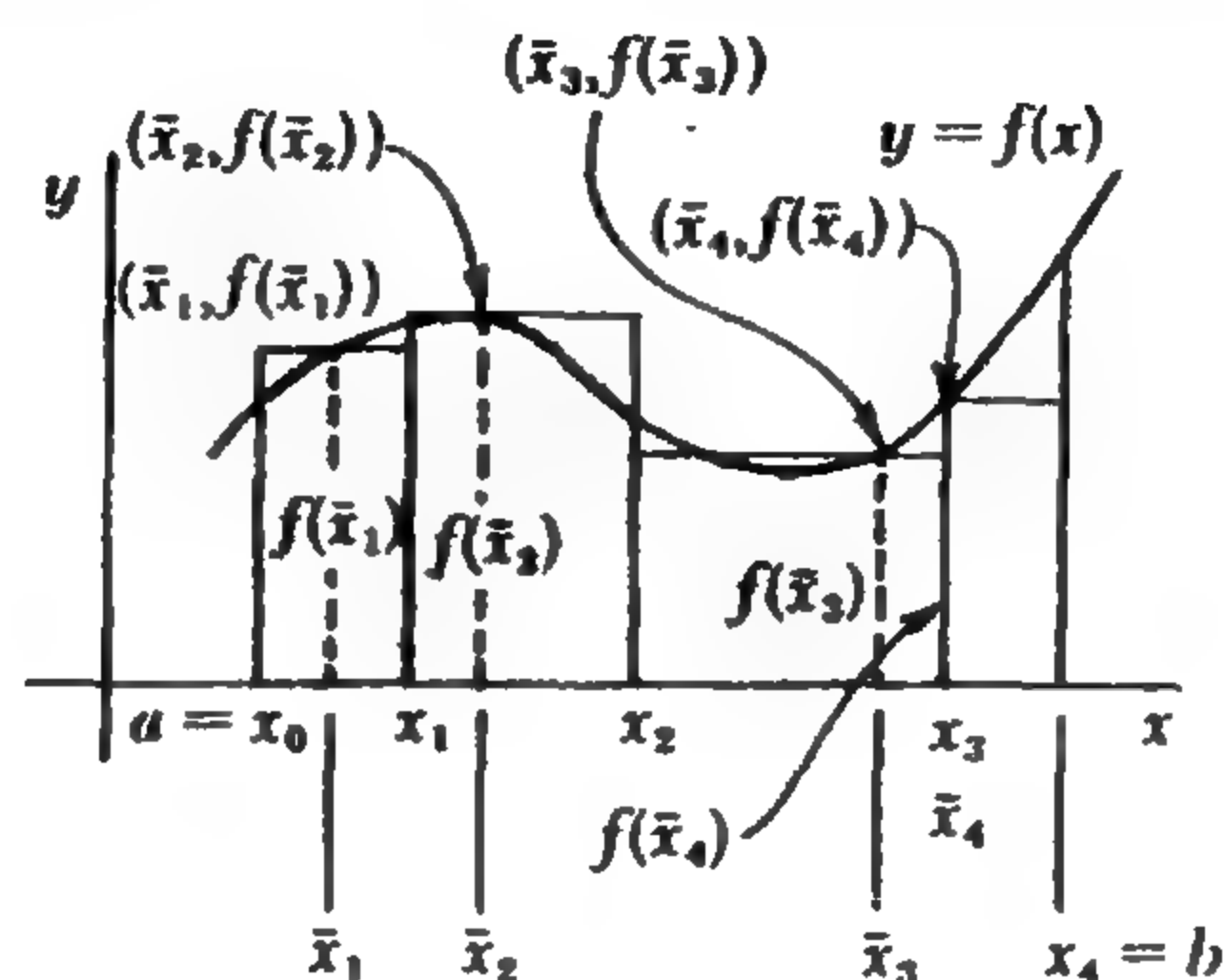
نعالج المسألة لايجاد مساحة المنطقة بأن نوجد أولاً تقريباً الى المساحة . من الطبيعي أن هذا سيؤدي الى المساحة المضبوطة . نقسم الفترة $[a, b]$ الى أربع فترات جزئية باختيار النقط x_1, x_2, x_3 على المحور السيني بين a و b ، كما هو موضح في شكل ١-٥ . ليس من الضروري أن تكون على مسافات متساوية . من الملائم أن نأخذ $a = x_0$ و $b = x_4$. نقط التقسيم x_1, x_2, x_3 تقسم $[a, b]$ الى الفترات الجزئية الأربع

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \quad [x_3, x_4]$$



شكل ١-٥

اختر أى نقطة \bar{x}_1 فى الفترة الجزئية $[x_0, x_1]$ وكون المستطيل الذى قاعدته هى القطعة $[x_0, x_1]$ وارتفاعه هو $f(\bar{x}_1)$ ، كما هو موضح فى شكل ٢ - ٥ . طول القاعدة هو $x_1 - x_0$ ومساحة المستطيل هى $f(\bar{x}_1)(x_1 - x_0)$. فى الفترة الجزئية الثانية $[x_1, x_2]$ اختر نقطة \bar{x}_2 وكون المستطيل الذى قاعدته هى القطعة $[x_1, x_2]$ وارتفاعه هو $f(\bar{x}_2)$. مساحة هذا المستطيل هى $f(\bar{x}_2)(x_2 - x_1)$. كرر هذه العملية مع الفترتين الجزئيتين الباقيتين ، فنحصل فى الجملة على أربعة مستطيلات . كل نقطة \bar{x}_i يمكن أن تكون عند أى مكان فى فترتها الجزئية وقد تكون إحدى النقطتين الطرفيتين . فى الشكل ٢ - ٥ \bar{x}_4 هى عند النقطة الطرفية اليسرى للفترة الجزئية $[x_3, x_4]$.



شكل ٢ - ٥

حاصل جمع مساحات المستطيلات هو تقريب لمساحة المنطقة تحت المنحنى

مساحة كل مستطيل هى تقريب لمساحة المنطقة تحت ذلك الجزء من المنحنى . حاصل جمع مساحات المستطيلات هو

$$(1) \quad r = f(\bar{x}_1)(x_1 - x_0) + f(\bar{x}_2)(x_2 - x_1) + f(\bar{x}_3)(x_3 - x_2) + f(\bar{x}_4)(x_4 - x_3)$$

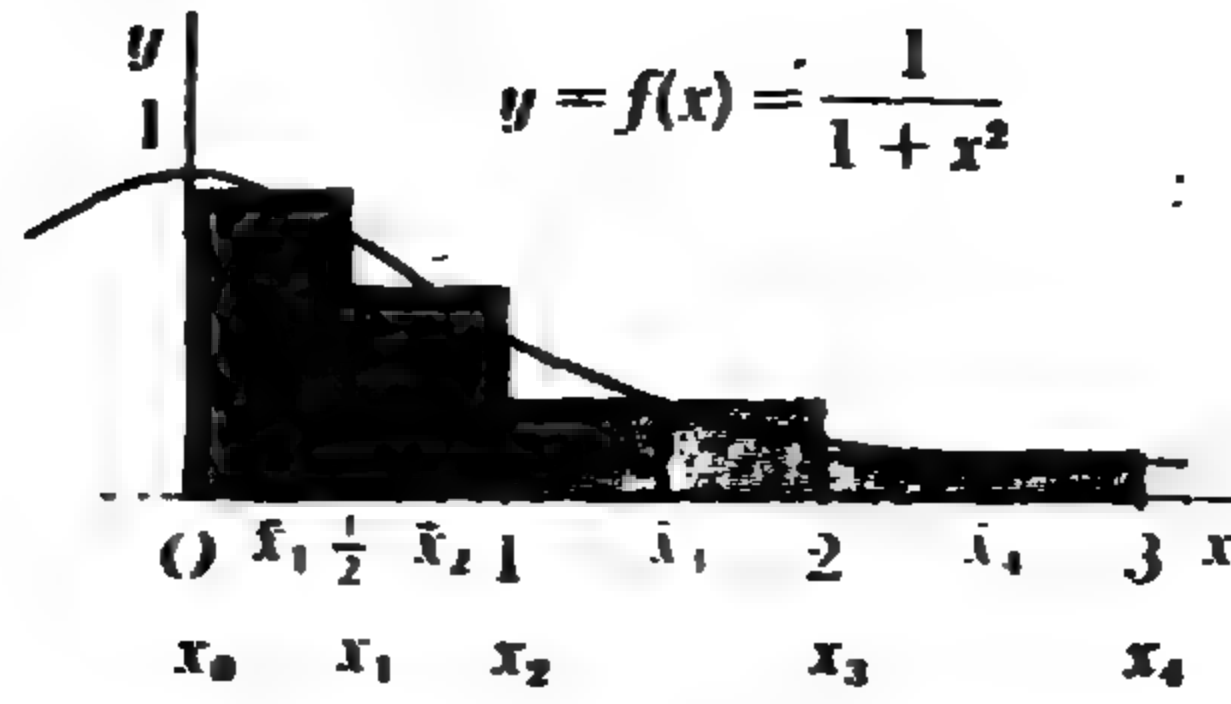
وهو تقريب لمساحة المنطقة تحت المنحنى بين a و b . دقة التقريب تعتمد على مدى اختصار مساحات المثلثات المنحنية الصغيرة الواقعة بين المنحنى وأعلى المستطيلات ، بعضها مع بعض . هذا بدوره يتعين باختيار نقطة التقسيم x_1, x_2, x_3, x_4 والنقط $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$.

نوضح ذلك بأن نقرب مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = 1/(1+x^2)$ بين 0 و 3 . المنحنى مخطط فى الشكل ٢ - ٣ . نستخدم أربعة مستطيلات مقربة تعين بالنقط

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3$$

النقط \bar{x}_i يمكن اختيارها فى أى مكان داخل فترات الجزئية الخاصة ، لكن يبدو من الشكل البياني أننا نحصل على تقريب جيد باختيارهم النقط النصفية للفترات الجزئية . لذلك نختار

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{4}, \quad \bar{x}_2 = \frac{3}{4}, \quad \bar{x}_3 = \frac{3}{2}, \quad \bar{x}_4 = \frac{5}{2}$$



شكل ٣-٥

الدالة المناظرة للمنحنى هي $f(x) = 1/(1+x^2)$ ، ويكون حاصل الجمع (١) لمساحات المستطيلات هو

$$r = f(\frac{1}{2})\frac{1}{2} + f(\frac{3}{2})\frac{1}{2} + f(\frac{5}{2})1 + f(\frac{7}{2})1$$

$$= \frac{4}{5}(\frac{1}{2}) + \frac{4}{13}(\frac{1}{2}) + \frac{4}{17}(1) + \frac{4}{29}(1) = 1.236.$$

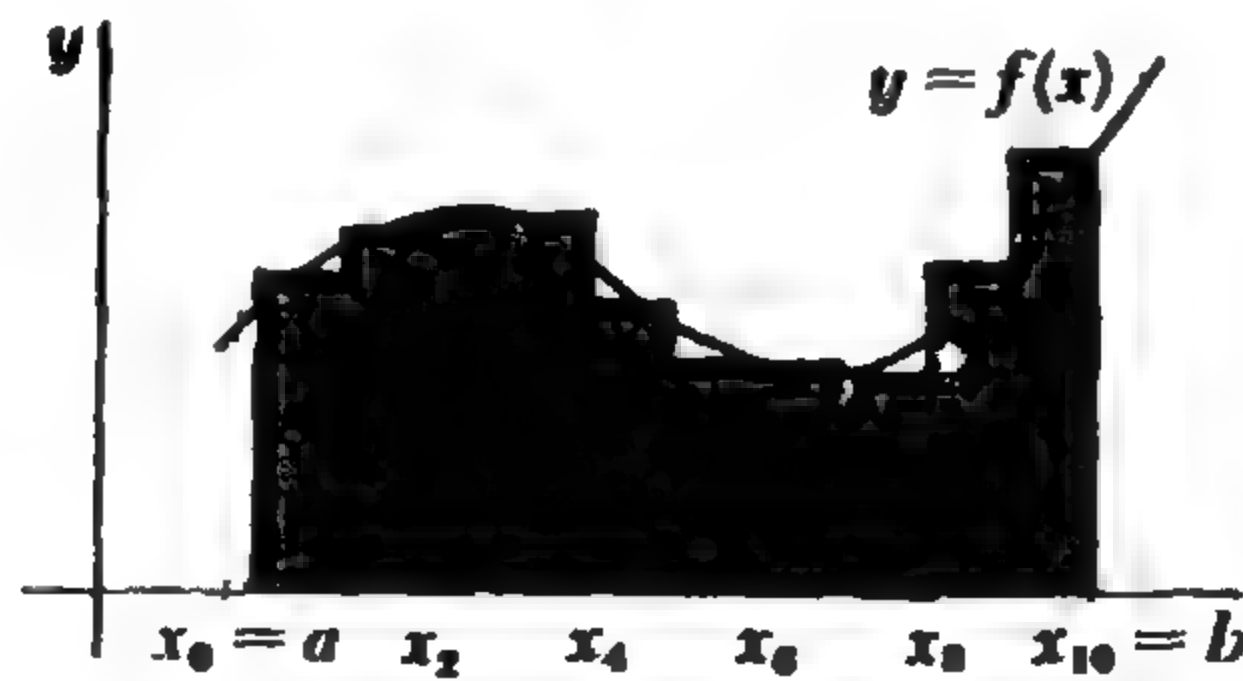
فيما بعد سنتعلم كيف نوجد المساحة المضبوطة للمنطقة . المساحة صحيحة الى ثلاثة أرقام عشرية هي 1.249 . التقريب جيد للغاية .

نعود الى المنطقة في الشكل ١-٥ . من الواضح أن دقة التقريب يمكن تحسينها باستخدام مستطيلات أكثر بقواعد أضيق . التقسيمات الجزئية للمنطقة باستخدام 10 مستطيلات موضحة في الشكل ٤-٥ .

باختيار عدد كبير كفاً من المستطيلات ، كل له قاعدة ضيقة جداً ، يمكننا الحصول على تقريب للمساحة دقيق كما نرغب بصرف النظر عن مواضع \bar{x}_i .

تقسيم الفترة $[a, b]$ الى عدد محدود من الفترات الجزئية بالنقط

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$



شكل ٤-٥

التقريب الى المساحة يمكن تحسبه باستخدام مستطيلات أكثر وأضيق

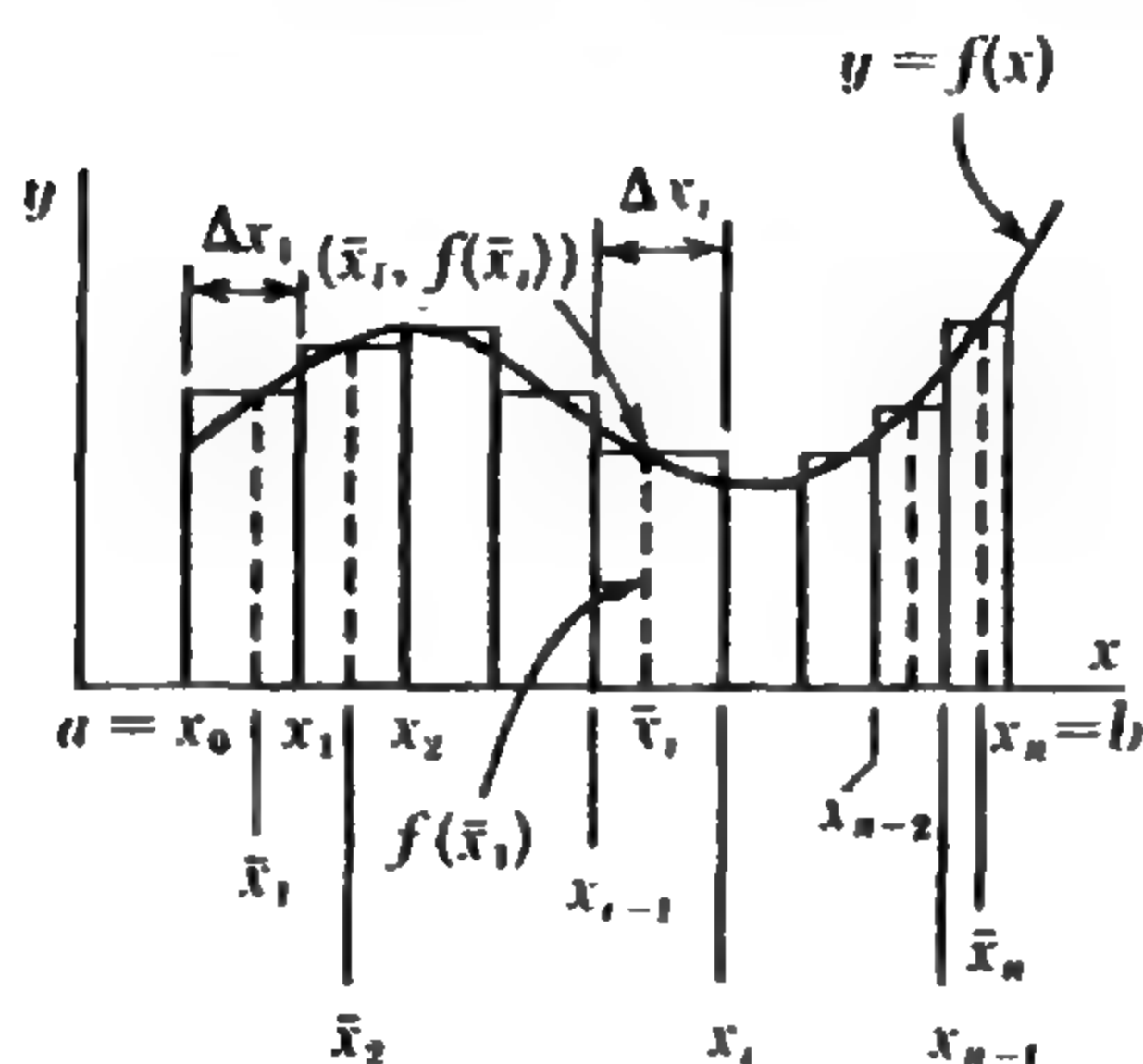
يسمى تجزئاً للفترة . الرمز لمثل هذا التجزئ هو

$$(٣) \quad [x_0, x_1, \dots, x_n]$$

فمثلاً ، تجزئ الفترة $[0, 3]$ المعطى بـ (٢) يرمز له بالرمز $[0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3]$. حاصل جمع تقريبي للتجزئ المعين بـ (٣) هو

$$(٤) \quad r = f(\bar{x}_1)(x_1 - x_0) + f(\bar{x}_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\bar{x}_n)(x_n - x_{n-1}),$$

حيث \bar{x}_1 نقطة ما في الفترة الجزئية الأولى أو إحدى نقطتيها الطرفيتين ، \bar{x}_2 نقطة في الفترة الجزئية الثانية أو إحدى نقطتيها الطرفيتين ، وهكذا (شكل ٥ - ٥) .



شكل ٥ - ٥

يمكننا تبسيط الرموز بكتابة $x_1 - x_0 = \Delta x_1, x_2 - x_1 = \Delta x_2$ وبوجه عام

$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ عندئذ (٤) تصبح

$$(٥) \quad r = f(\bar{x}_1) \Delta x_1 + f(\bar{x}_2) \Delta x_2 + \dots + f(\bar{x}_n) \Delta x_n.$$

حاصل جمع على الصورة (٤) أو (٥) التي فيها كل \bar{x}_i تقع في الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ يسمى حاصل جمع Riemann للدالة f ، تيمناً بالرياضي الألماني ج ريمان G.Riemann (١٨٢٦ - ١٨٦٦) ، الذي كان أول من قام بدراسة دقيقة للتكامل المعين .

حواصل الجمع التي حدودها لها نموذج متكرر ، كما في (٥) ، تظهر كثيراً في الرياضيات ، لذلك يستخدم لها عادة رمز مختصر . لشرحه ، يجب الاستطراد .

الرمز $\sum_{i=1}^5 \frac{i^2}{i+3}$ يقوم مقام حاصل الجمع الذي نحصل عليه باستبدال i في $i^2/(i+3)$ بالاعداد 1, 2, 3, 4, 5 على الترتيب ثم جمع الأعداد الناتجة . أي أن ،

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 \frac{i^2}{i+3} &= \frac{1^2}{1+3} + \frac{2^2}{2+3} + \frac{3^2}{3+3} + \frac{4^2}{4+3} + \frac{5^2}{5+3} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{4}{5} + \frac{9}{6} + \frac{16}{7} + \frac{25}{8}. \end{aligned}$$

الرمز $\sum_{i=3}^{10} i(2i-1)$ يقوم مقام حاصل الجمع الذي نحصل عليه باستبدال i في $i(2i-1)$ بالاعداد 3, 4, 5, ..., 10 ثم جمع الأعداد الناتجة ، أى أن ،

$$\sum_{i=3}^{10} i(2i-1) = 3(5) + 4(7) + 5(9) + \dots + 10(19)$$

بالمثل

$$\sum_{j=0}^n x^j = 1 + x + x^2 + \dots + x^n,$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

الرمز $\sum_{i=1}^n a_i$ يقرأ « حاصل الجمع لـ a_i من $i=1$ إلى n » . حاصل الجمع في (٥) يمكن كتابته في الصورة الرمزية لحاصل الجمع هكذا .

$$r = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

الحرف i أو j في هذه الأمثلة يسمى دليل الجمع . الدليل يأخذ جميع القيم الصحيحة مبتدئاً بالعدد أسفل علامة الجمع Σ ومنتهاً بالعدد أعلى علامة الجمع . لاحظ أن حاصل الجمع يكون مستقلاً عن الحرف المستخدم للدليل . مثال ذلك .

$$\sum_{i=3}^{10} i(2i-1) = \sum_{j=3}^{10} j(2j-1)$$

دقة التقريب في (٥) تعتمد على عرض المستطيلات ، أى على دقة التجزئ . وهذا يمكن التحكم فيه بأن نحدد أن طول أكبر فترة جزئية يكون أقل من كمية معينة . طول أكبر فترة جزئية يسمى معيار التجزئ .

نشعر بالبداية أننا يمكننا التقريب الى المساحة ، بالدقة التي نريدها ، باستخدام حاصل جمع ريمان بأخذ تجزئ معياره صغير صغيراً كافياً . من الطبيعي أى معيار معطى لا يعين نظاماً وحيداً من المستطيلات . لأى معيار معطى توجد تجزئات كثيرة ممكنة ، ولكل منها توجد اختيارات كثيرة لـ \bar{x}_i واذن توجد تقريبات كثيرة ممكنة لأى معيار معطى . لكن اذا كان المعيار صغيراً ، فإن هذه التقريبات سوف لا تختلف كثيراً بعضها عن بعض ، ويقل الاختلاف كلما كان المعيار أصغر . فى الواقع ، يوجد عدد c ، نتوقع أنه المساحة ، تتجمع حوله التقريبات وتقرب منه أكثر فأكثر كلما صغر المعيار . نشير الى هذا بالرمز

$$c = \lim_{w \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

حيث w هي المعيار . بسبب وجود حواصل جمع ريمان كثيرة $\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$ لكل معيار ، فهذه لا تكون نهاية بالمعنى العادى وهى تحتاج لشرح .

١-٥ . تعريف لتكن f دالة ولتكن $[a, b]$ فترة . الرمز

$$c = \lim_{w \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

يعنى أن لكل جوار V للعدد c ، يوجد عدد δ بحيث أن كل حاصل جمع ريمان $\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$ على الفترة $[a, b]$ مبنى على تجزىء معياره w أقل من δ يقع فى V مثل هذا العدد c ، اذا كان موجوداً ، يسمى عدد تجمع لحواصل جمع ريمان .

مع أنه قد يبدو أن عدد التجمع هذا يجب أن يوجد ، لكن هذا غير مؤكد على الاطلاق . هذه الصعوبة هى أننا لم نعرف ما نقصد بالمساحة . مساحة المستطيل يمكن تعريفه كحاصل ضرب طول قاعدته فى ارتفاعه . لكن كيف نعرف مساحة منطقة حدودها منحنية ؟ احدى الطرق المستخدمة بكثرة فى حساب التفاضل الأولى هى تعريف المساحة بانها عدد التجمع c هذا تعريف معقول ، لكن يجب أولاً أن نثبت وجود عدد التجمع . من الممكن تصور أنه لبعض الدوال والمعايير صغيرة جداً حواصل جمع ريمان المقربة لا تتجمع لكن تنتشر فوق فترة صغيرة . بتذكر هذا ، التعريف الآتى له صلة بالموضوع .

٢-٥ . تعريف . الدالة f تكون قابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$ اذا كانت موجودة ، أى اذا وجد عدد التجمع . النهاية (عدد التجمع) تسمى

التكامل المعين للدالة f من a الى b ويرمز لها بالرمز $\int_a^b f(x) dx$. أى أن ،

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{w \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

اذا كانت الدالة f قابلة للتكامل فان التكامل المعين للدالة f يقال أنه موجود . التكامل المعين يجب ألا يلتبس مع التكامل غير المعين بالرغم من تشابه الرمز . التكامل المعين هو عدد ، النهاية لحاصل جمع معين ، التكامل غير المعين هو دالة ، المعكوس التفاضلى للدالة f . يوجد ارتباط بين الاثنين ، لكن هذا سيأتى فيما بعد . ينبغى أن نعتبر $\int_a^b f(x) dx$ رمزاً ، ولو ثقيلًا ، لعدد التجمع c . فى البند ٣-٥ سوف نتعلم كيف نوجد عدد التجمع وبذلك نوجد المساحة المضبوطة للمنطقة .

لقد قدمنا التكامل المعين كمسألة فى المساحة ، لكن حواصل جمع ريمان يمكن تكوينها لأى دالة f وأى فترة $[a, b]$ حتى ولو كانت حواصل الجمع لا يمكن تفسيرها كتقريبات لمساحة . بوجه خاص ، ليس من الضرورى أن تكون $f(x)$ موجبة لجميع x فى الفترة $[a, b]$. نختار تجزئاً للفترة ، نختار نقطة \bar{x}_i فى كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$ ، ثم نكون حاصل الجمع $\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$

قد يكون موجِباً أو سالِباً . يمكننا أن نسأل عما إذا كان يوجد عدد تجمع لحواصل الجمع هذه . إذا وجد ، فالتكامل المعين للدالة f يكون موجوداً .

الشروط التي تجعل الدالة قابلة للتكامل معلومة ، إلا أن من المسهب جداً إعطاؤها هنا في الصورة العامة . لكن يمكننا إعطاء شرط يكفي جداً لاحتياجاتنا .

٥-٣ نظرية . إذا كانت الدالة f متصلة في الفترة المغلقة $[a, b]$ ، فإنها تكون قابلة للتكامل على الفترة .

برهان هذه النظرية الهامة صعب ، لذلك نؤجله إلى البند ٥-٩ .

a و b في الرمز $\int_a^b f(x) dx$ تسميان الحد الأدنى والحد الأعلى للتكامل . الحرف x يسمى متغير التكامل . يمكن تغييره دون تأثير على قيمة التكامل .
أي أن

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(t) dt$$

الرمز \int تطويل للحرف S وقد أدخله ليبنز Leibniz ليقيم محل حاصل الجمع (sum) .
لتكن f دالة متصلة . من بين جميع حواصل الجمع المرتبطة بالتجزئ المعطى اثنان لهما أهمية خاصة . إذا كانت كل \bar{x}_i تختار بحيث أن $f(\bar{x}_i)$ تكون أكبر قيمة للدالة f في الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ ، فإن حاصل جمع ريمان المناظر يسمى حاصل الجمع الأعلى للدالة f فوق الفترة $[a, b]$ للتجزئ المعطى . مناظراً لذلك ، إذا كانت كل \bar{x}_i تختار بحيث أن $f(\bar{x}_i)$ تكون أصغر قيمة للدالة f في الفترة $[x_{i-1}, x_i]$ ، فإن حاصل جمع ريمان هو حاصل الجمع الأدنى . المستطيلات المرتبطة بحاصل الجمع الأعلى وحاصل الجمع الأدنى لتجزئ نمطى موضحة في الشكل ٥-٤٢ (بند ٥-٩) . حاصل الجمع الأعلى u_p وحاصل الجمع الأدنى m_p هما القيمتان القصويان لحواصل جمع ريمان المرتبطة بالتجزئ المعطى p ، وكل حاصل جمع r_p لذلك التجزئ يقع بينهما . أي أن ،

$$m_p \leq r_p \leq u_p$$

وصحيح أيضاً ، رغم أن البرهان ليس سهلاً ، أن .

$$m_p \leq \int_a^b f(x) dx \leq u_p$$

لكل تجزئ p . عندما تكون $f(x)$ موجبة ، وبالتالي التكامل يمثل مساحة ، هذا يكون مقبولا هندسياً .

مثال ١ . أوجد حاصل الجمع الأعلى u_p وحاصل الجمع الأدنى m_p للدالة $f(x) = 9 - x^2$ على الفترة $[-2, 3]$ للتجزىء $p = [-2, -1, 2, 3]$.

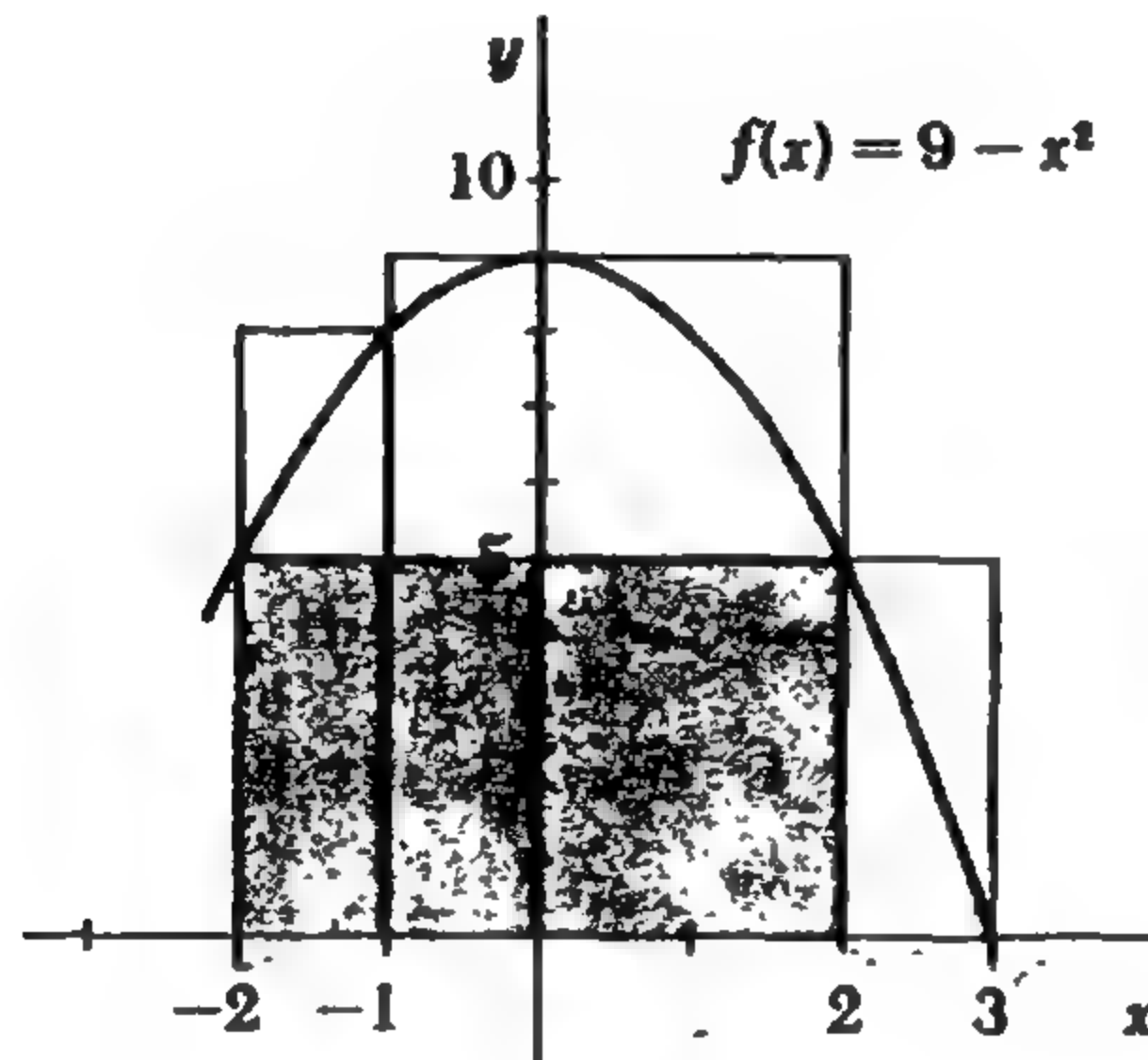
الدالة مخططة في الشكل ٦-٥ . القيم الكبرى للدالة في الفترات الجزئية : $[2, 3]$ و $[-1, 2]$ و $[-2, -1]$ المعينة بالتجزىء تحدث عند $2, 0, -1$ على الترتيب . إذن

$$\begin{aligned} u_p &= f(-1)(1) + f(0)(3) + f(2)(1) \\ &= 8(1) + 9(3) + 5(1) = 40. \end{aligned}$$

حاصل الجمع الأدنى يوجد باستخدام القيم الصغرى للدالة f في الفترات الجزئية :

$$\begin{aligned} m_p &= f(-2)(1) + f(2)(3) + f(3)(1) \\ &= 5(1) + 5(3) + 0(1) = 20. \end{aligned}$$

القيمة الصحيحة لـ $\int_{-2}^3 f(x) dx$ هي 33.3 . هذا هو عدد التجمع لحواصل جمع ريمان لجميع التجزيئات للفترة $[-2, 3]$. لاحظ أنها تقع بين حاصل الجمع الأعلى وحاصل الجمع الأدنى للتجزىء p .



شكل ٦-٥

مسائل

جدول الجذور والمقلوبات في التذييل ب يفيد في حساب قيم الدوال في المسائل أدناه . أوجد مفكوك حواصل الجمع الآتية :

$$\sum_{j=0}^6 (3j^2 - 5j + 1) = ٣$$

$$\sum_{i=3}^m i^2 = ٢$$

$$\sum_{i=1}^n i = ١$$

$$\sum_{n=1}^p \frac{(-1)^{n+1}}{n} = ٦$$

$$\sum_{a=1}^5 (ai + b)^2 = ٥$$

$$\sum_{i=1}^5 (ai + b)^2 = ٤$$

أكتب حواصل الجمع الآتية فى الصورة الرمزية لحواصل الجمع

$$\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} \quad - \quad ٧$$

$$1(2) + 2(3) + 3(4) + \dots + n(n+1) \quad - \quad ٨$$

$$x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + \dots + \frac{x^{11}}{10} \quad - \quad ٩$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 14 + 16 \quad - \quad ١٠$$

$$4 + 7 + 10 + 13 + \dots + 22 \quad - \quad ١١$$

$$\frac{3(2)}{4(2)+1} + \frac{3(3)}{4(3)+1} + \frac{3(4)}{4(4)+1} + \dots + \frac{3m}{4(m)+1} \quad - \quad ١٢$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \quad \text{بسط حاصل الجمع} \quad - \quad ١٣$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \quad \text{أثبت أن} \quad - \quad ١٤$$

$$\sum_{i=1}^n ka_i = k \sum_{i=1}^n a_i \quad \text{أثبت أن} \quad - \quad ١٥$$

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \quad \text{أثبت أن} \quad - \quad ١٦$$

$$\sum_{i=1}^n a \quad \text{أوجد قيمة} \quad - \quad ١٧$$

أوجد تجزئاً للفترات الآتية إلى n من الفترات الجزئية المتساوية الطول ، للعد المعطى n :

$$[1,12]; n=7 \quad - \quad ٢٠ \quad [-10,-8]; n=6 \quad - \quad ١٩ \quad [-6,12]; n=6 \quad - \quad ١٨$$

$$[\sqrt{2},5]; n=3 \quad - \quad ٢٣ \quad [0.3,0.5]; n=4 \quad - \quad ٢٢ \quad [-2,7]; n=5 \quad - \quad ٢١$$

٢٤ - احسب حاصل جمع ريمان للدالة $f(x) = x - x^2$ على الفترة $[0, 3]$ للتجزئ

$$\bar{x}_1 = 0.6, \bar{x}_2 = 1.3, \bar{x}_3 = 2, \bar{x}_4 = 2.7 \quad \text{أخذاً} \quad [0,1,1.5,2,3]$$

للدوال الآتية ، أوجد ثلاثة حواصل جمع لريمان للتجزئ المعطى باختيار كل \bar{x}_i بحيث أن

(أ) \bar{x}_i هى النقطة الطرفية اليسرى للفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ ، (ب) \bar{x}_i هى النقطة الطرفية

اليمنى للفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ ، (ج) \bar{x}_i هى النقطة المنصفة للفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$.

$$f(x) = 1/(x-1); [-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0] \quad - \quad ٢٦ \quad g(x) = 9 - x^2; [-3, -1, 1, 2, 3] \quad - \quad ٢٥$$

$$f(x) = 1/x^2; [-2, -1.6, -1.4, -1.2, -1] \quad - \quad ٢٨ \quad f(x) = \sqrt{t+1}; [-1, 0, 1, 3, 4] \quad - \quad ٢٧$$

$$h(u) = 2/(1+u^2); [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6] \quad - \quad ٢٩$$

خطط الشكل البياني للدول الآتية على الفترة المشار إليها . أوجد حواصل الجمع الأعلى والأدنى المرتبطة مع التجزئ المعطى ووضح المستطيلات المناظرة على الشكل التخطيطي . قارن

حواصل الجمع الأعلى والأدنى بقيمة التكامل . يجب أن تقع بينهما ، إذا كانت $f(x)$ موجبة ومتصلة في الفترة ، فإن التكامل يمثل مساحة المنطقة تحت المنحنى .

$$f(x) = \frac{1}{x}; [1, 2, 3, 4]; \int_1^4 \frac{1}{x} dx = 1.386 \quad (أ) - ٣٠$$

$$f(x) = \frac{1}{x}; [1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4]; \int_1^4 \frac{1}{x} dx = 1.386 \quad (ب)$$

$$g(x) = x^2 + 1; [-2, -1, 0, 2, 3]; \int_{-2}^3 (x^2 + 1) dx = \frac{59}{3} \quad - ٣١$$

$$f(z) = \sqrt{z}; [0, 1, 2, 4, 5]; \int_0^5 \sqrt{z} dz = 7.454 \quad (أ) - ٣٢$$

$$f(z) = \sqrt{z}; [0, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{2}, 2, 4, 5]; \int_0^5 \sqrt{z} dz = 7.454 \quad (ب)$$

$$f(x) = 8 + 2x - x^2; [-2, -1, 2, 3, 4]; \int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx = 36 \quad - ٣٣$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 2; [1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 2]; \int_1^2 (-\frac{1}{4}x^2 - 2) dx = -\frac{11}{2} \quad - ٣٤$$

$$h(x) = x^2 + x - 6; [-1, 0, 1, 3, 4]; \int_{-1}^4 (x^2 + x - 6) dx = -\frac{1}{2} \quad - ٣٥$$

$$f(x) = x^3 - 9x; [0, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3]; \int_0^3 (x^3 - 9x) dx = -\frac{81}{4} \quad - ٣٦$$

$$u(x) = \frac{x}{1+x^2}; [0, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3]; \int_0^3 \frac{x}{1+x^2} dx = 1.151 \quad - ٣٧$$

$$f(x) = [x]; [1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3]; \int_1^3 [x] dx = 3 \quad (أ) - ٣٨$$

$$f(x) = [x]; [1, 1.5, 1.9, 2.5, 3]; \int_1^3 [x] dx = 3 \quad (ب)$$

٣٩- لاى تجزىء ، حاصل الجمع الأدنى يعطى تقييماً أقل لمساحة المنطقة تحت المنحنى ، وحاصل الجمع الأعلى يعطى تقييماً أكبر . كيف يمكن استخدام هذين التقييمين لإيجاد تقييم آخر ، عادة أفضل ، للمساحة ؟

٤٠- خطط الشكل البياني للدالة $g(x) = 5x - x^2$ في الفترة $[0, 5]$. أوجد حاصل الجمع الأعلى وحاصل الجمع الأدنى للتجزىء $[0, 1, 2, 3, 4, 5]$ للفترة ووضع المستطيلات المناظرة على الشكل التخطيطي . قيم مساحة المنطقة تحت المنحنى بين 5 و 0 .

قرب إلى مساحة المنطقة تحت المنحنيات الآتية ، بين القيمتين المعطيتين a و b ، بحاصل جمع ريمان . عين من الشكل التخطيطي ، على قدر ما يمكنك ، ما إذا كان تقريبك أكبر أو أقل من المساحة :

$$y = x(x-2)^2; a = 1, b = 2 - \text{٤٢}$$

$$y = x^2 - 4x + 6; a = 0, b = 3 - \text{٤١}$$

$$y = \sqrt{9-x^2}; a = 0, b = 3 - \text{٤٤}$$

$$y = x + 1/x; a = \frac{1}{2}, b = 3 - \text{٤٣}$$

٤٥ - قرب إلى مساحة المنطقة تحت القطع المكافئ $y = -(x^2 + 4x)$ وفوق المحور السيني .

٤٦ - قرب إلى مساحة المنطقة تحت قوس واحد للمنحنى $y = \sin x$ ، (يجب استخدام القياس بالتقدير الدائري .)

٤٧ - أوجد تقريباً لمساحة المنطقة تحت المنحنى $y = x^2 - 2x + 2$ بين 1 و 0 ويكون صحيحاً إلى 0.1 .

٤٨ - أوجد قيمة $\int_0^7 \frac{x}{2} dx$ باعتبار التكامل مساحة المنطقة تحت المنحنى .

٤٩ - خطط الشكل البياني للدالة $f(x) = x^2 + 1$ لقيم x في الفترة $[-2, 3]$. الفترة يمكن اعتبارها تجزئياً لنفسها بفترة جزئية واحدة $[-2, 3]$. أوجد حاصل الجمع الأعلى وحاصل الجمع الأدنى للدالة f لهذا التجزئى ووضحهما على الشكل البياني .

٥٠ - مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ من 0 إلى 4 تقيم بحساب حاصل الجمع الأدنى لتجزئى الفترة $[0, 4]$ بشان فترات جزئية . كيف ينبغي اختيار الفترات الجزئية للحصول على تقييم جيد ؟

٥١ - لاي دوال تكون مساحة المنطقة تحت الشكل البياني تعطى بالضغط بكل حاصل جمع أدنى وأعلى ؟

٥٢ - لتكن g و f دالتين ولتكن k مقداراً ثابتاً . ضع

$$v(x) = kf(x) \text{ و } u(x) = f(x) + g(x)$$

لاى تقسيم للفترة $[a, b]$ واختيار $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$

لتكن $r(u), r(g), r(f)$ و $r(v)$ حواصل جمع ريمان لـ u, g, f . أثبت أن $r(u) = r(f) + r(g)$ و $r(v) = kr(f)$ وأنه إذا كانت $f(x) \leq g(x)$ لجميع x في الفترة $[a, b]$ ، فإن $r(f) \leq r(g)$.

٥٣ - إذا كانت الدالة f مطردة الزيادة في الفترة $[a, b]$ فاثبت أن لاي تجزئى p للفترة $[a, b]$ ، يكون

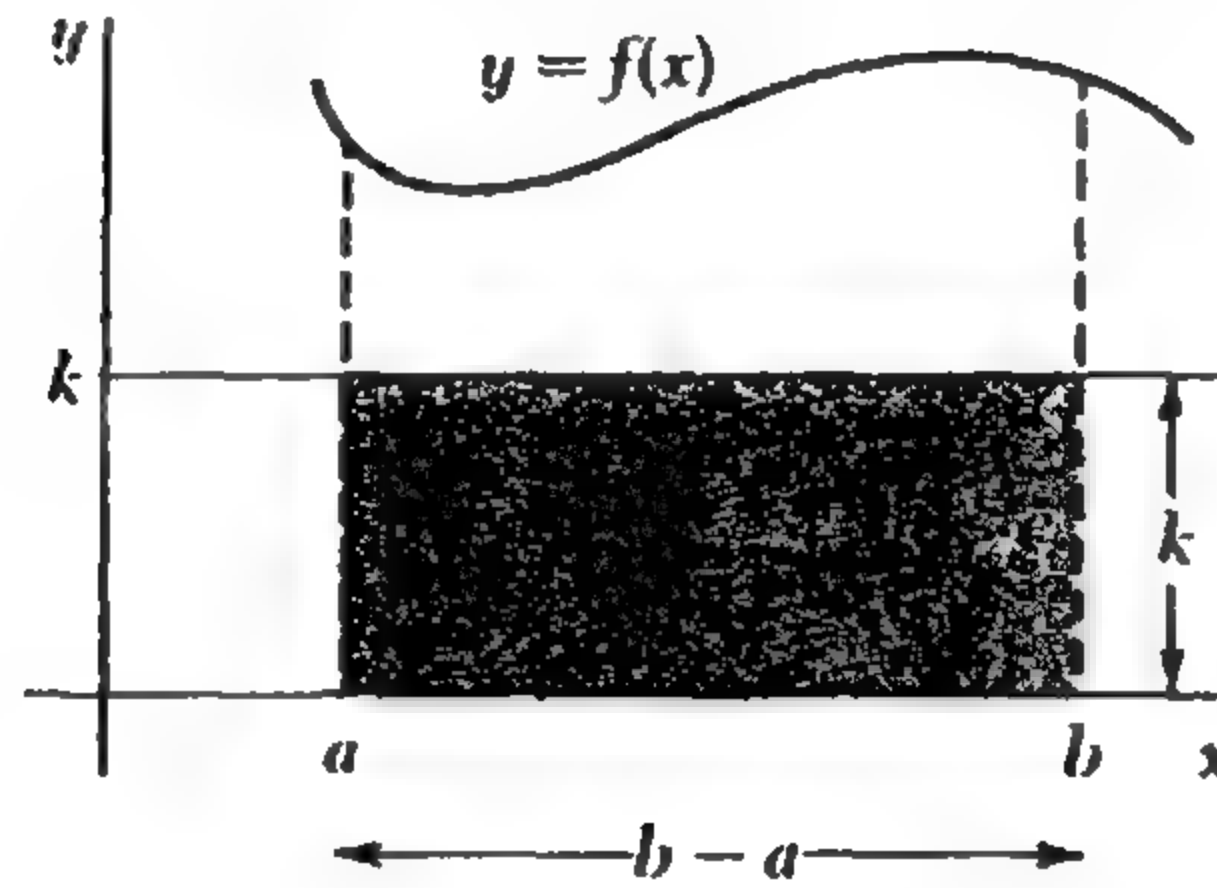
$$u_p - m_p \leq [f(b) - f(a)]w$$

حيث m_p و u_p هما حاصل الجمع الأعلى والأدنى للدالة f للتجزئى وحيث w هي معيار التجزئى .

نظريات التكامل

رغم أن قيمة التكامل المعين يمكن إيجادها أحياناً بحساب مباشر للتعبير $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$ فإن هذا ممل ومحدود لدوال بسيطة . توجد طريقة ممتازة وعامة لحد بعيد ، لكن لدراستها نحتاج إلى نظريتين . لأن هاتين النظريتين تعكسان أفكارنا البديهية عن المساحة ، فهما تعطيان توضيحاً إضافياً على أن التكامل المعين هو فعلاً يقيس مساحة منطقة . النظرية الأولى تنص على أنه إذا كان المنحنى يقع فوق خط أفقى ، فإن مساحة المنطقة تحت المنحنى تكون أكبر من مساحة المنطقة تحت الخط المستقيم (شكل ٧-٥) .

مساحة المنطقة تحت المنحنى $\int_a^b f(x) dx$



مساحة المستطيل $k(b - a) =$

شكل ٧-٥

مساحة المنطقة تحت المنحنى أكبر من مساحة المستطيل

٤ - ٥ . تمهيدية لتكن f دالة متصلة فى الفترة $[a, b]$ ، حيث $a < b$ ، ولتكن k مقداراً ثابتاً .

(أولاً) إذا كانت $f(x) \geq k$ لجميع x فى الفترة $[a, b]$ ، فعندئذ يكون

$$\int_a^b f(x) dx \geq k(b - a)$$

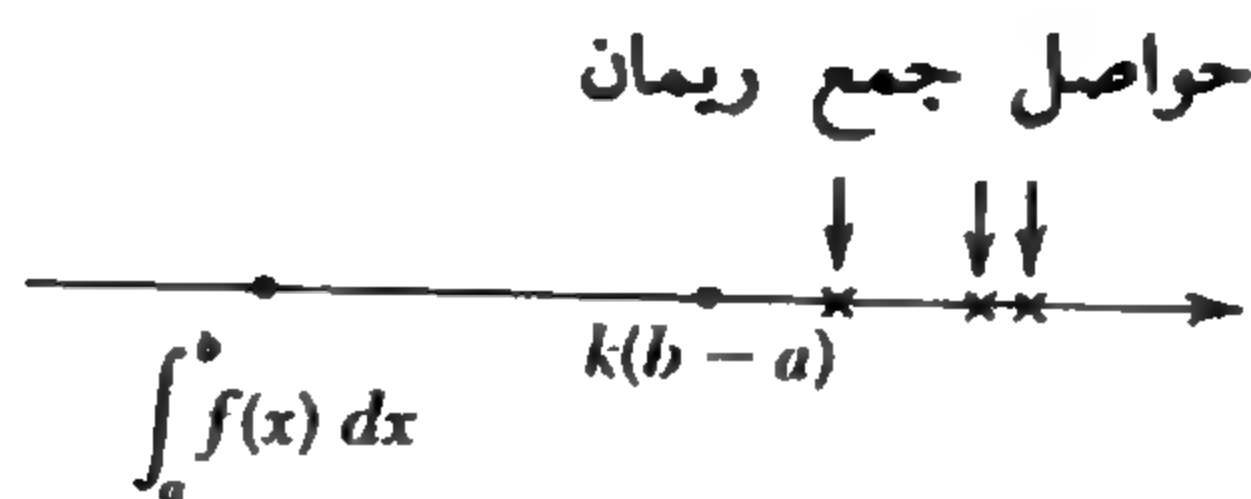
(ثانياً) إذا كانت $f(x) \leq k$ لجميع x فى الفترة $[a, b]$ فعندئذ يكون

$$\int_a^b f(x) dx \leq k(b - a)$$

البرهان . (أولاً) بما أن $f(x) \geq k$ لجميع x فى الفترة $[a, b]$ فإن $f(\bar{x}_i) \Delta x_i \geq k \Delta x_i$ لـ \bar{x}_i أى تجزئـة للفترة $[a, b]$ ولأى اختيار لـ \bar{x}_i ، إذن

$$\begin{aligned}
& f(\bar{x}_1) \Delta x_1 + f(\bar{x}_2) \Delta x_2 + \cdots + f(\bar{x}_n) \Delta x_n \\
& \geq k \Delta x_1 + k \Delta x_2 + \cdots + k \Delta x_n \\
& = k(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n) = k(b-a),
\end{aligned}$$

حيث التساوى الأخير يكون صحيحاً لأن حاصل جمع أطوال الفترات الجزئية يساوى طول الفترة $[a, b]$. المتباينة تنص على أن كل حاصل جمع ريمان يكون أكبر من أو يساوى $k(b-a)$. هذا يدل على أن $\int_a^b f(x) dx \geq k(b-a)$. لأنه إذا كان $\int_a^b f(x) dx$ أقل من $k(b-a)$ ، فإن حواصل جمع ريمان، وهى أكبر من أو تساوى $k(b-a)$ ، لا يمكنها أن تتجمع حول التكامل (شكل ٨-٥). برهان (ثانياً) مماثل.



شكل ٨-٥

إذا كان $\int_a^b f(x) dx$ أقل من $k(b-a)$ ، فإن حواصل جمع ريمان لا يمكن أن تتجمع حول التكامل

٥-٥ نتيجة. لتكن f دالة متصلة فى الفترة $[a, b]$ ، حيث $a < b$.

(أولاً) إذا كانت $f(x) \geq 0$ لجميع x فى الفترة $[a, b]$ ، فإن $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

(ثانياً) إذا كانت $f(x) \leq 0$ لجميع x فى الفترة $[a, b]$ ، فإن $\int_a^b f(x) dx \leq 0$

باعتبار تفسير التكامل كمساحة، فمن المعقول تعريف

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

أيضاً إذا كانت $a < b$ ، فمن المفيد تعريف

$$(١) \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

ومن ذلك، يكون

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

وبالتالى (١) تكون صحيحة لجميع a و b .

النظرية الآتية تنص على أنه إذا كانت $a < b < c$ ، فإن مساحة المنطقة تحت المنحنى بين a و c تساوى مجموع مساحتي المنطقة بين a و b والمنطقة بين b و c . إلا أن النظرية صحيحة ، لجميع ترتيبات a و b و c وليس ضرورياً أن تكون الدالة $f(x)$ موجبة .

٥ - ٦ . الخاصية الجمعية للتكامل. إذا كانت الدالة f متصلة في فترة تحتوى الأعداد a و b و c ، فعندئذ يكون

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

البرهان . بما أن f متصلة ، فلا يوجد سؤال عن وجود التكاملات الثلاثة . علينا فقط توضيح صحة السؤال .

نبرهن أولاً. الحالة $a < b < c$. الحالات الأخرى مستتبع منها بسهولة . لتكن ϵ أى عدد موجب . بما أن $\int_a^c f(x) dx$ موجود ، فخواصل جميع ريمان للدالة f على $[a, c]$ تتجمع حول التكامل . طبقاً للتعريف ٥ - ١ ، هذا يعنى وجود عدد δ_1 بحيث أن كل حاصل ريمان R_{ac} للدالة f على $[a, c]$ مبنى على تجزئة معياره أقل من δ_1 يقع فى الجوار

$$\left(\int_a^c f(x) dx - \frac{\epsilon}{3}, \int_a^c f(x) dx + \frac{\epsilon}{3} \right)$$

لـ $\int_a^c f(x) dx$. أى أن ،

$$\int_a^c f(x) dx - \frac{\epsilon}{3} < R_{ac} < \int_a^c f(x) dx + \frac{\epsilon}{3}$$

الذى يدل على أن

$$(٢) \quad \left| R_{ac} - \int_a^c f(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

بالمثل ، يوجد عدد δ_2 بحيث أن كل حاصل جمع ريمان R_{ab} للدالة f على الفترة $[a, b]$ مبنى على تجزئة معياره أقل من δ_2 يحقق المتباينة

$$(٣) \quad \left| R_{ab} - \int_a^b f(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

وأخيراً ، يوجد عدد δ_2 بحيث أن تحت شروط مشابهة يكون

$$(٤) \quad \left| R_{bc} - \int_b^c f(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

لتكن δ أصغر الأعداد δ_1 و δ_2 و δ_3 . اختر تجزيتين للفترة $[a, b]$ و $[b, c]$ معيار كل منهما أقل

من δ . معاً يكونان تجزئياً للفترة $[a, c]$ معياره أقل من δ . ليكن R_{ab} و R_{bc} حاصل جمع ريمان للدالة f على الفترتين $[a, b]$ و $[b, c]$ للتجزئين المشار إليهما . حاصل الجمع لهما هو حاصل جمع ريمان R_{ac} للدالة f على الفترة $[a, c]$ ، ويكون

$$(5) \quad R_{ac} = R_{ab} + R_{bc}$$

ولكل خواصل جمع ريمان هذه ، المتباينات في (٢) و (٣) و (٤) تظل صحيحة . من (٥) ، يكون $R_{ac} - R_{ab} - R_{bc} = 0$ ، وإذن

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx - \int_a^c f(x) dx \\ = \left[R_{ac} - \int_a^c f(x) dx \right] - \left[R_{ab} - \int_a^b f(x) dx \right] \\ - \left[R_{bc} - \int_b^c f(x) dx \right] \end{aligned}$$

القيمة المطلقة لحاصل جمع أو فرق أعداد أقل من أو يساوي حاصل جمع القيم المطلقة (المسألة ٣٦ ، بند ١-٥) . وبناء على ذلك ، من (٢) و (٣) و (٤) يكون

$$\begin{aligned} (6) \quad \left| \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx - \int_a^c f(x) dx \right| \\ \leq \left| R_{ac} - \int_a^c f(x) dx \right| + \left| R_{ab} - \int_a^b f(x) dx \right| \\ + \left| R_{bc} - \int_b^c f(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

العدد الممثل بالسطر الأول من (٦) ليس سالباً ، والمتباينة تقول أنه أقل من كل عدد موجب ϵ . فهو يجب أن يكون صفراً . ومن ثم يكون

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx - \int_a^c f(x) dx = 0$$

والنتيجة في النظرية تتبع للحالة $a < b < c$.

نفرض الآن أن $a < c < b$. بما أن c بين a و b ، لدينا بالحالة المبرهنة حالا أن

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

باستخدام (١) ، هذا يمكن كتابته

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$$

والنتيجة تتبع . الترتيبات الأخرى لـ a و b و c تعالج بالمثل .

مسائل

- ١ - اثبت أن $\int_a^b k dx = k(b-a)$ لأي ثابت k . اعط تفسيراً هندسياً لهذه المعادلة عندما k تكون موجبة .
- ٢ - أثبت التمهيدي ٥ - ٤ (ثانياً)
- ٣ - استخدم الحالة $a < b < c$ التي سبق إثباتها لاثبات الخاصية الجمعية للتكامل ٥ - ٦ إذا كانت $b < c < a$.

٣ - ٥

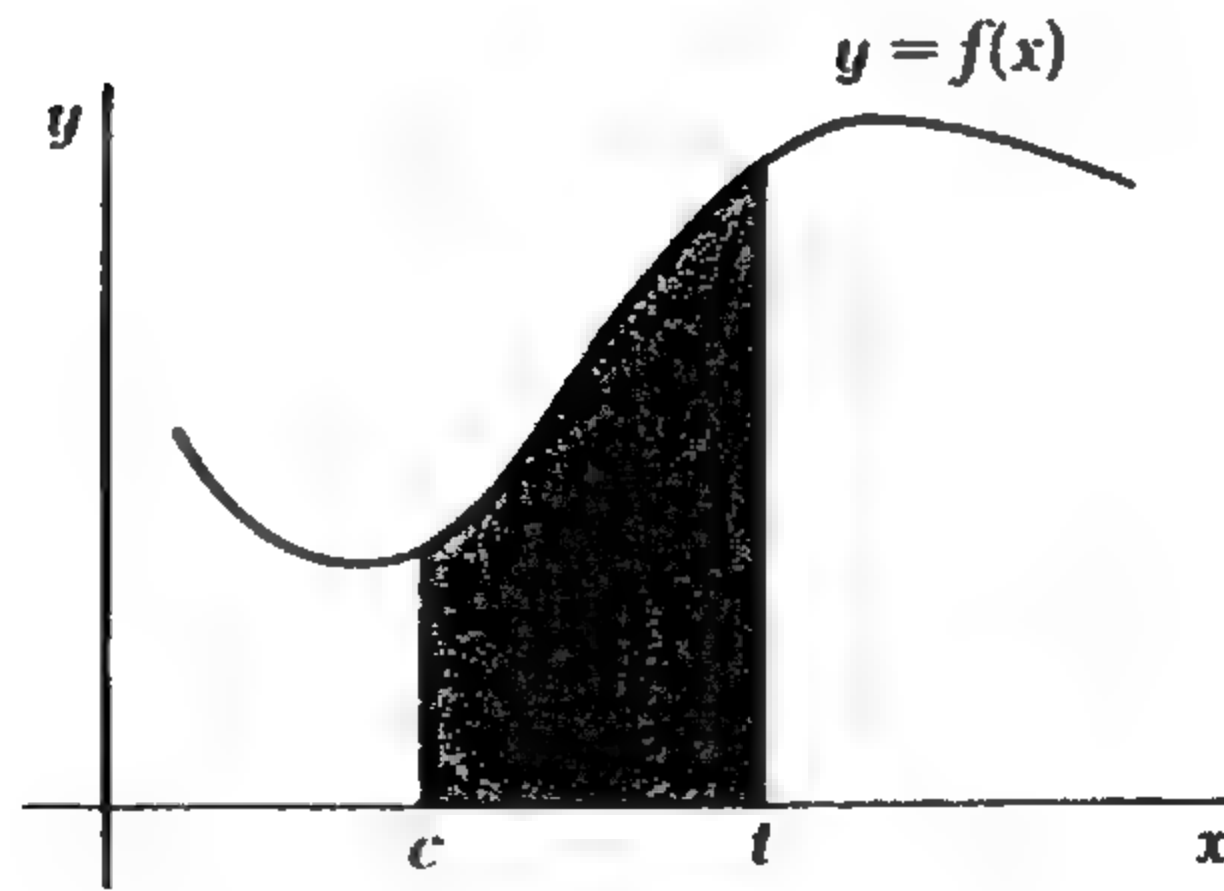
النظرية الأساسية للتكامل

لتكن f دالة متصلة في الفترة I ، التي قد تكون لا نهائية ، ولتكن c أي عدد في I . لجميع t في I ، الدالة f تكون متصلة في الفترة الجزئية $[c, t]$ (أو $[t, c]$ إذا كانت $t < c$) ، وبالنظرية ٥ - ٣ التكامل $\int_c^t f(x) dx$ يوجد . توجد قيمة للتكامل لكل t ، التي إذا كانت $f(x)$ موجبة لكانت $t > c$ ، تمثل مساحة المنطقة تحت الشكل البياني بين c و t (شكل ٥ - ٩) . بما أنه يعتمد على t ، فهو دالة t نرمز لها بالرمز F :

$$F(t) = \int_c^t f(x) dx$$

فمثلاً إذا كانت

$$F(t) = \int_{-1}^t x^2 dx$$



شكل ٥ - ٩

لكل $t > c$ ، $F(t) = \int_c^t f(x) dx$ هي مساحة المنطقة تحت المنحنى بين c و t ولا

فكما سنرى بعدما نتعلم كيف نوجد قيم التكاملات المعينة

$$F(t) = \int_{-1}^t x^2 dx = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{3}$$

ومن ذلك يكون

$$F(3) = \int_{-1}^3 x^2 dx = \frac{28}{3}, \quad F(-1) = \int_{-1}^{-1} x^2 dx = 0$$

و

$$F(-2) = \int_{-1}^{-2} x^2 dx = -\frac{7}{3}$$

خاصية هامة للدالة F هي أنها لها مشتقة في كل مكان في I وأن $F'(t) = f(t)$. هذه الخاصية سوف
تمكنا من إيجاد قيم التكاملات المعينة.

٧-٥. نظرية لتكن f دالة متصلة في الفترة I ولتكن c أى عدد في I . كون الدالة
 $F(t) = \int_c^t f(x) dx$ المعرفة لجميع t في I . فيكون F لها مشتقة وهذه المشتقة هي

$$F'(t) = \frac{d}{dt} \int_c^t f(x) dx = f(t)$$

البرهان. يجب اثبات أن

$$F'(t) = \lim_{z \rightarrow t} \frac{F(z) - F(t)}{z - t} = f(t)$$

لكل t و z في I ، لدينا بالخاصية الجمعية للتكامل ٦-٥

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_c^z f(x) dx = \int_c^t f(x) dx + \int_t^z f(x) dx \\ &= F(t) + \int_t^z f(x) dx \end{aligned}$$

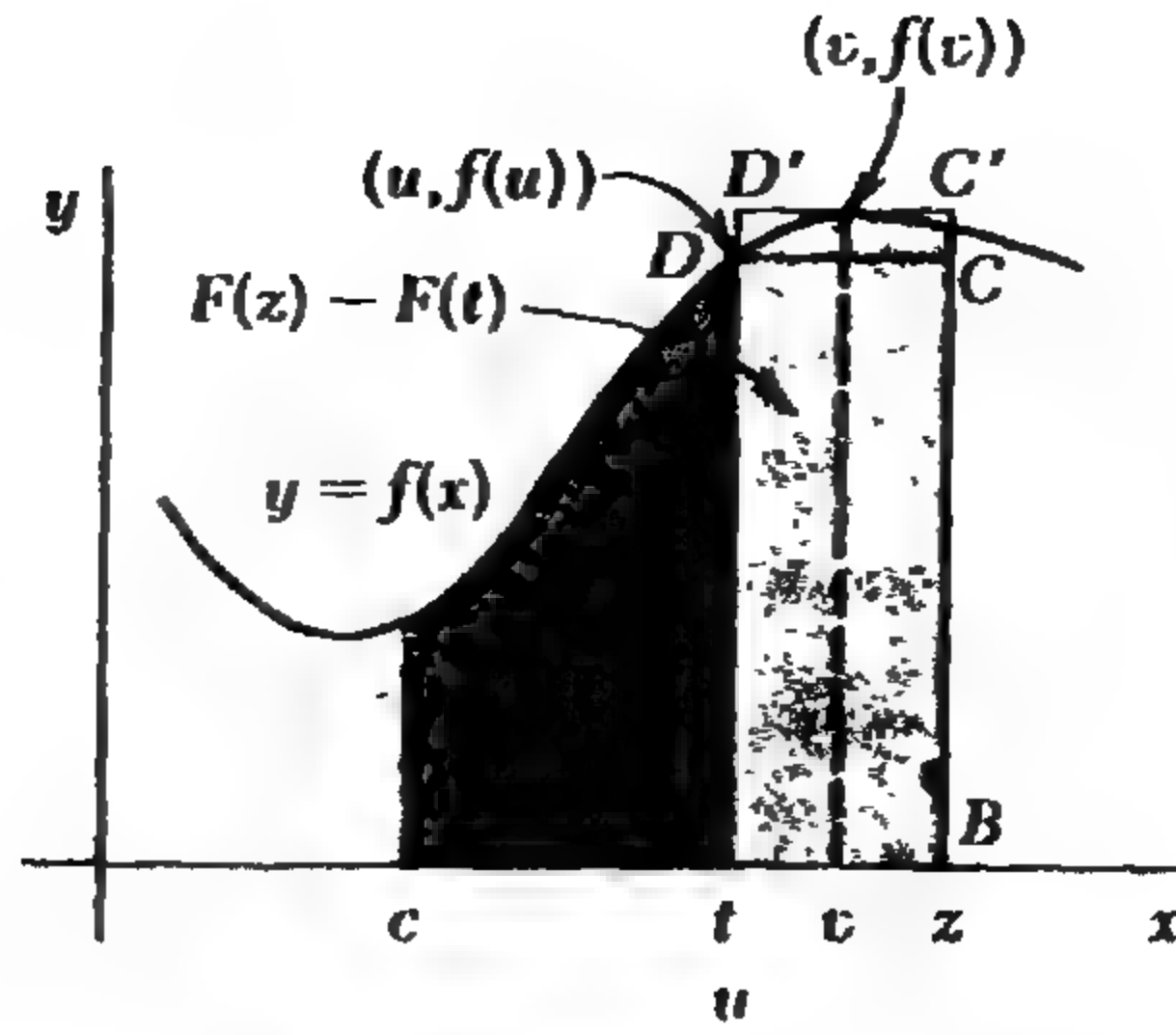
ومن ثم

$$(١) \quad F(z) - F(t) = \int_t^z f(x) dx$$

يمكننا أن نرى من الشكل ١٠-٥ أن $F(z) - F(t)$ تمثل مساحة المنطقة تحت المنحنى بين t و z إذا
كانت $f(x)$ موجبة وكان $c < t < z$ إلا أن المعادلة (١) صحيحة، لأى دالة متصلة f وأى z و t في I .
لتكن القيمتان الصغرى والعظمى للدالة f في الفترة $[t, z]$ تحدثان عند v و u ، فيكون

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v)$$

لجميع x في $[t, z]$ ، حيث $t \leq u \leq z$ ، $t \leq v \leq z$ ، واذن من التمهيدية ٥-٤ (أولاً) و (ثانياً)،
يكون



شكل ١٠-٥

$F(z)$ و $F(t)$ هي مساحتا المنطقتين تحت المنحنى بين t و c و z و c .

$$f(u)(z-t) \leq \int_t^z f(x) dx \leq f(v)(z-t)$$

بإستبدال التكامل بـ $F(z) - F(t)$ ، كما هو معطى فى (١) ، يكون

$$(٢) \quad f(u)(z-t) \leq F(z) - F(t) \leq f(v)(z-t)$$

هذا يخبر بأن المساحة تحت المنحنى فى الشكل ١٠-٥ بين t و z تقع بين مساحتي المستطيلين $ABCD$ و $ABC'D'$.

من (٢) لدينا

$$(٣) \quad f(u) \leq \frac{F(z) - F(t)}{z-t} \leq f(v)$$

لقد افترضنا ضمناً أن $z > t$ ، لكن استدلال مماثل يوضح أن (٣) هي صحيحة أيضاً إذا كانت $z < t$. العدداً u و v يعتمدان على z وواضح أنها يقتربان من t كلما تفعل z ذلك . حيث أن f متصلة عند t فيكون

$$\lim_{z \rightarrow t} f(u) = f(\lim_{z \rightarrow t} u) = f(t)$$

$$\lim_{z \rightarrow t} f(v) = f(\lim_{z \rightarrow t} v) = f(t)$$

حيث أن بنظرية الحصر ٢-٢٤ ، نهاية الكمية الوسطى فى (٣) توجد وتساوى $f(t)$. وبناء على ذلك ، يكون

$$F'(t) = \lim_{z \rightarrow t} \frac{F(z) - F(t)}{z-t} = f(t)$$

جزء من هذه النظرية من وجهات نظر مختلفة يستوجب النص عليه .

٥-٨ نتيجة . الدالة المتصلة في فترة لها معكوس تفاضلي عند كل نقطة بالفترة .

البرهان . لقد أثبتنا حالا أن الدالة $F(t) = \int_c^t f(x) dx$ هي معكوس تفاضلي للدالة المتصلة f .

رغم أن النتيجة تقول أن الدالة المتصلة لها معكوس تفاضلي ، إلا أنها لا تقل أن هذا المعكوس له صورة جميلة . عندما نتذكر أن الدالة هي تناظر ، القاعدة الخاصة به قد لا تكون معطاة بمعادلة ، فهذا لا يثير الدهشة . في الواقع ، توجد دوال كثيرة معروف أن معكوسها التفاضلي لا يمكن التعبير عنه بدلالة الدوال المألوفة . أحدها هو المعكوس التفاضلي لـ $1/\sqrt{(1-x^2)(4-x^2)}$. النظرية القادمة تمدنا بطريقة عملية لقيم التكاملات المعينة .

٥-٩ النظرية الأساسية للتكامل . لتكن f دالة متصلة في الفترة I ولتكن a و b عددين في I . لتكن G أي معكوس تفاضلي لـ f ، فيكون

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

البرهان لقد رأينا أن الدالة

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx \quad (٤)$$

هي معكوس تفاضلي لـ f . لذلك يوجد ثابت C بحيث أن $F(t) = G(t) + C$ لجميع t في الفترة $[a, b]$. من (٤) ، يكون

$$F(a) = \int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{و} \quad F(b) = \int_a^b f(x) dx$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(b) = F(b) - F(a) \\ &= [G(b) + C] - [G(a) + C] = G(b) - G(a) \end{aligned}$$

النظرية الأساسية للتكامل تربط التكامل المعين بالتكامل غير المعين . العلاقة الشديدة بينهما تبرر التشابه بين اسميهما ورمزيهما . النظرية تقول أنه لايجاد قيمة $\int_a^b f(x) dx$ نأخذ أي معكوس تفاضلي G للدالة f ونوجد العددين $G(a)$ و $G(b)$. قيمة التكامل هي $G(b) - G(a)$.

مثال ١ . أوجد التكامل المعين $\int_{-1}^3 x^2 dx$ نأخذ أي معكوس تفاضلي لـ x^2 وليكن $G(x) = x^3/3$ ونوجد $G(3)$ و $G(-1)$. قيمة التكامل هي

$$\int_{-1}^3 x^2 dx = G(3) - G(-1) = 9 - (-\frac{1}{3}) = \frac{28}{3}$$

الرمز $G(x) \Big|_a^b$ أو $\left[G(x) \right]_a^b$ يمكن استخدامه للإشارة إلى أننا سنعوض b و a في $G(x)$ ثم نطرح .
 أى أن ،

$$G(x) \Big|_a^b = \left[G(x) \right]_a^b = G(b) - G(a)$$

بهذه الرموز يكون

$$\int_{-1}^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^3 = 9 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{28}{3}$$

لتوضيح أن هذا الجواب لا يعتمد على اختيار المعكوس التفاضلي ، نوجد قيمة التكامل مرة أخرى ،
 هذه المرة باستخدام المعكوس التفاضلي $x^3/3 + C$ ، حيث C أى ثابت .

$$\int_{-1}^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} + C \right]_{-1}^3 = (9 + C) - \left(-\frac{1}{3} + C\right) = \frac{28}{3}$$

مثال ٢ . أوجد قيمة $\int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{1+2x^2}} dx$

نوجد أولاً معكوساً تفاضلياً لـ $3x/\sqrt{1+2x^2}$ أبسط معكوس هو $(1+2x^2)^{1/2}$ ويكون

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{1+2x^2}} dx &= \frac{3}{2} (1+2x^2)^{1/2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{2} (3^{1/2}) - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} (\sqrt{3} - 1) \end{aligned}$$

مثال ٣ . أوجد قيمة $\int_{-1}^2 f(x) dx$ ، حيث

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \leq 0 \\ 4 - 2x, & x \geq 0 \end{cases}$$

الدالة المراد تكاملها متصلة ، فالتكامل موجود . بما أن وصف الدالة f يتغير عند 0 ، فإننا نفصل التكامل إلى تكاملين ، باستخدام الخاصية الجمعية .

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx$$

لقيم x بين 0 و -1 تكون $f(x) = 4 - x^2$ ، لكن لقيم x بين 2 و 0 تكون $f(x) = 4 - 2x$ ، واذن

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(x) dx &= \int_{-1}^0 (4 - x^2) dx + \int_0^2 (4 - 2x) dx \\ &= \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[4x - x^2 \right]_0^2 \\ &= -\left(-4 + \frac{1}{3}\right) + (8 - 4) = \frac{23}{3} \end{aligned}$$

النظرية الأساسية تكون صحيحة حتى لو كان الحد الأعلى للتكامل أقل من الحد الأدنى . فمثلاً

$$\int_2^1 3x^2 dx = x^3 \Big|_2^1 = 1 - 8 = -7$$

هذا يتفق مع النتيجة التي نحصل عليها بعكس الحدين :

$$\int_2^1 3x^2 dx = - \int_1^2 3x^2 dx = - \left[x^3 \right]_1^2 = -(8 - 1) = -7$$

واذن لدينا الآن وسيلة لتقييم التكاملات فانه يمكننا اعطاء توضيح للمعادلة

$$\frac{d}{dt} \int_c^t f(x) dx = f(t)$$

في النظرية ٥-٧ ، الذي قد يعطيها معنى أدنى . لتكن $f(x) = x^2$ ولتكن $c = -1$ ، فيكون

$$\int_c^t f(x) dx = \int_{-1}^t x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^t = \frac{t^3}{3} + \frac{1}{3}$$

لاحظ أن التكامل هو دالة لـ t ، كما سبق أن شرحنا في الفقرة الافتتاحية لهذا البند . التفاضل يعطينا

$$\frac{d}{dt} \int_c^t f(x) dx = \frac{d}{dt} \left(\frac{t^3}{3} + \frac{1}{3} \right) = t^2 = f(t)$$

برهانا النظريتين الآتيتين سيتركان للقارئ (المسائل ٤٨ الى ٥٠) .

٥-١٠ نظرية . اذا كانت الدالتان g و f متصلتين في $[a, b]$ ، فان

$$(i) \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

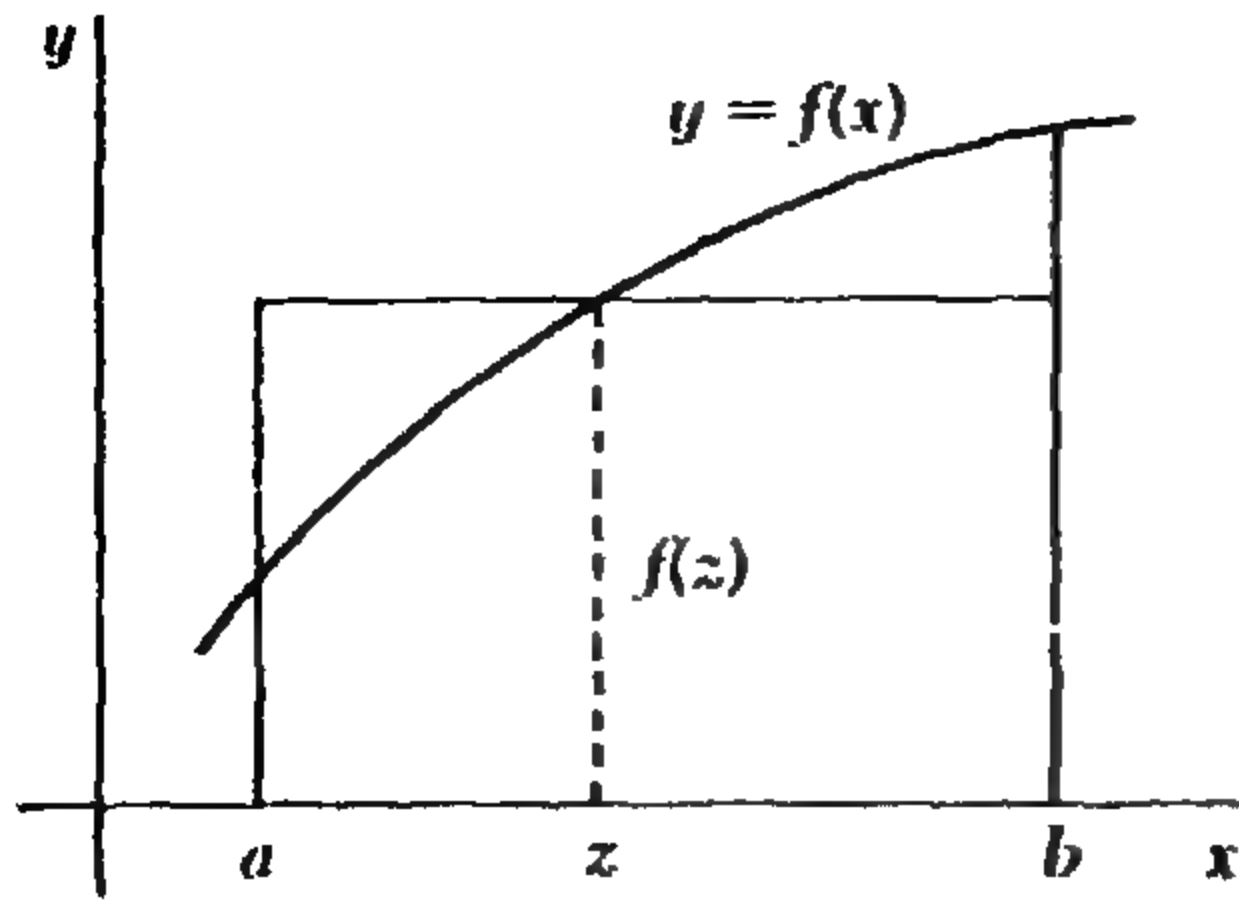
$$(ii) \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad \text{لاى ثابت } k$$

٥-١١ نظرية . اذا كانت الدالتان g و f متصلتين في $[a, b]$ وكان $f(x) \leq g(x)$ لجميع x في $[a, b]$ ، فان

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

عندما تكون $f(x) > 0$ ، التكامل المعين $\int_a^b f(x) dx$ يمثل مساحة المنطقة تحت المنحنى بين a و b

في الشكل ٥-١١ . يبدو على صواب ، أنه توجد نقطة z في الفترة (a, b) بحيث أن مساحة المستطيل الذي قاعدته $[a, b]$ وارتفاعه $f(z)$ يساوى مساحة المنطقة تحت المنحنى . هذا هو التفسير الهندسى للنظرية القادمة ، لكن النظرية صحيحة لاي دالة متصلة سواء أكانت موجبة أو سالبة .



شكل ١١-٥
توجد نقطة z في الفترة (a, b) بحيث أن مساحة
المستطيل تساوي مساحة المنطقة تحت
المنحنى بين a و b .

١٢-٥ نظرية القيمة المتوسطة للتكاملات . إذا كانت الدالة f متصلة في الفترة $[a, b]$ ، فإنه توجد
نقطة z في (a, b) بحيث أن

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(z)$$

البرهان . كون الدالة

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

لقد رأينا أن هذه الدالة قابلة للتفاضل في الفترة $[a, b]$ وأن $F'(t) = f(t)$. نطبق نظرية القيمة
المتوسطة عليها ، فنحصل على

$$F(b) - F(a) = (b - a)F'(z)$$

لنقطة z في (a, b) النتيجة المطلوبة في النظرية تتبع الآن على الفور إذ أن $F'(z) = f(z)$

$$F(b) = \int_a^b f(x) dx \text{ و } F(a) = 0$$

مسائل

أوجد التكاملات الآتية :

$$\begin{array}{lll} \int_0^1 4 dx & - & ٣ \\ \int_{-3}^{-1} (2x + 6) dx & - & ٢ \\ \int_1^6 x dx & - & ١ \\ \int_0^3 \sqrt{z} dz & - & ٦ \\ \int_{-2}^{-1} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx & - & ٥ \\ \int_{-4}^4 5y^3 dy & - & ٤ \\ \int_a^b (b^2x - b^3) dx & - & ٩ \\ \int_4^2 x \left(\sqrt{x} + \frac{3}{x}\right) dx & - & ٨ \\ \int_0^{-1} \sqrt[3]{w+1} dw & - & ٧ \\ \int_{-r}^r x \sqrt{r^2 - x^2} dx & - & ١٠ \end{array}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 1, & x \leq 0, \\ x^2 + 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad \text{حيث} \quad \int_{-1}^3 g(x) dx \quad - ١١$$

$$f(u) = \begin{cases} u^3, & u \leq 0, \\ u, & 0 \leq u \leq 1, \\ 2 - u^2, & u \geq 1. \end{cases} \quad \text{حيث} \quad \int_{-2}^2 f(u) du \quad - ١٢$$

$$\int_{-3}^3 |t^2 - 1| dt = ١٥ \quad \int_{-2}^0 x|x+1| dx = ١٤ \quad \int_1^5 |x| dx = ١٣$$

$$\int_{-1}^2 |x^3 - x| dx = ١٧ \quad \text{حيث } [x] \text{ دالة أكبر عدد صحيح} \quad \int_2^{2.8} [x] dx = ١٦$$

$$- ١٨ \quad \text{أثبت أن} \quad \int_0^2 (x^2 - 3x + 1) dx = \int_0^2 (t^2 - 3t + 1) dt$$

$$- ١٩ \quad \text{أوجد قيمة} \quad \int_{-1}^1 (4x^2 + 6x - 10) dx \quad \text{مرتين ، مستخدماً معكوسات تفاضلية مختلفة للدالة الكاملة .}$$

$$- ٢٠ \quad \text{أوجد عدد موجب } a \text{ بحيث أن} \quad \int_0^a (x^2 - 4x + 5) dx = 6 \quad \text{فسر ذلك كمساحة وارسم شكلاً .}$$

$$- ٢١ \quad \text{إذا كانت} \quad F(t) = \int_0^t \frac{x}{2} dx \quad \text{فأوجد قيم } F(0) \text{ و } F(7) \text{ و } F(2) . \text{ اختبر اجابتك بتفسير } F(t) \text{ كمساحة .}$$

$$- ٢٢ \quad \text{أوجد القيمة الصغرى للدالة } G \text{ المعرفة بـ} \quad G(u) = \int_0^1 (xu^2 - x^2 + u) dx$$

$$- ٢٣ \quad \text{خطط الشكل البياني للدالة } H \text{ المعرفة بـ} \quad H(x) = \int_0^x |t| dt$$

أوجد مشتقة ما يأتي بطريقتين : (١) بإيجاد قيمة التكامل ثم اجراء التفاضل بعد ذلك ، (٢) باستخدام النظرية ٧ - ٥ :

$$F(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-3t} dt = ٢٦ \quad G(x) = \int_1^x \frac{y^2+2}{y^2} dy = ٢٥ \quad F(t) = \int_0^t x\sqrt{1+x^2} dx = ٢٤$$

أوجد مشتقة ما يأتي :

$$g(x) = \int_0^x \sqrt{a^2 - u^2} du = ٢٩ \quad H(x) = \int_1^x \frac{dz}{z} = ٢٨ \quad F(t) = \int_{-1}^t \frac{dx}{1+x^4} = ٢٧$$

$$F(t) = \int_1^2 \sqrt{1+y^2} dy = ٣١ \quad f(u) = \int_1^u \sin(9x^2) dx = ٣٠$$

- ٣٢ - أين تحدث النهايات القصوى الموضعية للدالة F المعرفة بـ

$$F(x) = \int_{-1}^x \frac{u^2-1}{u^2+1} du \quad \text{وهل هي نهايات عظمى أو نهايات صغرى موضعية؟}$$

٣٣- اذا كانت f دالة قابلة للتفاضل ، فأوجد $\int_a^b Df(x) dx$

٣٤- اذا كانت f لها معكوس تفاضلي F ، استخدم النظرية الأساسية لتحقيق أن

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

٣٥- أثبت أن $\left[cG(x) \right]_a^b = c \left[G(x) \right]_a^b$ و $\left[G(x) + H(x) \right]_a^b = G(x) \Big|_a^b + H(x) \Big|_a^b$

لأي ثابت c . وضع بـ

$$b=2 \text{ و } G(x) = x^2 - 3x + 5, H(x) = x^4 + 1, c=3, a=1$$

٣٦- اذا كانت $F(t) = \int_1^t f(x) dx$ أثبت أن $F'(t) = f(t)$.

٣٧- اذا كانت $f(x)$ متصلة وموجبة لجميع x في الفترة $[a, b]$ أثبت أن الدالة

$$G(t) = \int_a^t f(x) dx$$

تكون متزايدة في $[a, b]$.

٣٨- الدالة $f(x) = x$ متصلة في كل مكان . أوجد أحد معكوساتها التفاضلية .

٣٩- أثبت التعميم الآتي للنظرية ٥-٧ . لتكن u دالة قابلة للتفاضل اذا كانت

$$F(t) = \int_a^{u(t)} f(x) dx \text{ فان}$$

(٥)

$$F'(t) = f(u(t))u'(t)$$

[ارشاد : ضع $z = u(t)$ ودع $g(z) = \int_1^z f(x) dx$. ليكون $F(t) = g(u(t))$] حقق الصيغة (٥) بإيجاد مشتقة $F(t) = \int_1^{u(t)} (x+5) dx$ واستخدامها وايضاً بحساب قيمة التكامل ثم اجراء التفاضل .

أوجد مشتقة ما يأتي . (ارشاد : انظر المسألة ٣٩)

$$F(x) = \int_0^{1-x} \sqrt{5-z^2} dz \quad - ٤١$$

$$F(t) = \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} \quad - ٤٠$$

$$f(x) = \int_{x-2}^2 y \sqrt{y+1} dy \quad - ٤٣$$

$$G(y) = \int_1^{\sqrt{2y}} \frac{dx}{x} \quad - ٤٢$$

٤٤- الدالة $F(t) = \int_1^t f(x) dx$ هي معكوس تفاضلي للدالة f ، الدالة $F_1(t) = \int_1^t f(x) dx$ هي

معكوس تفاضلي آخر للدالة f . أوجد الثابت C حيث $F_1(t) = F(t) + C$ وضع هذه المعادلة

هندسياً بتفسير $F(t)$ و $F_I(t)$ كمساحتي منطقتين تحت منحن . (ارشاد : استخدام الخاصية الجمعية للتكامل) .

٤٥ - أثبت أن السرعة المتوسطة لنقطة تتحرك على خط الاحداثيات للفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي $\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$ ، حيث $v(t)$ هي السرعة عند الزمن t .

٤٦ - نقطة تتحرك على خط الاحداثيات . اذا كان بعدها s عن نقطة الأصل هو s_0 عند $t = 0$ ، أثبت أن موضع النقطة عند الزمن t' يعطى بالعلاقة $s(t') = s_0 + \int_0^{t'} v(t) dt$ حيث $v(t)$ هي السرعة .

٤٧ - لقد أثبتنا أن المعادلة (٣) في برهان النظرية ٥ - ٧ صحيحة اذا كانت $t > z$ أثبت أنها صحيحة اذا كانت $t \leq z$.

٤٨ - (أ) أثبت النظرية ٥ - ١٠ (أولاً) . [ارشاد : خذ $G(x)$ و $F(x)$ معكوسين تفاضليين لـ $f(x)$ و $g(x)$] . (ب) عمم النتيجة في (أ) لحاصل جمع ثلاث دوال .

٤٩ - أثبت النظرية ٥ - ١٠ (ثانياً)

٥٠ - أثبت النظرية ٥ - ١١ [ارشاد : أثبت أن $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx \leq 0$] اعط تفسيراً هندسياً لهذه النظرية .

٥١ - أثبت أن $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{x} \leq \int_{1/2}^1 \frac{dx}{x^2}$

٥٢ - هل النتيجة المناظرة عن المشتقة ، للنظرية ٥ - ١١ ، صحيحة ؟ أى هل اذا كانت : $f(x) \leq g(x)$ لجميع x فى الفترة $[a, b]$ ، يكون $f'(x) \leq g'(x)$ ؟

٥٣ - أثبت أن $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$. هذه هي المتباينة الخاصة بالتكاملات المناظرة للنظرية

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

[ارشاد : $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$] .

أوجد z التى تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل لما يأتى من تكاملات وارسم شكلاً مماثلاً للشكل ٥ - ١١

$$\int_0^3 (2x + 3) dx \quad ٥٤ \quad \int_0^3 u^2 du \quad ٥٥ \quad \int_{-1}^0 (u^2 - x^2) dx \quad ٥٦$$

٥٧ - حيث أن $1/x^2 > 0$ ، فإن النتيجة ٥ - ٥ تتضمن أن $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} \geq 0$ لكن $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -1 - 1 = -2 < 0$

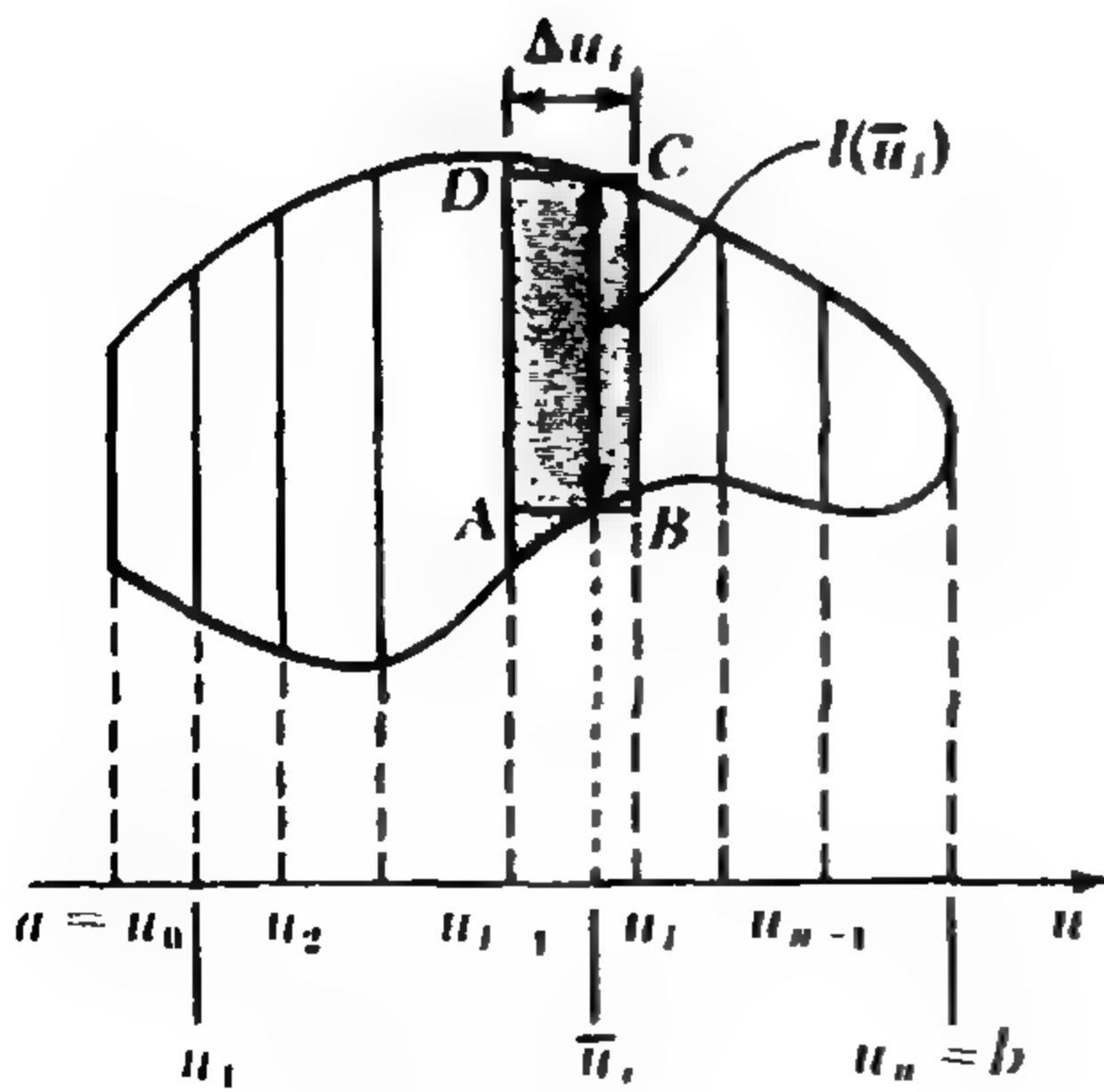
اشرح التعارض .

الآن لدينا طريقة لحساب قيمة التكامل المعين ، يمكننا دراسة بعض استخداماته . قد رأينا من قبل أحد الاستخدامات وهو إيجاد مساحة المنطقة تحت منحنى . سندرس الآن مناطق أعم ، وبمساعدة النظرية الأساسية للتكامل سوف نكون قادرين على إيجاد اجابات عديدة للمساحة . من الصعب في كتاب على هذا المستوى اعطاء تعريف مقنع لمساحة منطقة منطقياً ، يجب أولاً أن نحدد ما هو المقصود بمساحة منطقة قبل أن نحاول إيجادها ، لكن ، اذ أن اهتمامنا هو بالتطبيق أكثر مما هو بالنظري ، فسوف لا نحاول اعطاء تعريف ، بل سنستمر على أساس منطقي كما كنا نفعل .

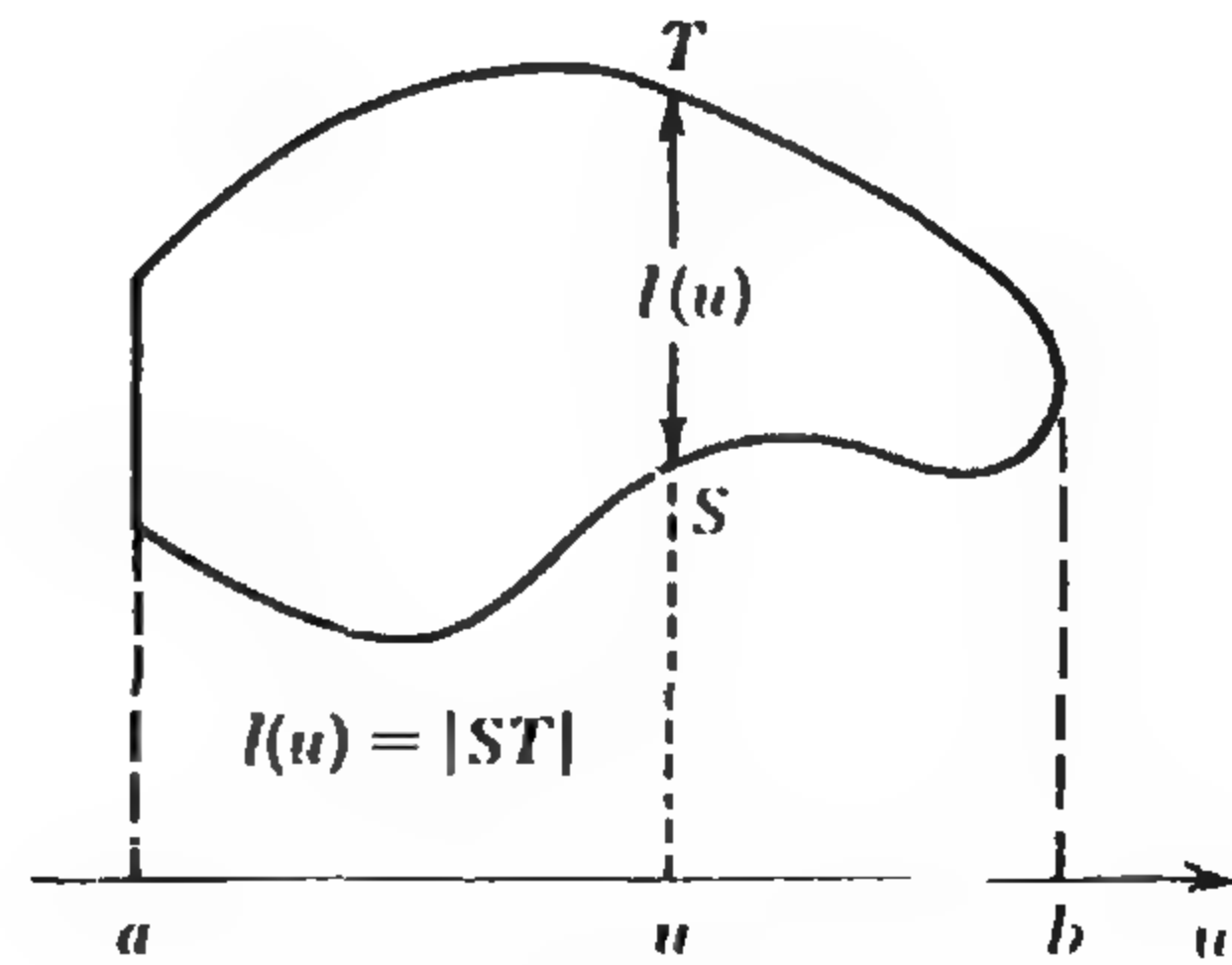
نفرض أننا نريد إيجاد مساحة منطقة مستوية مثل التي في الشكل ١٢-٥ . ليكن u خط الاحداثيات في المستوى ، نشير الى هذا الخط بأنه المحور u . لتكن a و b ، حيث $a < b$ ، إحداثي طرفي مسقط المنطقة على المحور u . الخط العمودي على المحور u عند نقطة u بين a و b يقطع حدود المنطقة في نقطتين S و T . ولأن العرض $|ST|$ للمنطقة يعتمد على u ، نرمز له بالرمز الدالي $l(u)$ أي أن $l(u) = |ST|$. نقسم المنطقة الى شرائط ضيقة بخطوط عمودية على المحور u (شكل ١٣-٥) . سوف نقرب مساحة كل شريط . حاصل جمع هذه التقريبات سيكون تقريباً لمساحة المنطقة ، سوف يمكننا منه إيجاد المساحة المضبوطة للمنطقة . التقاطعات مع المحور u للخطوط المكونة للشرائط تعين تجزئياً

$$[a = u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n = b]$$

للفترة $[a, b]$.



شكل ١٣-٥



شكل ١٢-٥

العرض $|ST|$ للمنطقة هو دالة لـ u .

اختر نقطة \bar{u}_i في الفترة الجزئية رقم i ، $[u_{i-1} - u_i]$ وكون المستطيل $ABCD$ الموضح في الشكل ١٣-٥ . اذا كان الشريط ضيقاً ، فان المستطيل ينطبق على الشريط ما عدا قرب القمة والقاع ، وكلما ضاق الشريط ، كلما كانا أكثر انطباقاً . طول المستطيل هو $l(\bar{u}_i)$ ، وعرضه هو $\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$. مساحة المستطيل هي $l(\bar{u}_i) \Delta u_i$. هذه المساحة هي تقريب لمساحة الشريط رقم i . اذا كونا مستطيلات مماثلة لكل شريط ، فان حاصل جمع مساحاتها ،

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n l(\bar{u}_i) \Delta u_i$$

هو تقريب لمساحة المنطقة . حاصل الجمع هذا هو حاصل جمع ريمان لدالة العرض l . ندرس فقط المناطق واختيارات المحور u حيث الدالة l متصلة وحيث جميع المستقيمت العمودية على محور الاحداثيات بين a و b لا تقطع حدود المنطقة في أكثر من نقطتين .

باستخدام تجزئ رقيق للغاية ، يمكننا التقريب لمساحة المنطقة الى أي حد نريد بحواصل جمع على الصورة (١) . واذن المساحة A تعطى بالضبط بعددها التجمعي ، نهاية حواصل الجمع هذه :

$$A = \lim_{w \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n l(\bar{u}_i) \Delta u_i$$

حيث w هي معيار التجزئ . النهاية موجودة لأننا افترضنا أن l متصلة . التكامل المعين $\int_a^b l(u) du$ هو مجرد رمز آخر لنهاية حاصل الجمع هذا . أي أن ، $A = \int_a^b l(u) du$ لأي دالة خاصة l ، التكامل المعين يمكن الآن ايجاد قيمته بالنظرية الأساسية للتكامل ، وبالتالي نحصل على القيمة العددية للمساحة . نظرياً المحور u يمكن اختياره في أي اتجاه لكن عملياً ينبغي أن يكون توجهاً بحيث أن العرض $l(u)$ يمكن التعبير عنه بسهولة بدلالة u .

لاحظ التشابه بين الرمزین

$$\int_a^b l(u) du \quad \text{و} \quad \lim_{w \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n l(\bar{u}_i) \Delta u_i$$

$\lim_{w \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n l(\bar{u}_i) \Delta u_i$ تناظر $l(u)$ و Δu_i تناظر du . كل حاصل جمع $\sum_{i=1}^n l(\bar{u}_i) \Delta u_i$ هو فقط تقريب للمساحة ، لكن التكامل $\int_a^b l(u) du$ يعطي المساحة بالضبط .

١٣-٥ مساحة منطقة . نختار خطاً مستقيماً المحور u وليكن $l(u) du$ يرمز الى ارتفاع المنطقة المحدد بالخط المستقيم العمودي على المحور u . عند النقطة u . مساحة المنطقة تعطى بالعبرة

(٢)

$$A = \int_a^b l(u) du$$

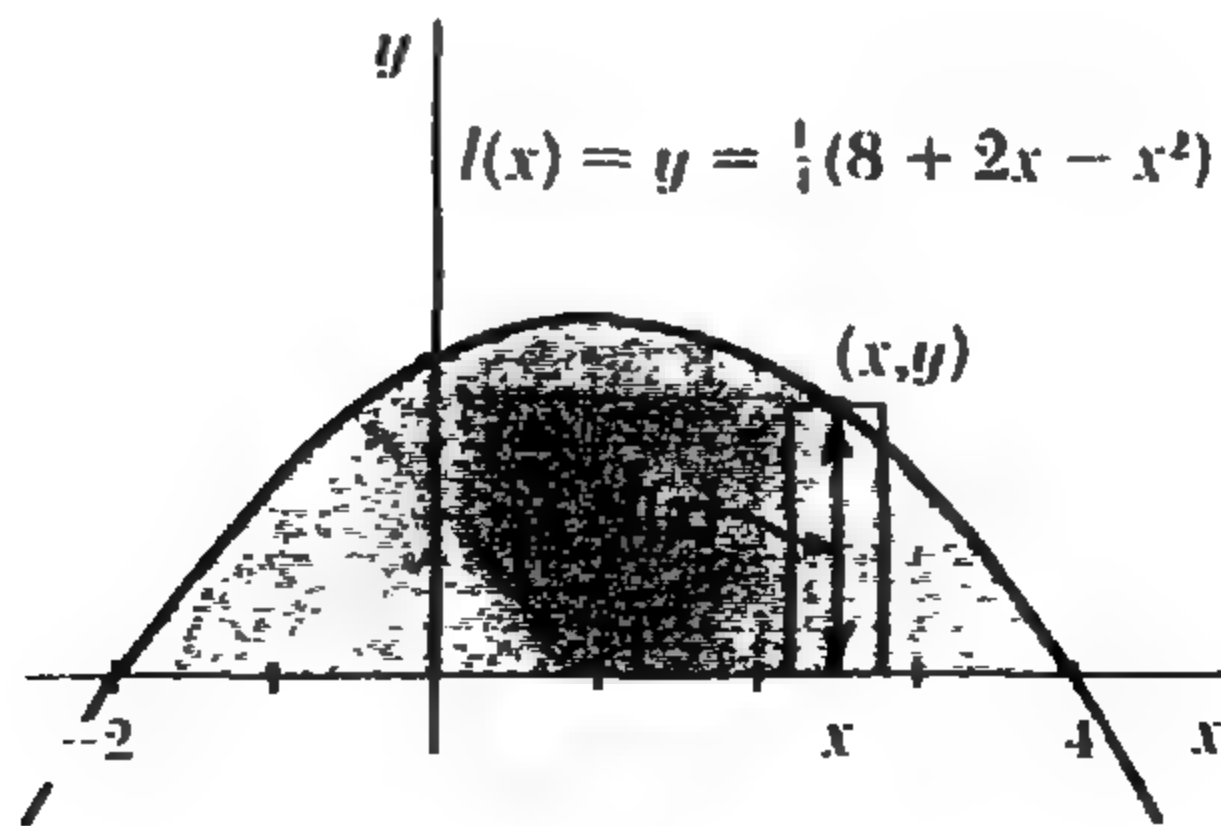
حدا التكامل a و b هما الاحداثيان u لموضعي العمودين الطرفين . الارتفاع $l(u)$ يجب الا يكون سالباً لجميع u في الفترة $[a, b]$.

بما أن التكامل المعين يعطينا قيمة معقولة لما نفكر أنه ينبغي أن يكون مساحة المنطقة ، يمكننا الآن التحويل ونعرف المساحة بأنها التكامل المعين (٢) . هذا التعريف يكفي لغرضنا الحالي لكن له عيب خطير . اذا اخترنا محور آخر u ينتج شرائط مختلفة ، دالة l مختلفة ، وحدين مختلفين b و a ، فلا يوجد ضمان بأننا سنحصل على نفس النتيجة للمساحة . بالإضافة الى ذلك توجد طرق أخرى لتقريب المساحة غير تقسيم المنطقة الى شرائط مستطيلة . فقد نستخدم مثلثات صغيرة أوقطاعات من دوائر . مثل هذه التقريبات أيضاً تعطينا تكاملات يمكن اعتبارها اجابات مختلفة للمساحة . هذه الأسئلة تدرس في مقررات متقدمة . بمساعدة تعريف أعم للمساحة يمكن اثبات أننا نحصل على نفس النتيجة بصرف النظر عن طريقة التقسيم .

مثال ١ . أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالقطع المكافئ $y = \frac{1}{4}(8 + 2x - x^2)$ والمحور السيني .

من المفيد عادة أن نعمل تخطيطاً تقريبياً للمنحنى لكي نرى أين تقع المنطقة . يجب أن نتأكد أن المنطقة تكون محدودة تماماً بالمنحنيات المعطاة . القطع المكافئ في الشكل ١٤-٥ . المنطقة موضع السؤال تقع تحت المنحنى وفوق المحور السيني . ليكن المحور السيني هو المحور u . مستطيل مقرب نمطي موضح في الشكل . المعادلة (٢) للمساحة تصبح $A = \int_a^b l(x) dx$ ، حيث $l(x)$ هو ارتفاع المنطقة كما هو موضح في الشكل . حدا التكامل هما الاحداثيان x لأقصى موضع على اليسار وأقصى موضع على اليمين lx ، أي الجزءان المقطوعان من المحور السيني 4 و -2 . بما أن $l(x) = y = \frac{1}{4}(8 + 2x - x^2)$ ، فإن

$$A = \int_{-2}^4 l(x) dx = \int_{-2}^4 \frac{1}{4}(8 + 2x - x^2) dx$$



شكل ١٤-٥

الآن نوجد قيمة التكامل بالنظرية الأساسية :

$$A = \int_{-2}^1 (8 + 2x - x^2) dx = \left[8x + x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1$$

$$= \left[(32 + 16 - \frac{64}{3}) - (-16 + 4 + \frac{8}{3}) \right] = 9.$$

مثال ٢ . أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى $y = -x(x-3)^2$ والمحور السيني والخط المستقيم $x = 2$.

في الفصل الرابع وضعنا كيف نخطط المنحنيات بسرعة . المنطقة المطلوب مساحتها موضحة في الشكل ٥-١٥ مع مستطيل مقرب نمطي . سنختار المحور السيني المحور x . ارتفاع المنطقة عند النقطة x يعطى بالدالة $l(x)$ ، حدا التكامل a و b هما الاحداثيان x للموضع على أقصى اليسار والموضع على أقصى اليمين للمستقيم $l(x)$ ، أى هما ٠ و ٢ . بما أن $y \leq 0$ لـ x في الفترة $[0, 2]$ وبما أن $l(x)$ يجب أن تكون غير سالبة ، فإن $l(x) = -y = x(x-3)^2$ ومن ثم

$$A = \int_a^b l(x) dx = \int_0^2 x(x-3)^2 dx$$

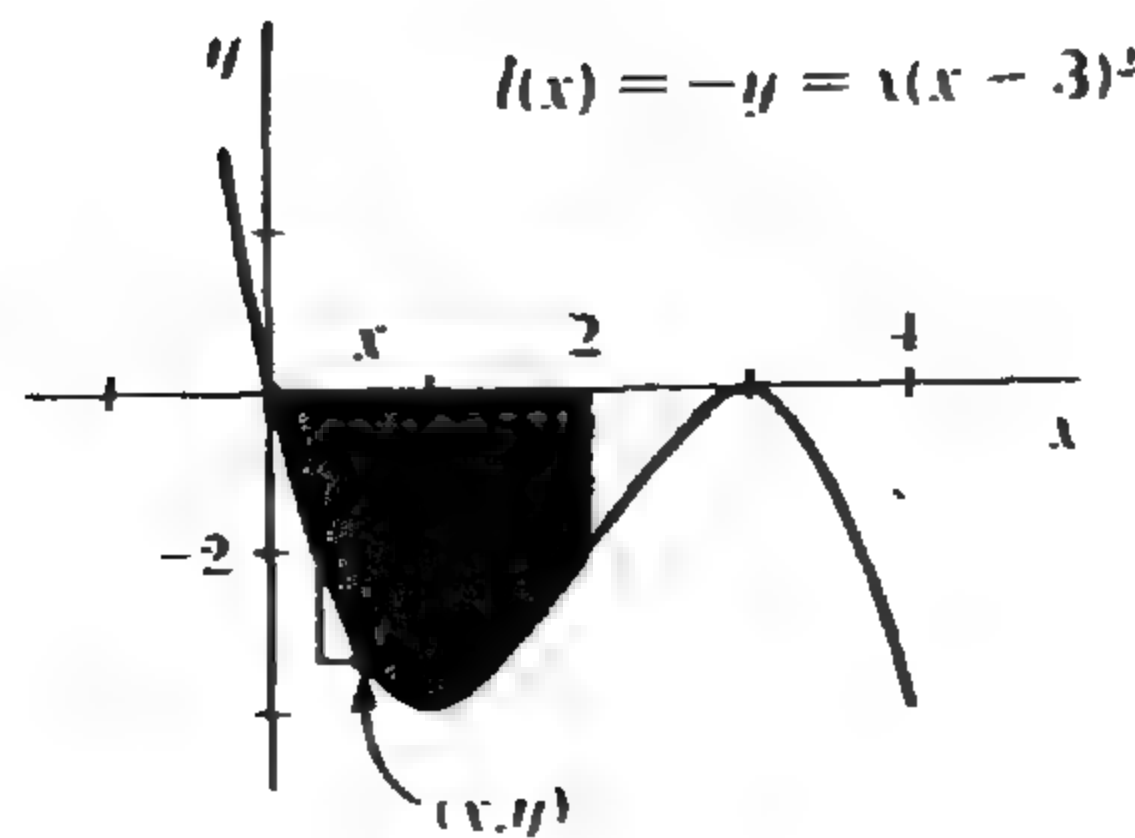
$$= \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 9x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2 \right]_0^2$$

$$= (4 - 16 + 18) - 0 = 6.$$

إذا أخذنا $f(x) = -x(x-3)^2$ في هذا المثال ، فإن $f(x) \leq 0$ لـ $0 \leq x \leq 2$ ويكون

$$\int_0^2 f(x) dx = - \int_0^2 x(x-3)^2 dx = -6 \leq 0$$

هذا يوضح النتيجة ٥-٥ (ثانياً) ببند ٥-٢ . حاصل جمع اعداد سالبة هو عدد سالب ، وبما أن التكامل هو صورة فلسفية للجمع ، فإنه ينبغي أن نتوقع أن التكامل لدالة سالبة القيمة يكون سالباً .



شكل ٥-١٥

مثال ٣ أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2 - 2$ و $y = 6 - x^2$.

المنحنيان مخططان في الشكل ١٦-٥. لتكن $g(x) = 6 - x^2$ و $f(x) = x^2 - 2$. ليكن المحور السيني هو المحور u . بما أن $f(x) \leq g(x)$ فإن

$$l(x) = g(x) - f(x) = (6 - x^2) - (x^2 - 2) = 8 - 2x^2$$

الآن يجب تعيين حدى التكامل. الموضع الأقصى على اليسار والموضع الأقصى على اليمين للخط $l(x)$ هما النقطتان حيث المنحنيان يتلاقيان. الاحداثيان x لهاتين النقطتين هما a و b ويمكن ايجادهما بحل معادلتى المنحنيين معاً :

$$x^2 - 2 = 6 - x^2.$$

$$x^2 = 4,$$

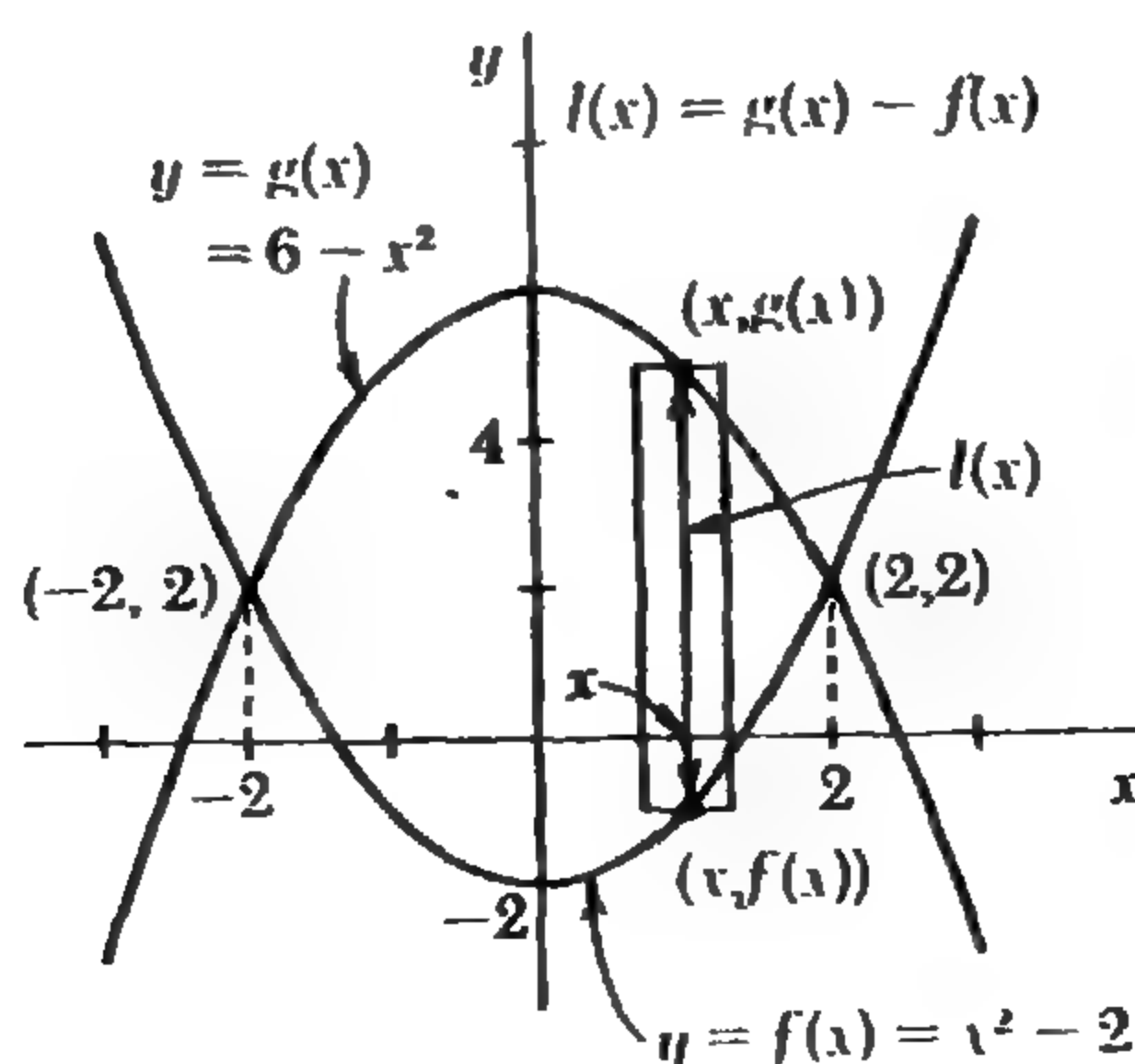
$$x = \pm 2.$$

اذن $b = 2$ و $a = -2$. لدينا

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b l(x) dx = \int_{-2}^2 (8 - 2x^2) dx \\ &= 2 \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = 2 \left[\left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) \right] = \frac{64}{3} \end{aligned}$$

بما أن المنطقة متماثلة بالنسبة الى المحور السيني ، يمكننا ايجاد المساحة بايجاد مساحة النصف الأيمن وضرب النتيجة في 2 ؛ اذا فعلنا ذلك يكون

$$A = 2 \int_0^2 l(x) dx = 2 \int_0^2 (8 - 2x^2) dx = 4 \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4 \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{64}{3}$$



شكل ١٦-٥

عند إيجاد مساحة منطقة محدودة بمنحنيين $y = f(x)$ و $y = g(x)$ ، من المهم أن نعرف أى المنحنيين يكون الأعلى بحيث أن $l(x)$ يمكن اختيارها الموجب من بين الزوجين $f(x) - g(x)$ و $g(x) - f(x)$.

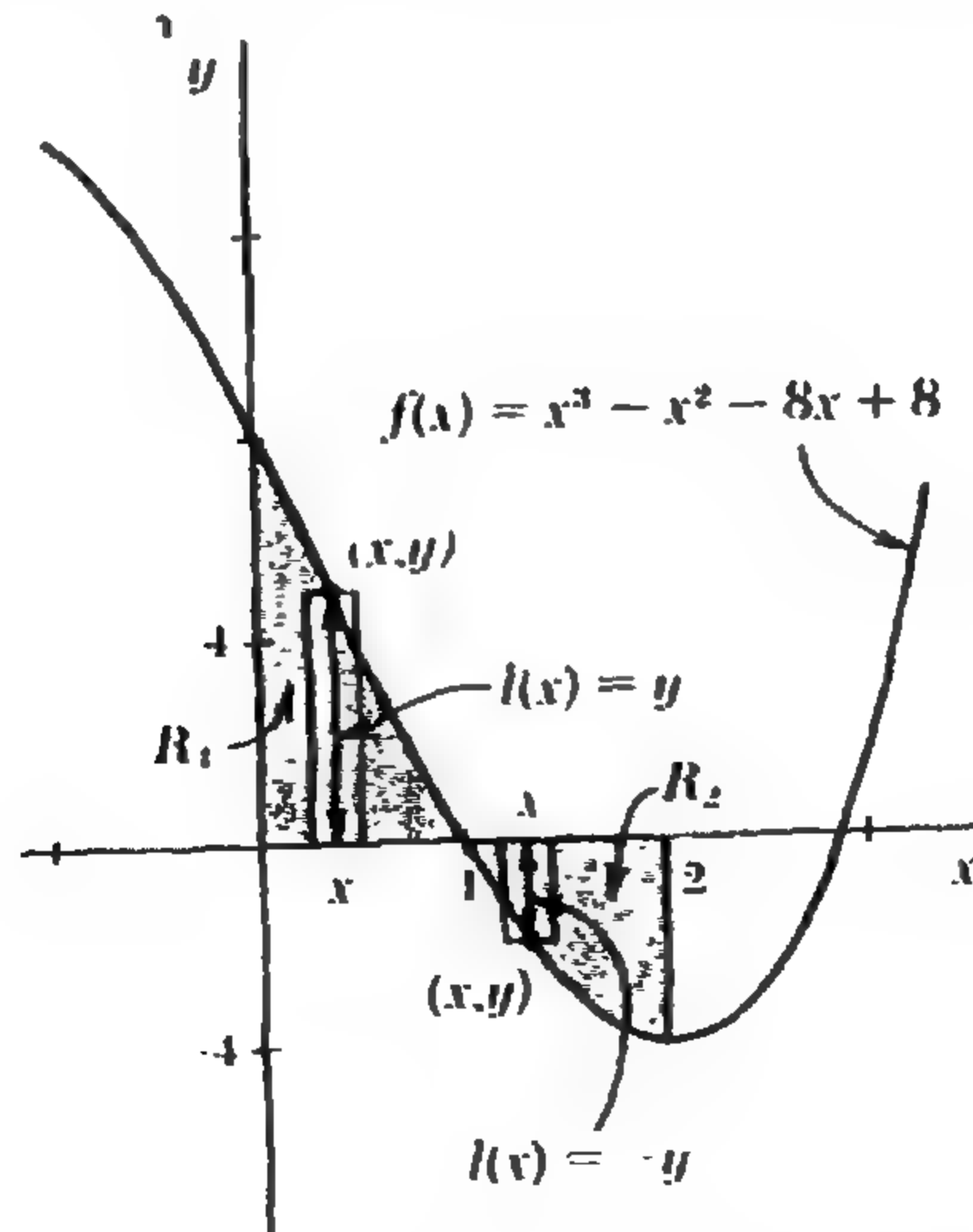
مثال ٤ . أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالشكل البياني للدالة $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 8$ والمستقيمات $x = 0$ و $x = 2$ و $y = 0$.

الشكل البياني وهو المخطط فى الشكل ١٧-٥ ، يقطع المحور السينى عند 1 . ليكن المحور السينى هو المحور u . طول $l(x)$ للمستطيل المقرب ، الذى يجب أن يكون غير سالب ، يعطى بالعلاقة $l(x) = y = f(x)$ عندما $0 \leq x \leq 1$ وبالعلاقة $l(x) = -y = -f(x)$ عندما $1 \leq x \leq 2$. ولأن التعبير عن $l(x)$ يتغير أثناء فترة التكامل ، يجب إيجاد المساحة على جزئين ، هما مساحة المنطقة R_1 فوق المحور السينى ومساحة المنطقة R_2 تحت المحور . مساحة المنطقة R_1 هي

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 l(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^3 - x^2 - 8x + 8) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 8x \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 4 + 8 = \frac{47}{12}. \end{aligned}$$

مساحة المنطقة R_2 هي

$$\begin{aligned} (٣) \quad A_2 &= \int_1^2 l(x) dx = \int_1^2 -f(x) dx = - \int_1^2 (x^3 - x^2 - 8x + 8) dx \\ &= - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 8x \right]_1^2 \\ &= - \left[(4 - \frac{8}{3} - 16 + 16) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 4 + 8) \right] = \frac{31}{12}. \end{aligned}$$



شكل ١٧-٥

المساحتان R_1 و R_2 يجب إيجادهما كل على حدة

مساحة المنطقة R_1 زائد المنطقة R_2 هي

$$A_1 + A_2 = \frac{17}{12} + \frac{11}{12} = \frac{13}{6}$$

التكامل $\int_0^2 f(x) dx$ لا يعطى المساحة الكلية في المثال السابق . لأن $\int_1^2 f(x) dx = -A_2$ من (٣) ، فإن

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = A_1 - A_2$$

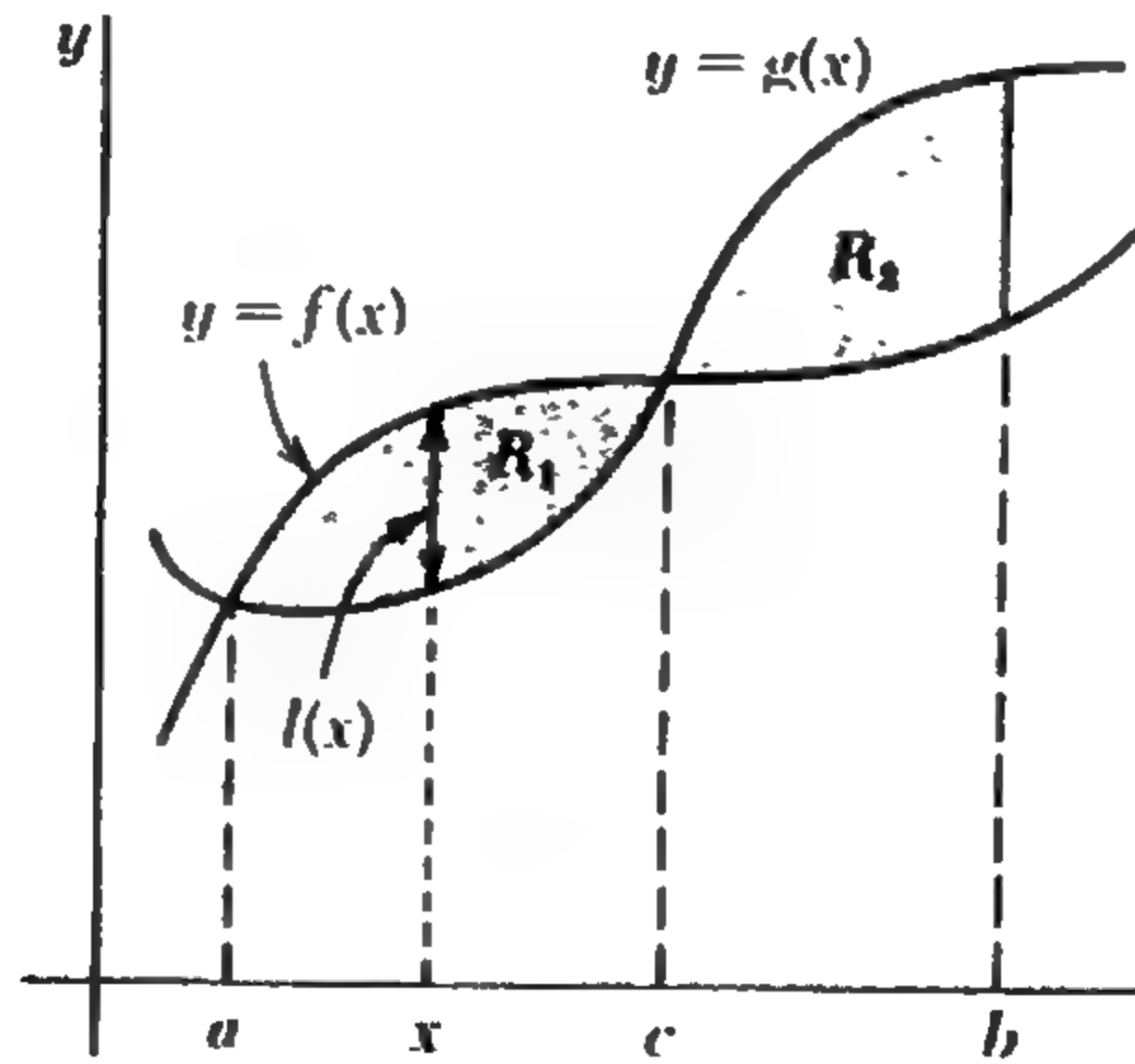
وهذا هو الفرق بين مساحتي R_1 و R_2 لأن $f(x) \leq 0$ عندما $1 \leq x \leq 2$ فاننا في الواقع نأخذ حاصل جمع أعداد سالبة عندما نوجد $\int_1^2 f(x) dx$. بالمثل ، عند إيجاد مساحة منطقة مثل تلك التي في الشكل ١٨-٥ يجب أن نحرص أن تكون $l(x)$ غير سالبة في الفترة $[a, b]$. هذه المنطقة يجب تقسيمها الى منطقتين جزئيتين R_1 و R_2 ومساحة كل منهما توجد على حده . مساحة R_1 هي

$$A_1 = \int_a^c l(x) dx = \int_a^c [f(x) - g(x)] dx$$

لأن $f(x) - g(x) \geq 0$ عندما $a \leq x \leq c$. مساحة R_2 هي

$$A_2 = \int_c^b l(x) dx = \int_c^b [g(x) - f(x)] dx$$

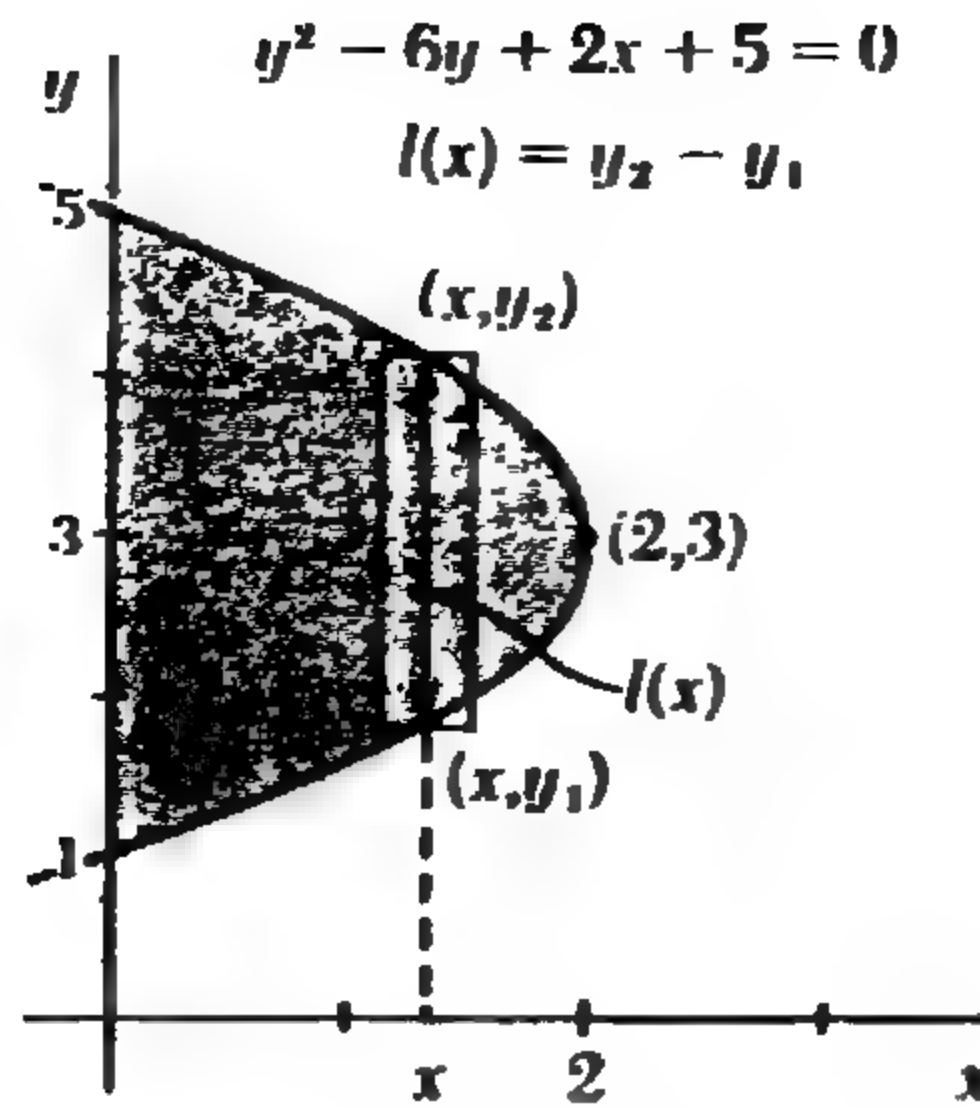
لأن $g(x) - f(x) \geq 0$ عندما $c \leq x \leq b$. مساحة المنطقة الكلية هي $A_1 + A_2$.



شكل ١٨-٥

مثال ٥ أوجد مساحة المنطقة بين المحور الصادي والقطع المكافئ $y^2 - 6y + 2x + 5 = 0$.

القطع المكافئ مخطط في الشكل ١٩-٥ . ليكن المحور السيني هو المحور u . الطول $l(x)$ للمستطيل المقرب هو الفرق $y_2 - y_1$ لقيمتي y المناظرتين لكل x .



شكل ١٩-٥

نوجد هـما بحل المعادلة بالنسبة الى y

$$y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(2x + 5)}}{2} = 3 \pm \sqrt{4 - 2x}$$

حيث أن y_2 ستكون القيمة الأكبر ، فان

$$y_2 = 3 + \sqrt{4 - 2x} \quad \text{و} \quad y_1 = 3 - \sqrt{4 - 2x}$$

$$l(x) = y_2 - y_1 = 2\sqrt{4 - 2x}$$

ومن ثم

الموضعان الأقصى على اليسار والأقصى على اليمين للخط $l(x)$ هما المحور الصادي حيث $x = 0$ ، ورأس القطع المكافئ ، حيث $x = 2$. واذن

$$A = \int_0^2 l(x) dx = \int_0^2 2\sqrt{4 - 2x} dx = -\frac{2}{3}(4 - 2x)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{16}{3}$$

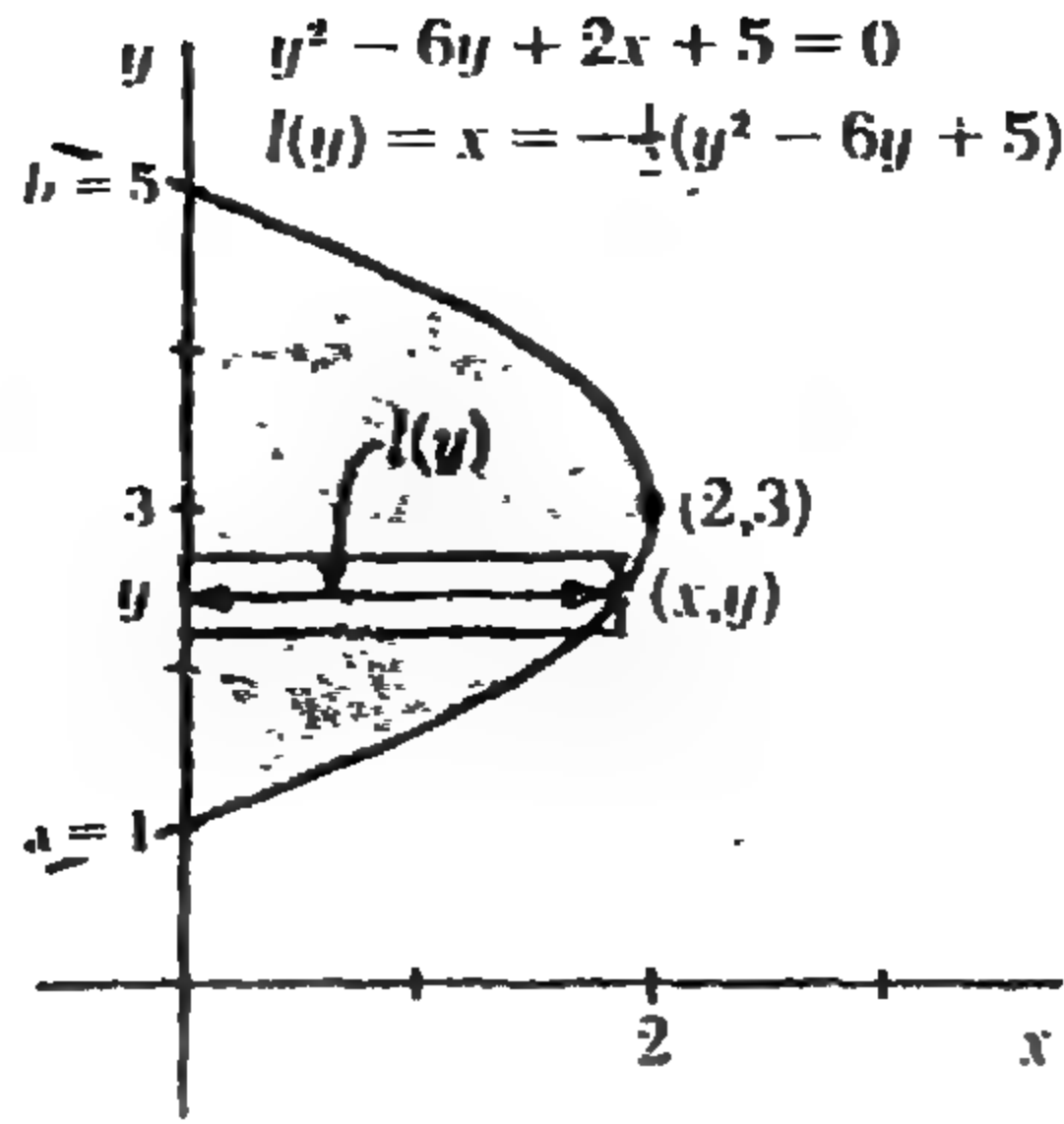
بدلاً من مستطيلات رأسية ، يمكننا استخدام مستطيلات أفقية لتقريب المساحة ، كما هو موضح في الشكل ٢٠-٥ . الآن المحور الصادي هو المحور u ، وطبقاً لـ (٢) المساحة تعطى بالعلاقة $A = \int_a^b l(y) dy$. طول $l(y)$ للمستطيل المقرب هو ، باستخدام معادلة المنحنى ،

$$l(y) = x = -\frac{1}{2}(y^2 - 6y + 5)$$

حدا التكامل هما الاحداثيان y للموضعين المتطرفين للخط $l(y)$ ، واذن هما $b = 5$ و $a = 1$ واذن

$$A = \int_1^5 l(y) dy = -\frac{1}{2} \int_1^5 (y^2 - 6y + 5) dy = -\frac{1}{2} \left[\frac{y^3}{3} - 3y^2 + 5y \right]_1^5$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{125}{3} - 75 + 25 \right) - \left(\frac{1}{3} - 3 + 5 \right) \right] = \frac{16}{3}.$$



شكل ٢٠ - ٥

مسائل

أوجد مساحة المنطقة تحت المنحنيات الآتية بين قيم x المعطاه ، حقق بطريقة التخطيط أوبطريقة أخرى أن المنحنى يقع فوق المحور السيني بين قيم x المعطاه .

- ١ - $y = 5 - \frac{1}{2}x; x = -6, x = 0$
- ٢ - $y = \frac{1}{2}x^2; x = 0, x = 3$
- ٣ - $y = x^2 + 3; x = -2, x = 2$
- ٤ - $y = 10x - x^2; x = 1, x = 10$
- ٥ - $y = \sqrt{x}; x = 0, x = 4$
- ٦ - $y = 2\sqrt{x-1}; x = 1, x = 10$
- ٧ - $y = x(x-5)^2; x = 0, x = 2$
- ٨ - $y = (x+1)^3 + 1; x = -2, x = 0$
- ٩ - $y = 2x + \frac{1}{x^2}; x = 1, x = 3$
- ١٠ - $y = \frac{5}{\sqrt{x+2}}; x = 0, x = 5$
- ١١ - $y = x\sqrt{4x^2+1}; x = 0, x = 2$
- ١٢ - $y = \frac{x}{c}\sqrt{c^2-x^2}; x = 0, x = c$ حيث $c > 0$
- ١٣ - $y = \begin{cases} (x+1)^3, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - \frac{x^2}{4}, & 0 < x \leq 2; x = -1, x = 2 \end{cases}$
- ١٤ - $y = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+3), & -3 \leq x < 1, \\ 3 - x, & 1 \leq x \leq 3; x = -3, x = 3 \end{cases}$
- ١٥ - $y = |x|; x = -2, x = 5$

أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيات الآتية باستخدام مستطيلات مقربة رأسية (محور « موازياً للمحور السيني) ومرة أخرى باستخدام مستطيلات أفقية (محور « موازياً للمحور الصادي) :

- ١٦ - $y = 8 - x^4, x = 0, y = 0$
- ١٧ - $y = 2x^2, y = 0, x = 3$

١٨ - $y = 2x + 2, y = 2 - x^2, y = 0$ (المنطقة على يمين الخط وعلى يسار القطع المكافئ)

٢٠ - $y = 1 - x^2, x - 2y + 4 = 0, x = 0, y = 0$

١٩ - $y = 6x - x^2, y = 2x$

خطط المنحنيات الآتية وأوجد مساحة المنطقة أو المناطق المحدودة بهما :

$y = x^2 + 4x, y = 0$	- ٢٢	$y = x^3, y = 0, x = 1, x = 2$	- ٢١
$y = -x^2 - 6x, y = 2x$	- ٢٤	$y = x^2 - 4x + 2, x + y - 6 = 0$	- ٢٣
$y = x^3, y = 1, x = 0, x = 3$	- ٢٦	$y = x^2 - 6, y = 6 - x^2$	- ٢٥
$y = x(x + 3)^2, y = 0, x = -3, x = -1$	- ٢٨	$y = x(x - 2)^2, y = 0$	- ٢٧
$y = x^4 - x^2 - 6x, y = 0$	- ٣٠	$y = \sqrt{4 + x}, x = 0, y = 0$	- ٢٩
$y = 9 - x^2, x - y + 7 = 0$	- ٣٢	$y = x^3 - 2x^2 - 11x + 12, y = 0$	- ٣١
$y = 2\sqrt{x}, y = -2x + 12, x = 0$	- ٣٤	$y = 2\sqrt{x}, y = -2x + 12, y = 0$	- ٣٣
$x^2y = 3, 4x + 3y - 13 = 0$	- ٣٦	$y = -x^3 + 2x^2 + 3x, y = -5x$	- ٣٥
$y^2 = x + 1, y^2 = 7 - x$	- ٣٨	$y^2 - 4y - 2x = 0, x = 0$	- ٣٧
$x = 4y - y^2, x + y = 4$	- ٤٠	$y^2 = x + 4, x - 2y + 1 = 0$	- ٣٩
$x = y^3 - 4y^2 - y + 4, x = 0$	- ٤٢	$x = y(y - 3)^2, x = 0$	- ٤١
$y^2 = x^3, x = 0, x = 1$	- ٤٤	$x = y^2 - y^3, x = 0$	- ٤٣
$y = x^4 - 3x^2, y = x^2$	- ٤٦	$y^2 = ax, x^2 = by, \text{ where } a > 0 \text{ and } b > 0$	- ٤٥
$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, x = 0, y = 0$	- ٤٨	$y^2 = x^2(x^2 - 1), x = 3$	- ٤٧

٤٩ - أوجد مساحات المناطق بين المحور السيني وذلك الجزء من المنحنى $y = x^3 + 3x^2 + 2x$ بين $x = 2$ و $x = -3$.

٥٠ - أوجد مساحة المثلث القائم المتكون بالخط المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة (4, 6)، المحور السيني، والخط المستقيم $x = 4$.

٥١ - أوجد مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = x(3 - x)^2$ بين النهاية العظمى الموضعية والنهاية الصغرى الموضعية.

٥٢ - أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالقطع المكافئ $y^2 = 3x$ والمماس عند (3, 3) والمحور السيني.

٥٣ - أوجد مساحة المنطقة داخل عروة المنحنى $y^2 = x(x - 3)^2$.

٥٤ - أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالقطع المكافئ ووتره البؤري العمودي.

٥٥ - أثبت أن مساحة قطعة القطع المكافئ المقطوعة بخط عمودي على محوره هي ثلثا مساحة المستطيل المحيط بها. أرشميدس (٢٨٧ - ٢١٢ قبل الميلاد) عرف ذلك. لقد كان أحد

الأوائل الذين قربوا الى مساحة المنطقة بحواصل جمع مساحات مستطيلات ، لكن بسبب افتقاره الى حساب التكامل استطاع فقط ايجاد مساحات عدد قليل من المناطق . بعد ألفي سنة تقريباً اكتشف نيوتن النظرية الأساسية .

٥٦- حقق أن مساحة المثلث هي $\frac{1}{2}bh$ ، حيث b طول ضلع ، h الارتفاع من الرأس المقابل لذلك الضلع (ارشاد : أوجد أولاً مساحة المثلث القائم المكون بالمستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة (a, b) ، ومحور السينات ، والمستقيم $x = a$. أى مثلث يمكن تقسيمه الى مثلثين قائمين) .

٥٧- اذا كانت $g(x) \geq f(x)$ في الفترة $[a, b]$ أثبت أن مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيات $x = b$ و $x = a$ و $y = g(x)$ و $y = f(x)$ تعطى بالعلاقة $\int_a^b [g(x) - f(x)] dx$. اذا كان علاوة على ذلك $f(x) \geq 0$ في الفترة $[a, b]$ ، فسر التكامل كفرق مساحتي المنطقتين تحت f و g بين b و a .

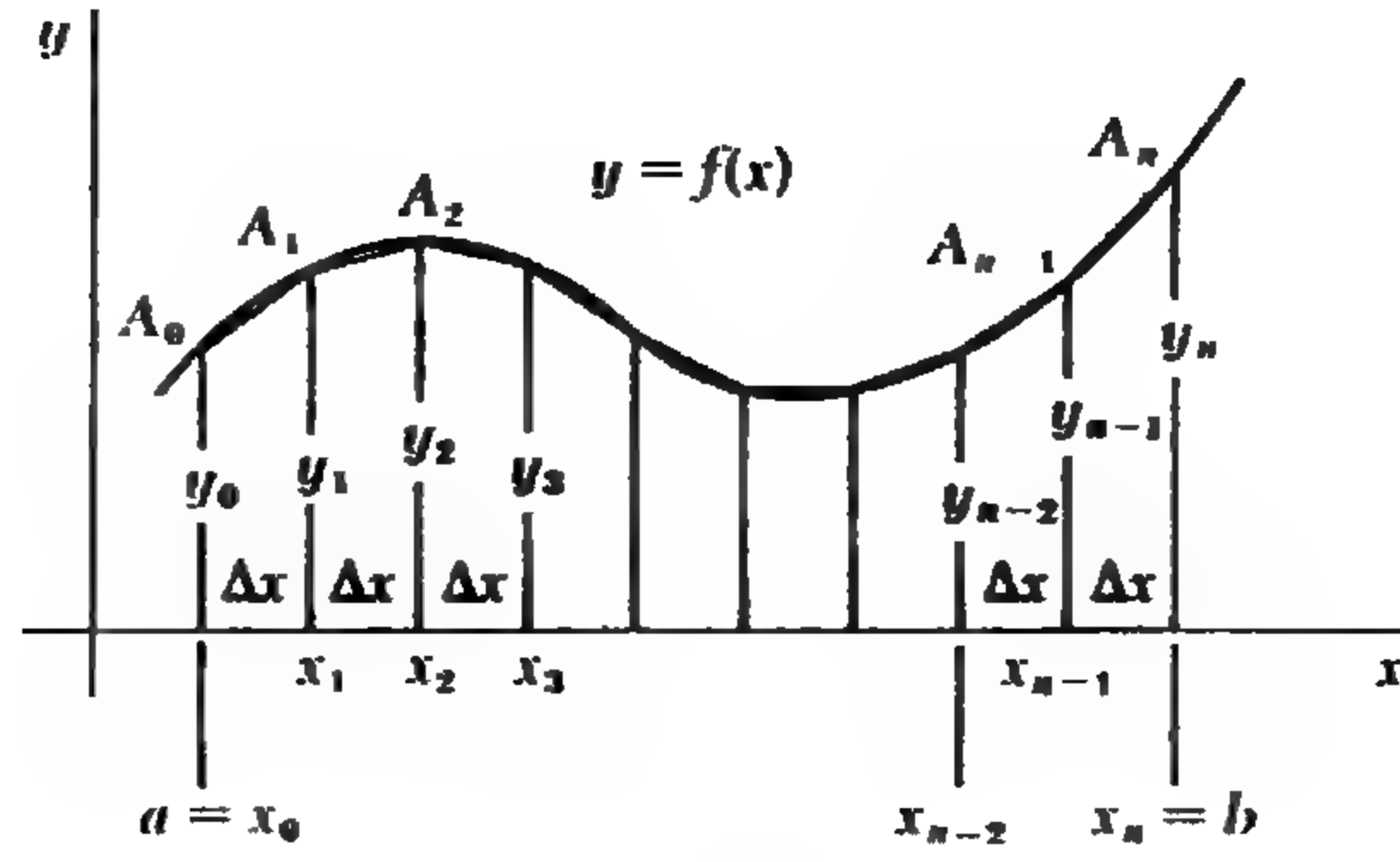
٥-٥

قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمسون

عندما لا يمكن ايجاد المعكوس التفاضلي للدالة f فان التكامل $\int_a^b f(x) dx$ لا يمكن إيجاد قيمته ويجب أن نقتنع بقيمة تقريبية للتكامل . مع أن حاصل جمع ريمان هو تقريب للتكامل ، لكن فائدته نظرية أكثر منها عملية . توجد طرق أكثر كفاءة لتقريب التكامل ، سنعطى هنا اثنتين منهما .

في اشتقاق الصيغة الأولى للتقريب سنفرض أن $f(x) \geq 0$ في الفترة $[a, b]$ (شكل ٥ - ٢١) ، حتى أن التكامل يمكن تفسيره بأنه المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$. الصيغة ، مع ذلك ، صحيحة لأي دالة متصلة سواء كانت موجبة أو لم تكن . برهان يصلح لجميع هذه الدوال مخطط في المسألة ٢٦ . قسم الفترة $[a, b]$ الى n من الفترات الجزئية المتساوية بالتجزئ $[a = x_1, x_2, \dots, x_n = b]$. مثل هذا التجزئ يسمى تجزئاً منتظماً . ارسم خطاً رأسياً من كل x_i للمنحنى ، كما هو موضح في الشكل ٥ - ٢١ ، ووصل بين نقط التقاطع المتعاقبة : A_0, A_1, \dots, A_n ، بقطع مستقيمة المنطقة تحت كل قطعة مستقيمة تكون شبه منحرف مساحته تقريب لمساحة المنطقة تحت القطعة المناظرة من المنحنى . لتكن y_0, y_1, \dots, y_n هي أطوال القطع المستقيمة الرأسية ولتكن Δx هي الطول المشترك للفترات الجزئية ، فيكون $\Delta x = (b-a)/n$ مساحة شبه المنحرف الأول هي

$$\frac{\Delta x}{2} (y_0 + y_1)$$



شكل ٢١-٥

المنطقة تحت المنحنى تقرب بأشبه منحرفات .

مساحة شبه المنحرف الثانى هي

$$\frac{\Delta x}{2} (y_1 + y_2)$$

مساحة الثالث هي

$$\frac{\Delta x}{2} (y_2 + y_3)$$

وهكذا ، الى أن مساحتى شبه المنحرفين الأخيرين هما

$$\frac{\Delta x}{2} (y_{n-2} + y_{n-1}) \quad \text{و} \quad \frac{\Delta x}{2} (y_{n-1} + y_n)$$

حاصل جمع هؤلاء

$$\bullet (١) \quad \frac{\Delta x}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

هو تقريب لمساحة المنطقة تحت المنحنى بين a و b ، أى للتكامل $\int_a^b f(x) dx$ وهذا التقريب يكون عادة أفضل من التقريب الذى نحصل عليه باستخدام مستطيلات . الصيغة (١) حسناً تسمى قاعدة شبه المنحرف . فى نصها المدون أدناه قد أبدلنا كل y_i بـ $f(x_i)$ وضربنا كل حد فى المعامل $\frac{1}{2}$.

٥- ١٤ قاعدة شبه المنحرف . لتكن الدالة f متصلة فى الفترة $[a, b]$. قسم الفترة الى n من الفترات الجزئية المتساوية الطول بالتجزىء $[a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b]$ لتكن $\Delta x = (b - a) / n$ طول كل فترة جزئية .

$$\int_a^b f(x) dx \approx \Delta x \left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n) \right]$$

فيكون

يمكن اثبات أنه اذا كانت $f''(x)$ موجودة فى الفترة $[a, b]$ ، فان الخطأ فى تقريب التكامل بقاعدة شبه المنحرف يكون أقل من $12 \left[(b - a) (\Delta x)^2 M \right]$ ، حيث M هى أكبر قيمة لـ $|f''(x)|$ فى $[a, b]$.

مثال ١ . قرب الى مساحة المنطقة تحت القطع الزائد $y = 1/x$ بين ١ و ٤ بقاعدة شبه المنحرف بست فترات جزئية .

هنا $n = 6$ و $b = 4$ و $a = 1$ و $f(x) = 1/x$ واذن

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{1}{2}$$

والتجزىء للفترة $[1, 4]$ هو $[1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4]$. قاعدة شبه المنحرف تعطى

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1}{x} dx &\approx \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3) + f\left(\frac{7}{2}\right) + \frac{1}{2}f(4) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(1) + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{2}{7} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right) \right] \approx 1.405 \end{aligned}$$

بما أن $f''(x) = 2/x^3$ ، فأكبر قيمة لـ $|f''(x)|$ فى $[1, 4]$ هى $M = 2$ والخطأ فى التقريب أقل من $3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{1^2}\right) = 0.125$. يمكن اثبات أن قيمة المساحة صحيحة لثلاثة أرقام عشرية هى 1.386 .

التقريب للتكامل المعين يمكن تحسينه بطريقتين . احدهما باستعمال قاعدة شبه المنحرف بعدد أكثر من الفترات الجزئية . الطريقة الأخرى هى أن نحفظ بعدد الفترات الجزئية كما هو ونقرب الى المنحنى ليس بقطع مستقيمة متعاقبة لكن بقطع من منحنيات بسيطة مناسبة تقترب أكثر الى المنحنى . المنحنى الأبسط التالى بعد الخط المستقيم هو القطع المكافئ لأن معادلته من الدرجة الثانية . اذا كانت أجزاء المنحنى المعطى تقرب بقطوع مكافئة ومساحات المناطق تحت القطوع المكافئة تجمع ، فاننا نحصل على قاعدة سمسون للقيمة التقريبية للتكامل .

٥- ١٥ قاعدة سمسون . لتكن الدالة f متصلة فى الفترة $[a, b]$. قسم الفترة الى عدد زوجى n من الفترات الجزئية المتساوية الطول بالتجزىء $[a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b]$.

لتكن $\Delta x = (b - a) / n$ طول كل فترة جزئية . فيكون

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

البرهان. نفضل أن نكتب $h = \Delta x$. يوجد منحنى على الصورة

$$y = ax^2 + bx + c$$

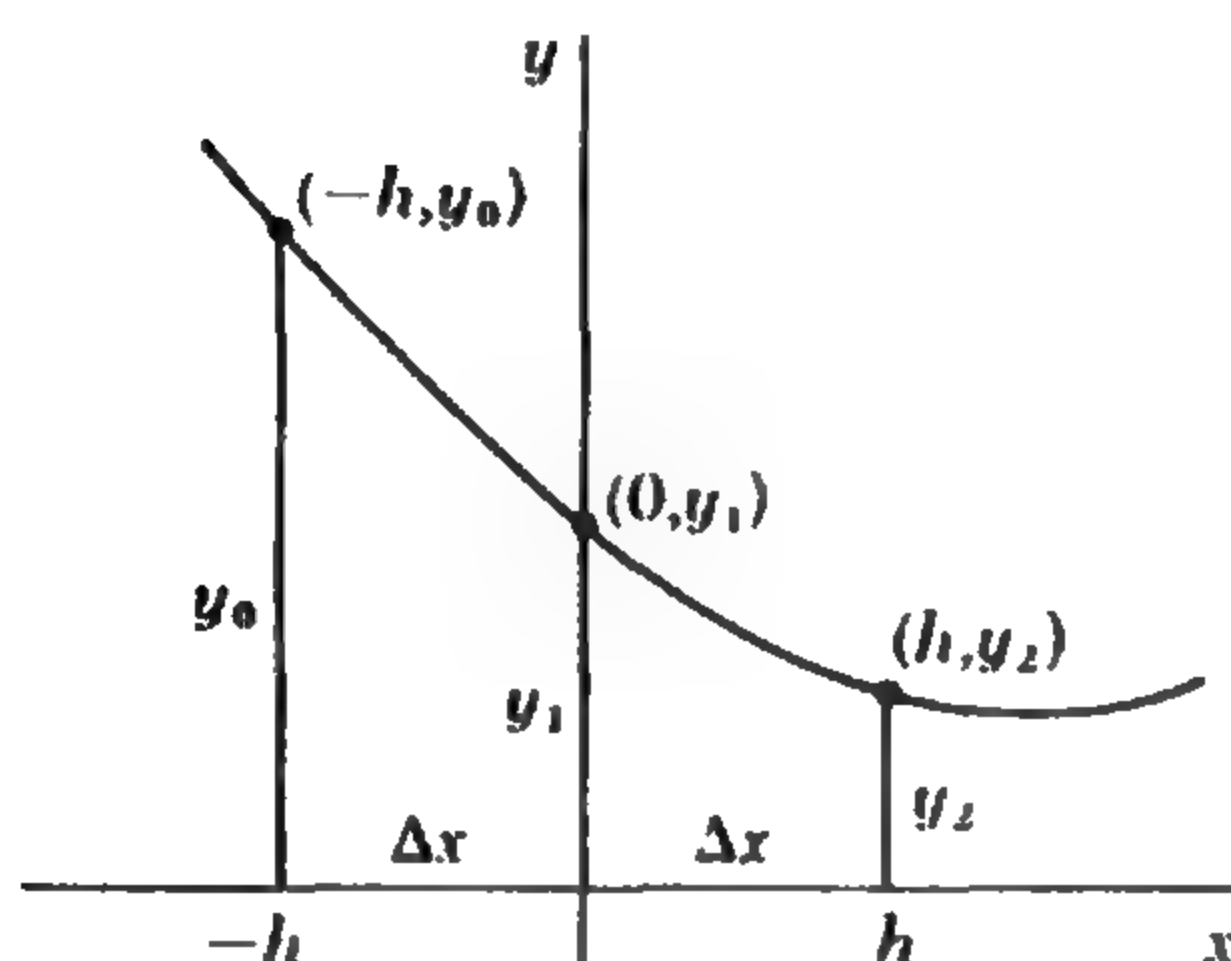
يمر بالنقط الثلاث (h, y_2) و $(0, y_1)$ و $(-h, y_0)$ ، (شكل ٢٢-٥) . وهو قطع مكافئ إذا لم تكن النقط على خط مستقيم . يمكننا إيجاد المنحنى بحل المعادلات

$$y_0 = a(-h)^2 + b(-h) + c,$$

(٢)

$$y_1 = c,$$

$$y_2 = ah^2 + bh + c$$



شكل ٢٢-٥

في آن واحد لـ c و b و a ، لكن هذا ليس ضرورياً لفرضنا . المساحة تحت المنحنى من $-h$ الى h هي

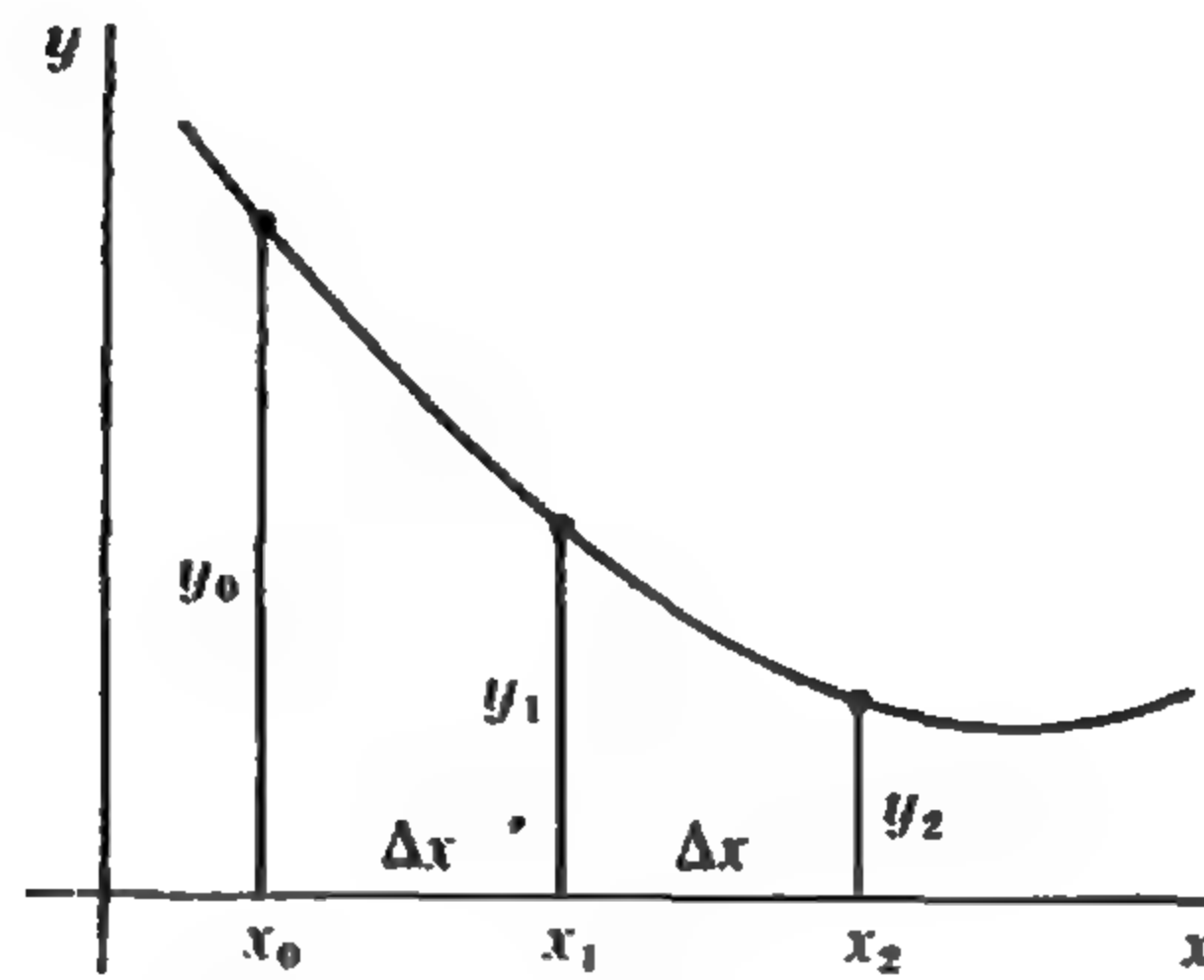
$$\begin{aligned} (٣) \quad \int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx &= \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right]_{-h}^h \\ &= \frac{h}{3} (2ah^2 + 6c). \end{aligned}$$

بضرب المعادلة الثانية من (٢) في 4 ثم جمع المعادلات الثلاث نحصل على :
 $y_0 + 4y_1 + y_2 = 2ah^2 + 6c$ ، إذن من (٣) ، يكون

$$\int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

هذه المعادلة تعطي مساحة المنطقة تحت القطع المكافئ بدلالة الاحداثيات الصادية للنقط الثلاث . اذا نقل القطع المكافئ موازياً للمحور السيني ، كما في الشكل ٥ - ٢٣ ، فان الاحداثيات y لا تتغير ومساحة المنطقة تحت المنحنى من x_0 الى x_2 تعطى بنفس التعبير بالطرف الأيمن . أي أن ، باستبدال h بالرمز Δx ، يكون

$$(٤) \quad \int_{x_0}^{x_2} (ax^2 + bx + c) dx = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$



شكل ٥ - ٢٣

بهذا التمهيد ، لتكن الدالة التي يراد تقريب تكاملها ، فيكون

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx$$

اذا كان جزء الشكل البياني للدالة f المعين بالفترة $[x_i, x_{i+2}]$ يقرب بالقطع المكافئ المار بنقطتيها الطرفيتين ونقطة المنتصف (شكل ٥ - ٢٤) ، فكل من التكاملات $\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx$ يمكن التقريب اليه بتعبير مماثل للطرف الأيمن من (٤) ، ويكون

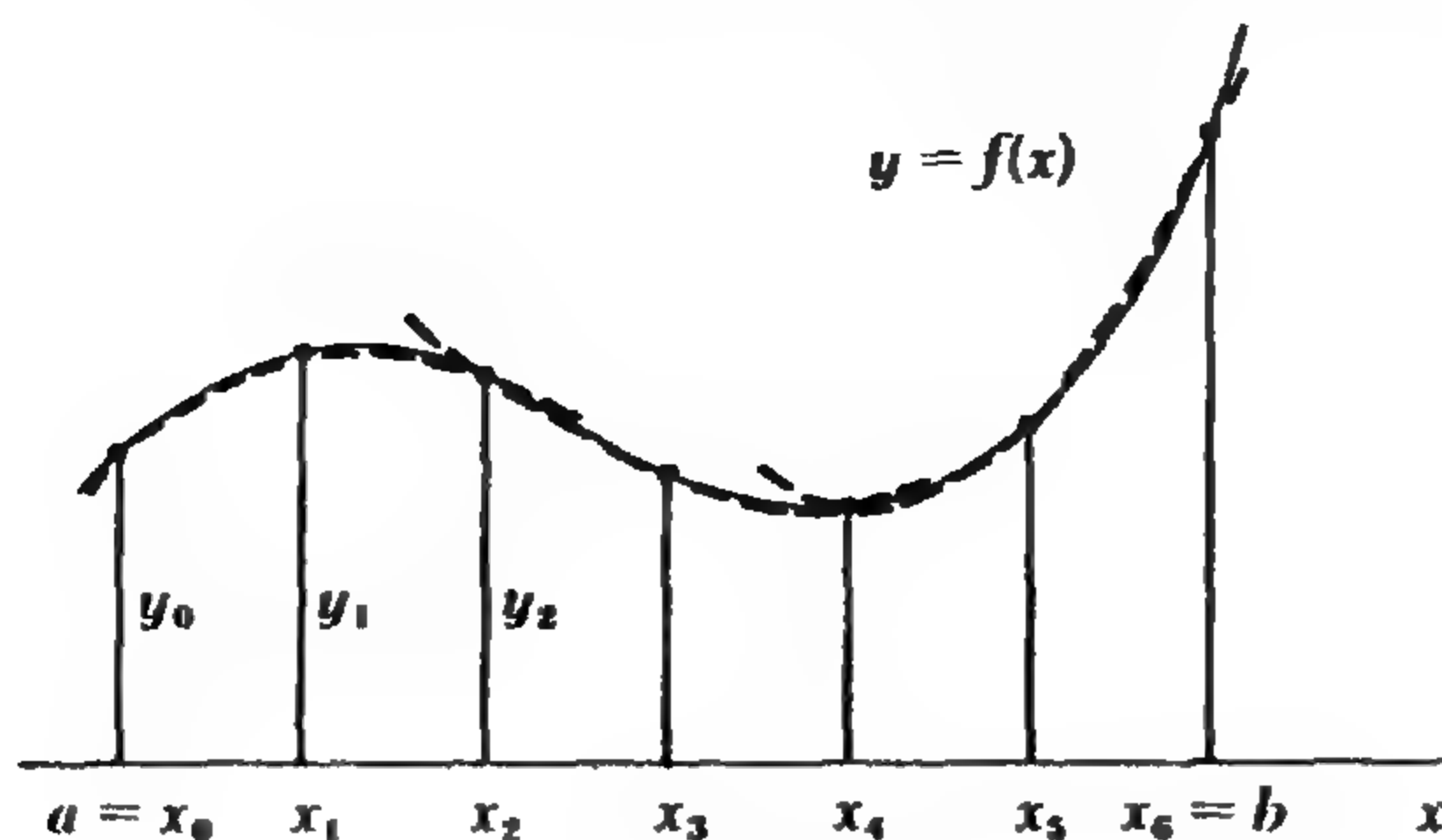
$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4),$$

$$\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n),$$

$$\int_{x_{n-2}}^x f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

بجمع هذه وابدال كل y_i بـ $f(x_i)$ نحصل على قاعدة سمسون .



شكل ٩ - ٢٤

في كل فترة مزدوجة يقرب المنحنى بقطع مكافئ .

مع أننا قد قدمنا البرهان بدلالة المساحات ، إلا أن العمل جبرى ولم نفترض فى أى مرحلة أن $f(x)$ موجبة . فقاعدة سمسون صحيحة لاي دالة متصلة . ولأن كل قطع مكافئ مقرب يكتسح فترتين حزئيتين فإن قاعدة سمسون يمكن استخدامها فقط مع عدد زوجى من الفترات الجزئية .

يمكن اثبات أنه إذا كانت $f^{(4)}(x)$ موجودة فى الفترة $[a, b]$ ، فإن الخطأ فى تقريب التكامل بقاعدة سمسون يكون أقل من $[(b-a)(\Delta x)^4 M] / 180$ حيث M هى أكبر قيمة لـ $|f^{(4)}(x)|$ فى الفترة $[a, b]$.

مثال ٢ . قرب الى مساحة المنطقة تحت القطع الزائد $y = 1/x$ بين 4 و 1 بقاعدة سمسون مستخدماً ست فترات جزئية .

هذه المساحة قربت فى مثال ١ بقاعدة شبه المنحرف باستخدام ست فترات جزئية . هنا $f(x) = 1/x$ والأعداد $\Delta x = \frac{1}{5}$ و $n = 6$ و $b = 4$ و $a = 1$ هى نفسها كما هناك ، وهكذا أيضاً التجزئ $[1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4]$ للفترة $[1, 4]$. قاعدة سمسون تعطينا

$$\int_1^4 \frac{1}{x} dx \approx \frac{1}{6} [f(1) + 4f(\frac{3}{2}) + 2f(2) + 4f(\frac{5}{2}) + 2f(3) + 4f(\frac{7}{2}) + f(4)]$$

$$= \frac{1}{6} [1 + 4(\frac{2}{3}) + 2(\frac{1}{2}) + 4(\frac{2}{5}) + 2(\frac{1}{3}) + 4(\frac{2}{7}) + \frac{1}{4}] \approx 1.388.$$

بما أن $f^{(4)}(x) = 24x^{-5}$ ، فأكبر قيمة لـ $|f^{(4)}(x)|$ فى $[1, 4]$ هى $M = 24$ والخطأ فى التقريب يكون أقل من $3(\frac{1}{2})^4 (\frac{24}{128}) = 0.025$. قيمة المساحة صحيحة لثلاثة أرقام عشرية هى 1.386 قاعدة سمسون تعطى تقريباً أفضل مما تعطيه قاعدة شبه المنحرف .

قاعدتا شبه المنحرف وسمسون يمكن استخدامهما لايجاد تقريبات ليس فقط لمساحات ، بل لاي تكامل معين سواء كان يمثل مساحة أم لا بما أن معظم العمل فى صيغ التقريب هو حساب قيم $f(x_i)$ ، فإن قاعدة سمسون بمجهود بسيط أكبر تعطى لمعظم الدوال تقريباً أفضل مما تعطيه قاعدة شبه المنحرف .

مسائل

قرب الى مساحة المنطقة تحت المنحنيات الآتية بين a و b بقاعدة شبه المنحرف مستخدماً العدد المعطى n من الفترات الجزئية . (الحسابات يجب اجراؤها الى ثلاثة أرقام عشرية .)

- ١ - $y = x^2; a = 1, b = 3; (a) n = 4, (b) n = 8$ ٢ - $y = 1/(x + 1); a = -1, b = 2, n = 5$
- ٣ - $y = -x^2 + 4x + 5; a = -1, b = 5, n = 6$ ٤ - $y = x^3; a = 0, b = 1, n = 4$
- ٥ - $y = 1/x^2; a = -3, b = -1, n = 6$.
- ٦ - $y = \sqrt{x}; a = 0, b = 4; (a) n = 4, (b) n = 8$
- ٧ - $y = \sqrt{x^2 - 4}; a = 2, b = 6, n = 8$

قرب الى مساحة المنطقة تحت المنحنيات الآتية بين a و b بقاعدة سمسون مستخدماً العدد المعطى n من الفترات الجزئية المعطاة . (الحسابات يجب اجراؤها الى ثلاثة أرقام عشرية .)

٨ - $b = 3$ و $a = 1$ و $y = x^2$ ، (أ) $n = 4$ ، (ب) $n = 8$. لماذا نحصل على نفس الاجابة فى (أ) و (ب) ؟

- ٩ - $y = -x^2 + 4x + 5; a = -1, b = 5, n = 6$ ١٠ - $x^3; a = 0, b = 1, n = 4$
- ١١ - $y = 1/x^2; a = -3, b = -1, n = 6$ ١٢ - $\sqrt{x}; a = 0, b = 4; (a) n = 4, (b) n = 8$
- ١٣ - $y = \sqrt{x^2 - 4}; a = 2, b = 6, n = 8$

قرب الى التكاملات المعينة الآتية بقاعدة شبه المنحرف مستخدماً العدد المعطى n من الفترات الجزئية (الحسابات يجب اجراؤها الى ثلاثة أرقام عشرية .)

- ١٤ - $\int_{-5}^{-1.5} \frac{1}{x} dx; n = 7$ ١٥ - $\int_0^4 \frac{3}{1+x^2} dx; n = 4$ ١٦ - $\int_{-1}^3 x^3 dx; n = 8$
- ١٧ - $\int_0^{1.5} \frac{x}{2x+1} dx; n = 6$ ١٨ - $\frac{1}{8} \int_0^1 (-2 - x^2) dx; n = 10$ ١٩ - $\int_{-1}^1 \sqrt{1+x} dx; n = 4$
- ٢٠ - $\int_1^3 \sqrt{28-x^3}; n = 4$

٢١ - استخدم قاعدة شبه المنحرف لتقريب مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = 1/\sqrt{1+x^2}$ بين 6 و 0 .

٢٢ - استخدم قاعدة شبه المنحرف لتقريب مساحة المنطقة بين المنحنيين $x + y = 4$ و $y = 3/x$.

٢٣ - (أ) بفرض أن مساحة الدائرة هي πr^2 ، أوجد تقريباً عشرياً للعدد π بتقريب مساحة ربع دائرة نصف قطرها I بقاعدة شبه المنحرف مستخدماً أربع فترات جزئية .

(ب) أوجد تقريباً أفضل للعدد π باستخدام الطريقة المشروحة فى (أ) لكن بقاعدة

سمسون . (ج) اذا كان من المتاح استخدام جهاز حاسب ، فأوجد تقريبات للعدد π

باستخدام الطريقة المشروحة فى (أ) لكن بفترات جزئية عددها 100 و 50 و 20 .

- ٢٤ - ادرس الطريقة الآتية لتقريب مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = f(x)$. قسم الفترة $[a, b]$ الى عدد n من الفترات الجزئية متساوية الطول Δx بالنقط $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$. احسب أولاً التقريب بحاصل جمع ريمان $s = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x$ حيث كل \bar{x}_i هي النقطة الطرفية اليسرى للفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$. احسب ثانياً التقريب بحاصل جمع ريمان آخر t حيث كل \bar{x}_i هي النقطة الطرفية اليمنى للفترة الجزئية . وضع المستطيلات المقربة على الشكل البياني للدالة f لكلا التقريبين . الآن خذ متوسط s و t . اشرح لماذا يكون هذا المتوسط عادة تقريباً من s أو t على حده . وأثبت أنه هو نفس التقريب الذي نحصل عليه بقاعدة شبه المنحرف .
- ٢٥ - الطرف الأيمن من المعادلة في منطوق قاعدة شبه المنحرف ٥ - ١٤ ليس بحاصل جمع ريمان حتى اذا كانت Δx موزعة على كل حد في حاصل الجمع . اشرح لماذا ؟
- ٢٦ - أعط تفصيلات البرهان المختصر المعطى أدناه لقاعدة شبه المنحرف ٥ - ١٤ بأنها تكون صحيحة للدوال المتصلة لكن ليست بالضرورة موجبة في $[a, b]$. لدينا

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$$

جزء المنحنى المعين بالفترة $[x_{i-1}, x_i]$ يقرب بالوتر الواصل بين $A_i(x_i, y_i)$ و $A_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$ (شكل ٥ - ٢١) . معادلة هذا الوتر هي

$$y = m_i(x - x_{i-1}) + y_{i-1}$$

حيث m_i هي ميل الوتر . واذن كل من التكاملات $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$ يمكن تقريبه بالعلاقة

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [m_i(x - x_{i-1}) + y_{i-1}] dx = \frac{\Delta x}{2} [m_i(x_i + x_{i-1}) + 2(y_{i-1} - m_i x_{i-1})] = \frac{\Delta x}{2} (y_{i-1} + y_i)$$

- ٢٧ - أثبت أن قاعدة سمسون تعطى القيمة المضبوطة للتكامل اذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة بصرف النظر عن عدد الفترات الجزئية .

٦ - ٥

حجوم الأجسام ذات المقاطع المنتظمة

يمكن استخدام التكامل أيضاً لإيجاد حجم جسم . معظم الأجسام العامة صعبة جداً لمعالجتها الآن ، لكن يمكننا إيجاد حجوم الأجسام التي لها درجة ما من الانتظام . سوف لا نحاول تعريف حجم جسم ، لكن ، كما في المساحات ، نستمز بالبداية .

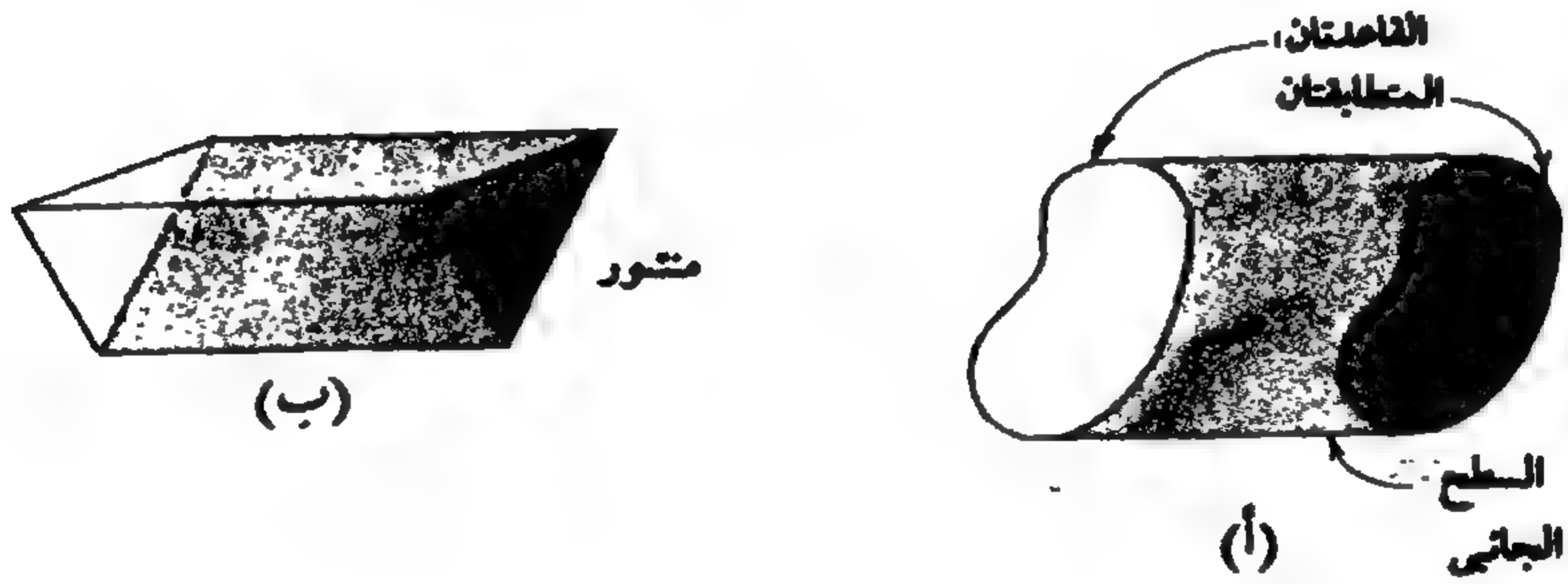
الاسطوانة جسم محدود بمنطقتين متطابقتين في مستويين متوازيين ، والسطح الجانبي يتكون من القطع المستقيمة التي تصل بين النقط المتناظرة على حدود المنطقتين (شكل ٥ - ٢٥) . كل من المنطقتين المستويتين تكون قاعدة للاسطوانة ، وارتفاع الاسطوانة هو المسافة العمودية بين

المستويين الاسطوانة الدائرية القائمة هي اسطوانة قاعدتها دائرة وخطوط سطحها الجانبي عمودية على القاعدة . المنشور هو مجرد اسطوانة حدود قاعدتها تكون مضلعاً (شكل ٢٥ - ٥ ب) حجم الاسطوانة هو مساحة القاعدة مضروبة في الارتفاع .

لايجاد حجم جسم كما في شكل ٢٦ - ٥ ، أدخل خطاً للاحداثيات u ، يسمى المحور u لتكن $a < b$ و a و b هما احدائياً النقطتين المتطرفيتين لمسقط الجسم على المحور u . المستوى العمودي على المحور u عند نقطة u بين a و b يقطع الجسم في مقطع مساحته تعتمد على u . نرسم لهذه المساحة بالرمز الدالي $A(u)$. نظرياً المحور يمكن اختياره في أى اتجاه ، لكن عملياً ينبغي أن يكون موجهاً بحيث يعطى مقاطع للجسم يمكن ايجاد مساحتها .

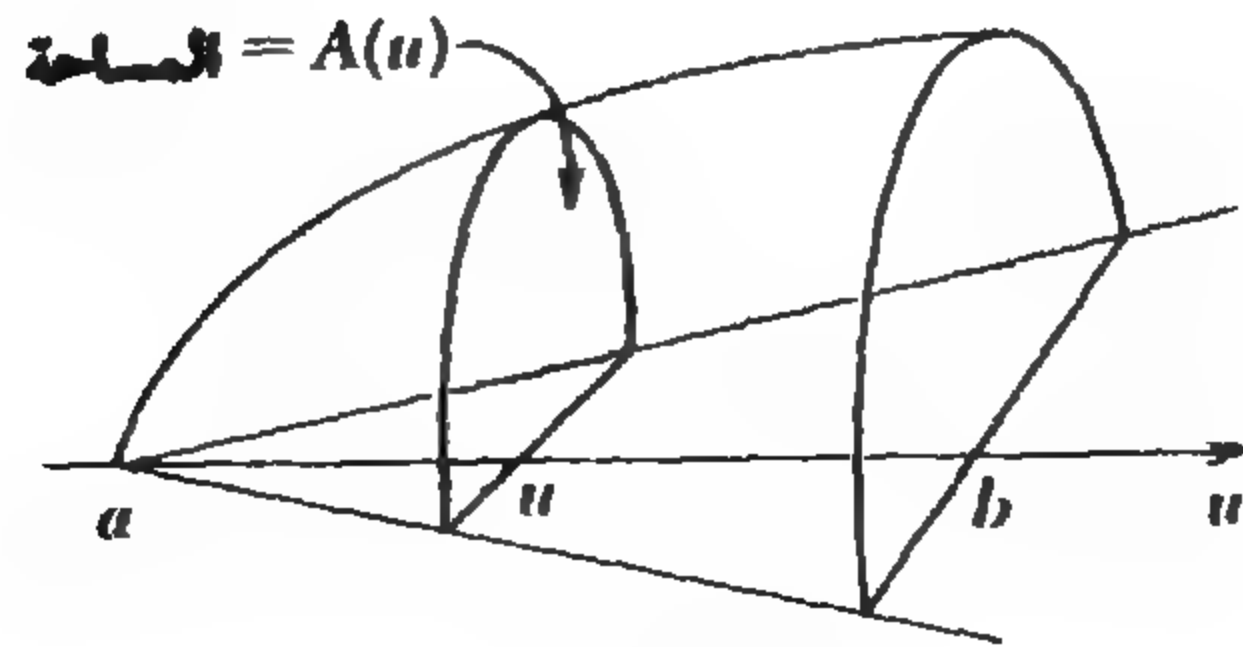
$$[a = u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n = b]$$

تجزئاً للفترة $[a, b]$. مرر مستوى ماراً بكل نقطة تجزئ عمودياً على المحور u (شكل ٢٧ - ٥) . هذه المستويات تقسم الجسم الى شرائح . سنقرب الى حجم كل شريحة . حاصل جمع هذه الشرائح سيكون تقريباً لحجم الجسم ، ومنه سوف نستطيع أن نوجد الحجم المضبوط للجسم .



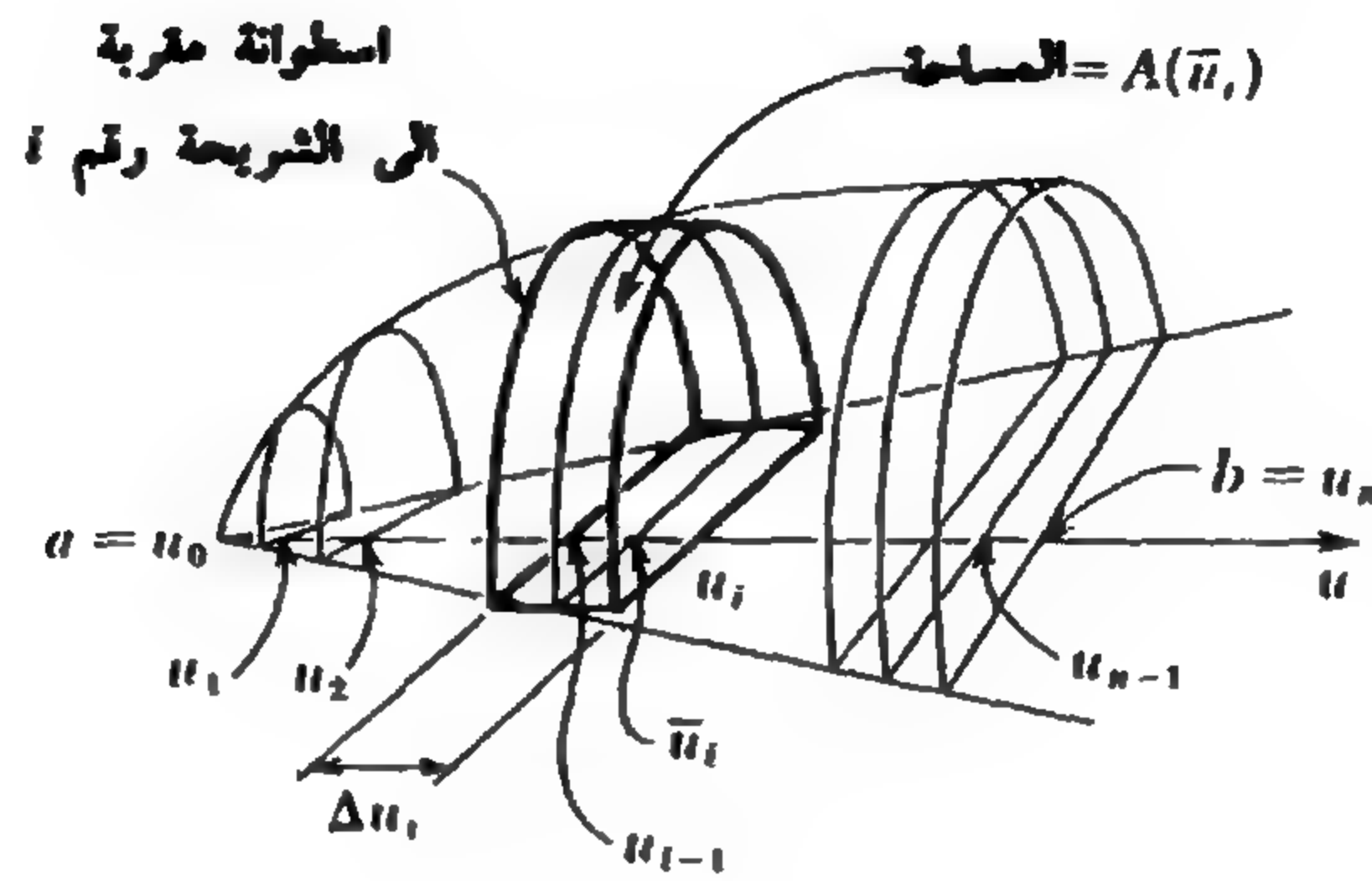
شكل ٢٥ - ٥

اسطوانتان . الحجم هو مساحة القاعدة مضروبة في الارتفاع



شكل ٢٦ - ٥

اختر نقطة \bar{u}_i في الفترة الجزئية $[u_{i-1}, u_i]$. المستوى المار بهذه النقطة عمودياً على المحور u يقطع الجسم في مقطع مساحته $A(\bar{u}_i)$. كون أسطوانة دائرية قائمة موازية للمحور u بهذا المقطع كمقطعها وبالمستويين المارين بالنقطتين u_{i-1} و u_i كنهايتيها . إذا كانت الفترة الجزئية صغيرة ، فإن هذه الاسطوانة هي قرص رقيق ، الا أنه ليس بالضرورة دائرياً وهو ينطبق على الشريحة رقم i عدداً بالتقريب من سطح الجسم . كلما زادت رقة الشريحة ، كلما زاد انطباقهما . حجم الاسطوانة هو تقريب لحجم الشريحة رقم i .



شكل ٢٧-٥

حجم الاسطوانة هو $A(\bar{u}_i) \Delta u_i$.

حجم الاسطوانة هو المساحة $A(\bar{u}_i)$ للمقطع عند \bar{u}_i مضروبة في سمك الاسطوانة $\Delta u_i = u_i - \bar{u}_{i-1}$ أي $A(\bar{u}_i) \Delta u_i$. إذا كونا أسطوانات مقربة ماثلة لكل شريحة ، فإن حاصل جمع أحجامها

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n A(\bar{u}_i) \Delta u_i$$

يكون تقريباً لحجم الجسم . هذا هو حاصل جمع ريمان للدالة A . سندرس فقط أجساماً واختيارات للمحور u حيث كل مستوى عمودي يقطع الجسم في مقطع مساحته $A(u)$ دالة متصلة لـ u .

حجم الجسم يمكن التقريب اليه كما نريد بحواصل جمع على الصورة (١) باستخدام تجزيئات رقيقة للغاية . واذن الحجم V يعطى بالضبط بنهاية حواصل الجمع هذه ،

$$V = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A(\bar{u}_i) \Delta u_i$$

حيث w هي معيار التجزئة . التكامل المعين هو رمز آخر لحاصل الجمع هذا . ، ومن ثم

$$V = \int_a^b A(u) du$$

هذا هو كل ما نستطيع أن نصل إليه حالياً . في مسألة خاصة ينبغي إيجاد تعبير صريح للمساحة $A(u)$ بدلالة u ثم إيجاد قيمة التكامل .

٥-١٦ حجم الجسم . اختر خطاً مستقيماً لمحور u ودع $A(u)$ ترمز لمساحة مقطع الجسم الناتج بالمستوى العمودي على المحور u عند النقطة u . حجم الجسم يعطى بالصيغة

$$(٢) \quad V = \int_a^b A(u) du.$$

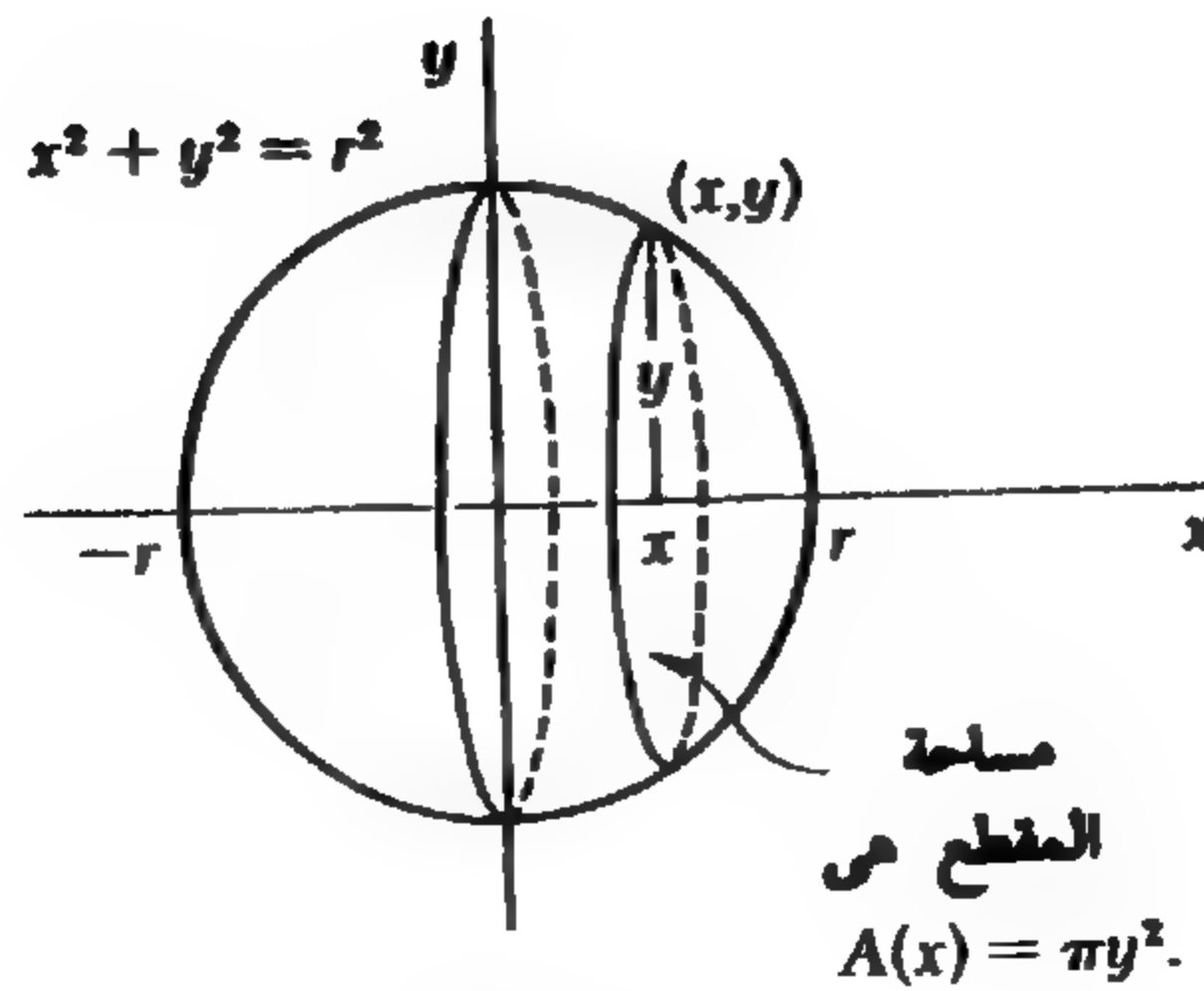
حدا التكامل a و b هما الاحداثيان u للموضعين المتطرفين للمستوى العمودي . المساحة $A(u)$ يجب أن تكون غير سالبة لجميع u في $[a, b]$.

بالتناظر مع المساحات ، يمكننا تعريف حجم جسم بالعدد $\int_a^b A(u) du$ ، لكن هذا التعريف معرض لنفس الانتقادات مثل تعريف المساحة كتكامل . يوجد تعريف للحجم يتغلب على هذه الاعتراضات ، لكن لا يمكن اعطاؤه هنا .

إذا دارت منطقة مستوية حول خط مستقيم ، فإن الجسم الناتج يسمى جسماً دورانياً . الاسطوانة الدائرية القائمة هي جسم دوراني ينشأ بدوران مستطيل حول أحد أضلاعه . الكرة هي جسم دوراني ينشأ بدوران دائرة حول خط مستقيم في مستواها خارج الدائرة . مثال ١ . أوجد حجم الكرة .

الكرة يمكن اعتبارها جسماً دورانياً ينشأ بدوران الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ حول المحور السيني (شكل ٥-٢٨) . نختار المحور السيني المحور u لأن المستويات العمودية عليه تقطع الكرة في دوائر ، وهي مناطق يمكن إيجاد مساحاتها . التكامل (٢) للحجم يصبح

$$(٣) \quad V = \int_a^b A(x) dx$$



شكل ٥-٢٨

حدا التكامل هما الاحداثيان x للموضعين المتطرفين الأيسر والأيمن للمستوى القاطع ، وهما r و $-r$. لتكن (x, y) نقطة على الدائرة المنشئة . مساحة المقطع عند النقطة x على المحور السيني هي $A(x) = \pi y^2$. بما أن $y^2 = r^2 - x^2$ ، فهذا يمكن التعبير عنه بدلالة x في الصورة $A(x) = \pi (r^2 - x^2)$ ، والصيغة (٣) تصبح

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_{-r}^r \pi(r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r \\ = \pi \left[\frac{2}{3} r^3 - \left(-\frac{2}{3} r^3 \right) \right] = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

كان في إمكاننا أيضاً إيجاد حجم نصف الكرة بالتكامل من 0 الى r ثم ضرب الناتج في 2 ؛ أيضاً كان في إمكاننا اختيار المحور الصادي المحور u .

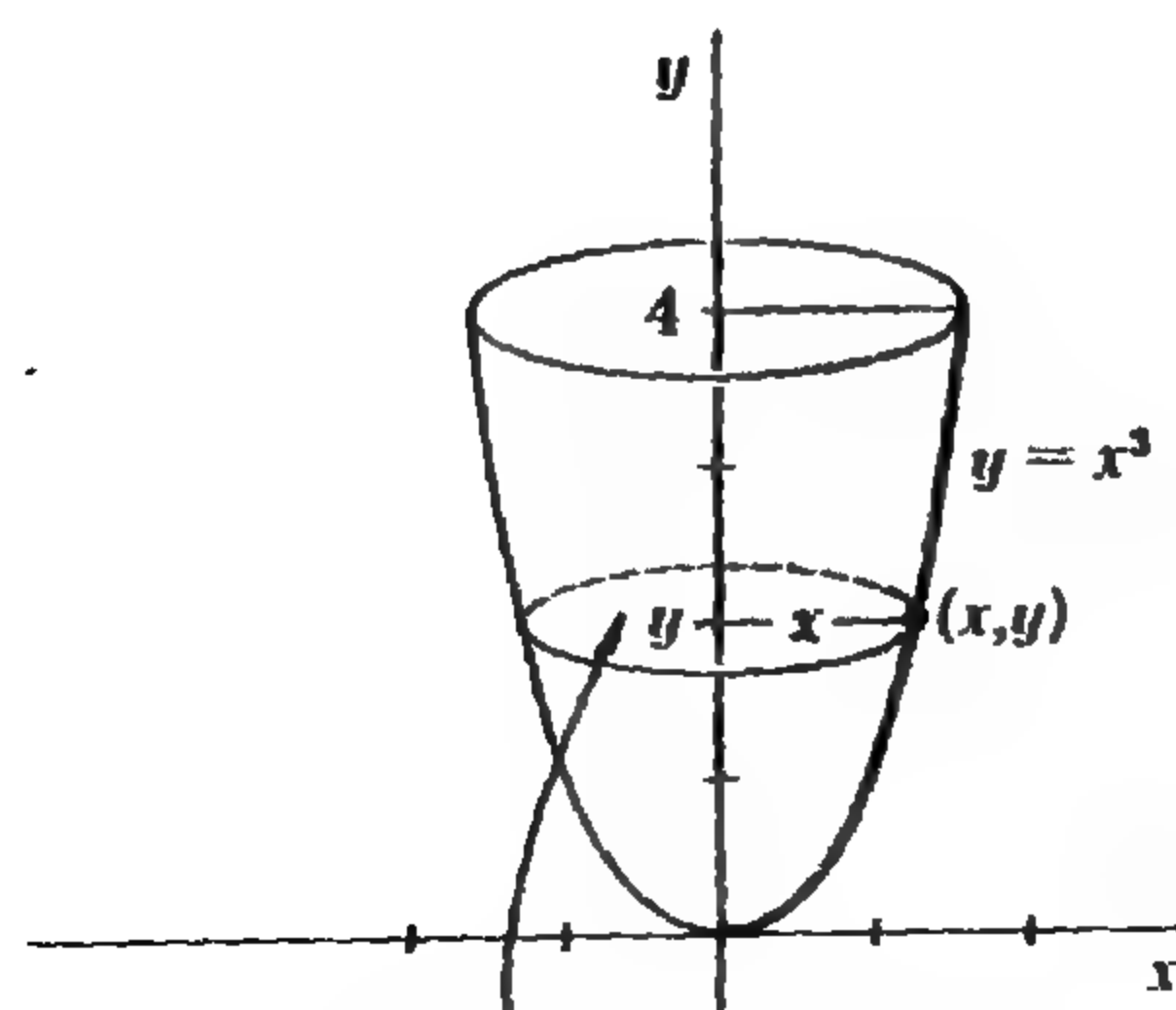
وحدات الحجم هي وحدات مكعبة . إذا كان في المثال السابق r مقيسة بالقدم ، الحجم يكون $\frac{4}{3} \pi r^3$ cu. ft . إذا قيست r بالسنتيمتر ، الحجم يكون $\frac{4}{3} \pi r^3$ cu. cm .

مثال ٢ . أوجد حجم الجسم الدوراني الناشء بدوران المنطقة في الربع الأول المحدود بالمنحنى

$y = x^3$ والمحور الصادي والخط المستقيم $y = 4$ حول المحور الصادي .

أولاً اعمل تخطيطاً وحدد موقع المنطقة ، متأكداً أنها محدودة بأكملها بالمنحنيات المعطاة . المنطقة والجسم الدوراني الذي تنشئه موضحان في الشكل ٢٩-٥ . خذ المحور الصادي المحور u لأن المستويات العمودية عليه تقطع الجسم في دوائر يمكن إيجاد مساحاتها . حدا التكامل a و b هما الاحداثيان y للموضعين المتطرفين للمستوى القاطع ، أي 4 و 0 . واذن من (٢) ، يكون

$$V = \int_0^4 A(y) dy. \quad (٤)$$



$$A(y) = \pi x^2 = \text{المساحة}$$

شكل ٢٩-٥

إذا كانت (x, y) نقطة على المنحنى ، فإن مساحة المقطع الدائري عند النقطة y على المحور
الصادى هي $A(y) = \pi x^2$. باستخدام معادلة المنحنى ، $x = y^{1/3}$ ، هذه يمكن التعبير عنها
بدلالة y ، والتكامل (٤) يصبح

$$V = \int_0^4 A(y) dy = \int_0^4 \pi x^2 dy = \pi \int_0^4 y^{2/3} dy = \pi \left[\frac{3}{5} y^{5/3} \right]_0^4 = \frac{3}{5} \pi 4^{5/3}$$

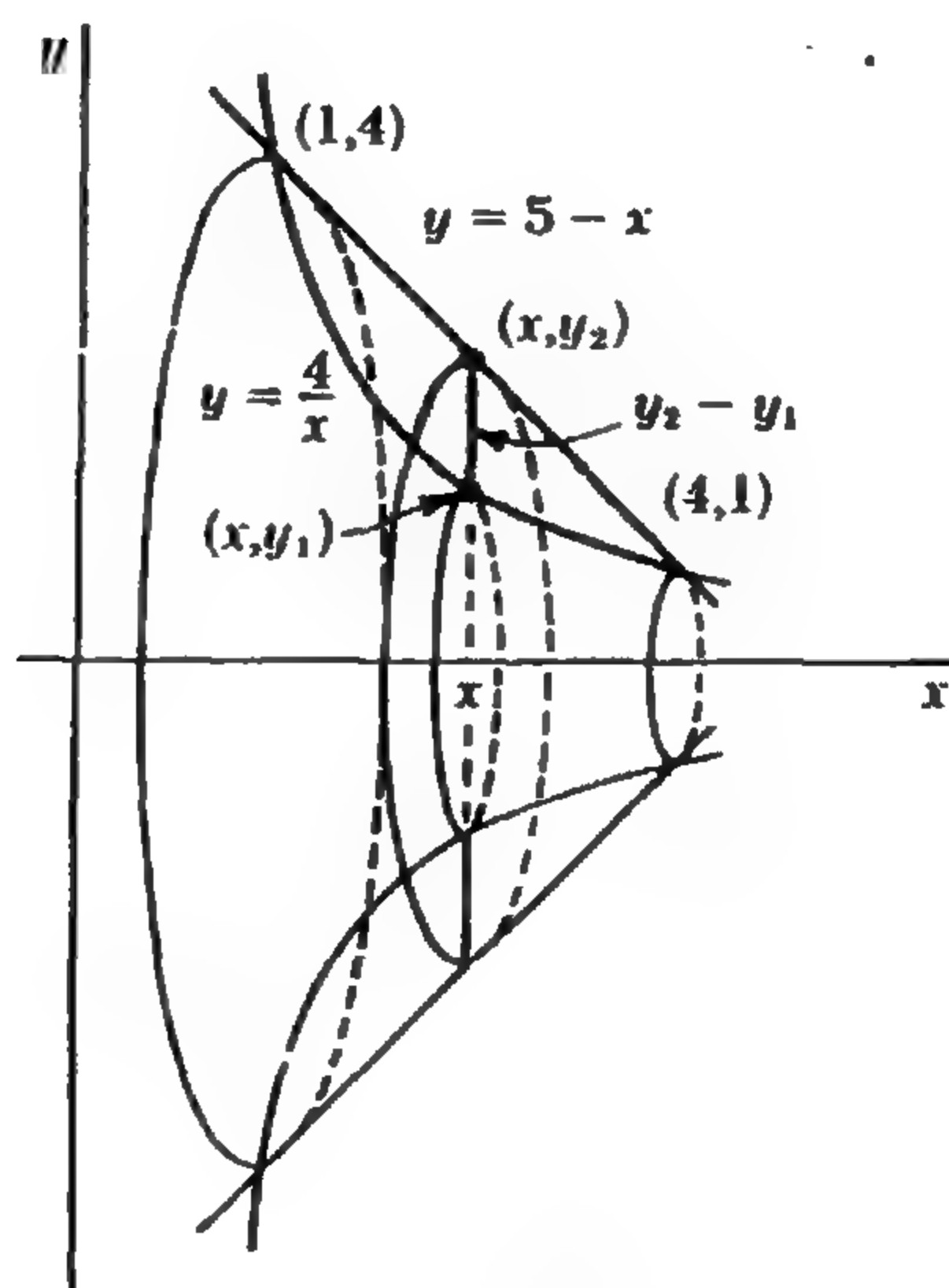
اختيار المحور السينى كمحور u فى المثال السابق مع أنه ممكن ، الا أنه غير عملى . مقاطع
الجسم ستكون مناطق غير عادية مساحتها من الصعب إيجادها .

مثال ٣ . أوجد حجم الجسم الناشئ بدوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $y = 4/x$ والخط
المستقيم $y = 5 - x$ ، حول المحور السينى .

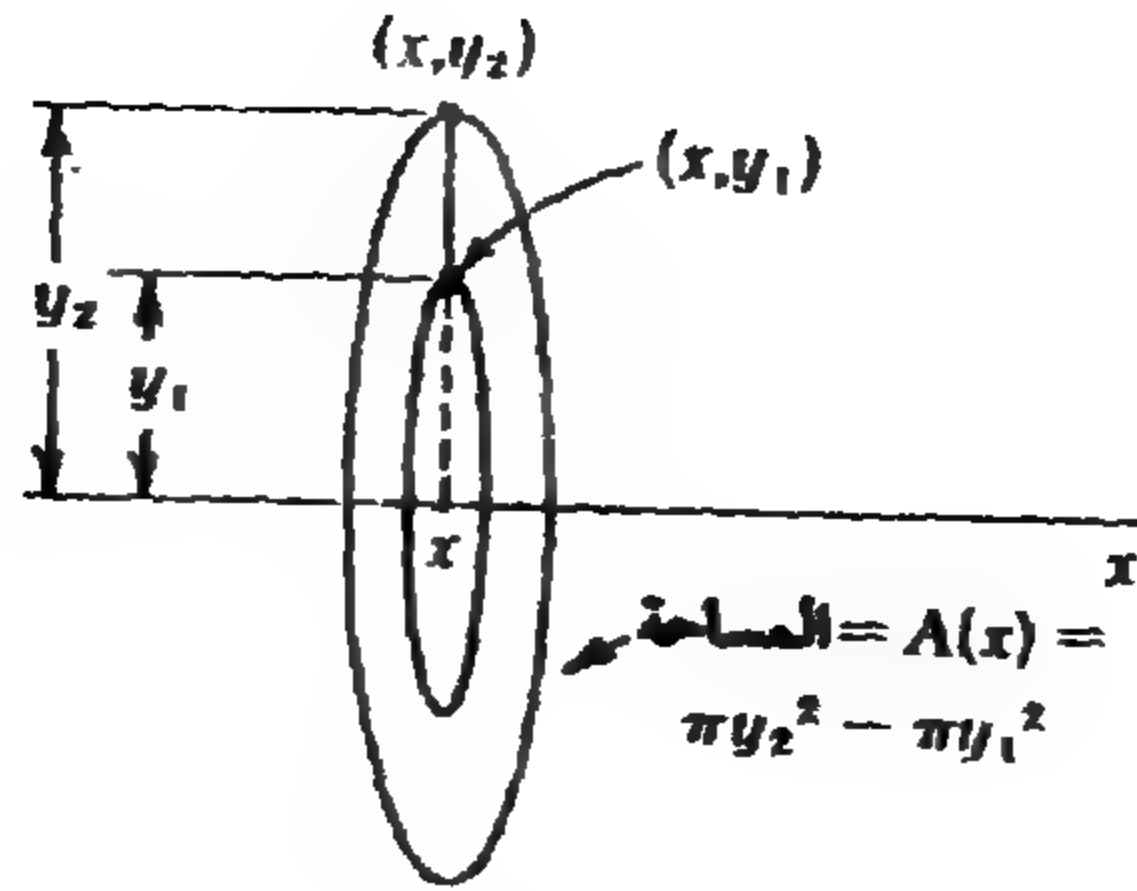
المنطقة والجسم الناشئ عنها موضحان فى الشكل ٥ - ٣٠ . أى مستوى عمودى على المحور
السينى يقطع الجسم فى منطقة على شكل حلقة محدودة بدائرتين متحدتى المركز ، كما هو موضح
الشكل ٥ - ٣١ . لذلك نأخذ المحور السينى المحور u . لتكن y_1 و y_2 نصفى قطرى الدائرة
الداخلية والدائرة الخارجية . من معادلتى المنحنين يكون $y_2 = 5 - x$ و $y_1 = 4/x$. مساحة الحلقة
عند النقطة x على المحور السينى هى الفرق بين مساحتى الدائرة الخارجية والدائرة الداخلية

$$A(x) = \pi y_2^2 - \pi y_1^2 = \pi \left[(5 - x)^2 - \frac{16}{x^2} \right]$$

حدا التكامل هما الاحداثيان x للموضعين المتطرفين للمستوى القاطع ، وهما النقطتان حيث
المنحنى والخط المستقيم يتقابلان . بحل معادلتيهما معاً ، نرى أن حدى التكامل هما ١ و ٤ .



شكل ٥ - ٣٠



شكل ٣١-٥

لذلك يكون

$$\begin{aligned}
 V &= \int_a^b A(x) dx = \int_1^4 \pi \left[(5-x)^2 - \frac{16}{x^2} \right] dx \\
 &= \pi \int_1^4 \left(25 - 10x + x^2 - \frac{16}{x^2} \right) dx \\
 &= \pi \left[25x - 5x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{16}{x} \right]_1^4 = 9\pi
 \end{aligned}$$

مثال ٤ . أوجد حجم جسم على شكل بوق ناشيء بدوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $x = 1$ و $y = 0$ و $x = \frac{1}{2}\sqrt{y}$ حول الخط المستقيم $x = 1$.

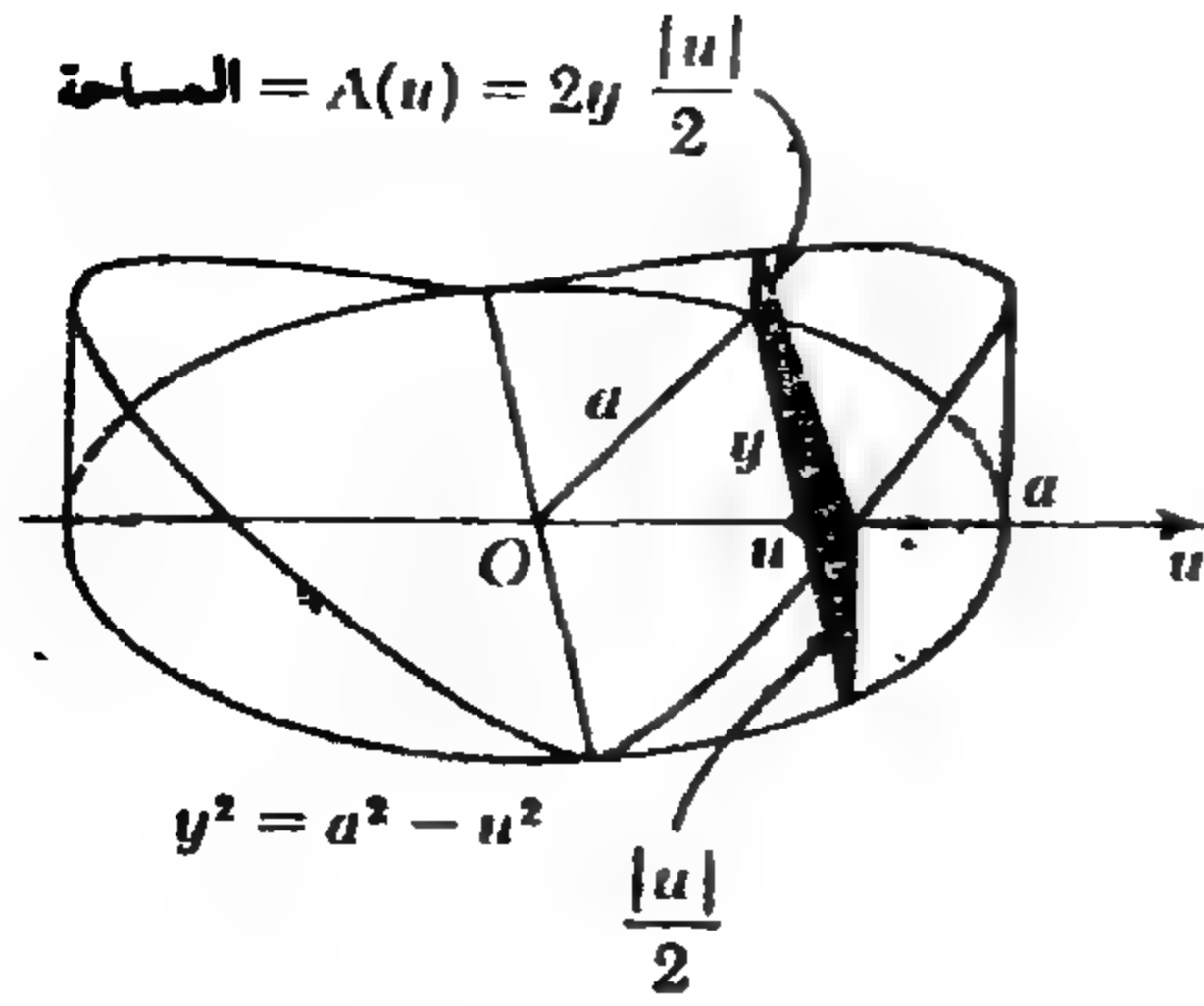
المنحنى هو النصف الأيمن للقطع المكافئ $y = 4x^2$. المنطقة والجسم الناشء عنها موضحان في الشكل ٣٢-٥. أي مستوى عمودي على المحور y يقطع الجسم في مقطع دائري. إذا كانت (x, y) هي نقطة على المنحنى الناشء، فإن نصف قطر الدائرة هو $1 - x$ ومساحة المقطع عند النقطة y على المحور الصادي هي

$$A(y) = \pi(1-x)^2 = \pi \left(1 - \frac{\sqrt{y}}{2} \right)^2$$

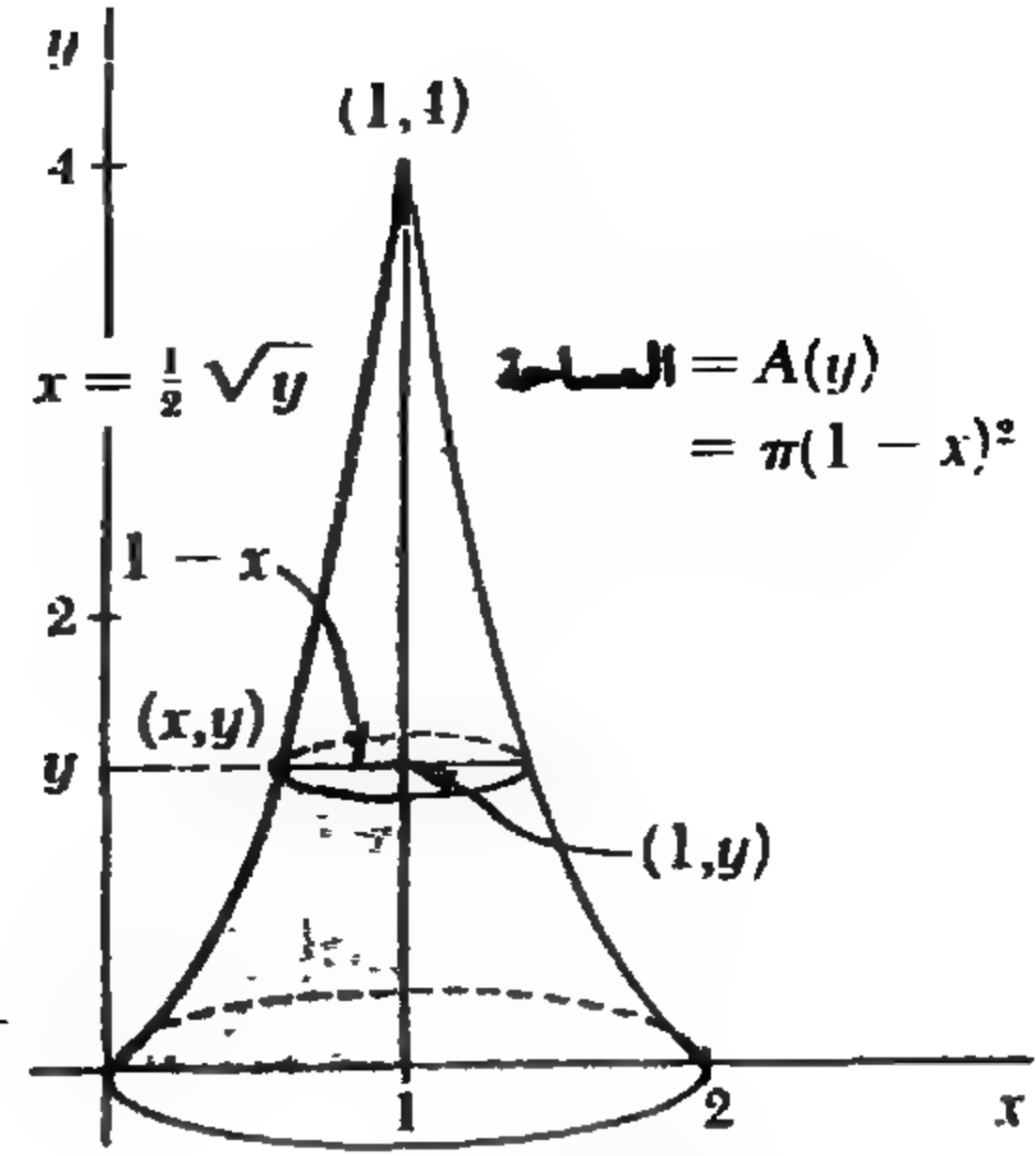
النقطة على المنحنى $x = \frac{1}{2}\sqrt{y}$ التي إحداثياتها السيني 1 ، إحداثياتها الصادي 4 . لذلك حدا التكامل هما $y = 0$ و $y = 4$ ، ويكون

$$\begin{aligned}
 V &= \int_a^b A(y) dy = \pi \int_0^4 \left(1 - \frac{\sqrt{y}}{2} \right)^2 dy \\
 &= \pi \int_0^4 \left(1 - \sqrt{y} + \frac{y}{4} \right) dy = \pi \left[y - \frac{2}{3}y^{3/2} + \frac{y^2}{8} \right]_0^4 = \frac{4}{3}\pi
 \end{aligned}$$

مثال ٥ . قاعدة جسم معين هي دائرة. كل مقطع عمودي على قطر ثابت للدائرة هو مستطيل ارتفاعه نصف بعد المقطع عن مركز الدائرة. أوجد حجم الجسم.



شكل ٣٣-٥



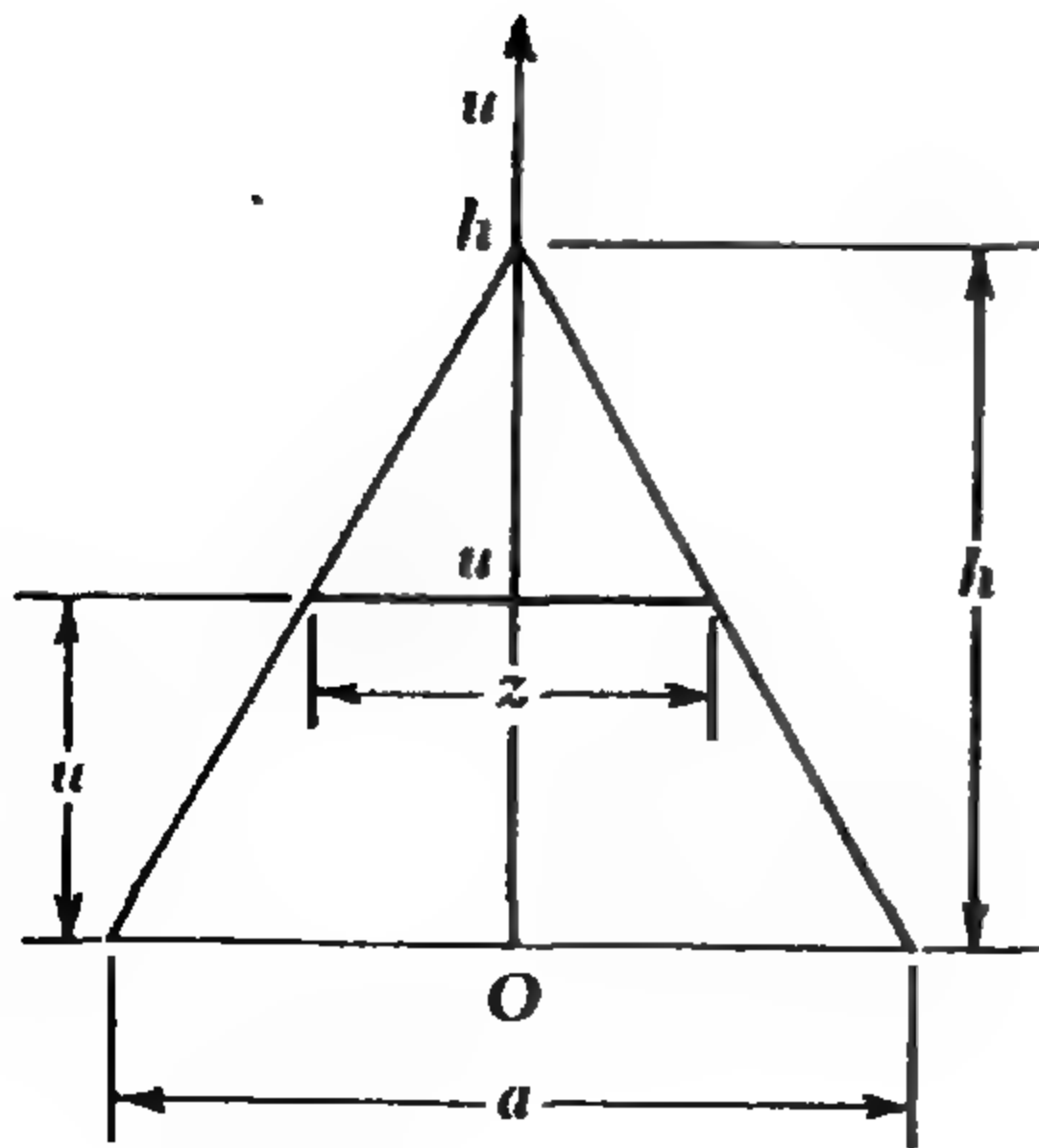
شكل ٣٢-٥

الجسم موضح في الشكل ٣٣-٥ . ليكن المحور u هو خط القطر الثابت ولتكن نقطة الأصل عند مركز الدائرة . ليكن $2y$ طول قاعدة المستطيل عند النقطة u على المحور u . اذا كان a نصف قطر الدائرة ، فان $y^2 = a^2 - u^2$. بما أن u يمكن أن تكون سالبة ، ارتفاع المستطيل لا يكون $u/2$ ، لكن $|u|/2$ ، مساحة المستطيل هي

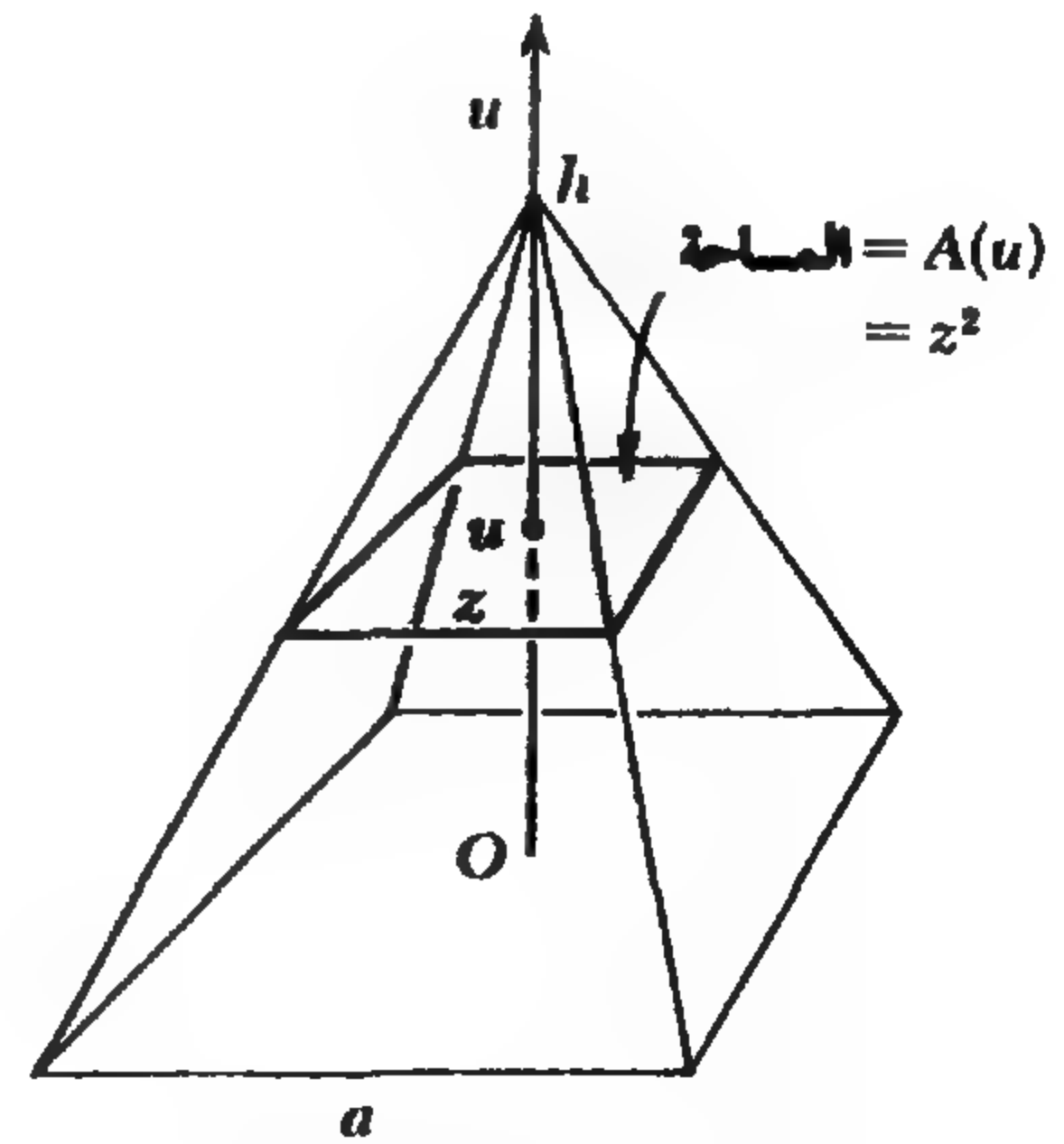
$$A(u) = 2y \frac{|u|}{2} = \sqrt{a^2 - u^2} |u|$$

سنوجد الحجم بالتكامل على النصف الأيمن للجسم ومضاعفة النتيجة . عندما $0 \leq u \leq a$ يكون $|u| = u$ ، والحجم V للجسم بأكمله يكون

$$V = 2 \int_0^a A(u) du = 2 \int_0^a \sqrt{a^2 - u^2} u du = -\frac{2}{3} (a^2 - u^2)^{3/2} \Big|_0^a = \frac{2}{3} a^3$$



شكل ٣٥-٥



شكل ٣٤-٥

مثال ٦ . أثبت أن حجم الهرم المنتظم الذى قاعدته مربعة الشكل هو $\frac{1}{3} Bh$ ، حيث B مساحة القاعدة ، h الارتفاع .

الهرم موضح فى الشكل ٥ - ٣٤ . المقاطع الموازية للقاعدة تكون مربعات . لذلك نأخذ المحور u متجهاً لأعلى ومنطبقاً على محور الهرم . ونقطة الأصل فى القاعدة . حجم الهرم يعطى بالتكامل $V = \int_0^h A(u) du$ ، حيث $A(u)$ هى مساحة المقطع الأفقى عند النقطة u على المحور u . يجب أن نوجد تعبيراً لـ $A(u)$ بدلالة u . المقطع الرأسى للهرم ، الناشئ بمستوى مار بالمحور ومواز لأحد أحرف القاعدة ، موضح فى الشكل ٥ - ٣٥ . لتكن z هى طول ضلع المقطع الأفقى المربع ، فيكون $A(u) = z^2$. اذا كانت a طول ضلع قاعدة الهرم ، فان من تشابه المثلثات يكون $(h-u)/h = z/a$. واذن $A(u) = z^2 = (a^2/h^2)(h-u)^2$ و $z = (a/h)(h-u)$ ويكون

$$V = \int_0^h A(u) du = \int_0^h \frac{a^2}{h^2} (h-u)^2 du$$

$$= -\frac{a^2}{3h^2} (h-u)^3 \Big|_0^h = \frac{1}{3} a^2 h = \frac{1}{3} Bh.$$

مسائل

أوجد حجم الجسم الناشئ بدوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات المعطاة حول المحور السينى .

١ - $x + y = 3$ ، ومحورا الاحداثيات ٢ - $x = 2$ ، والمحور السينى ، $y = x^2$

- | | |
|---|---|
| ٣ - $y^2 = 4 - x, x = 2$ | ٤ - $x^2 + y^2 = 25, x = -5, x = 3$ |
| ٥ - $y = x^2(x - 3), x \text{ axis}$ | ٦ - $(x + 1)y = 2, y = 0, x = 0, x = 2$ |
| ٧ - $4x^2 + 9y^2 = 36$ | ٨ - $y = x, y = 2, x = 0$ |
| ٩ - $y = 4x - x^2, y = x$ | ١٠ - $x^2 = 4y, x^2 = 5 - y$ |
| ١١ - $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, x = 0, y = 0$ | ١٢ - $y = 4x - x^2, y = x, y = 0$ |

أوجد حجم الجسم الناشئ بدوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات المعطاة حول المحور الصادى .

- | | |
|---|--|
| ١٣ - $y = 16 - x^2, y = 0$ | ١٤ - $y = x^{2/3}, y = 4$ |
| ١٥ - $y = 2\sqrt{x+2}, x = 0, y = 0, y = 2$ | ١٦ - $x^2 = 4y, x^2 = 5 - y$ |
| ١٧ - $x^2 - y^2/2 = 1, y = 4, y = -4$ | ١٨ - $xy = 4, x = 2, y = 4$ |
| ١٩ - $y^2 = ax, y = 0, x = a (a > 0)$ | ٢٠ - $x^2 + y^2 = 4, x + y = -2$ المنطقة |
| ٢١ - $xy = 6, x + y = 7$ | ٢٢ - $y = 4x - x^2, y = x$ |

- ٢٣ - استخدم قاعدة شبه المنحرف للتقريب إلى حجم جسم ناشئ بدوران المنطقة تحت المنحنى $y = 1/\sqrt{x}$ بين $x = 4$ و $x = \frac{1}{2}$ حول المحور السيني .
- ٢٤ - أوجد حجم الجسم الدوراني الناشئ بدوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $x = 2$ و $y = 0$ و $y = x^2$ حول الخط المستقيم .
(أ) $y = 0$ ، (ب) $x = 0$ ، (ج) $x = 2$ ، (د) $y = 4$.
- ٢٥ - أوجد حجم الجسم الدوراني الناشئ بدوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = 4$ و $x = 0$ و $y = x^2$ حول الخط المستقيم :
(أ) $x = 0$ ، (ب) $y = 0$ ، (ج) $y = 4$ ، (د) $x = 2$.
- أوجد حجم الجسم الناشئ بدوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات المعطاة حول الخط المعطى :
- ٢٦ - $y = x^3$ ، المحور الصادي ، $y = 8$ ؛ الدوران حول الخط المستقيم $y = 8$.
- ٢٧ - $y = 4$ و $x = -2$ و $y = 1/x^2$ ؛ الدوران حول الخط المستقيم $y = 4$.
- ٢٨ - $y^2 = x^3$ ، $x = 4$ ؛ الدوران حول الخط المستقيم $x = 4$.
- ٢٩ - $y = x^2$ ، $y = 4$ ؛ الدوران حول الخط المستقيم $y = -2$.
- ٣٠ - $y = \sqrt{x-1}$ ، $y = 7-x$ ، $x = 10$ ؛ الدوران حول الخط المستقيم $x = 10$.
- ٣١ - $y = 2x$ ، $y = 3-x$ ، $y = 0$ ، $x = 2$ ؛ الدوران حول الخط المستقيم $x = 2$.
- ٣٢ - $y = x^3$ ، $y = 0$ ، $x = 1$ ؛ الدوران حول الخط المستقيم $x = 2$.
- ٣٣ - $xy = 6$ ، $y = 0$ ، $x = 1$ ، $x = 2$ ؛ الدوران حول المحور الصادي .
- ٣٤ - $xy^2 = 1$ (الربع الأول) ، $x = 2$ و $x = 1$ و $y = 0$ ؛ الدوران حول الخط المستقيم $x = 1$.
- ٣٥ - الجسم الناشئ بدوران قطع ناقص حول أحد محوريه يسمى مجسم ناقص دوراني . أوجد حجم المجسم الناقص الدوراني الناشئ بدوران القطع الناقص $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ حول
(أ) المحور السيني ، (ب) المحور الصادي . اختبر إجابتك بأخذ حالة خاصة للقطع الناقص .
- ٣٦ - (أ) القطعة المحدودة بالقطع الزائد $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ والخط المستقيم $x = d$ حيث $d > a$ ، دارت حول المحور السيني . أوجد حجم الجسم الناشئ .
(ب) أوجد حجم الجسم الناشئ بدوران المنطقة في (أ) حول المحور الصادي .
- ٣٧ - المنطقة المحدودة بالقطع المكافئ ووتره البؤري العمودي دارت حول الوتر البؤري العمودي . أوجد حجم الجسم الناشئ .
- ٣٨ - المنطقة المحدودة بالقطع المكافئ ووتره البؤري العمودي دارت حول الدليل . أوجد حجم الجسم الناتج .
- ٣٩ - رسم مماس للقطع المكافئ $y^2 = 2(x-1)$ عند نقطة إحداثياتها السيني 3 . أوجد حجم

الجسم الناشئ بالدوران حول المحور السيني للمنطقة المحدودة بالمماس ، المحور السيني ، والقطع المكافئ .

٤٠ - قطعة ارتفاعها h قطعت من كرة نصف قطرها r بمستوى . أثبت أن حجم القطعة هو $\pi h^2(r - h/3)$.

٤١ - أثبت أن حجم المخروط الدائري القائم هو $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ ، حيث r هو نصف قطر القاعدة ، h الارتفاع . [رشاد : أدر حول المحور السيني الخط المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة (h, r) .

٤٢ - أثبت أن حجم مخروط دائري قائم ناقص هو $\frac{1}{3} \pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$ ، حيث r_1 و r_2 هما نصف قطر القاعدتين ، h هي المسافة العمودية بينهما .

٤٣ - المنطقة المحدودة بالمنحنى $y = 7 - x^2$ والخط المستقيم $y = 6$ دارت حول الخط المستقيم . أوجد الحجم بالطريقة العادية وأيضاً بنقل المحاور بحيث أن الخط المستقيم $y = 6$ يصبح المحور السيني .

٤٤ - يصب الماء في تجويف على شكل نصف كرة نصف قطرها 8 in بمعدل 3 cu in / sec . ما معدل ارتفاع مستوى الماء عندما يكون (أ) في منتصف المسافة الى القمة ، (ب) عند القمة ؟

٤٥ - جسم ناشئ بدوران المنطقة تحت المنحنى $y = f(x)$ بين x و 0 حول المحور السيني . اذا كان حجم الجسم هو $3x^2 + x^3$ ، لكل x ، فأوجد $f(x)$.

٤٦ - (أ) رسمت أوتار للقطع المكافئ $y^2 = x$ عمودية على محور السينات عند كل نقطة بالفترة $0 \leq x \leq 6$. على كل وتر أقيم مربع عمودي على مستوى القطع الناقص بضلع واحد في المستوى . أوجد حجم الجسم المنشأ بهذه الكيفية .

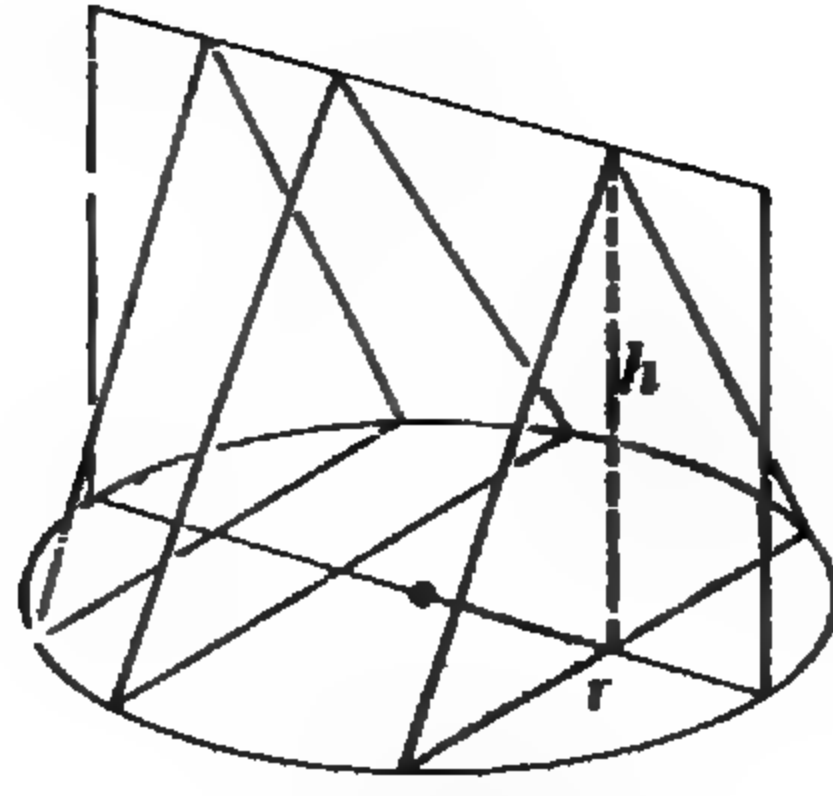
(ب) اذا كان بدلا من المربعات أقيمت مثلثات متساوية الأضلاع قاعدتها على أوتار القطع المكافئ في (أ) ، أوجد حجم الجسم المنشأ بهذه الكيفية .

٤٧ - جسم قاعدته دائرية . أوجد حجمه اذا كان كل مقطع عمودي على قطر ثابت بالقاعدة هو (أ) مربع بضلع واحد في القاعدة ، (ب) مثلث متساوي الساقين قاعدته في قاعدة الجسم وارتفاعه مساو لطول قاعدته ، (ج) مثلث قائم متساوي الساقين وتره في القاعدة ، (د) مثلث متساوي الأضلاع بضلع في القاعدة .

٤٨ - قاعدة جسم هي قطع ناقص طولاً محوريه الأكبر والأصغر 8 in و 12 . أوجد حجم الجسم اذا كان كل مقطع عمودي على المحور الأكبر هو (أ) مربع ، (ب) مثلث متساوي الساقين ارتفاعه نصف طول قاعدته ، (ج) مثلث متساوي الأضلاع .

٤٩ - مجسم شبه مخروطي هو جسم قاعدته دائرة نصف قطرها r وكل مقطع عمودي على قطر ثابت مثلث متساوي الساقين ارتفاعه h (شكل ٥ - ٣٦) . أوجد حجمه .

(ارشاد : $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi a^2}{2}$)



شكل ٣٦-٥
مجسم شبه مخروطي

٥٠ - جسم معين له القطعة المستقيمة AB محور تماثل . كل مقطع بمستوى عمودي على AB عند النقطة X يكون مربعاً طول ضلعه $2\sqrt{|AX|}$ ومركزة على AB . أوجد حجم الجسم اذا كانت القطعة AB طولها 9 in .

٥١ - على كل وتر للمقطع الناقص $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ عمودي على المحور السيني أقبل مثلث قائم متساوي الساقين عمودي على مستوى المقطع الناقص وطرفا وتره على المقطع الناقص . أوجد حجم الجسم الناشئ بهذه الكيفية .

٥٢ - قطعة مستقيمة طولها 3 ft تقع في مستوى معلوم . يتحرك مستطيل متغير بحيث يكون دائماً عمودياً على الخط بضلع واحد في المستوى وركن واحد على الخط . ارتفاع المستطيل يساوي بعد المستطيل عن أول القطعة ، وطول الضلع في المستوى مربع هذا البعد . أوجد حجم الجسم الناشئ بالمستطيل عند عبوره القطعة .

٥٣ - أوجد حجم خابور قطع من أسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها 2 بمستويين ، أحدهما عمودي على محور الاسطوانة والآخر يقطع المستوى الأول بزاوية 45° ماراً بقطر بالمقطع الدائري الناشئ بالمستوى الأول .

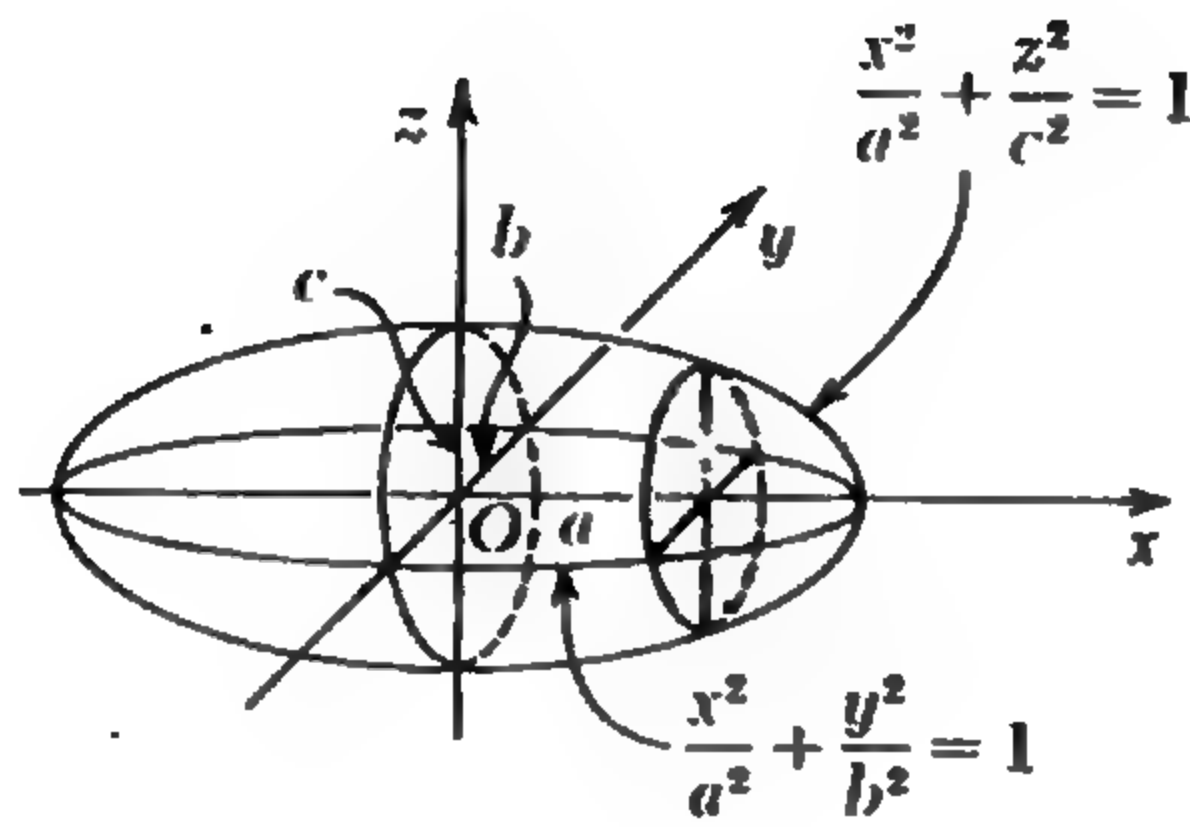
٥٤ - مجسم ناشئ من دائرة متغيرة تتحرك بحيث يكون مستواها عمودياً على المحور الصادي وطرفا قطر على المنحنيين $y = 4x^2$ و $y = x^2$ في الربع الأول . تتحرك الدائرة من نقطة الأصل الى النقطتين حيث الاعدائي الصادي 4 . أوجد حجم المجسم .

٥٥ - جسم قاعدته القطعة من المقطع المكافئ $y^2 = 4px$ المقطوعة بوتره البؤري العمودي . كل مقطع عمودي على الوتر البؤري العمودي هو مستطيل ارتفاعه ضعف مربع بعد المقطع عن محور المقطع المكافئ . أوجد حجم المجسم .

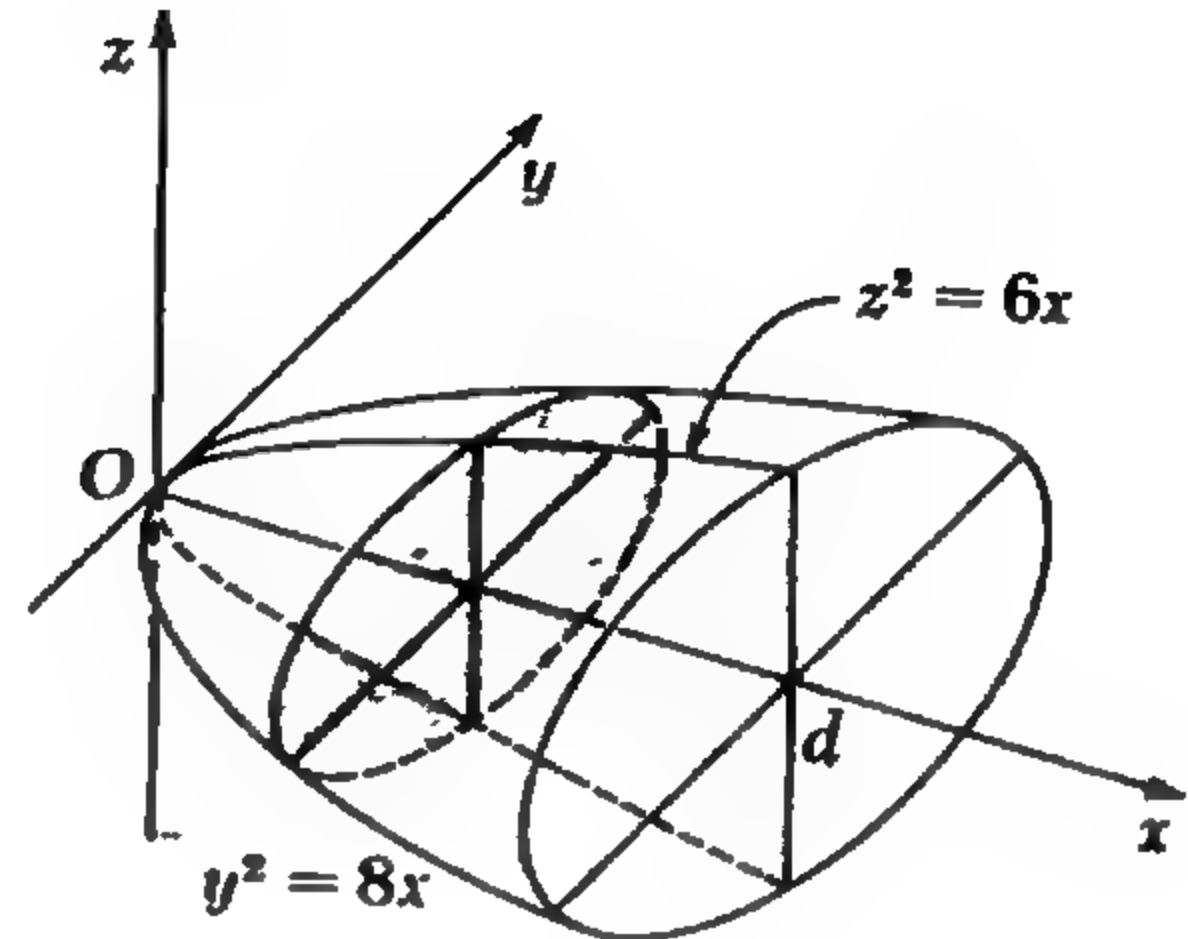
٥٦ - دائرتان لهما قطر مشترك وتقعان في مستويين متعامدين . أوجد حجم الجسم المنشأ بمربع يتحرك عمودياً على القطر المشترك ورأسان متقابلان منه على دائرة والرأسان الآخران منه على الدائرة الأخرى .

٥٧ - ليكن المحور z مقاماً عمودياً على المحور السيني x والمحور الصادي y ونقطة الأصل عليه عند نقطة الأصل المشتركة بينهما (شكل ٣٧-٥) . قطع ناقص متغير يتحرك عمودياً على

المحور السيني بحيث يكون مركزه على المحور السيني وطرفا محوره الأكبر على القطع المكافئ $y^2 = 8x$ في المستوى xy وطرفا محوره الأصغر على القطع المكافئ $z^2 = 6x$ في المستوى xz . القطع الناقص يتحرك من نقطة الأصل الى النقطة $x = d$. الجسم الناشئ بهذه الكيفية مجسماً مكافئاً ناقصاً. أوجد حجمه (ارشاد : مساحة القطع الناقص هي πab ، حيث a و b هما طولاً نصف المحور الأكبر ونصف المحور الأصغر).



شكل ٣٨-٥
المجسم الناقص



شكل ٣٧-٥
المجسم المكافئ الناقص

٥٨- ليكن المحور z مقاماً عمودياً على المحور السيني x والمحور الصادي y ونقطة الأصل عليه عند نقطة الأصل المشتركة بينهما. يتحرك قطع ناقص متغير عمودياً على المحور x وطرفا محوره الأكبر على القطع الناقص $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ في المستوى xy وطرفا محوره الأصغر على القطع الناقص $x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1$ في المستوى xz (شكل ٣٨-٥). الجسم الناشئ بهذه الكيفية يسمى مجسماً ناقصياً. أوجد حجمه. (ارشاد : مساحة القطع الناقص هي πab ، حيث a و b هما طولاً نصف المحور الأكبر ونصف المحور الأصغر .) اختبر اجابتك بملاحظة أنه عندما $a = b = c$ ، المجسم الناقص يصبح كرة .

٥٩- حفر ثقب أسطوانى نصف قطره a داخل كرة نصف قطرها $b < a$ على طول قطر . أوجد حجم الجزء المتبقى من الكرة .

٦٠- غطاء لعمود بوسته يتكون من النصف الأعلى لاسطوانتين أفقيتين متقاطعتين نصفاً قطريهما متساويان ومحاورهما متعامدان (شكل ٣٩-٥) . أوجد حجم الغطاء .

٦١- جسم له قاعدة دائرية . كل مقطع عمودى على قطر ثابت هو قطع مكافئ بؤرته في مستوى الدائرة . أوجد حجم الجسم .

التكامل بتغيير المتغير •

طريقة كثيراً ما تكون مفيدة في تقييم التكاملات تتضمن تغيير المتغير . نشرح هذه الطريقة بالتكامل

$$(١) \quad \int \sqrt{5x+4} \, dx$$

ونشرح فيما بعد لماذا تكون هذه الطريقة صحيحة . ضع $u = 5x + 4$ ، فيكون

$$(٢) \quad dx = \frac{1}{5} du \quad \text{و} \quad x = \frac{u-4}{5}$$

شامل dx في (١) كعنصر تفاضلى ، ومستخدماً المعادلتين في (٢) عبر عن التكامل بدلالة u و du :

$$\int \sqrt{5x+4} \, dx = \int \sqrt{u} \, \frac{1}{5} du = \frac{1}{5} \int \sqrt{u} \, du = \frac{2}{15} u^{3/2}$$

نستبدل الآن u بـ $5x + 4$ لنحصل على الاجابة بدلالة x :

$$\int \sqrt{5x+4} \, dx = \frac{2}{15} (5x+4)^{3/2}$$

كان في الامكان أيضاً حساب قيمة التكامل ، وربما بسهولة أكثر ، بطريقتنا الأسبق ، بملاحظة أنه على الصورة

$$\int g^{1/2}(x) g'(x) \, dx$$

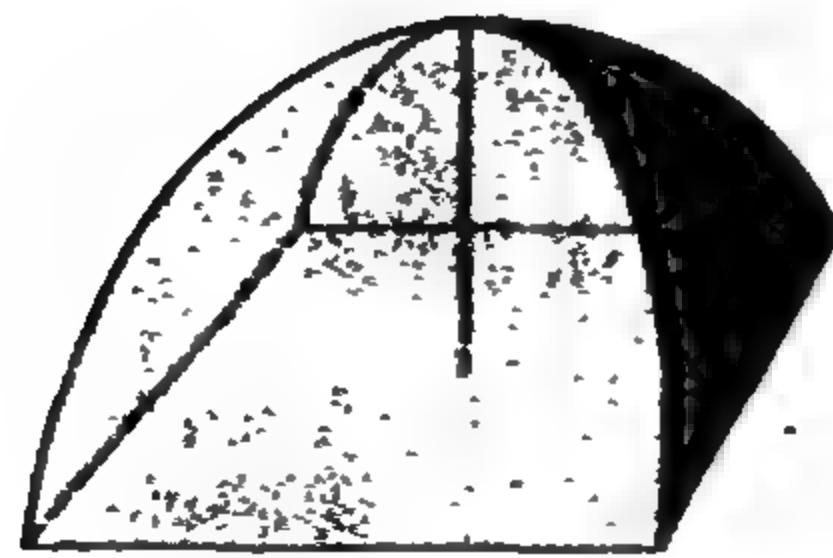
حيث $g(x) = 5x + 4$ ، ما عدا لعامل ثابت .

الطريقة لاي تكامل $\int f(x) \, dx$ مماثلة .

(٣)

$$x = g(u).$$

ضع



شكل ٣٩-٥

حيث g يمكن أن تكون أى دالة قابلة للتفاضل لكن عملياً تختار بعين الاعتبار لتبسيط الدالة المكاملة . فى مثالنا نضع $x = g(u) = (u-4)/5$ لأن بهذا الاختيار $\sqrt{5x+4}$ تصبح الجذر الأبسط \sqrt{u} ، من (٣) ، يكون

$$(٤) \quad dx = g'(u) \, du$$

• نستخدم هنا المادة السابقة عن العناصر التفاضلية بالجزء الأول من البند ١٤-٤

بمعاملة dx في $\int f(x) dx$ كعنصر تفاضلي وباستخدام (٣) و (٤) ، نعبر عن $\int f(x) dx$ بدلالة u و du :

$$(٥) \quad \int f(x) dx = \int f(g(u))g'(u) du = \int s(u) du$$

حيث $s(u) = f(g(u))g'(u)$. بعد أن أجرينا تغيير المتغير ، نحسب قيمة التكامل الأخير في (٥) ، إذا أمكننا ذلك ، فنحصل على

$$\int f(x) dx = \int s(u) du = S(u)$$

حيث S معكوس تفاضلي للدالة s . النتيجة الآن معبر عنها بدلالة u . من المرغوب فيه أنها تكون بدلالة x . هذا يكون ممكناً إذا كانت (٣) يمكن حلها لـ u بدلالة x ، لأنه عندئذ يمكننا استبدال u أينما تظهر في $S(u)$ بقيمتها بدلالة x . في مثالنا أمكننا عمل ذلك . هذه الطريقة تخفى افتراضاً لم يبرر في اشتقاق المعادلة (٥) . dx في $\int f(x) dx$ عولجت كأنها عنصر تفاضلي بينما في الواقع هي مجرد جزء من رمز المعكوس التفاضلي للدالة f . صحة المعادلة الأولى في (٥) يجب إثباتها إذا كنا لتأكد أن طريقة تغيير المتغير دائماً تعطي الاجابات الصحيحة . لتكن F معكوساً تفاضلياً لـ f ، فيكون $F'(x) = f(x)$. بقاعدة السلسلة ، يكون

$$D_u F(g(u)) = F'(g(u))g'(u) = f(g(u))g'(u)$$

وهذا يتضمن أن

$$(٦) \quad F(g(u)) = \int f(g(u))g'(u) du.$$

وإذاً أيضاً $\int f(x) dx = F(x) = F(g(u))$ ، فالمعادلة (٥) صحيحة .

مثال ١ . اجر التكامل $\int x(1 + 2x^2)^3 dx$.

رغم أن هذا التكامل يمكن اجراؤه بسهولة بملاحظة أنه على الصورة

$$(٧) \quad \int h^3(x)h'(x) dx.$$

فيما عدا لعامل ثابت ، الا أننا سنوجد به باجراء تغيير المتغير . نضع $u = 1 + 2x^2$ ، اذ أن هذا يقدم تبسيطاً للدالة المكاملة . عندئذ يكون $du = 4xdx$. باستخدام ذلك ، نعبر عن التكامل بدلالة u و du ، نجريه ، ثم نعبر عن الجواب بدلالة x :

$$\int (1 + 2x^2)^3 x dx = \int u^3 \frac{du}{4} = \frac{1}{16} u^4 = \frac{1}{16} (1 + 2x^2)^4$$

مثال ٢ . أوجد قيمة $\int_1^2 \frac{x}{(1-2x)^3} dx$.

نجرى أولاً التكامل غير المعين باجراء تغيير المتغير . نضع $u = 1 - 2x$ ، فيكون $x = (1 - u)/2$ و $du = -2 dx$ ، ويكون

$$(٨) \quad \int \frac{x}{(1-2x)^3} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{1-u}{u^3} du = \frac{1}{4} \int (u^{-3} - u^{-2}) du$$

$$(٩) \quad = -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2u^2} + \frac{1}{u} \right) = \frac{1-2u}{8u^2}$$

لدينا الآن الاختيار بين طريقتين . الطريقة الأولى الواضحة هي أن نعبر عن المعكوس التفاضلي بدلالة x ثم نعوض حدى التكامل . الطريقة الثانية هي الاحتفاظ بالمعكوس التفاضلي بدلالة u لكن نغير حدى التكامل بحيث يشير إلى u .

الطريقة الأولى . في التعبير الأخير في (٩) نستبدل u بقيمتها $1-2x$ ونعوض حدى التكامل 1 و 2 :

$$\int_1^2 \frac{x}{(1-2x)^3} dx = \frac{1-2(1-2x)}{8(1-2x)^2} \Big|_1^2 = \frac{7}{8(9)} - \frac{3}{8} = -\frac{5}{18}$$

الطريقة الثانية . نحفظ بالتكامل غير المعين بدلالة u ونوجد حدين جديدين يشيران إلى u . من العلاقة $u = 1-2x$ نرى أن $u = -1$ عندما $x = 1$ وأن $u = -3$ عندما $x = 2$. الحدان الجديدان هما -1 و -3 ، ويكون من (٨) و (٩)

$$\int_1^2 \frac{x}{(1-2x)^3} dx = -\frac{1}{4} \int_{-1}^{-3} \frac{1-u}{u^3} du = \frac{1-2u}{8u^2} \Big|_{-1}^{-3} = \frac{7}{8(9)} - \frac{3}{8} = -\frac{5}{18}$$

ليس من الصعب اثبات صحة الطريقة الثانية لإيجاد قيمة تكامل معين . لتكن $x = g(u)$ هي العلاقة بين x و u . نفرض أن $u = \alpha$ عندما $x = a$ وأن $u = \beta$ عندما $x = b$ وأن g تكون قابلة للتفاضل ومتزايدة أو متناقصة في الفترة $[\alpha, \beta]$. عندئذ α, β تعيينان بقيمة واحدة لكل منهما من a و b . إذا كانت F معكوس تفاضلي للدالة f ، فإن

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ومن ناحية أخرى ، من (٦) ، يكون

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(u))g'(u) du &= F(g(u)) \Big|_a^b = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

ومن ثم ، باستخدام (٥) ، يكون

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(g(u))g'(u) du = \int_a^b s(u) du$$

مسائل

اجر التكاملات غير المعينة الآتية باستخدام تغيير للمتغير :

$$\int \sqrt{ax+b} dx - ٣ \quad \int (6s+4)^{10} ds - ٢ \quad \int \sqrt{z-3} dz - ١$$

$$\int u^2 \sqrt{3u^3+2} du - ٦ \quad \int \frac{3t}{\sqrt{1+2t^2}} dt - ٥ \quad \int 4x \sqrt{2-x^2} dx - 5$$

$$\int \frac{x^3}{(x^4+2)^{2/3}} dx - ٩ \quad \int \frac{-y^2}{(3+4y^3)^2} dy - ٨ \quad \int \frac{x}{\sqrt[3]{5x^2-10}} dx - ٧$$

$$\int \frac{1}{t^2} \sqrt{1-\frac{1}{t}} dt - ١٢ \quad \int \frac{4x+2}{(x^2+x+1)^2} dx - ١١ \quad \int g^n(x) g'(x) dx, n \neq -1 - ١٠$$

$$\int \frac{1+x}{(2-x)^3} dx - ١٤ \quad \int 2x(2-4x)^{10} dx - ١٤$$

$$\int x^2(1+x)^n dx, n \neq -1, -2, -3 - ١٥$$

$$\int \frac{z^2}{(1-4z)^4} dz - ١٨ \quad \int \frac{y}{(a+by)^{3/2}} dy - ١٧ \quad \int x \sqrt{x+1} dx - ١٦$$

$$\int x^3 \sqrt[3]{20-x^2} dx - ٢١ \quad \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx - ٢٠ \quad \int \frac{x^2}{(4x-3)^{2/3}} dx - ١٩$$

$$(u = \frac{1}{r} \text{ ارشاد . ضع }) \int \frac{\sqrt{a^2-r^2}}{r^4} dr, r > 0 - ٢٢$$

$$\int \sqrt{2-\sqrt{x}} dx - ٢٤ \quad \int \frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^4} dx - ٢٣$$

٢٥ - اجر التكامل $\int x \sqrt{3x+2} dx$ بطريقتين : الاولى بوضع $u = 3x+2$ والثانية بوضع $u = \sqrt{3x+2}$.

أوجد التكاملات المعينة الآتية بالطريقتين المشروحتين فى مثال ٢ :

$$\int_0^2 x^2(8-x^3)^{3/2} dx - ٢٨ \quad \int_0^2 3y \sqrt{2y^2+1} dy - ٢٧ \quad \int_{-1}^{-2} \sqrt{2-3x} dx - ٢٦$$

$$\int_0^1 \frac{z}{\sqrt{2-z}} dz - ٣١ \quad \int_0^1 \frac{2x}{(x+2)^3} dx - ٣٠ \quad \int_1^2 v(1+v)^7 dv - ٢٩$$

$$\int_{-1}^1 u^3(1+u^2)^n du - ٣٤ \quad \int_{-1}^2 (x-3) \sqrt{2x+3} dx - ٣٣ \quad \int_0^a \frac{x}{(x+a)^{2/3}} dx - ٣٢$$

$$\int_1^9 \frac{\sqrt{1+\sqrt{y}}}{\sqrt{y}} dy - ٣٥$$

٣٦- أوجد مساحة المنطقة في الربع الأول بين المنحنيين $y = 2x$ و $y = x^2(4x + 2)$.

٣٧- المنطقة المحدودة بالمنحنى $y = \sqrt{x+1} - 1$ ، ومحور السينات ، والخطين المستقيمين $x = 0$ و $x = -1$ أدبرت حول المحور السيني . أوجد حجم الجسم الناشئ بهذه الكيفية .

٨-٥

الحدود العليا الصغرى •

المادة في هذا البند مفيدة في برهان بعض خواص الأعداد الحقيقية وبعض النظريات الأساسية في حساب التكامل .

٥-١٧ تعريف . لتكن S فئة من الأعداد . العدد a هو حد أعلى للفئة S إذا كانت $a \geq x$ لجميع x في S . فمثلاً ، 3 هي حد أعلى للفئة

$$(1) \quad S = \{x \mid 1 \leq x < 2\}$$

لأن 3 هي أكبر من كل عدد في S . حدود عليا أخرى هي 2 و π و 2.4 . العدد 1.9 ليس حداً أعلى ، اذ يوجد عنصر بالفئة S هو 1.93 أكبر منه .

إذا كانت a حداً أعلى للفئة S ، فواضح أن أي عدد أكبر من a أيضاً يكون حداً أعلى . من الأهمية بمكان أن نعرف ما إذا كانت S لها حدود عليا أصغر من a وبوجه خاص ما إذا كان لها حد أعلى أصغر الجميع .

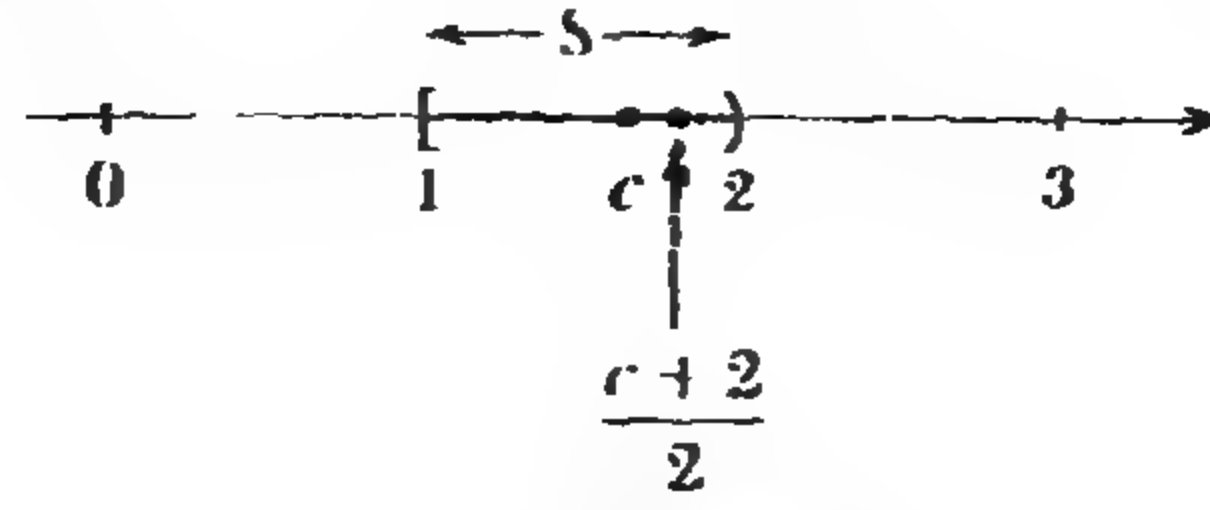
٥-١٨ تعريف . العدد u هو الحد الأعلى الأصغر S (يختصر الى $l. u. b. S$) إذا كانت u هي حداً أعلى للفئة S ولا يوجد حد أعلى للفئة S أصغر من u .

العدد 2 هو الحد الأعلى الأصغر للفئة $S = \{x \mid 1 \leq x < 2\}$. رغم أن هذا واضح تماماً بمجرد النظر الى S ، الا أننا سنعطى برهاناً قاطعاً لتوضيح كيف يستخدم المفهوم الهام للحد الأعلى الأصغر . أولاً ، 2 هي حد أعلى إذ أن $2 \geq x$ لجميع x في S . ستثبت أن أي عدد أصغر لا يمكن أن يكون حداً أعلى . نجرى ذلك بأن نثبت أنه لأي عدد c أقل من 2 يوجد عدد في الفئة S أكبر من c . ليكن c أي عدد أقل من 2 ، سواء كان في الفئة S أو لم يكن (شكل ٥-٤٠) . إذا كان $1 \leq c < 2$ فإن المتوسط $(c + 2)/2$ للعددين 2 و c يحقق العلاقة

$$1 \leq c < \frac{c+2}{2} < 2$$

• إذا كان بند ٩-٥ من وجود التكامل المعين قد حذف ، فإن هذا البند يمكن تأجيله الى ما قبل البند ٧-١ .

فهو عدد في S أكبر من c ، بينا إذا كانت $c < 1$ ، فإن ! هو عدد في S أكبر من c . ومن ثم أي عدد أقل من 2 لا يمكن أن يكون حداً أعلى ، وتكون 2 هي الحد الأعلى الأصغر .



شكل ٤٠-٥

أي عدد c أقل من 2 لا يمكن أن يكون حداً أعلى للفترة S .

الفترة $T = \{x | 1 \leq x \leq 2\}$ ايضاً لها الحد الأعلى الأصغر 2 ، هذه الفترة والفترة (١) توضحان أن الحد الأعلى الأصغر لفترة قد يكون أولاً يكون عنصراً في الفترة . الفترة (٢)

$$\{-4, 8, -\sqrt{50}, 8.1, 0\}$$

لها العدد 8.1 كالحد الأعلى الأصغر .

توجد فئات بلا حد أعلى ومن ثم بلا حد أعلى أصغر . مثال ذلك ، فئة الأعداد الصحيحة الموجبة . لكن إذا كانت فئة من الأعداد الحقيقية لها حد أعلى فانه يكون لها حد أعلى أصغر .

١٩-٥ خاصية الحد الأعلى الأصغر . كل فترة ، غير خاوية ، من الأعداد الحقيقية ، لها حد أعلى ، يكون لها حد أعلى أصغر .

برهان ذلك لا يمكن اعطاؤه هنا ، وسنفترضه . خاصية الحد الأعلى الأصغر أساسية في نظرية الأعداد الحقيقية . كثير من الخواص الهامة للأعداد الحقيقية يمكن برهنتها فقط باستخدام خاصية الحد الأعلى الأصغر ، أو ما يكافئها الحد الأعلى الأصغر للفترة ، عند وجوده ، يكون وحيداً .

القارئ سوف لا يجد صعوبة في تعريف الفكرة المناظرة للحد الأدنى والحد الأدنى الأكبر (g.l.b) لفترة من الأعداد . كل ما ذكرناه عن الحدود العليا وعن الحد الأعلى الأصغر له ما يناظره ، مع تعديلات واضحة ، عن الحدود الدنيا والحد الأدنى الأكبر . الفترة $(\frac{1}{2}, \infty)$ لها كل من $78 - \frac{1}{4}$ و 0 كحد أدنى . حدها الأدنى الأكبر هو $\frac{1}{2}$. لا يوجد حد أعلى . الفترة في (٢) لها $\sqrt{50}$ كحدها الأدنى الأكبر . الفترة تكون محدودة إذا كان لها حد أعلى وحد أدنى .

لتكن u الحد الأعلى الأصغر لفترة S . إذا كانت c أي عدد أقل من u ، سواء كان عنصراً بالفترة S أو لم يكن فانه يجب أن يوجد عنصر s بالفترة S أكبر من c ، أي $c < s \leq u$. لأنه إذا كان لا يوجد مثل هذا العدد s ، فإن c تكون حداً أعلى للفترة S أصغر من الحد الأعلى الأصغر . هذا موضح في

الشكل ٥ - ٤١ ، حيث عناصر الفئة S مشار إليها بعلامات x . هذه الخاصية للحد الأعلى الأصغر كثيراً ما تستخدم .

الحد الأعلى الأصغر يمكن اعتباره كسياج (شكل ٥ - ٤١) . الأعداد في الفئة لا يمكن ذهابها الى ما بعد السياج لكن تتضاغط مقتربة اليه من على اليسار . توجد أعداد بالفئة قريبة قريباً اختيارياً من ، أو تساوى ، الحد الأعلى الأصغر ، وأعداد أخرى قريبة قريباً اختيارياً ، أو تساوى ، الحد الأدنى الأكبر .



شكل ٥ - ٤١

إذا كانت c أقل من الحد الأعلى الأصغر ، فيجب أن يوجد عنصر بالفئة أكبر من c .

مسائل

- ١ - عرف الحد الأدنى والحد الأدنى الأكبر لفئة .
- أوجد الحد الأعلى الأصغر والحد الأدنى الأكبر للفئات الآتية . (لا تعط البراهين) .
- ٢ - $\{1, 5, -3.5, 2\pi, 5.01\}$
- ٣ - فئة جميع الأعداد الصحيحة الزوجية السالبة .
- ٤ - $\{3\}$.
- ٥ - $\{8\} \cup \{x | 3 \leq x \leq 7\}$
- ٦ - $\{x, \text{كسريه} | -3 \leq x < 5\}$
- ٧ - $\{1, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\}$
- ٨ - $\{n | \text{عدد صحيح موجب}, \frac{n}{n+1}\}$ ، $\{x | \text{حقيقية و} \frac{1}{1+x^2}\}$
- ٩ - $\{n | \text{عدد صحيح ليس صفراً و} \frac{n-1}{n^2}\}$
- ١٠ - $\{n | \text{عدد صحيح ليس صفراً و} \frac{n-1}{n^2}\}$
- ١١ - $\{t | \text{كسريه و} t^3 < 4\}$
- ١٢ - $\{r | \text{كسريه و} r < 3\}$
- ١٣ - $\{\frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3}, \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5}, \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}, \dots\}$ (الحد الأعلى الأصغر فقط) .
- ١٤ - الحد الأعلى الأصغر للفئة $S = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots\}$ هو واحد صحيح . بما أن 0.999 أقل من 1 ، توجد عناصر بالفئة S أكبر من 0.999 أوجد احداها .
- ١٥ - أثبت أنه إذا كانت فئة لها حد أعلى أصغر ، فإنها يكون لها واحد فقط . (ارشاد : افرض أن لها حدين أعلى أصغر) .
- ١٦ - أثبت أن 2 هي الحد الأدنى الأكبر للفترة $(2, 6)$.
- ١٧ - أثبت أن 0 هي الحد الأدنى الأكبر للفئة $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$
- ١٨ - أوجد الحد الأعلى الأصغر للفئة $\{0.9, 0.99, 0.999, \dots\}$ وأثبت أنه هو الحد الأعلى الأصغر .

١٠ - فئة الأعداد الكسرية ليس لها خاصية الحد الأعلى الأصغر . نقصد بذلك أنه إذا أوجزنا عالم الأعداد بالأعداد الكسرية ، فإنه توجد فئات من الأعداد الكسرية لها حد أعلى لكن ليس لها حد أعلى كسرى . أثبت أن الفئة $\{x \text{ كسرية و } x^2 < 2\}$ هي مثل هذه الفئة .

٢٠ - لتكن $\{x \text{ كسرية و } 1 \leq x < 2\} = S'$. صحيح أن 2 هي الحد الأعلى الأصغر للفئة S' ، لكن البرهان المعطى في الكتاب للفئة $\{x \text{ حقيقية و } 1 \leq x < 2\} = S$ لا يصلح . لماذا لا يصلح ؟

٢١ - أثبت أن الحد الأدنى الأكبر لفئة S هو الحد الأكبر الأصغر للفئة المتكونة من سالب عناصر الفئة S .

٢٢ - لتكن U هي الفئة (غير الخاوية) للحدود العليا للفئة S . أثبت أن الحد الأعلى الأصغر للفئة S هو الحد الأدنى الأكبر للفئة U ، وبالعكس .

٢٣ - لتكن الدالة f متصلة في الفترة المحدودة المغلقة I . f يكون لها قيمة عظمى في الفترة . قد تحدث عند أكثر من نقطة . لتكن S هي فئة جميع النقاط في I حيث تحدث القيمة العظمى . أي أن ، s تكون بالفئة إذا كانت $f(s) \geq f(x)$ لجميع x في I . أثبت أن S تحوى حدها الأكبر الأصغر (ارشاد : افرض أن M هي القيمة العظمى لـ f في I وأن \bar{s} الحد الأعلى الأصغر لـ S ، فيكون $f(\bar{s}) \leq M$ العدد \bar{s} سيكون في S إذا كانت $f(\bar{s}) = M$. افرض أن : $(f(\bar{s}) < M)$.

٩ - ٥

وجود التكامل المعين

في هذا البند مثبتت النظرية ٥ - ٣ عن وجود التكامل المعين لدالة متصلة . البرهان طويل وسيعطى في سلسلة من البديهيات والنظريات . ورغم ذلك فهو ليس كاملاً ، لأن عند نقطة معينة واحدة سوف نفترض خاصية للدوال المتصلة .

سنفرض أن الدالة f متصلة في الفترة المغلقة $[a, b]$ وسنثبت أنه يوجد عدد تتجمع حوله خواصل جمع ريمان $\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$ نتذكر أنه لأي تجزئة p للفترة $[a, b]$ ، حاصل الجمع الأدنى وحاصل الجمع الأعلى لـ f هما حاصل جمع ريمان الخاصان

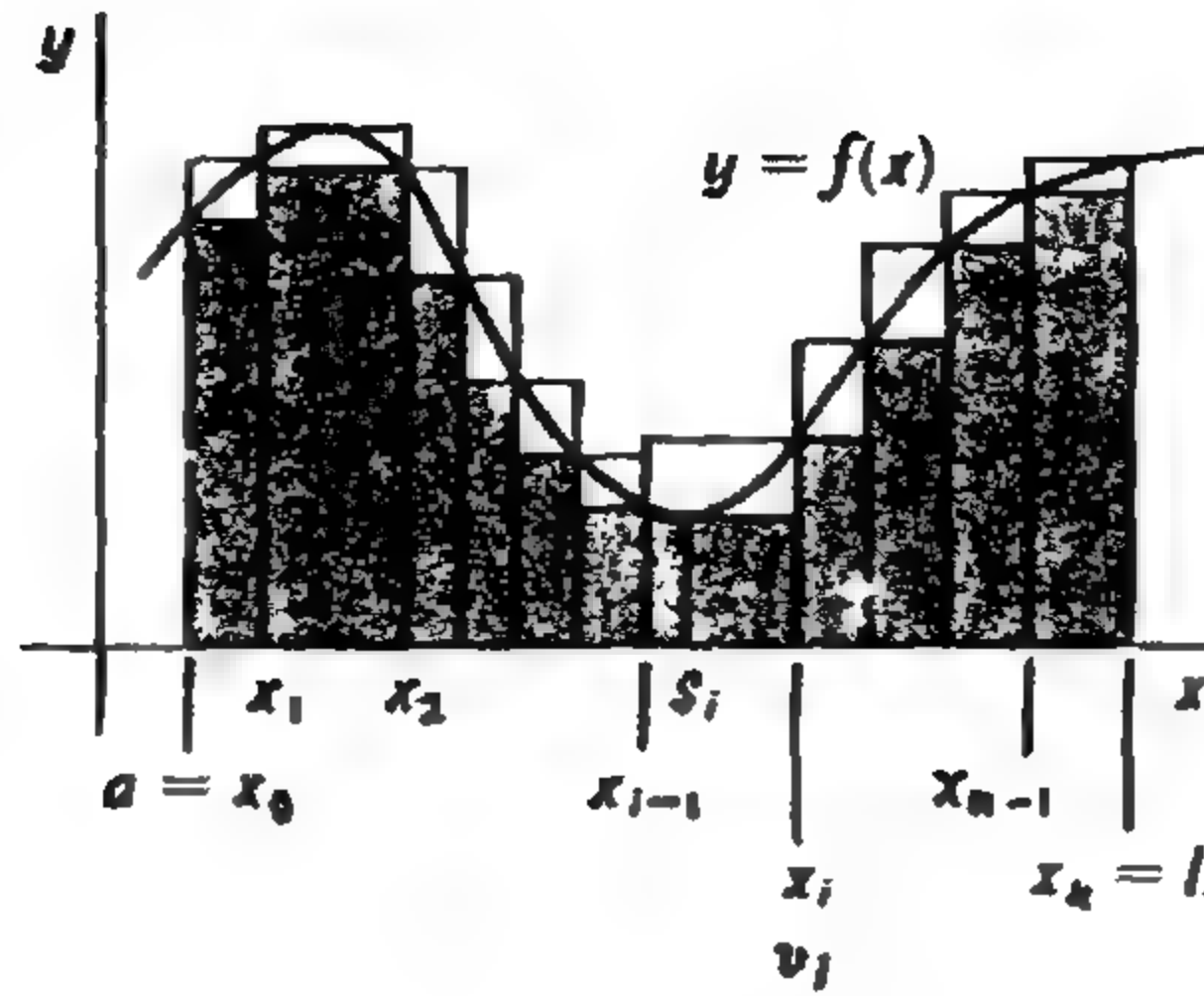
$$u_p = \sum_{i=1}^n f(v_i) \Delta x_i \quad \text{و} \quad m_p = \sum_{i=1}^n f(s_i) \Delta x_i$$

حيث $f(v_i)$ و $f(s_i)$ هما القيمتان الصغرى والكبرى للدالة f في الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$. اتصال الدالة f في كل فترة جزئية يضمن وجود هاتين القيمتين الصغرى والكبرى . كل حاصل جمع ريمان

$$r_p = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

مرتبط بالتجزىء p يقع بين حاصل الجمع الأدنى وحاصل الجمع الأعلى : $m_p \leq r_p \leq u_p$.

رغم أن $f(x)$ ليس من الضروري أن تكون موجبة ، لكن سوف نتجه بها هذا الاتجاه حتى نقتاد بتفسير التكامل كمساحة . للدالة الموجبة $f(x)$ ، m_p هي مساحة فئة من المستطيلات تقع تحت المنحنى بقليل ، وأيضاً u_p هي مساحة فئة من المستطيلات قممها تقع أعلى المنحنى بقليل (شكل ٤٢-٥) .



شكل ٤٢-٥

حاصل الجمع الأدنى أقل من قيمة مساحة المنطقة تحت المنحنى ، وحاصل الجمع الأعلى أكبر منها

٢٠-٥ تمهيدية . لتكن الدالة f متصلة في الفترة المغلقة $[a, b]$. إذا كان تجزىء p للفترة $[a, b]$ ينقح الى تجزىء t بإدخال نقط تجزىء اضافية ، فإن حاصل الجمع الأدنى يتزايد وحاصل الجمع الأعلى يتناقص ، إذا حدث شيء . أى أن $u_t \leq u_p$ و $m_t \geq m_p$.

البرهان . ليكن $p = [a = x_0, x_1, \dots, x_n = b]$ ولندرس أولاً الحالة التى فيها t تتكون بزيادة نقطة واحدة فقط عن p . دع z النقطة التى أضيفت وافرض أنها تقع فى الفترة الجزئية الأولى $[x_0, x_1]$ للتجزىء p ، أى

$$t = [x_0, z, x_1, \dots, x_n]$$

البرهان يكون مماثلاً إذا كانت z تقع فى إحدى الفترات الجزئية الأخرى . التعبيران لحاصل الجمع الأدنى للتجزئين p و t هما

$$m_p = f(s_1)(x_1 - x_0) + \sum_{i=2}^n f(s_i)(x_i - x_{i-1})$$

و

$$m_t = f(\bar{s}_1)(z - x_0) + f(\bar{\bar{s}}_1)(x_1 - z) + \sum_{i=2}^n f(s_i)(x_i - x_{i-1})$$

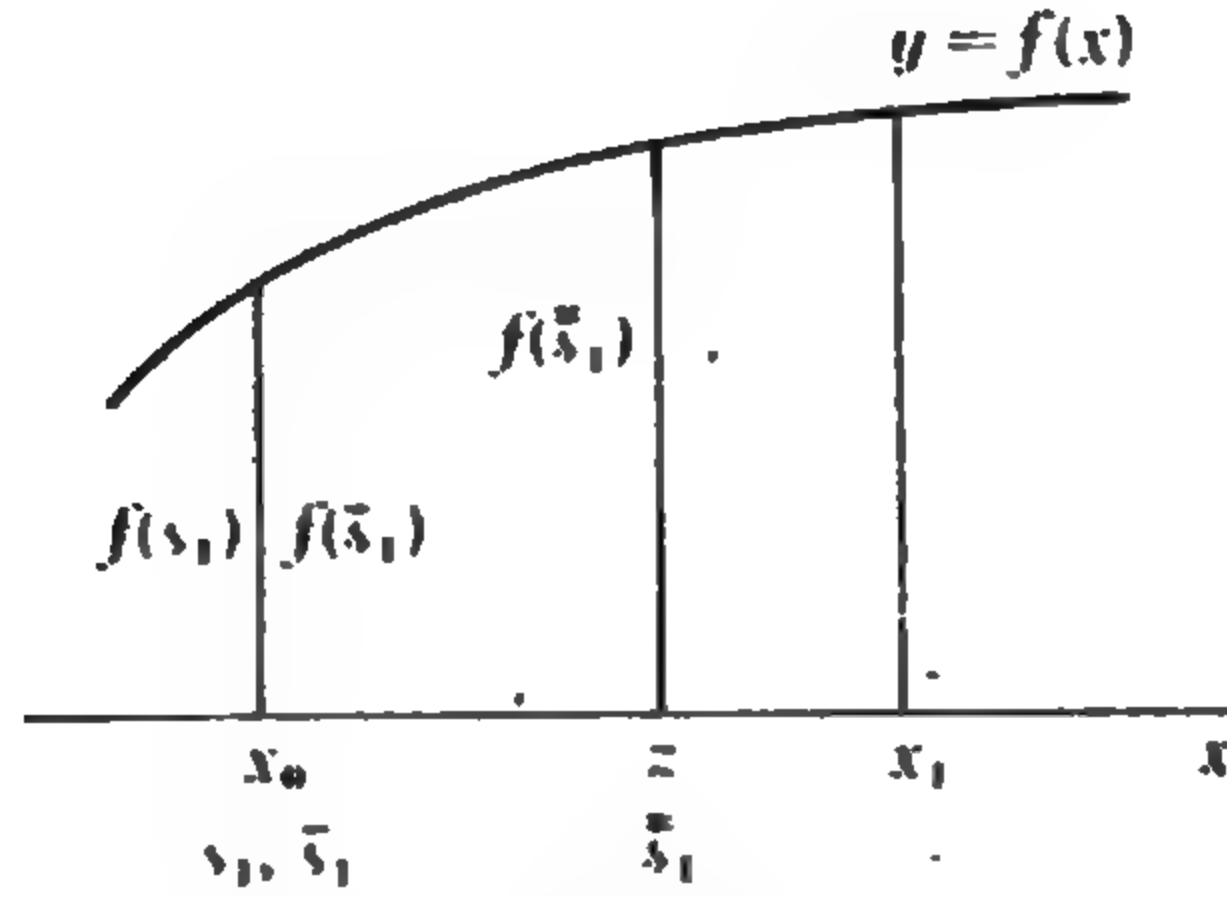
حيث $f(\bar{s}_1)$ و $f(\bar{\bar{s}}_1)$ و $f(s_1)$ هي القيم الصغرى للدالة f فى $[x_0, z]$ و $[z, x_1]$ و $[x_0, x_1]$ ، على الترتيب . الحد الأول فى التعبير لـ m_p يمكن كتابته على الصورة

$$f(s_1)(x_1 - x_0) = f(s_1)(z - x_0) + f(s_1)(x_1 - z)$$

القيمتان الصغريان للدالة f في $[z, x_1]$ و $[x_0, z]$ أكبر من أوساويان القيمة الصغرى في $[x_0, x_1]$ (شكل ٤٣-٥) . اذن

$$f(s_1)(x_1 - x_0) \leq f(\bar{s}_1)(z - x_0) + f(\bar{s}_1)(x_1 - z)$$

وبالتالى $m_p \leq m_r$. القيمتان العظميان للدالة f في $[z, x_1]$ و $[x_0, z]$ يقلان عن أوساويان القيمة العظمى في $[x_0, x_1]$ ، وبرهان مماثل يثبت أن $u_r \leq u_p$. نعود الى الحالة العامة حيث نفترض أن التجزئة t نحصل عليه من p بادخال أكثر من نقطة واحدة . بإضافة النقط واحدة فى كل مرة ، نرى أن حاصل الجمع الأدنى ، اذا حدث شيء ، يزداد وحاصل الجمع الأعلى يتناقص . هذا يكمل البرهان .



شكل ٤٣-٥

القيمتان الصغريان للدالة f في $[z, x_1]$ و $[x_0, z]$ أكبر من أوساويان القيمة الصغرى في $[x_0, x_1]$.

من الواضح جداً أن حاصل الجمع الأدنى يكون أقل من أوساوي حاصل الجمع الأعلى المرتبط بنفس التجزئة . لكن حاصل الجمع الأدنى ينبغي أن يكون أقل من أوساوي مساحة المنطقة تحت المنحنى ، وحاصل الجمع الأعلى ينبغي أن يكون أكبر من أوساوي المساحة (شكل ٤٢-٥) . ومن ثم كل حاصل جمع أدنى ينبغي أن يكون أقل من أوساوي كل حاصل جمع أعلى . الآن سنوضح ذلك .

٥-٢١ تمهيدية . لتكن الدالة f متصلة فى الفترة المغلقة $[a, b]$. اذا كانت q و p أى تجزئتين للفترة $[a, b]$ ، فان $m_p \leq u_q$.

البرهان . كون تجزئياً جديداً فيه نقط التقسيم هى نقط التقسيم لـ p مضافاً اليها نقط التقسيم لـ q . عندئذ يكون t تنقيحاً لكل من q و p ، واذن بالتمهيدية ٥-٢٠ ، يكون $u_t \leq u_q$ و $m_p \leq m_t$. بما أن $m_t \leq u_t$ ، فيكون

$$m_p \leq m_t \leq u_t \leq u_q$$

الفئة M لحواصل الجمع الأدنى والفئة U لحواصل الجمع الأعلى لكل التجزئيات موضحتان على خط الاحداثيات في الشكل ٤٤-٥ . قد أثبتنا حالا أن عناصر الفئة M تقع على يسار عناصر الفئة U . اختر أي تجزئة q . بما أن $m_p \leq u_q$ لجميع التجزئيات p ، فإن M لها حد أعلى هو u_q ، واذن لها حد أعلى أصغر ، سنرمز له بالرمز m . اذن لجميع p ، يكون $m_p \leq m \leq u_q$. بما أن هذه المتباينة صحيحة لجميع q ، فإن الفئة U لها m كحد أدنى ، واذن لها حد أدنى أكبر ، سنرمز له بالرمز u . وعلى ذلك يكون

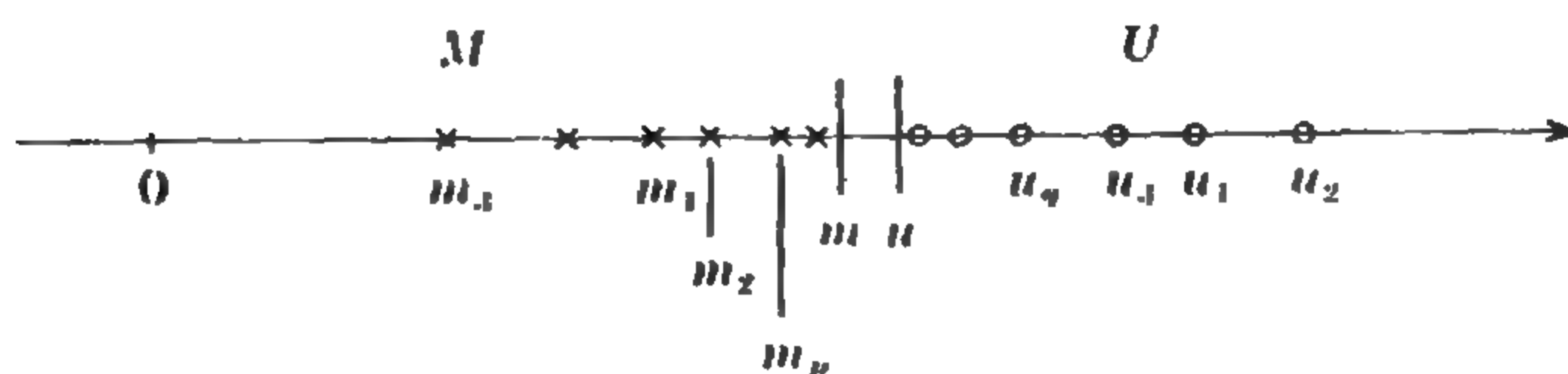
$$(١) \quad m_p \leq m \leq u \leq u_q$$

لجميع التجزئيات q و p . من الشكل ٤٢-٥ ، نشعر بداهة بأن كلا m و u يمثلان مساحة المنطقة تحت المنحنى واذن ينبغي أن يتساويا . لاثبات ذلك نحتاج الى خاصية هامة للدوال المتصلة .

٥-٢٢ تعريف . الدالة f تكون متصلة بانتظام في الفترة I اذا كان لكل $\epsilon > 0$ توجد δ بحيث أن

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \epsilon$$

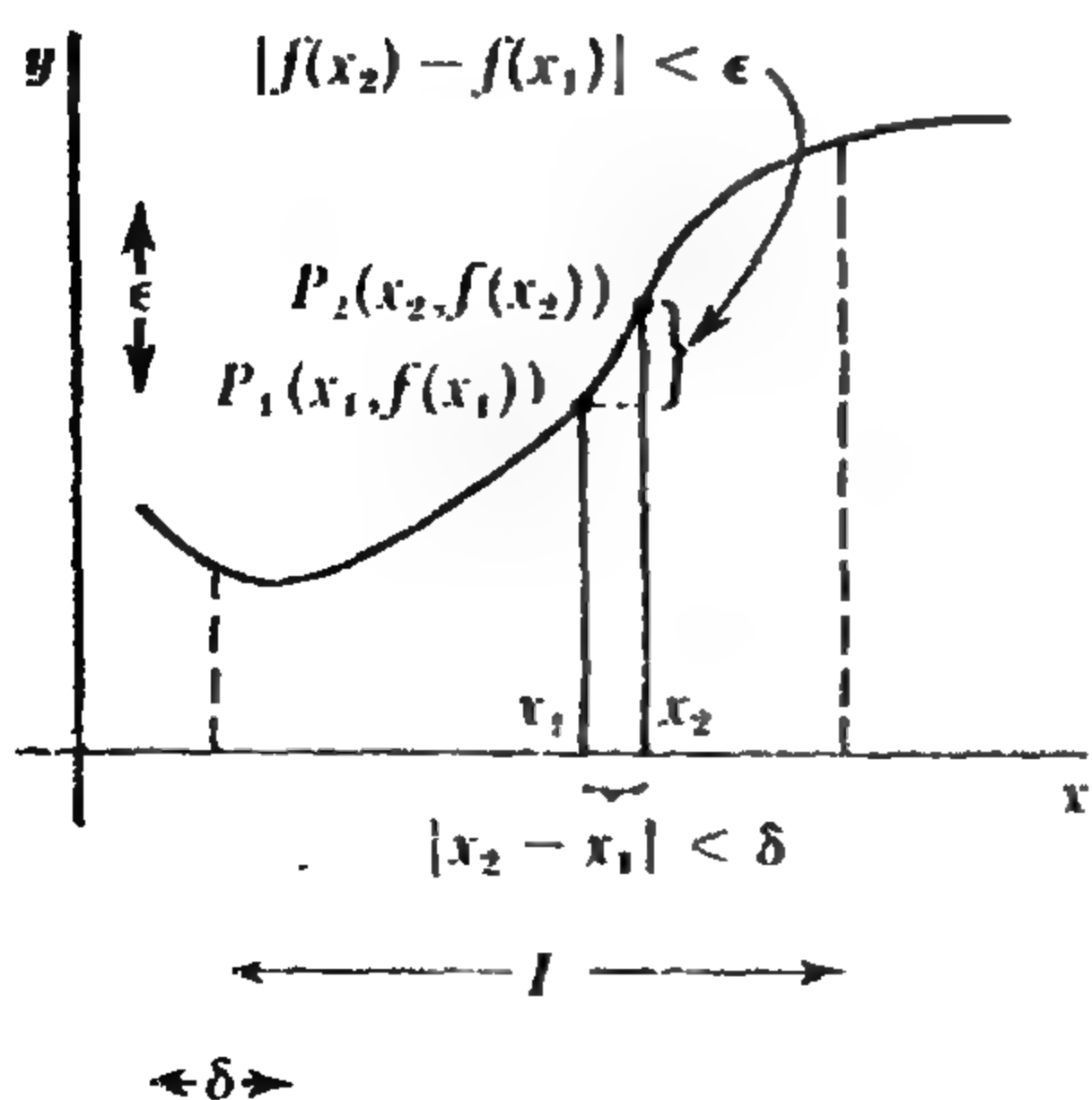
طالما كانت x_1 و x_2 تقعان في الفترة I وكان $|x_2 - x_1| < \delta$.



شكل ٤٤-٥

m هي الحد الأعلى الأصغر لـ M ؛ u هي الحد الأدنى الأكبر لـ U

هندسياً هذا يعنى أنه اذا أعطينا ϵ ما فانه توجد δ بحيث أنه طالما كانت x_1 و x_2 في الشكل ٥-٤٥ في الفترة I وعلى مسافة بينهما أقل من δ ، فإن الفرق بين الاحداثيين y للنقطتين P_1 و P_2 يكون أقل من ϵ . الاتصال هي خاصية موضوعية وتشير الى سلوك الدالة بالقرب من نقطة . لكن الاتصال المنتظم يكون دائماً بالنسبة الى فترة .

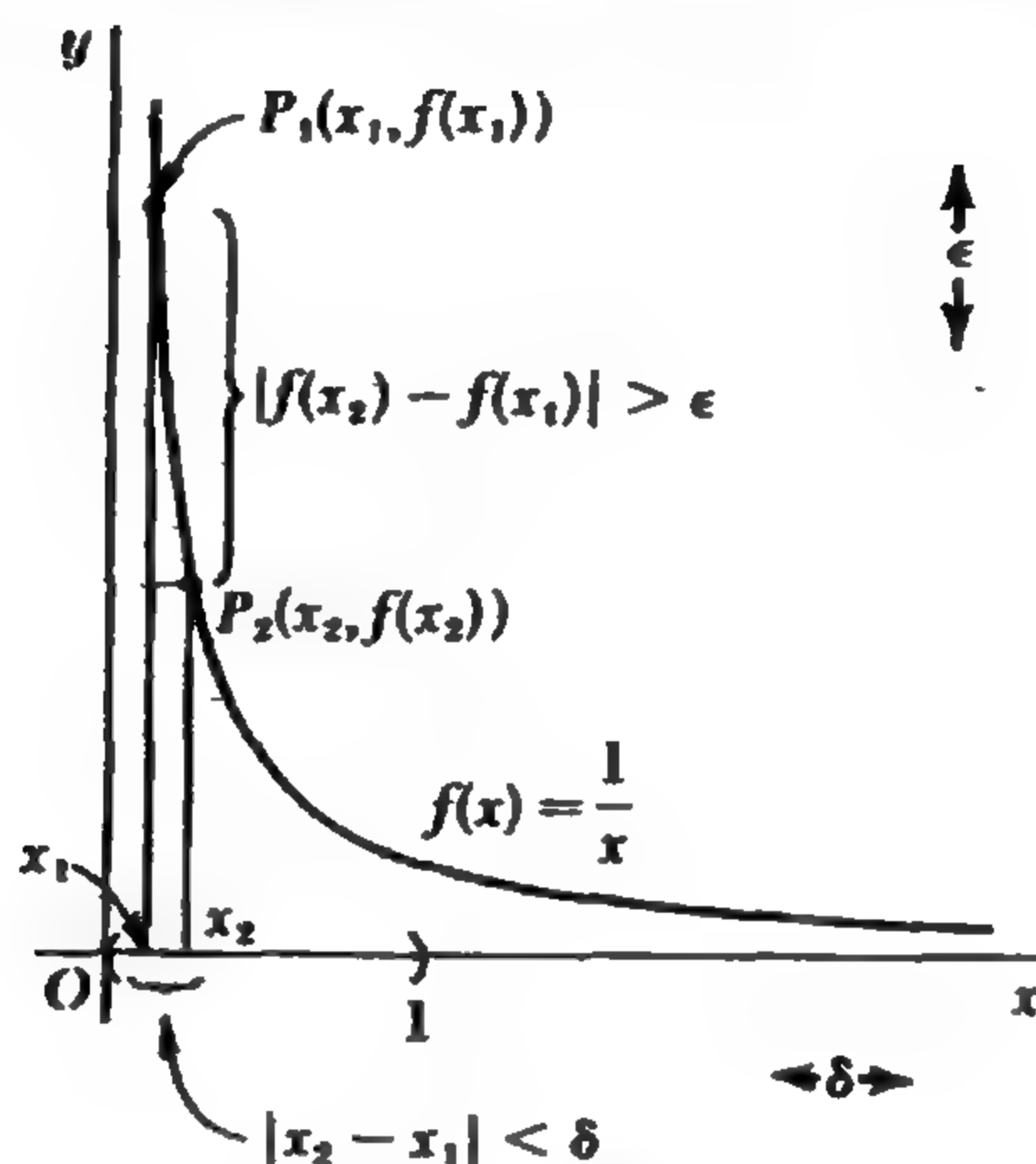


شكل ٥-٥

توجد δ بحيث أن طالما كانت x_1 و x_2 في I وعلى مسافة بينهما أقل من δ ، فإن الفرق بين الاحداثيين y للنقطتين P_1 و P_2 يكون أقل من ϵ .

من الواضح أن الدالة يجب أن تكون متصلة في فترة لكي تكون متصلة بانتظام هناك . لكن الاتصال غير كاف . الدالة $f(x) = 1/x$ في الشكل ٤٦-٥ متصلة في الفترة $(0, 1)$ لكن ليست متصلة بانتظام هناك . مهما كانت δ صغيرة ، فانه توجد x_1 و x_2 قريبتان من 0 ، وحتى مع أن $|x_2 - x_1| < \delta$ ، فان الفرق بين الاعدائين y للنقطتين P_1 و P_2 يكون أكبر من ϵ . الا أنه اذا كانت الفترة مقفلة ومحدودة ، فان الدالة المتصلة تكون متصلة بانتظام في الفترة .

٥-٢٣ نظرية . الدالة المتصلة في فترة مقفلة محدودة تكون متصلة بانتظام هناك .



شكل ٤٦-٥

يمكن اختيار x_1 و x_2 بالقرب من 0 ، وحتى مع كونهما على مسافة بينهما أقل من δ ، فان الفرق بين الاعدائين y للنقطتين P_1 و P_2 يكون أكبر من ϵ .

برهان ذلك صعب جداً لاعطائه هنا ، وسنفترض صحة النظرية . نعود الآن الى التكامل المعين .

٥-٢٤ تمهيدية . لتكن الدالة f متصلة في الفترة المقفلة $[a, b]$. لكل $\epsilon > 0$ ، توجد δ بحيث أن $u_p - m_p < \epsilon$ لجميع التجزيئات p للفترة $[a, b]$ التي معيارها أقل من δ .

البرهان . من النظرية ٥-٢٣ ، الدالة f تكون متصلة بانتظام في الفترة $[a, b]$. ومن ثم ، بجعل $\epsilon/(b-a)$ تلعب دور ϵ في التعريف ٥-٢٢ للاتصال المنتظم ، توجد δ بحيث أن

$$(٢) \quad |f(x_2) - f(x_1)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

طالما كانت x_1 و x_2 في $[a, b]$ وكان $|x_2 - x_1| < \delta$. لتكن p أي تجزئة للفترة $[a, b]$ معياره أقل من δ . حاصل الجمع الأعلى وحاصل الجمع الأدنى لـ p هما

$$m_p = \sum_{i=1}^n f(s_i) \Delta x_i, \text{ و } u_p = \sum_{i=1}^n f(v_i) \Delta x_i$$

واذن

$$u_p - m_p = \sum_{i=1}^n [f(v_i) - f(s_i)] \Delta x_i$$

بما أن s_i و v_i هما في الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ ، التي طولها أقل من δ ، فإن $|v_i - s_i| < \delta$ ،
واذن من (٢) يكون

$$(٣) \quad |f(v_i) - f(s_i)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

ولأن $f(v_i) \geq f(s_i)$ ، أشارات القيمة المطلقة يمكن حذفها ، وباستبدالها $f(v_i) - f(s_i)$ في (٣)
بالعدد الأكبر $\epsilon / (b-a)$ نحصل على

$$u_p - m_p < \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{b-a} \Delta x_i = \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \frac{\epsilon}{b-a} (b-a) = \epsilon$$

من السهل الآن اثبات أن خواصل جمع ريمان لها عدد تجمع .

٥ - ٢٥ نظرية . إذا كانت الدالة f متصلة في الفترة المغلقة $[a, b]$ ، فإن $u = m$ ، وهذا العدد هو
عدد التجمع لخواصل جمع ريمان .

البرهان . لتكن ϵ أى عدد موجب . بالتمهيدية الأخيرة يوجد تجزىء p للفترة $[a, b]$ بحيث أن
 $u_p - m_p < \epsilon$.

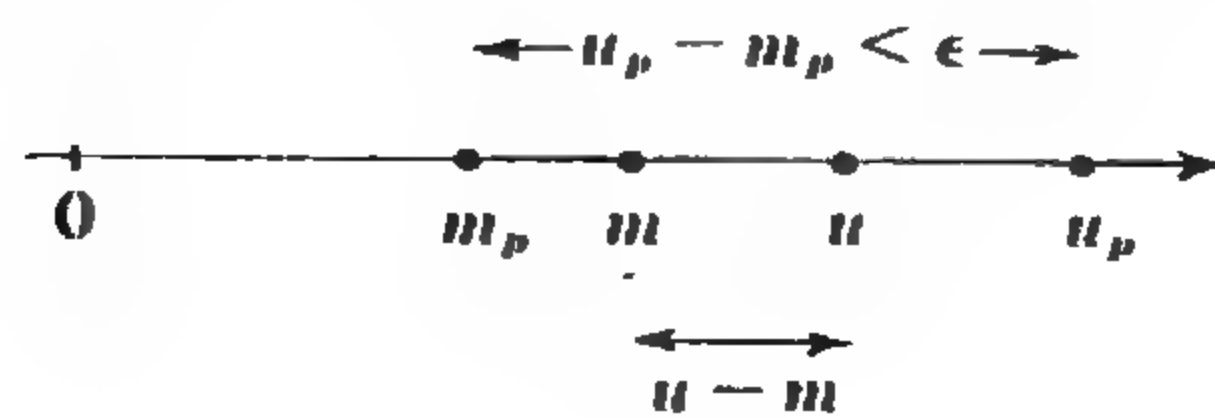
بما أن

$$m_p \leq m \leq u \leq u_p$$

فمن (١) ، يجب أن يكون

$$0 \leq u - m < \epsilon$$

(شكل ٥ - ٤٧) . لأن ϵ كانت اختيارية هذه المتباينة تنص على أن $u - m$ تكون غير سالبة وأقل
من كل عدد موجب . اذن يجب أن تكون صفرا ، ويكون $u = m$.



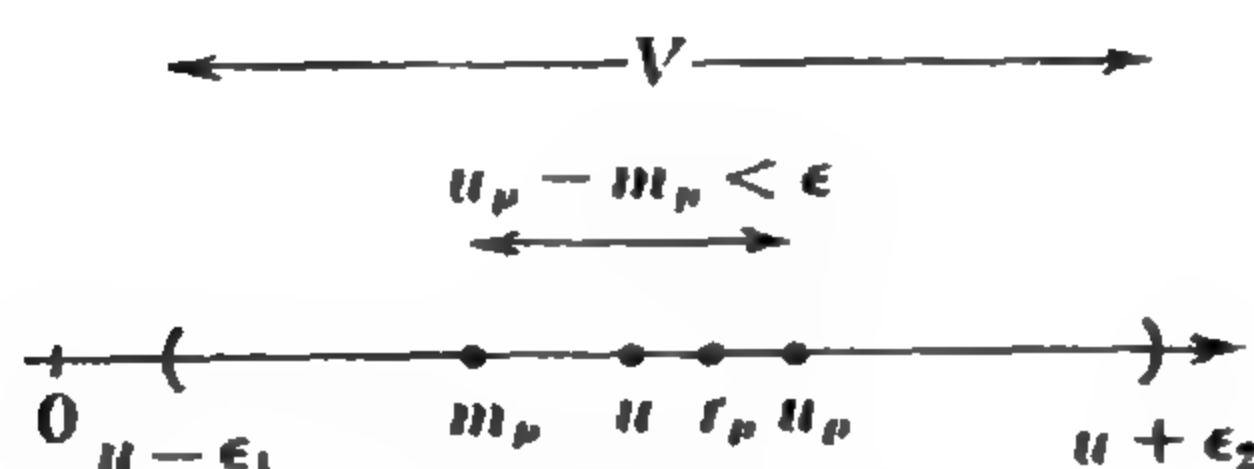
شكل ٥ - ٤٧

لأن $u_p - m_p < \epsilon$

فإن $u - m < \epsilon$

الآن نثبت أن u ، التي يمكننا اعتبارها مساحة المنطقة تحت المنحنى ، هي عدد التجمع لحواصل جمع ريمان . لتعريف ٥ - ١ لعدد التجمع ، يجب أن نثبت أنه لكل جوار V لـ u يوجد عدد δ بحيث أن كل حاصل جمع ريمان r_p مبنى على تجزئة p معياره أقل من δ ، يكون في V . لذلك ، نأخذ $V = (u - \epsilon_1, u + \epsilon_2)$ ، حيث $\epsilon_1 > 0$ ، $\epsilon_2 > 0$ أي جوار لـ u (شكل ٥ - ٤٨) . لتكن ϵ أصغر العددين ϵ_1 ، ϵ_2 ، بالتمهيدية ٥ - ٢٤ توجد δ بحيث أن $u_p - m_p < \epsilon$. لجمع التجزئات p التي معيارها أقل من δ . بما أن $m_p \leq u \leq u_p$ ، فهذا يتضمن أن $\epsilon_2 \geq u - m_p > \epsilon_1$ ، الذي يثبت أن u_p و m_p تكونان في V . لأن $m_p \leq r_p \leq u_p$ كل حاصل جمع ريمان r_p أيضا يجب أن يكون في V ، هذا يثبت أن u هي عمود التجمع .

وجود عدد التجمع يعنى أن الدالة f تكون قابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$ ، أو بمعنى آخر ، $\int_a^b f(x) dx$ يوجد . لأن عدد التجمع هو الذى ترمز له برمز التكامل . هذا يكمل برهان النظرية ٥ - ٣ عن وجود تكامل الدالة المتصلة .



شكل ٥ - ٤٨

للمعايير الصغيرة صفرا كائنا u_p و m_p يكونان في V واذن هكذا يكون جميع r_p ، لأن $m_p < r_p < u_p$

مسائل

١ - أوجد القيمتين العظمى والصغرى للدالة $f(x) = x^2 + 1$ فى الفترة $[-1, 3]$ وفى كل من الفترتين الجزئيتين $[2, 3]$ و $[-1, 2]$. حقق أن القيمتين العظميين للدالة f فى الفترتين الجزئيتين أقل من أو تساويان القيمة العظمى فى $[1, 3]$ وأن القيمتين الصغريين أكبر من أو تساويان القيمة الصغرى فى $[-1, 3]$.

أعمل تخطيطين للشكل البياني للدوال الآتية على الفترات المشار إليها . وضع المستطيلات المناظرة لحواصل الجمع الأدنى والأعلى للتجزئة p على أحد التخطيطين ولمنقحه t على الآخر . احسب حواصل الجمع الأدنى والأعلى لـ t و p وحقق أن $u_t \leq u_p$ و $m_p \leq m_t$. لاحظ أن المساحة تحت المنحنى تقع بين حاصل الجمع الأدنى والأعلى من التجزئين .

$$f(x) = 2x + 1; p = [0, 1, 2, 3, 4], t = [0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, \frac{7}{2}, 4]; \text{area} = 20. \quad - ٢$$

$$g(x) = 9 - x^2; p = [-2, -1, 0, 1, 2, 3], t = [-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3]; \text{area} = \frac{100}{3}. \quad - ٣$$

$$f(z) = \frac{6}{z}; p = [0.5, 1, 1.8, 2, 3], t = [0.5, 0.7, 1, 1.8, 2, 2.4, 2.7, 3]; \text{area} = 10.751 \quad - ٤$$

$$h(x) = \sqrt{x+1}; p = [-1, 1, 3, 4], t = [-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 3, 4]; \text{area} = 7.454. \quad - ٥$$

٦ - الدالة $f(x) = 1/x$ متصلة بانتظام في الفترة $[0.1, 2]$ (لماذا ؟) اوجد δ بحيث أنه طالما كانت x_1 و x_2 في الفترة $[0.1, 2]$ وكان $|x_2 - x_1| < \delta$ ، فإن $|f(x_2) - f(x_1)| < 0.01$.
 ٧ - لتكن $f(x) = x^3 - 16x$. اوجد δ بحيث أنه طالما كانت x_1 و x_2 في الفترة $[-3, 3]$ وكان $|x_2 - x_1| < \delta$ ، فإن $|f(x_2) - f(x_1)| < \frac{1}{10}$.

٨ - أثبت أنه لمعيار صغير صفرا كافيا ، قاعدة شبه المنحرف تعطى تقريبا جيدا للتكامل (ارشاد : لتكن u_p و m_p حاصلى الجمع الأدنى والأعلى ولتكن t_p التقريب بقاعدة شبه المنحرف للجزء المتظم p . فيكون $m_p \leq \int_a^b f(x) dx \leq u_p$. أثبت أن $(m_p \leq t_p \leq u_p)$.
 ٩ - إذا كانت الدالة في النظرية ٥ - ٣ مطردة ومتصلة في $[a, b]$ ، فإنه يمكن اثبات أنها قابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$ بدون استخدام الاتصال المتظم . أثبت النظرية ٥ - ٣ تحت هذا الفرض الأشد قيذا بدون استخدام الاتصال المتظم . (ارشاد : بما أن الاتصال المتظم استخدم أولا في برهان التمهيدية ٥ - ٢٤ ، فإن كل شيء الى تلك النقطة لا يزال قائما . افرض ، مثلا ، أن الدالة متزايدة باطراد في $[a, b]$ وأثبت التمهيدية ٥ - ٢٤ والنظرية ٥ - ٢٥) .

١٠ - الدالة تكون قطعا مطردة في فترة إذا كانت الفترة يمكن تقسيمها الى عدد محدود من الفترات الجزئية في كل منها تكون الدالة مطردة . الدالة في الشكل ٥ - ١ على قطع مطردة في $[a, b]$. عمم لمسألة ٩ بالبرهنة ، بدون استخدام الاتصال المتظم ، على أن الدالة تكون قابلة للتكامل على $[a, b]$ إذا كانت متصلة وقطعا مطردة هناك .

١٠ - ٥

مسائل متنوعة

هذه المسائل توضح تطبيقات أخرى للتكامل المعين . كثافة المادة هي كتلتها لوحدة الحجم . إذا كانت الكثافة ثابتة ، فإن الكتلة هي الحجم مضروبا في الكثافة .
 ١ - قضيب AB طوله 10 in ومقطعه مربع طول ضلعه 1 in ، كثافة القضيب عند أى نقطة تساوى ثلاثة أمثال بعد النقطة عن A . اوجد كتلة القضيب . (ارشاد : قسم القضيب الى قطع صغيرة وقرب الكتلة لكل قطعة .)
 ٢ - قضيب مقطعه دائرى ، طوله 10 in وقطره 1 in ، كثافته عند نقطة على بعد x in من الطرف الأخرى يعطى بالصيغة $0.02x^2 + 0.4x + 3$ ، اوجد كتلة القضيب .
 ٣ - لوح مثلثى متساوى الساقين سمكه 1 in وطول قاعدته 8 in وارتفاعه 12 in . كثافته عند أى نقطة تتناسب مع بعد النقطة عن قاعدة المثلث . اوجد كتلة اللوح .
 ٤ - نقطة تتحرك على خط الاحداثيات ، سرعتها $v(t) \geq 0$ عند الزمن t ، أثبت أن المسافة المقطوعة بالنقطة بين الزمنين $t = a$ و $t = b$ تعطى بالتكامل $\int_a^b v(t) dt$. (ارشاد : قسم الفترة الزمنية $[a, b]$ الى فترات جزئية صغيرة وقرب المسافة التى تقطعها النقطة خلال كل من هذه الفترات الجزئية) إذا كانت $v(t) = t - 1$ وكانت النقطة عند $s = 1$ عندما $t = 2$.

فاحسب المسافة التي تقطعها النقطة في الفترة الزمنية [2 , 5] باستخدام التكامل المعين أعلاه ، وأيضا بالطريقة السابقة لحل معادلة تفاضلية .

٥ - الكثافة عند أى نقطة على لوحة دائرية سمكها 2 in ونصف قطرها 3 in تتناسب مع مربع بعد النقطة عن محور اللوحة . أوجد كتلة اللوحة . (ارشاد : مساحة الحلقة الدائرية الرفيعة التي نصف قطرها الداخلي r ونصف قطرها الخارجي $r + h$ هي بالتقريب $2\pi rh$) .

٦ - الضغط بسبب الجاذبية يجعل الكثافة داخل نجم كروي أكبر منها عند سطحه . اذا كانت الكثافة عند أى نقطة تتناسب مع ثابت زائد بعد النقطة عن السطح ، فأوجد كتلة النجم . (انظر الارشاد في المسألة ٥) .

٧ - مقدار الاضاءة عند نقطة P ، الناشئة عن مصدر ضوئي تساوى شدة الضوء مقسومة على مربع المسافة بين النقطة P والضوء . ضوء فلوريسنت معين هو أنبوبة طولها 4 ft وشدته منتظمة وقدرها 30 قوة شمعة لكل قدم طولى . الانبوبة رفيعة للدرجة أنه يمكن اعتبارها خطا مستقيما . أوجد مقدار الاضاءة الناشئة عن الضوء عند نقطة P على خط الضوء تبعد عن أحد الطرفين . (ارشاد : قسم الاسطوانة الى مقاطع صغيرة وقرب مقدار الاضاءة عند P الناشئة عن كل مقطع .)

٨ - أحد قوانين الفيزياء هو أن أى جسمين لهما كتلة يجذب كل منهما الآخر . اذا كان الجسمان صغيرين للدرجة أنه يمكن اعتبارهما نقطتين وكانت كتلتاهما m_1 و m_2 فان قوة الجذب تعطى بالصيغة $G m_1 m_2 / r^2$ ، حيث G ثابت ، r المسافة بين الجسمين . أوجد قوة الجذب بين قضيب متجانس كتلته 240 grams وطوله 24 cm وسمكه يمكن اهماله ، وبين نقطة P كتلتها 300 grams على استقامة القضيب وعلى بعد 3 cm من أحد الطرفين .

الفصل السادس

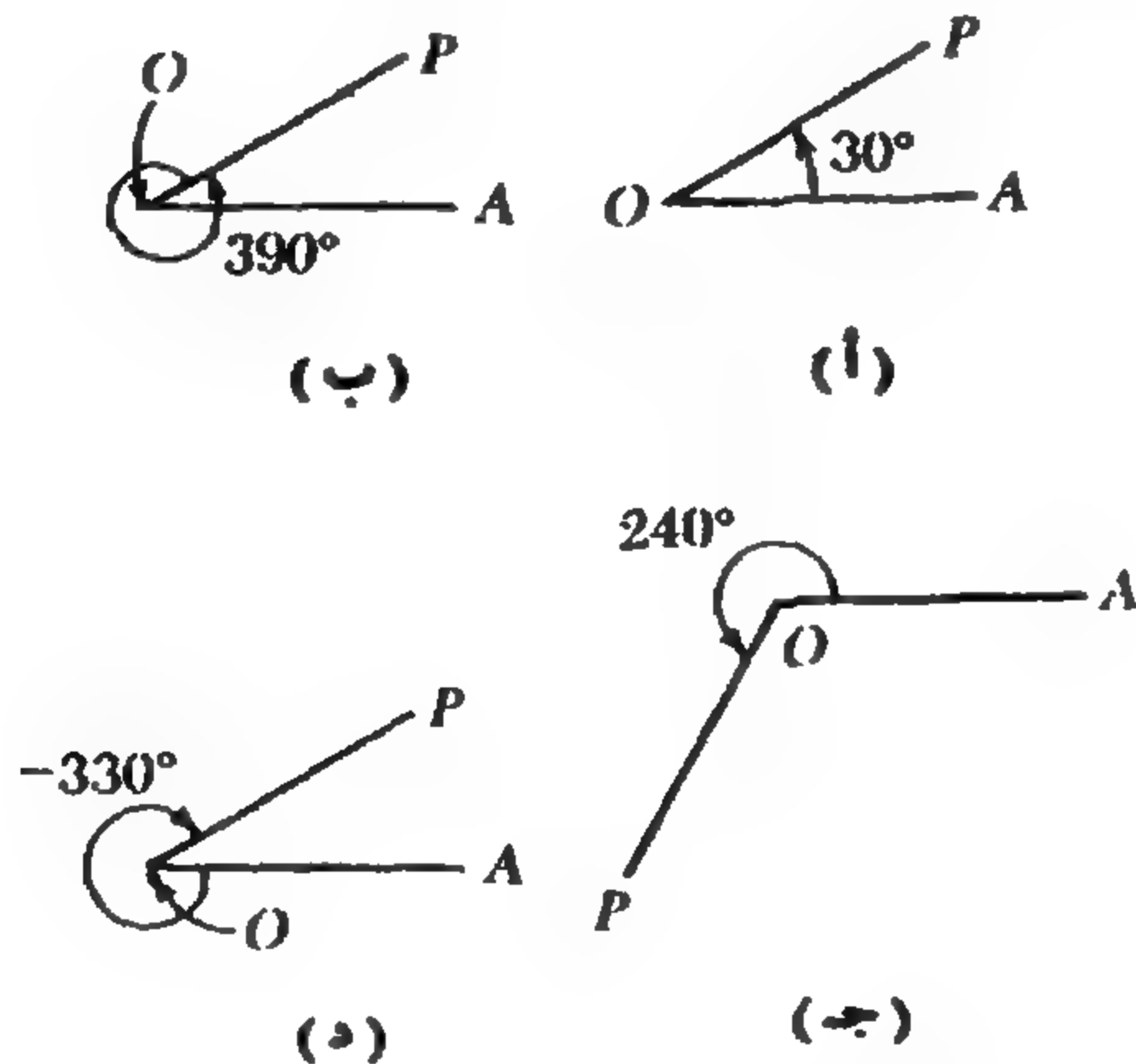
الدوال المثلثية

٦ - ١

الدوال المثلثية

الدوال الجبرية ، مع كونها مفيدة ، إلا أنها لا تكفى لرياضيات الفيزياء والكيمياء ، والعلوم الهندسية . فى هذا الفصل والفصل القادم . سندرس الدوال المثلثية ، والدوال الأسية ، والدوال اللوغاريتمية ، وجميعها لاغنى عنها فى العلم . نفترض أن القارئ ملهم بعلم حساب المثلثات الأولى ، لكن نبدأ بموجز عن القياس الدائرى .

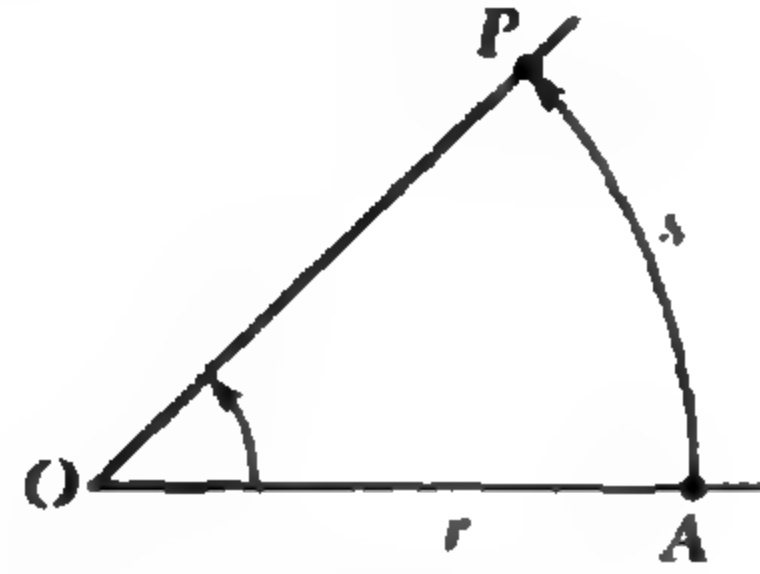
ليكن الشعاع OA ثابتاً* . الشعاع OP فى الابتداء ينطبق على OA ، ثم يدور حول O لموضع ما ، الدوران قد يكون لأكثر من دورة واحدة . الزاوية المتكونة بواسطة الدوران يقال أنها موجبة أو سالبة طبقاً لكون الدوران ضد اتجاه عقرب الساعة أو مع اتجاه عقرب الساعة . بعض الزوايا النمطية مع مقاييسها بالدرجات موضحة فى الشكل ٦ - ١ .



شكل ٦ - ١

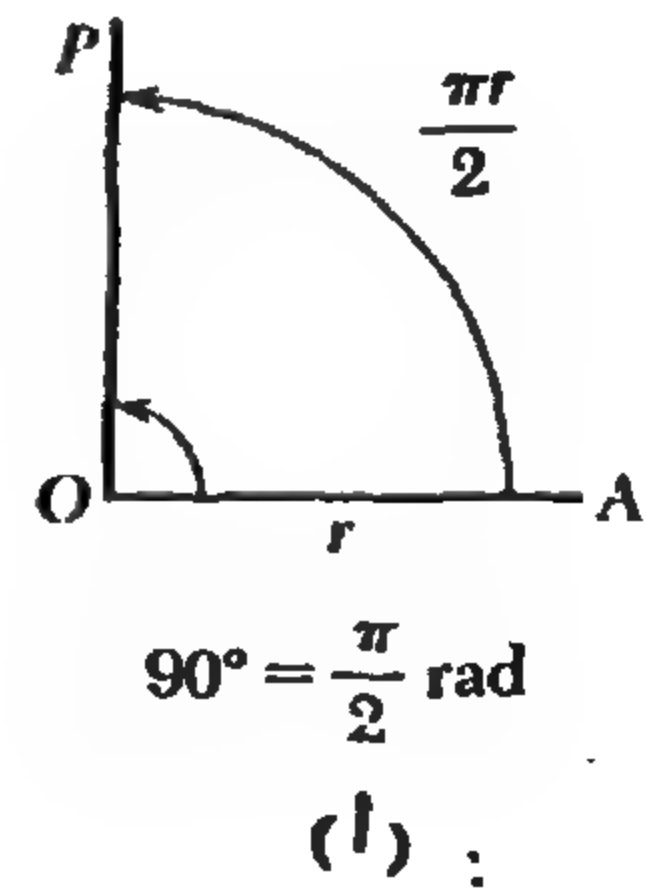
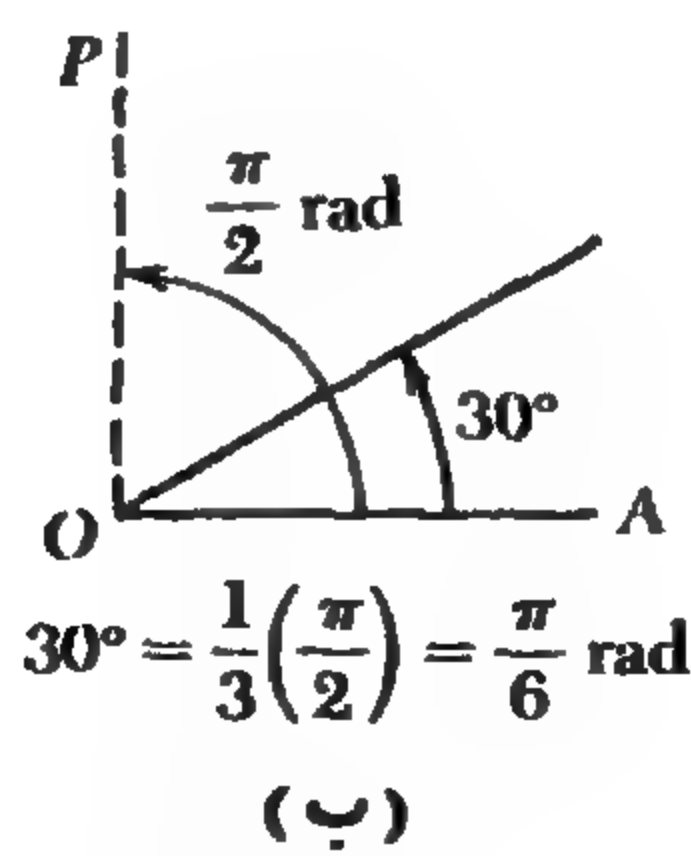
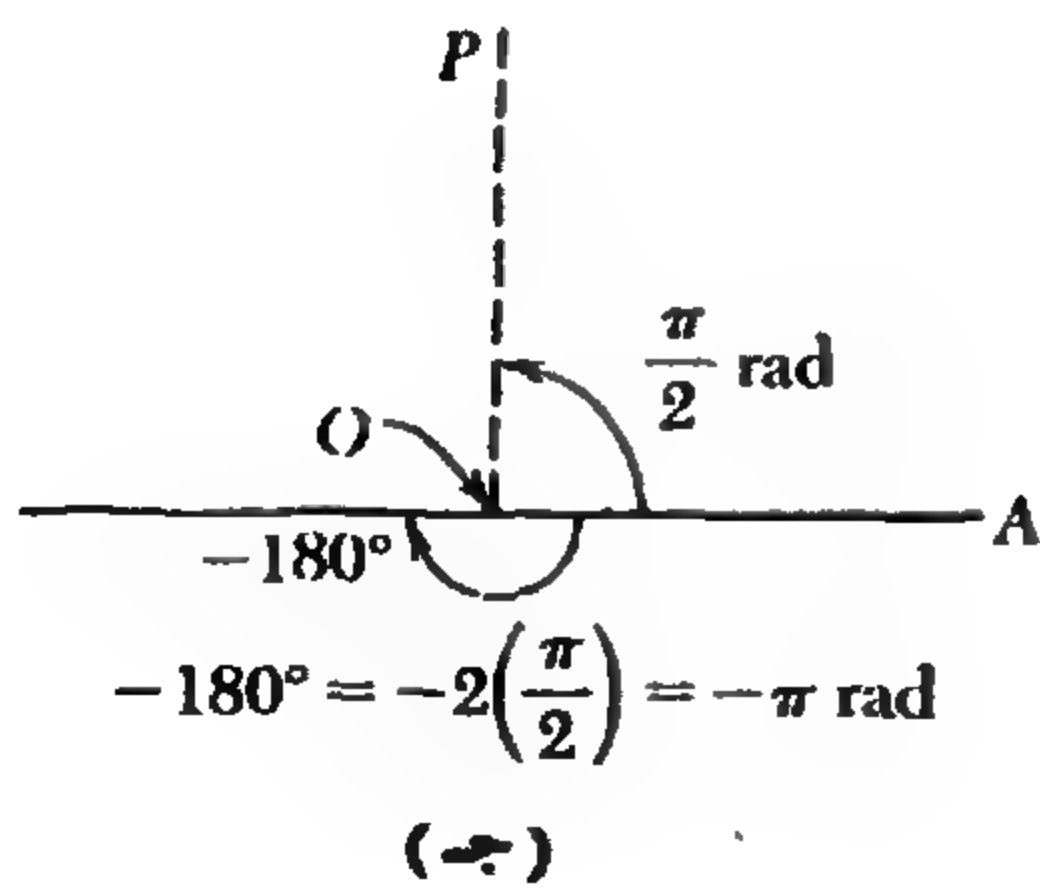
كما أن المسافات يمكن قياسها بالأقدام ، بالأميال ، أو بالسنتيمترات ، كذلك توجد أنظمة متعددة لقياس مقادير الزوايا . أحدها القياس العادى بالدرجات ، وآخر هو القياس نصف القطرى (الدائرى) .

لتكن P أى نقطة على الشعاع OP غير O . عندما يدور OP من وضعه الابتدائى الى وضعه الأخير ليكون الزاوية AOP (شكل ٦ - ٢) ، ترسم قوساً من دائرة . لتكن s هى المسافة التى تحركتها النقطة P ، مقيسة على القوس ، موجبة إذا كان الدوران ضد اتجاه عقرب الساعة ، وسالبة إذا كان مع اتجاه عقرب الساعة . سنفترض أن كل قوس من دائرة له طول متجه يتعين بهذه الطريقة ، وبالعكس أن لى عدد حقيقى s ونقطة A على الدائرة ، توجد نقطة P على الدائرة بحيث أن s هو الطول المتجه للقوس \widehat{AP} . هذه الافتراضات يمكن برهنتها ، لكن إجراء ذلك يتطلب تعريف طول القوس ودراسة مفصلة لمسلمات الهندسة ، وهذا أكثر مما يمكننا مباشرة هنا . إذا كانت r نصف قطر الدائرة ، فالعدد s/r يعرف بأنه القياس الدائرى للزاوية AOP .



شكل ٦ - ٢
القياس الدائرى للزاوية AOP هو s/r .

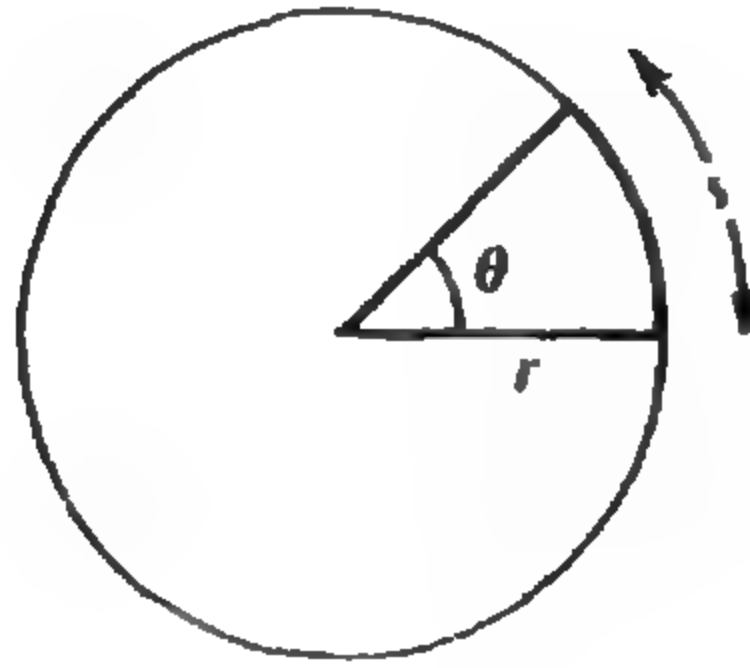
رغم أن اختياراً مختلفاً للنقطة P سيعطى r و s مختلفتين ، لكن النسبة بينهما واحدة ، لذلك اختيار موضع P على الخط ليس له أهمية . الزاوية نصف القطرية قوسها يساوى نصف القطر وهى تقريباً 57.3° . للزاوية القائمة يكون طول القوس الذى ترسمه النقطة P هو $r/2$. ومن ثم التقدير الدائرى للزاوية القائمة هو $\pi/2 = (\pi r/2)/r$ (شكل ٦ - ٣) . الزاوية التى قياسها بالدرجات هو 30° يجب أن يكون قياسها الدائرى ثلث ذلك للزاوية القائمة ، ولذلك هو $(\pi/2)/3$ ، أى $\pi/6$ زاوية نصف قطرية (شكل ٦ - ٣ ب) . الزاوية التى قياسها بالدرجات هو 180° - تقديرها الدائرى هو $2 - \pi$ مضروبة فى تلك القيمة للزاوية القائمة ، فهو $2 - \pi$ زاوية نصف قطرية (شكل ٦ - ٣ ج) . بوجه عام الزاوية التى قياسها بالدرجات هو ϕ تقديرها الدائرى هو $\phi (\pi/180)$.



شكل ٦ - ٣

القياس الدائري يستخدم في معظم الأعمال العلمية لأن صيغ المشتقات لـ $\sin x$ وللدوال المثلثية الأخرى تكون أبسط عندما تقاس الزوايا بالتقدير الدائري عن ما هي عليه عند استخدام القياس بالدرجات . إذا لم يشر إلى الوحدة فيفهم أنها النصف قطرية .

من تعريف القياس الدائري ، نرى أنه إذا كانت θ هي التقدير الدائري لزاوية ، فإن الطول s للقوس الدائري الذي نصف قطره r ومقطع بضلعي الزاوية هو $s = r\theta$ (شكل ٦ - ٤) . قطاع الدائرة هو المنطقة المحدودة بنصفي قترين القوس المقطوع . المساحة A للقطاع تتناسب مع القياس θ لزاويته المركزية أي أن ، $A = k\theta$ ، ثابت ما k . يمكننا تعيين k لأننا نعلم أن عندما $\theta = 2\pi$ ، القطاع يكون الدائرة بأكملها وهذه مساحتها πr^2 . ومن ثم $\pi r^2 = k 2\pi$ وإذن $k = \frac{1}{2}r^2$. لذلك $A = \frac{1}{2}r^2\theta$.



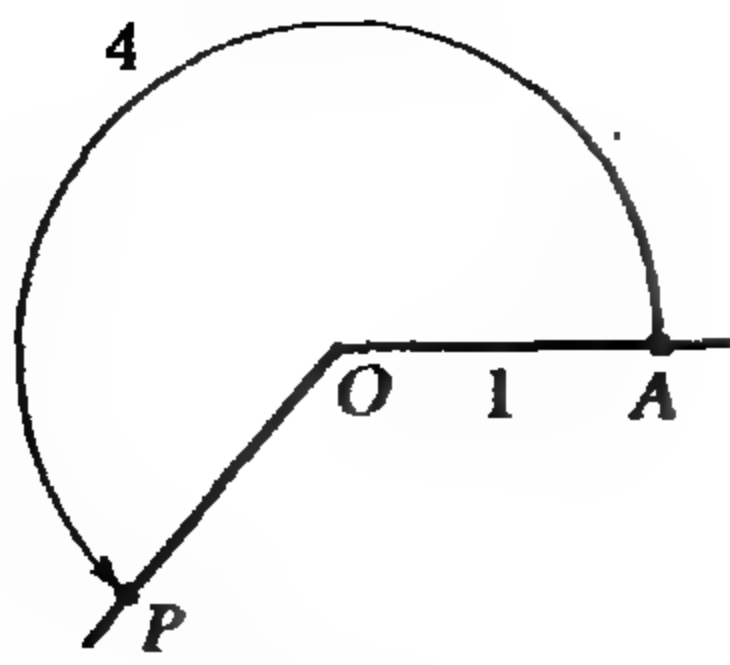
شكل ٦ - ٤
 $s = r\theta$ مساحة القطاع $\frac{1}{2}r^2\theta$

٦ - ١٠ نظرية . طول قوس الدائرة التي نصف قطرها r ، المقطوع بزاوية مركزية تقديرها الدائري θ هو $r\theta$. مساحة القطاع المناظر هي $\frac{1}{2}r^2\theta$.

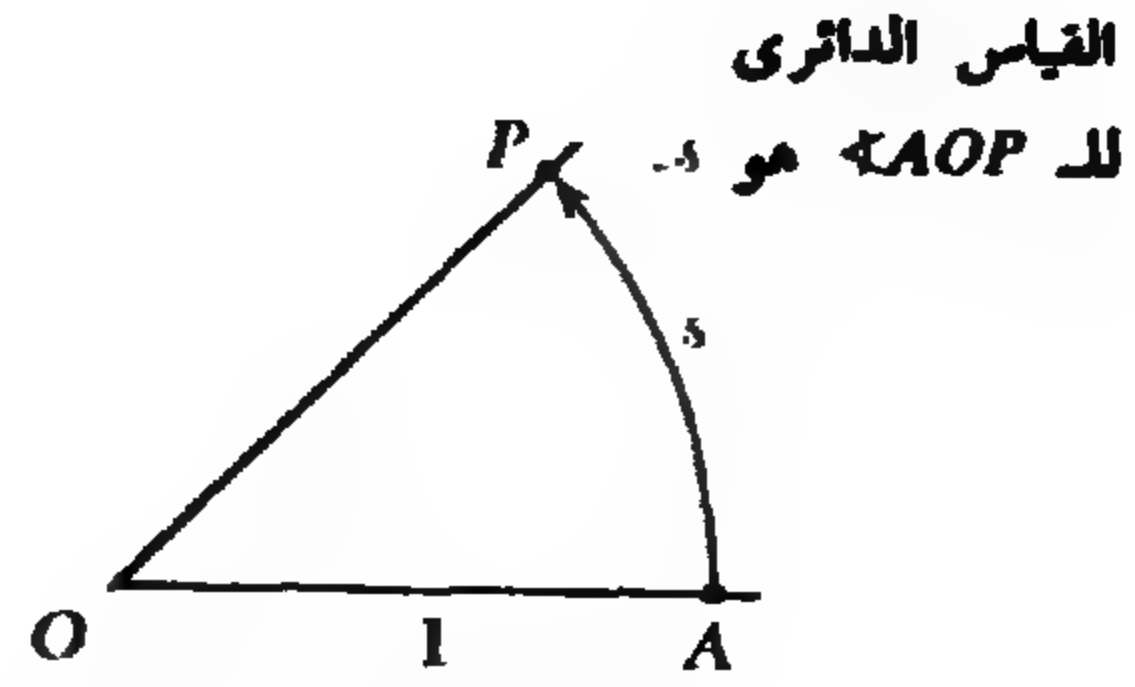
لكي تكون نظرية ٦ - ١ صحيحة ، θ يجب أن تكون التقدير الدائري للزاوية المركزية .

بالإضافة إلى جيب زاوية يمكننا أيضا التحدث عن جيب عدد ، مثال ذلك ، $\sin 4$ ، حيث 4 عدد صرف . لكل عدد s توجد زاوية AOP قياسها الدائري هو s . وهي الزاوية المتكونة باختيار B و A في الشكل ٦ - ٥ بحيث أن $|OA| = |OP| = 1$ ودوران الشعاع OP إلى أن يصبح طول القوس \widehat{AP} مساويا s . الدوران يكون ضد اتجاه عقرب الساعة أو مع اتجاه عقرب الساعة حسب كون s موجبة أو سالبة ، وعندما تكون $s > 2\pi$ يكون الدوران لأكثر من دورة واحدة . نعرف جيب العدد s بأنه جيب هذه الزاوية ، ويكون

$$\sin s = \sin \angle AOP$$



شكل ٦ - ٦



شكل ٦ - ٥

جيب العدد s هو جيب الزاوية التي قياسها الدائري هو s .

أى أن جيب العدد s هو جيب الزاوية التي قياسها الدائري هو s بالمثل ، $\cos s = \cos \angle AOP$ ، $\tan s = \tan \angle AOP$ وهكذا . الزاوية المرتبطة بالعدد 4 موضحة في الشكل ٦ - ٦ . قياسها الدائري هو 4 ، وقياسها بالدرجات هو بالتقريب $229^\circ 11'$. ومن ثم

$$\sin 4 \approx \sin 229^\circ 11' \approx -0.75680$$

الطريقة التي شرحناها تخصص بدون ابهام عددا هو $\sin x$ لكل عدد حقيقي x ومن ثم تعرف دالة $f: f(x) = \sin x$. نطاق دالة الجيب f هو فئة جميع الأعداد الحقيقية ، ومداءها هو الفترة المقفلة $[-1, 1]$ لأن جيب كل زاوية يقع بين هذين العددين . بالمثل ، توجد خمس دوال مثلثية أخرى : $h(x) = \cos(x)$ ، $u(x) = \tan x$ ، $v(x) = \sec x$. وهكذا ، ليس جميعها معرfa لكل x .

من السهل تخطيط الشكل البياني للدالة $f(x) = \sin x$ بعمل جدول للقيم المناظرة لتلك الأعداد التي من السهل حساب جيوبها . لأن $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ ، قيم دالة الجيب تتكرر لـ $x \geq 2\pi$. فإذا خططنا الشكل البياني لقيم x بين $0, 2\pi$ ، فإن الجزء بين 4π و 2π سيكون تكرارا لهذا (شكل ٦ - ٧) ، وبالمثل سيكون الجزء بين 6π و 4π ، وبين 0 و -2π ، وهكذا . لاحظ أن قيم الدالة f تقع بين -1 و 1 . الدالة g التي لها الخاصية أن $g(-x) = -g(x)$ لجميع x حيث الدالة g معرفة ، تسمى دالة فردية . بما أن $\sin(-x) = -\sin(x)$ فدالة الجيب فردية . الشكل البياني للدالة الفردية متماثل بالنسبة الى نقطة الأصل .

الطبيعة التكرارية للشكل البياني هي نتيجة للعلاقة $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ لجميع x . الدالة F التي لها عدد p بحيث أن

$$(1) \quad F(x + p) = F(x)$$

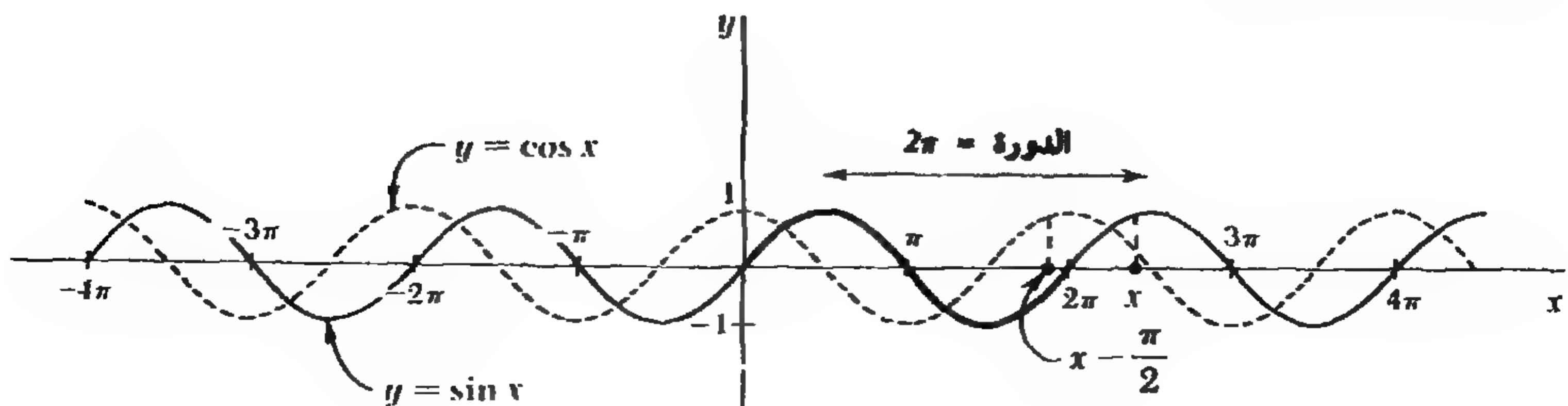
لجميع x حيث F معرفة يقال أنها دورية . في حالة $\sin x$ قد رأينا أن 2π قيمة مناسبة لـ p . احتمالات أخرى لـ p هي -2π و 4π ، 6π . أصغر قيمة موجبة p تجعل (١) صحيحة لجميع x حيث F معرفة تسمى دورة الدالة F . على الشكل البياني لدالة الجيب هي المسافة بين قمتي موجتين متتاليتين . يمكننا من الشكل البياني أن نخمن أن دورة $\sin x$ هي 2π . سنبرهن على

x	$\sin x$
0	0
$\pi/6$	$\frac{1}{2}$
$\pi/4$	$1/\sqrt{2} \approx 0.71$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2 \approx 0.87$
$\pi/2$	1
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2 \approx 0.87$
$3\pi/4$	$1/\sqrt{2} \approx 0.71$
$5\pi/6$	$\frac{1}{2}$
π	0
$7\pi/6$	$-\frac{1}{2}$
$5\pi/4$	$-1/\sqrt{2} \approx -0.71$
$4\pi/3$	$-\sqrt{3}/2 \approx -0.87$
$3\pi/2$	-1
$5\pi/3$	$-\sqrt{3}/2 \approx -0.87$
$7\pi/4$	$-1/\sqrt{2} \approx -0.71$
$11\pi/6$	$-\frac{1}{2}$
2π	0
$13\pi/6$	$\frac{1}{2}$

هذا . لتكن p عددا موجبا بحيث أن $\sin(x+p) = \sin x$ لجميع x . بوجه خاص هذا يكون صحيحا عند $x=0$ ، وبالتالي $\sin p = \sin 0 = 0$ ، ومن ثم ، تكون الاحتمالات لقيم p الموجبة هي $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$. بما أن $\sin(\pi/4 + \pi) = \sin(\pi/4)$ لا يمكن أن تكون π دورة للدالة . لقد رأينا أن 2π هي دورة للدالة ، وبما أنها أصغر p موجبة فهي الدورة .

الشكل البياني للدالة $y = h(x) = \cos x$ أيضا موضح في الشكل ٦ - ٧ . وهو يتطابق مع الشكل البياني لدالة الجيب مزاحا الى اليسار مسافة $\pi/2$ ، ذلك لأن $\sin x = \cos(x - \pi/2)$. بما أن $\cos(-x) = \cos(x)$ ، فالتناظر أن $h(-x) = h(x)$ لجميع x حيث h تكون معرفة . الدالة بهذه الخاصية تسمى دالة زوجية ، وشكلها البياني متماثل بالنسبة الى المحور الصادي .

$$\sin x = \cos(x - \pi/2)$$



شكل ٦ - ٧

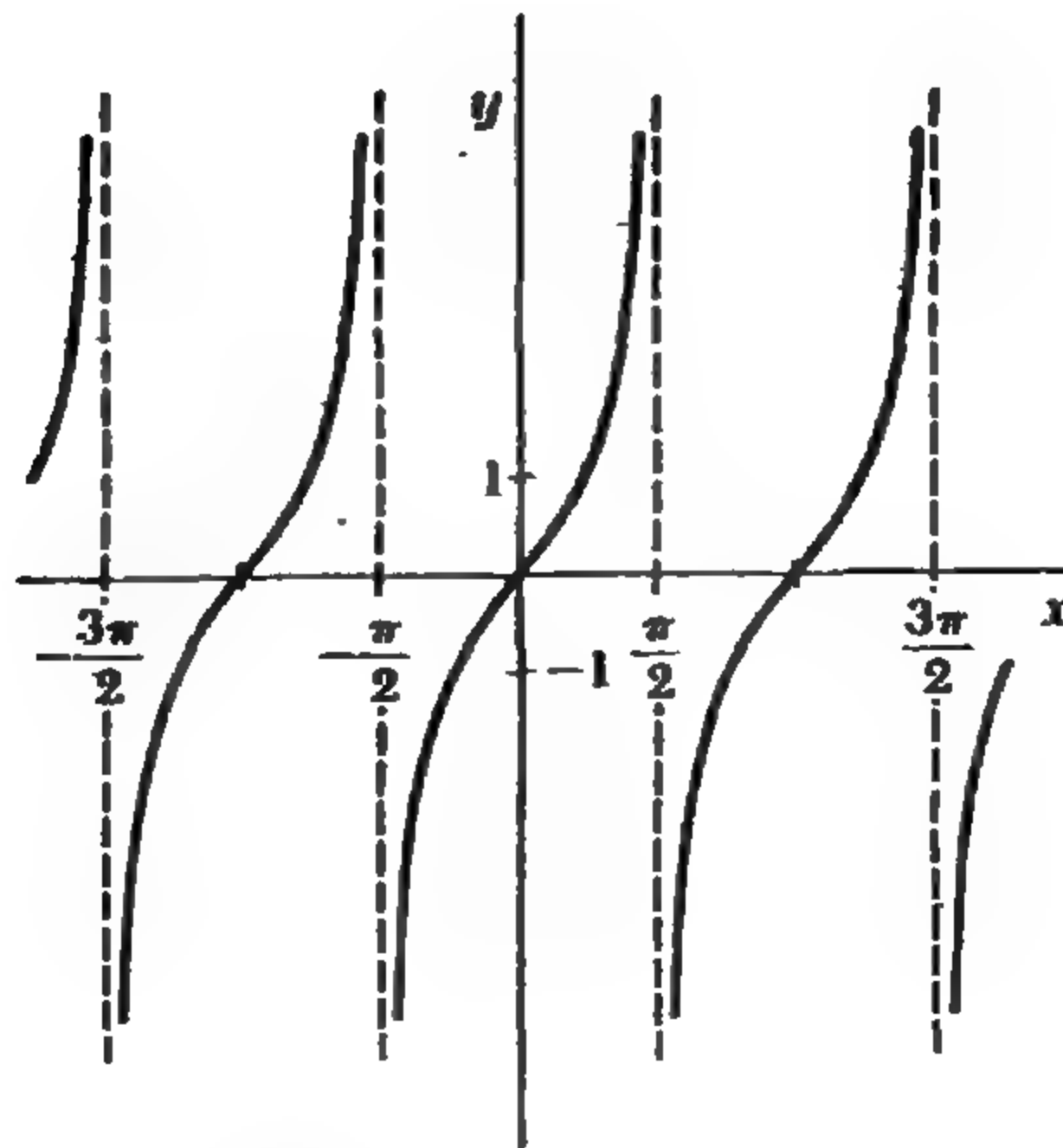
مثال ١ . عين ما اذا كانت الدالة $f(x) = (x^2 - 6) / x$ زوجية أو فردية أو لا زوجية ولا فردية لدينا

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 6}{-x} = -\frac{x^2 - 6}{x}$$

بما أن $f(-x) = -f(x)$ لجميع x حيث f تكون معرفة ، فإن f دالة فردية .

ظواهر فيزيائية كثيرة تتضمن حركة موجية أو دورية مثال ذلك ، الصوت ، الضوء ، الماء ، وموجات الراديو ، تأرجع البندول ، حركة الكواكب حول الشمس ، وسريان التيار في مذبذب كهربي . كما تشير صفتها الموجية والدورية ، فإن دالتى الجيب وجيب التمام هما الوسيلتان الرياضيتان الطبيعيتان لدراسة هذه الظواهر . تطبيق نموذجى هو على اهتزاز السلك الحلزونى (الزنبرك) . الموضع بعد t sec لنقل فى نهاية زنبرك يهتز يعطى بالصيغة $a \cos bt$ ، حيث b مقدار ثابت قيمته تعتمد على صلابة الزنبرك وطوله غير المشدود وحيث a ثابت آخر . هنا t تمثل الزمن وليست لها علاقة بزاوية .

دالة الظل $f(x) = \tan x$ لها شكل بيانى مختلف تماما ، يمكن تخطيطه باستخدام جدول الظلال (شكل ٦ - ٨) . وهى غير معرفة عند $x = \pm \pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \dots$ الشكل البيانى يكون مقاربا للخطوط الرأسية عند هذه الاعداد ، اذ أن $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan x = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \tan x = -\infty$ رغم أن $\tan(x + 2\pi) = \tan x$ لجميع x حيث $\tan x$ تكون معرفة ، إلا أن 2π ليست الدورة لدالة الظل . هل يمكن للقارىء أن يخمن الدورة بالنظر إلى الشكل البيانى .



شكل ٦ - ٨ $y = \tan x$

مسائل

أوجد القياس الدائرى للزاويا التى قياسها بالدرجات معطى أدناه .

$$1 - 120^\circ , 2 - 45^\circ , 3 - 300^\circ , 4 - 585^\circ , 5 - 14^\circ , 6 - 97^\circ 13'$$

أوجد القياس بالدرجات للزاويا التى قياسها الدائرى تعطى أدناه

$$7 - \pi/3 , 8 - \pi , 9 - 7\pi/2 , 10 - \frac{1}{2} , 11 - 2.5 , 12 - 0.1$$

أوجد الدوال المثلثية الآتية لأعداد حقيقية

$$\begin{array}{llll} \cot 0 - 16 & \sin(-\pi/2) - 15 & \sin(4\pi/3) - 14 & \tan(\pi/4) - 13 \\ \cos 10 - 20 & \cos(-1.3) - 19 & \tan 2 - 18 & \sin \frac{1}{2} - 17 \end{array}$$

خطط الشكل البيانى للمنحنيات الآتية

$$\begin{array}{llll} y = -\cos t - 24 & y = 2 \cos \frac{1}{2}x - 23 & y = \sin 2x - 22 & y = 2 \sin x - 21 \\ y = |\sin x| - 27 & y = -\tan x - 26 & y = \sin(x + \pi/2) - 25 & y = [\sin x] - 28 \\ y = [\cos x] - 29 \end{array}$$

٣٠ - خطط الشكل البيانى لـ $y = \cot x$ ما هى خطوطه التقريبية ؟ هل تعتقد أن الدالة دورية ، وإذا كانت كذلك ، فبماذا تخمن أن تكون دورتها ؟

٣١ - ارسم الشكل البيانى لـ $y = \sec x$. هل تعتقد أن الدالة دورية ، وإذا كانت كذلك ، فبماذا تخمن أن تكون دورتها ؟

٣٢ - احصل على الشكل البيانى للمنحنى $y = \sin(x + b)$ حيث b مقدار ثابت ، من الشكل البيانى لـ $y = \sin x$ بنقل المحاور . احصل على الشكل البيانى للمنحنى $y = \cos x$ بهذه الطريقة .

٣٣ - قرب إلى المساحة تحت قوس واحد للمنحنى $y = \sin x$ بقاعدة شبه المنحرف مستخدما ثمانى فترات .

٣٤ - ولد صغير يريد قطعة من فطيره محيطها 16 inches . إذا كان فى امكانه اختيار الطبق الدائرى الذى تخبز عليه الفطيرة ، أى طبق يختار ليحصل على أكبر قطعة ؟ (ارشاد : عبر عن مساحة القطعة بدلالة الزاوية المركزية) .

٣٥ - أوجد دورة دالة الظل واثبت اجابتك .

نخمن دورة كل من الدوال الآتية

$$f(t) = \cos(t/2) - 38 \quad f(x) = \sin 3x - 37 \quad f(x) = \sin 2x - 36$$

$$g(z) = \sin 2z + 2 \cos z - 41 \quad g(x) = \tan 2x - 40 \quad n f(x) = \sin nx - 39 \text{ عدد صحيح موجب}$$

٤٢ - هل تعتقد أن الدالة $f(x) = \sin x + x$ تكون دورية ، وإذا كانت كذلك ، بماذا تخمن أن تكون دورتها ؟

٤٣ - هل تعتقد أن أكبر الأعداد الصحيحة $f(x) = [x]$ تكون دورية ، وإذا كانت كذلك ، بماذا تخمن أن تكون دورتها ؟

٤٤ - الدالة المعرفة بـ $G(x) = (-1)^{[x]}$ دورية . بماذا تخمن أن تكون دورتها ؟ أوجد دالة مماثلة لكن دورتها نصف دورة الدالة G .

٤٥ - الدالة $f(x) = x - [x]$ دورية . بماذا تخمن أن تكون دورتها ؟

٤٦ - إذا كانت F دالة دورية ودورتها p ، أثبت أن $F(x + 2p) = F(x)$ لجميع x حيث F تكون معرفة . (ارشاد : اكتب $2p$ في الصورة $p + p$) أثبت أن

$$F(x + np) = F(x) \quad (٢)$$

لجميع قيم n الصحيحة الموجبة وجميع x حيث F تكون معرفة . (ارشاد : استخدم الاستنتاج الرياضي) . عمم النتيجة في (٢) لجميع الأعداد الصحيحة n [ارشاد : إذا كانت $n < 0$ ، اكتب x في الصورة $(x + np) + (-n)p$] .

٤٧ - إذا كانت F و G دالتين دورتهما q و p ، على الترتيب ، حيث p و q عددان صحيحان موجبان ، أثبت أن مجموعها $F + G$ يكون دالة دورية وأوجد دورتها . (ارشاد : حاول $g = 6$ و $p = 4$: انظر المسألة ٤٦) .

عين ما إذا كانت كل من الدوال الآتية زوجية أو فردية ، أولا هذا ولاذاك

$$f(x) = x^2 - ٤٨ \quad h(t) = 1/t - ٤٩ \quad g(t) = t^5 - \sqrt{2} - ٥٠$$

$$F(u) = \sec u - ٥٢ \quad f(x) = (x + x^3)/(x^2 + 1) - ٥١ \quad G(y) = \frac{1}{2} \sin y - \cos 2y - ٥٣$$

٥٤ - لماذا يكون الشكل البياني لدالة فردية متماثلا بالنسبة الى نقطة الأصل والشكل البياني لدالة زوجية متماثلا بالنسبة إلى المحور الصادي ؟

٥٥ - اثبت أن حاصل جمع أي عدد من الدوال الزوجية هو دالة زوجية وأن حاصل جمع أي عدد من الدوال الفردية هو دالة فردية .

٥٦ - (أ) إذا كانت $f(x)$ أي دالة ، أثبت أن الدالة E المعرفة بـ $E(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ هي دالة زوجية . (ب) كون بكيفية مماثلة دالة فردية من f . (ج) أثبت أن أي دالة f يمكن التعبير عنه كحاصل جمع دالة زوجية وأخرى فردية . وضح ذلك بالدالة $f(x) = x/(x-1)$ (د) عبر عن x^2 كحاصل جمع دالة زوجية وأخرى فردية ، وأعمل نفس الشيء مع $\sin x$.

٥٧ - إذا كانت $f(x)$ دالة فردية ، أثبت أن $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ لأي $a > 0$. اعط شرحا هندسيا لهذه

النتيجة . (ارشاد : $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$) اجر تغيير المتغير $u = -x$ في التكامل الأول على الطرف الأيمن للمعادلة

٥٨ - إذا كانت $f(x)$ فردالة زوجية ، أثبت أن $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ لأي $a > 0$ ، أعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة .

٦ - ٢

النهايات المثلثية

١٠ - سلاسة الأشكال البيانية للدوال المثلثية تشير إلى أنه من المحتمل أن يكون لها مشتقات . في الطريق إلى إيجاد هذه المشتقات سنحتاج إلى نهايتين ، نحسب قيمتها الآن لكي لا يعاق البرهان فيما بعد .

نفرض ، كما يمكننا البرهنة عليه ، أن طول القوس \widehat{AP} من دائرة (شكل ٦ - ٩) أكبر من طول الوتر AP وأقل من طول كل مسير من خط منكسر واصل بين P و A ويقع خارج أو مماس للدائرة .
نثبت أولاً أن $\lim_{t \rightarrow 0} \sin t = 0$ ، نتيجة ليست غير متوقعة . وحدة الدوائر هي الدائرة التي نصف قطرها 1 ومركزها عند نقطة الأصل . لأي عدد موجب t أقل من $\pi/2$ ، ليكن \widehat{AP} القوس الذي طوله t على وحدة الدوائر الموضح في الشكل ٦ - ١٠ ، فيكون $\angle AOP = t$ ، فيكون $\sin t = \sin \angle AOP$ من تعريف جيب العدد ، ويكون $|BP| < |AP| < t$ بافتراضنا الخاص بطول القوس . واذاً

$$0 < \sin t = \sin \angle AOP = \frac{|BP|}{|OP|} = |BP| < |AP| < t.$$

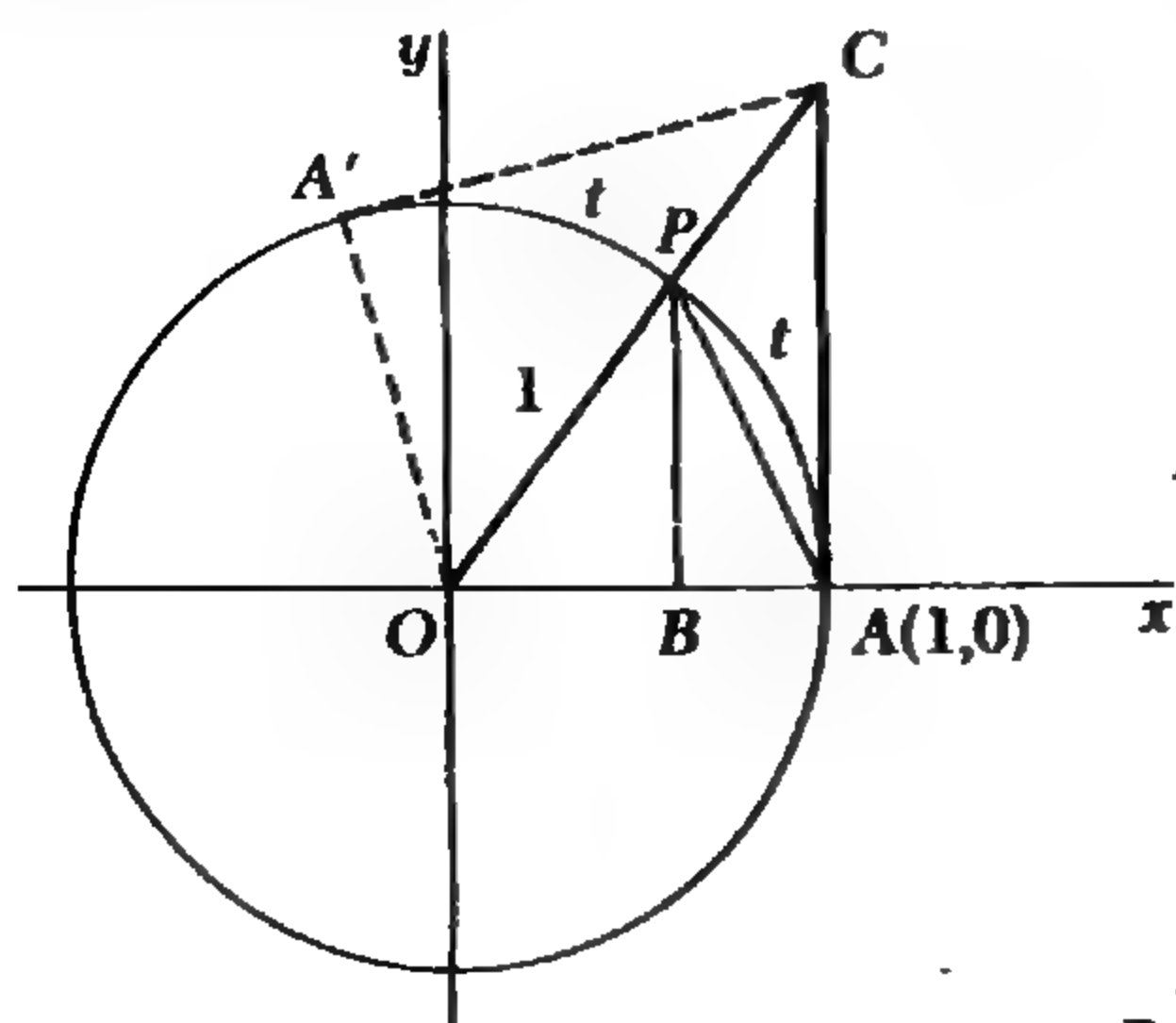
أي أن

$$(١) \quad 0 < \sin t < t, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

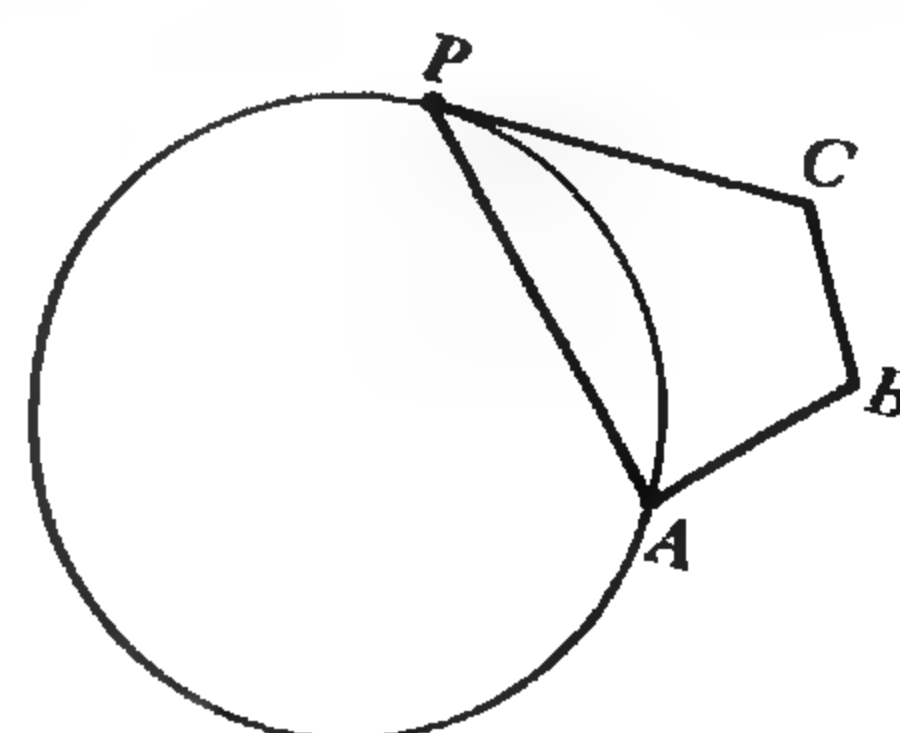
بتطبيق نظرية الحصر على (١) ، يكون

$$(٢) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \sin t = 0$$

لايجاد النهاية اليسرى ، ضع $s = -t$ ، حيث $t < 0$ فتكون $s > 0$ ، عندما تقترب t من الصفر من جهة اليسار ، تقترب s من الصفر من جهة اليمين . ومن ثم ، باستخدام (٢) يكون



شكل ١٠ - ٦



شكل ٩ - ٦

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \sin t = \lim_{s \rightarrow 0^+} \sin (-s) = -\lim_{s \rightarrow 0^+} \sin s = 0$$

حيث قد استخدمنا الحقيقة أن $\sin (-s) = -\sin s$ هذه النهاية اليسرى و (٢) تتضمنان أن

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sin t = 0 \quad (٣)$$

للقيم $-\pi/2 < t < \pi/2$ تكون موجبة وتساوى $\sqrt{1 - \sin^2 t}$ واذن

$$\lim_{t \rightarrow 0} \cos t = \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{\lim_{t \rightarrow 0} (1 - \sin^2 t)} = 1$$

لقد أثبتنا اتصال الدالتين sine و cosine عند 0 كنتيجة لحصولنا على مشتقيهما . في البند القادم سنرى أنهما متصلتان في كل مكان .

٦ - ٢ تمهيدية

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad (\text{أولا})$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{t} = 0. \quad (\text{ثانيا})$$

في كلتا هاتين النهايتين ، كما في (١) و (٣) ، تكون عدداً يمكن للقارىء تحقيقهما بفحص جدول جيوب وجيوب تمام زوايا مقيسة بالتقدير الدائري وقريبة من الصفر .

البرهان . ثبت النهاية الأولى باثبات أن $(\sin t)/t$ تقع بين $\cos t$ و 1 . بما أن $\lim_{t \rightarrow 0} \cos t = 1$ فهذا سيثبت النتيجة . افترض أولاً أن $0 < t < \pi/2$. لتكن C نقطة تقاطع OP في الشكل ٦ - ١٠ مع المماس عند A وليكن $A'C$ المماس الآخر من C للدائرة ، فيكون $|AC| = |A'C|$ ويكون القوس $\widehat{PA'}$ أيضاً له الطول t . لدينا

$$2t = |\widehat{AA'}| < |AC| + |A'C| = 2|AC|$$

ومن ثم $t < |AC|$. لكن

$$|AC| = \frac{|AC|}{|OA|} = \tan \angle AOP = \tan t.$$

واذن

$$t < \tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \quad (٤)$$

ومنها $\cos t < (\sin t)/t$ هذه مع (١) تعطى

$$\cos t < \frac{\sin t}{t} < 1, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2} \quad (٥)$$

إذا كانت $-\pi/2 < t < 0$ ، فإن $0 > -t > -\pi/2$ ومن (٥) ، بوضع $-t$ مكان t ، يكون

$$\cos(-t) < \frac{\sin(-t)}{-t} < 1$$

لكن $\sin(-t) = -\sin t$ و $\cos(-t) = \cos t$ ، فهذا يختزل الى (٥) مينا أن (٥) صحيحة أيضا عند $-\pi/2 < t < 0$ ومن ثم لجميع $-\pi/2 < t < \pi/2$ حيث $t \neq 0$ ، بما أن $\lim_{t \rightarrow 0} \cos t = 1$ ، فإن نظرية الحصر مطبقة على (٥) تثبت أن

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

النهاية الثانية فى التمهيدية ٦ - ٢ نحصل عليها بسهولة من الأولى :

$$\begin{aligned} \frac{\cos t - 1}{t} &= \frac{(\cos t - 1)(\cos t + 1)}{t(\cos t + 1)} = \frac{-\sin^2 t}{t(\cos t + 1)} \\ &= \frac{\sin t}{t} \frac{-\sin t}{\cos t + 1} \end{aligned}$$

واذن

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{t} = \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \right) \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{\cos t + 1} \right) = 1 \left(\frac{0}{2} \right) = 0$$

التمهيدية ٦ - ٢ يمكن استخدامها لاييجاد نهايات مثلية أخرى .

مثال ١ . أوجد $\lim_{y \rightarrow 0} [(\sin 3y)/y]$.

دع $z = 3y$ ، فيكون $\frac{\sin 3y}{y} = 3 \frac{\sin z}{z}$. عندما تقترب y من الصفر كذلك تفعل z ، واذن

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 3y}{y} = 3 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 3(1) = 3$$

مثال ٢ . أوجد $\lim_{x \rightarrow 0} [(\tan 2x)/(x \sec x)]$.

كل من البسط والمقام يقترب من الصفر . نكتب المقدار فى صورة فيها النهاية صفر فى المقام لا تكون مقلقة ،

$$\frac{\tan 2x}{x \sec x} = \frac{\sin 2x}{x \cos 2x \sec x} = 2 \frac{\sin 2x}{2x} \frac{\cos x}{\cos 2x}$$

ومنها

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x \sec x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x} = 2(1) \frac{1}{1} = 2.$$

مسائل

- ١ - حقق التمهيدية ٦-٢ بحساب قيم $(\cos t - 1) / t$ و $(\sin t) / t$ لقيم t الموجبة والسالبة القريبة من 0 . (تذكر أن t هي قياس دائري للزاوية AOP التي ترتبط بالعدد t في الشكل ٦-١٠) .
- ٢ - احسب قيم $(\tan t) / t$ لقيم t القريبة من الصفر ، ومن ثم خمن قيمة $\lim_{t \rightarrow 0} [(\tan t) / t]$. أثبت تخمينك . (ارشاد : اكتب $\tan t$ في صورة أخرى) .

أوجد النهايات الآتية . يمكن افتراض اتصال الدوال المثلثية .

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sec x \quad - \quad ٣ \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \sin x \quad - \quad ٤ \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sec x$$

$$\lim_{u \rightarrow -\pi/2} \tan \frac{u}{2} \quad - \quad ٦ \quad \lim_{t \rightarrow \pi} t \sin t \quad - \quad ٧ \quad \lim_{t \rightarrow 0} t \sin t$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z - z}{z} \quad - \quad ٩ \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos (\sin \theta) \quad - \quad ١١ \quad \lim_{y \rightarrow 0} \sqrt{1 + \sin^2 y}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} 2t \csc t \quad - \quad ١٢ \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{4x} \quad - \quad ١٤ \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{2} y}{y} \quad - \quad ١٥ \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} \quad - \quad ١٧ \quad \lim_{\theta \rightarrow (\pi/2)} \frac{\tan \theta}{\theta}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \quad - \quad ١٨ \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} \quad - \quad ٢٠ \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos u}{u^2}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\tan 3z}{2z} \quad - \quad ٢٣ \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos t}{\sqrt{t}} \quad - \quad ٢٢ \quad \lim_{x \rightarrow x} x \sin \frac{1}{x} \quad - \quad ٢١ \quad (\text{ارشاد : ضع } t = 1/x)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \cot \alpha \quad - \quad ٢٦ \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x} \quad - \quad ٢٥ \quad \lim_{z \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\tan 3z}{2z}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x - 1}{\cos x} \quad - \quad ٢٩ \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x}{\cos 5x} \quad - \quad ٢٨ \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin 3u}{\sin 2u}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - 2x}{2x - \sin x} \quad - \quad ٣٢ \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 - 2y}{\sin 2y} \quad - \quad ٣١ \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{\cos \theta}{\theta - \pi/2} \quad - \quad ٣٠ \quad (\text{ارشاد : ضع } x = \theta - \pi/2)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin (x + h) - \sin x}{h} \quad - \quad ٣٣ \quad (\text{ارشاد : فك } \sin (x + h))$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} [(1 - \cos t) / t^n] \quad - \quad ٣٤ \quad \text{توجد } n \text{ لاي القيم الصحيحة لـ}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} [(1 - \cos t) / t^n] \quad - \quad ٣٥ \quad \text{خطوط على نفس المحورين الاشكال البيانية للدوال } \tan t \text{ و } \sin t \text{ حيث } 0 < t < \pi/2$$

$$\sin t < t < \tan t \text{ المتباينة المكونة من (١) و (٤) .}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin (x + h) = \sin x \quad - \quad ٣٦ \quad \text{اثبت أن } \sin x \text{ متصلة عند كل عدد } x \text{ . (ارشاد : أثبت أن } \lim_{h \rightarrow 0} \sin (x + h) = \sin x \text{ بفك)}$$

$$\sin (x + h)$$

٣٧ - اختر b بحيث تكون الدالة f المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin \frac{x}{2}, & x \neq 0. \\ b, & x = 0. \end{cases}$$

متصلة عند 0 .

٣ - ٦

مشتقات الدوال المثلثية

لأن دالة الجيب ليست دالة جبرية ، فصيغنا للمشتقة لاتساعد فى ايجاد مشتقتها .
يجب أن نعود الى تعريف المشتقة وسنجد أنه من المناسب استخدام الصورة (٥) بيند ٣ - ١ .
لتكن $f(x) = \sin x$ ، فيكون

$$D \sin x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

بفك $\sin(x+h)$ بصيغة الجمع ، يكون لدينا

$$\begin{aligned} D \sin x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= (\sin x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x \end{aligned}$$

حيث استخدمنا التمهيدية ٦ - ٢ فى حساب النهايات . هذا يثبت الصيغة الاولى من الصيغ المعطاه
أدناه . الأخرى ستبرهن قريبا .

٣ - ٦

$$D \cos x = -\sin x \quad (\text{ثانيا}) \quad D \sin x = \cos x \quad (\text{أولا})$$

$$D \cot x = -\csc^2 x \quad (\text{رابعا}) \quad D \tan x = \sec^2 x \quad (\text{ثالثا})$$

$$D \csc x = -\csc x \cot x \quad (\text{سادسا}) \quad D \sec x = \sec x \tan x \quad (\text{خامسا})$$

عند $x = 0$ يكون $D \sin x = \cos 0 = 1$. الشكل البياني لدالة الجيب يمر بنقطة الأصل بزاوية 45° وله مماس أفقى حيثما $\cos x = 0$ ، أى عند $\pm \pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \dots$.
الاختبار الأول للمشتقة يبين أن $\sin x$ لها نهاية عظمى موضعية عند $\pi/2, 5\pi/2, \dots$ ، $-3\pi/2, \dots$

...., 2, ونهاية صفري موضعية عند $2\pi/2, 3\pi/2, 7\pi/2, \dots$, ... الشكل البياني للدالة $\sin x$ المخطط في الشكل ٦ - ٧ يوضح هذه الخواص .

لايجاد مشتقة $\sin 3x^2$ ، نحتاج الى تعميم للقاعدة ٦ - ٣ (أولاً) للدالة التي على الصورة $\sin g(x)$. قاعدة السلسلة تمكنا من ايجاده ، بشرط أن $g'(x)$ تكون موجودة . الفكرة هي أن نعبر عن $\sin g(x)$ كدالة تركيبية لدالتين لهما مشتقات . لتكن $f(z) = \sin z$, $z = g(x)$. فيكون

$$\sin g(x) = f(g(x))$$

من القاعدة ٦ - ٣ (أولاً) ، $f'(z) = \cos z$ ، واذن بقاعدة السلسلة

$$\begin{aligned} D \sin g(x) &= D_x f(g(x)) = f'(z)g'(x) \\ &= (\cos z)g'(x) = [\cos g(x)]g'(x). \end{aligned} \quad (١)$$

مثال ١ . أوجد $D \sin 3x^2$

من (١) حيث $g(x) = 3x^2$ ، يكون

$$D \sin 3x^2 = \cos 3x^2 D(3x^2) = 6x \cos 3x^2$$

مثال ٢ . أوجد $\frac{d}{dx} \sin^2 (5x - 10)$

بما أن المقدار المطلوب اجراء تفاضله هو قوة ، نبدأ بقاعدة القوة :

$$\frac{d}{dx} \sin^2 (5x - 10) = 2 \sin (5x - 10) \frac{d}{dx} \sin (5x - 10)$$

لايجاد $\frac{d}{dx} \sin (5x - 10)$ ، نستخدم (١) ، فنحصل على

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin (5x - 10) &= \cos (5x - 10) \frac{d}{dx} (5x - 10) \\ &= 5 \cos (5x - 10). \end{aligned}$$

واذن

$$\frac{d}{dx} \sin^2 (5x - 10) = 10 \sin (5x - 10) \cos (5x - 10)$$

الجواب يمكن وضعه في الصورة المختصرة $5 \sin (10x - 20)$ باستخدام المتطابقة $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$.

مع أن مشتقة دالة جيب التمام يمكن ايجادها مباشرة من تعريف المشتقة ، كما فعلنا بدالة الجيب ، الا أنه من الأسهل اتباع ما يأتي . لدينا المتطابقة المثلثية

$$(٢) \quad \cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

لجميع x . مشتقة $\sin (\pi / 2 - x)$ يمكن ايجادها باستخدام (١) حيث $g(x) = \pi / 2 - x$ ،

$$\begin{aligned} D \cos x &= D \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) D \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \\ &= -\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right). \end{aligned}$$

باستخدام متطابقة زميلة لـ (٢) ، وهي $\cos (\pi / 2 - x) = \sin x$ يكون $D \cos x = -\sin x$ ،
وبذلك نكون قد أثبتنا القاعدة ٦ - ٣ (ثانيا) .

بالتعبير عن $\tan x$ بدلالة $\cos x$ و $\sin x$ واستخدام قاعدة خارج القسمة ، يمكننا ايجاد مشتقتها :

$$\begin{aligned} D \tan x &= D \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x D \sin x - \sin x D \cos x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \end{aligned}$$

مشتقة $\cos x$ نحصل عليها بالمثل . مشتقة $\sec x$ نحصل عليها بالتعبير عن $\sec x$ بدلالة $\cos x$:

$$\begin{aligned} D \sec x &= D(\cos x)^{-1} = -(\cos x)^{-2} D \cos x \\ &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x \sec x. \end{aligned}$$

مشتقة $\csc x$ نحصل عليها بالمثل ، فالقواعد الست التي في ٦ - ٣ قد تم اثباتها .

قاعدة المتسلسلة يمكن استخدامها لتعميم جميع هذه الصيغ لمشتقات $\cos g(x)$, $\tan g(x)$ وهكذا ، الطريقة مماثلة للطريقة التي استخدمناها للحصول على $D \sin g(x)$. الصيغ معطاة أدناه .

٦ - ٤ إذا كانت $g'(x)$ موجودة ، فإن

$$D \sin g(x) = \cos g(x) g'(x) \quad (\text{أولا})$$

$$D \cos g(x) = -\sin g(x) g'(x) \quad (\text{ثانيا})$$

$$D \tan g(x) = \sec^2 g(x) g'(x) \quad (\text{ثالثا})$$

$$D \cot g(x) = -\csc^2 g(x) g'(x) \quad (\text{رابعا})$$

$$D \sec g(x) = \sec g(x) \tan g(x) g'(x) \quad (\text{خامسا})$$

$$D \csc g(x) = -\csc g(x) \cot g(x) g'(x) \quad (\text{سادسا})$$

مثال ٣ . أوجد $(3 \tan 5x - 4 \sec 5x)$.

التعبير المراد إجراء تفاضله هو حاصل جمع . نبدأ بقاعدة حاصل الجمع ، ثم نستخدم القاعدتين ٦ - ٤ (ثالثا) و (خامسا)

$$\begin{aligned} D(3 \tan 5x - 4 \sec 5x) &= 3D \tan 5x - 4D \sec 5x \\ &= 3 \sec^2 5x D(5x) - 4 \sec 5x \tan 5x D(5x) \\ &= \frac{3(5)}{\cos^2 5x} - 4 \frac{1}{\cos 5x} \frac{\sin 5x}{\cos 5x} 5 \\ &= \frac{5(3 - 4 \sin 5x)}{\cos^2 5x} \end{aligned}$$

مثال ٤ . أوجد $\frac{d}{dx} \left(\cos \frac{x}{2} \cot \frac{x}{2} \right)$

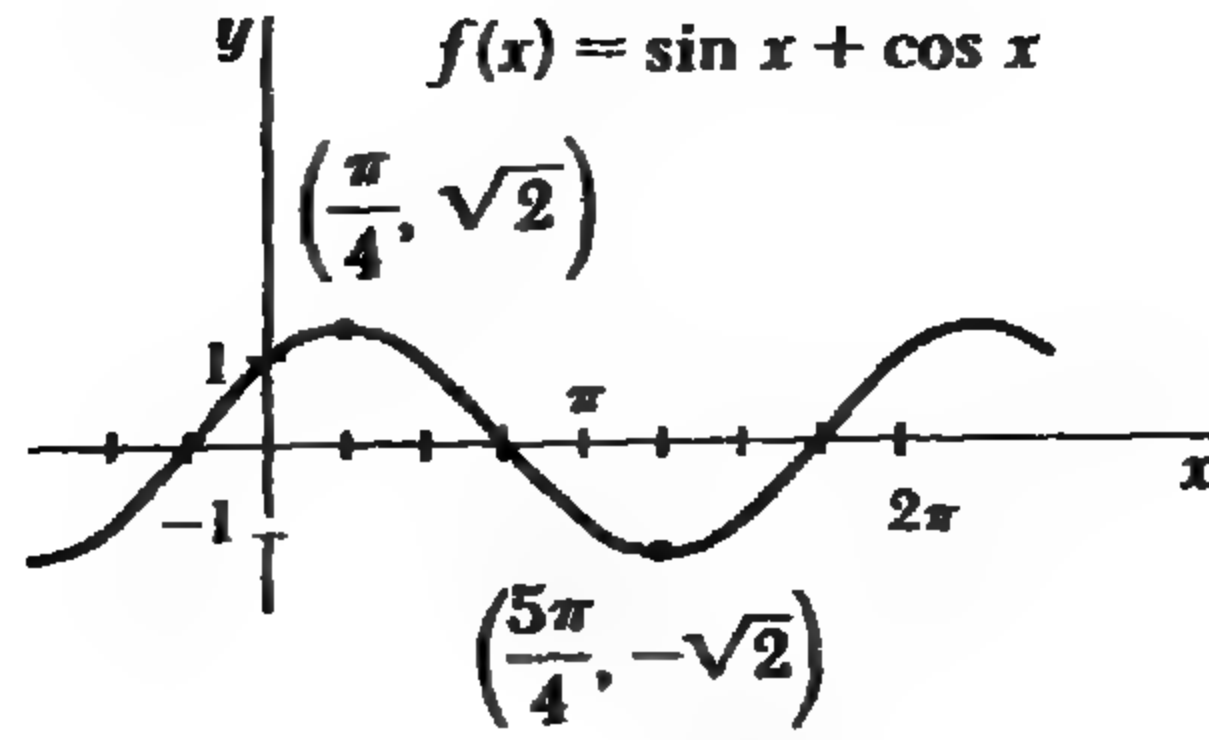
التعبير المراد إجراء تفاضله هو حاصل ضرب ، ويكون

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\cos \frac{x}{2} \cot \frac{x}{2} \right) &= \cos \frac{x}{2} \frac{d}{dx} \cot \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2} \frac{d}{dx} \cos \frac{x}{2} \\ &= \cos \frac{x}{2} \left(-\csc^2 \frac{x}{2} \right) \frac{1}{2} + \cot \frac{x}{2} \left(-\sin \frac{x}{2} \right) \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \csc^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \left(\csc^2 \frac{x}{2} + 1 \right) \end{aligned}$$

مثال ٥ . خطط الشكل البياني للدالة $f(x) = \sin x + \cos x$.

بما أن $\sin x$ و $\cos x$ دالتان دوريتان ودورة كل منهما 2π ، فهكذا أيضا الدالة $f(x)$. واذن يكفي أن نخطط المنحنى في فترة طولها 2π ، مثلا الفترة $[0, 2\pi]$ ، وياق المنحنى سيكون تكرارات لهذا الجزء . الطريقة هي ذاتها التي استخدمت في تخطيط كثيرات الحدود . المنحنى يقطع المحور الصادي عند 1 . الأجزاء المقطوعة من المحور السيني هي قيم x التي تجعل $\sin x = -\cos x$. لحل هذه المعادلة ، نقسم طرفي المعادلة على $\cos x$ ، لنحصل على $\tan x = -1$. واذن الأجزاء المقطوعة من المحور السيني في الفترة $[0, 2\pi]$ هي $7\pi/4$ و $3\pi/4$ (شكل ٦ - ١١) . نوجد الآن الأعداد الحرجة للدالة f . من المشتقة

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$



شكل ١١-٦

نرى أن $f'(x) = 0$ إذا وإذا فقط كان $\sin x = \cos x$ أي أن ، إذا وإذا فقط كان $\tan x = 1$. الأعداد الحرجة للدالة f في الفترة $[0, 2\pi]$ هي $\pi/4$ و $5\pi/4$ ، والنقطتان المناظرتان على المنحنى هما $(\pi/4, \sqrt{2})$ و $(5\pi/4, -\sqrt{2})$. المنحنى يتزايد في الفترة $[0, \pi/4]$ ، يتناقص في الفترة $[\pi/4, 5\pi/4]$ ، ويتزايد في الفترة $[5\pi/4, 2\pi]$. باقي المنحنى يمكن تخطيطه بتكرار الجزء $[0, 2\pi]$. نقط الانقلاب توجد من المشتقة الثانية للدالة f :

$$f''(x) = -(\sin x + \cos x).$$

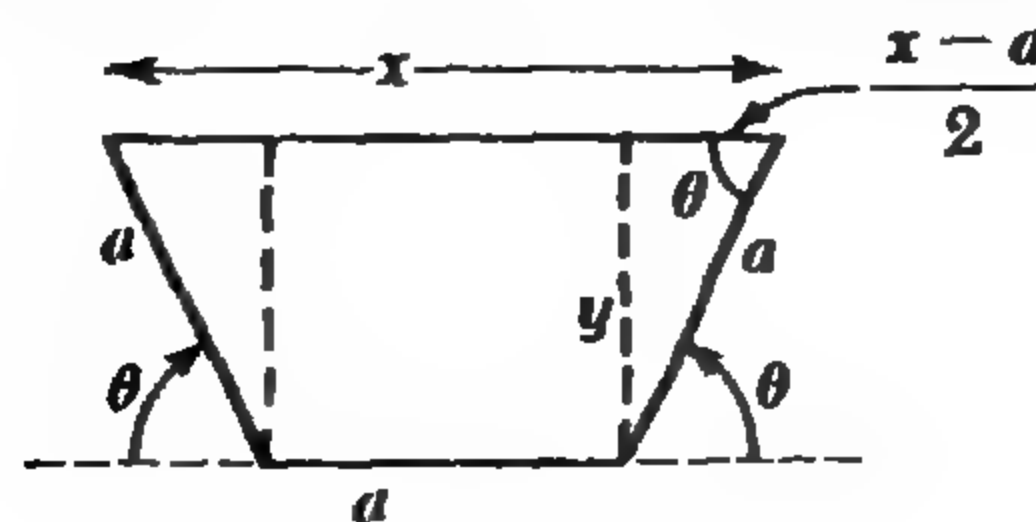
الاحتمالات الوحيدة في الفترة $[0, 2\pi]$ هما النقط $(3\pi/4, 0)$ و $(7\pi/4, 0)$. بما أن $f''(\pi/2) = -1$ ، $f''(\pi) = 1$ و $f''(2\pi) = -1$ فالمنحنى يكون مقعرا الى تحت في الفترتين $[0, 3\pi/4]$ و $[7\pi/4, 2\pi]$ ومقعرا لأعلى في الفترة $[3\pi/4, 7\pi/4]$. كلتا النقطتين $(3\pi/4, 0)$ و $(7\pi/4, 0)$ نقطتا انقلاب .

مثال ٦ . مقطع حوض ما هو شبه منحرف متساوي الساقين ، طول كل من الضلعين والقاعدة هو a in ما هي الزاوية التي يعملها الضلعان مع القاعدة اذا كانت مساحة المقطع أكبر مايمكن ؟

لتكن θ هي الزاوية التي يعملها كل ضلع مع امتداد خط القاعدة ، كما هو موضح في الشكل ٦-١٢ . واضح من الشكل أن $0 \leq \theta \leq 2\pi/3$. نوجد أولا المساحة A لجميع أشباه المنحرفات الممكنة ونعبر عنها بدلالة θ . لتكن x طول القاعدة العليا ولتكن y الارتفاع ، فيكون

$$(٣) \quad A = y \frac{x+a}{2}$$

الآن يجب أن نعبر عن x و y بدلالة θ . من الشكل ٦-١٢ ، $(x-a)/2 = a \cos \theta$ ، و $y = a \sin \theta$. من ثم $x = 2a \cos \theta + a$. بتعويض هذه القيم لـ x و y في (٣) ، يكون



شكل ١٢-٦

$$A = a \sin \theta \frac{2a \cos \theta + a + a}{2}$$

$$= a^2 \sin \theta (\cos \theta + 1), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi/3$$

مشتقة A هي

$$\frac{dA}{d\theta} = a^2 [-\sin^2 \theta + \cos \theta (\cos \theta + 1)].$$

لايجاد قيم θ حيث $dA/d\theta = 0$ ، نعبر عن المشتقة بدلالة دالة مثلثية واحدة ، في هذه الحالة $\cos \theta$ ، باستبدال $\sin^2 \theta$ بـ $1 - \cos^2 \theta$.

$$\frac{dA}{d\theta} = a^2 [-1 + \cos^2 \theta + \cos^2 \theta + \cos \theta]$$

$$= a^2 (2 \cos \theta - 1) (\cos \theta + 1) = 0.$$

واذن اما $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ، وفي هذه الحالة $\cos \theta = \pi/3$ ، واما $\cos \theta = -1$ ، وفي هذه الحالة $\theta = \pi$. هذه القيمة الأخيرة خارج نطاق A . واضح من الشكل أن قيمتي A عند $\theta = 0$ و $\theta = 2\pi/3$ النقطتان الطرفيتان للنطاق ، كلتاهما أقل من القيمة عند $\pi/3$. ومن ثم الزاوية $\pi/3$ تعطى أكبر قيمة للمساحة .

مثال ٧ . اجر التكامل $\int \cos 3x dx$.
المعكوس التفاضلي لـ $\cos 3x$ يجب أن يتضمن $\sin 3x$ نحاول هذا كأول تخمين . بمقارنة $\frac{d}{dx} \sin 3x = 3 \cos 3x$ بالدالة المكاملة ، نرى أن نعدل تخميننا الى

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x + C$$

وهذه نرى أنها صحيحة باجراء تفاضل الطرف الأيمن .

مثال ٨ . اجر التكامل $\int \cot^3 x \csc^2 x dx$.
فيما عدا لعامل ثابت ، الدالة المكاملة هي على الصورة $g'(x) g^3(x)$ حيث $g(x) = \cot x$.
هذا يوحي بأن نحاول $\cot^4 x$ كأول تخمين للمعكوس التفاضلي . بما أن

$$\frac{d}{dx} \cot^4 x = -4 \cot^3 x \csc^2 x$$

نعدل تخميننا الى

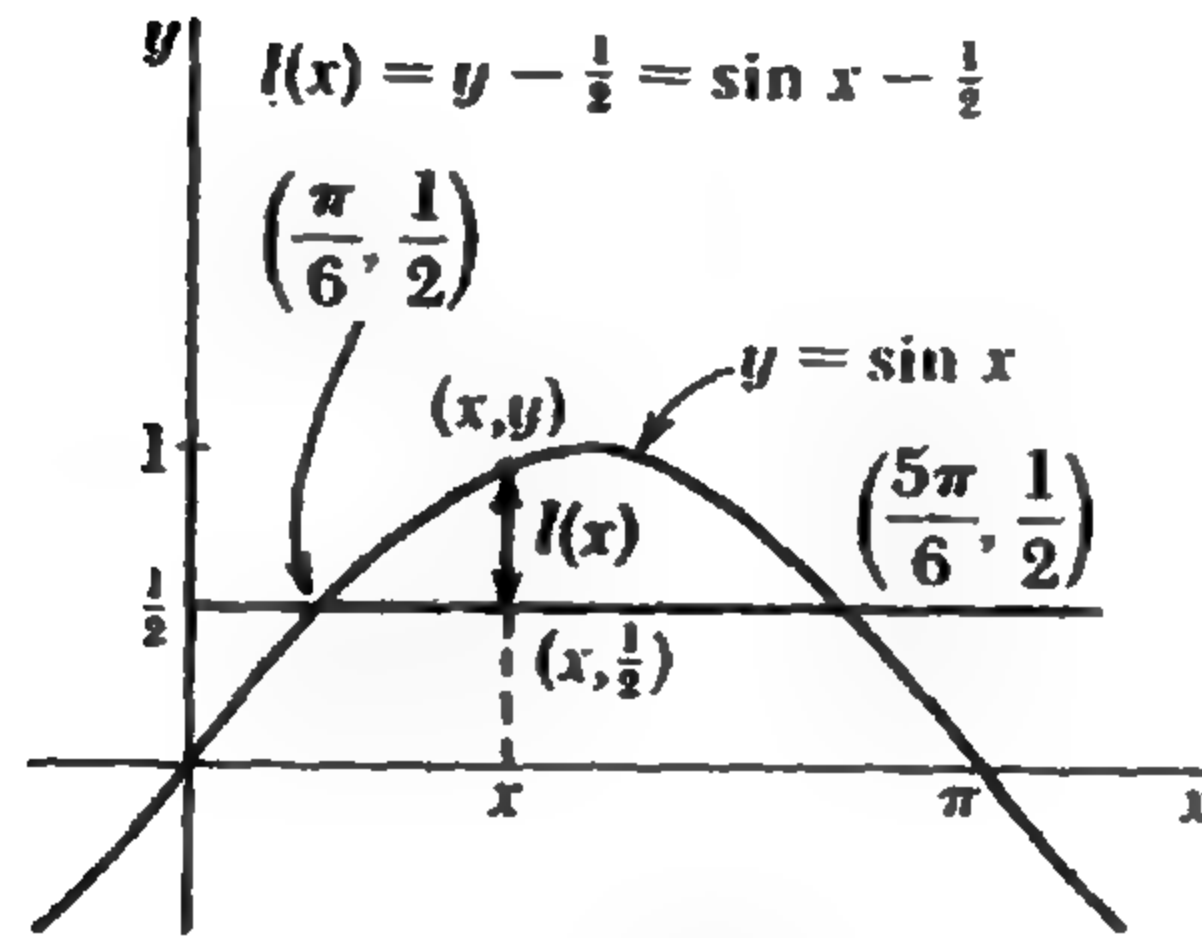
$$\int \cot^3 x \csc^2 x dx = -\frac{1}{4} \cot^4 x + C$$

وهذا صحيح .

مثال ٩ . أوجد مساحة المنطقة فوق الخط : $y = \frac{1}{2}$ وتحت القوس الأول في الربع الأول للمنحنى $y = \sin x$.

المنطقة موضحة في الشكل ٦ - ١٣ . حدا التكامل يتعيان بحل معادلتى الخط المستقيم والمنحنى معا . بما أن $\sin x = \frac{1}{2}$ عند $x = \pi/6, 5\pi/6$ ، فهاتان هما حدا التكامل . المسافة $l(x)$ بين المنحنى والخط المستقيم هي $l(x) = y - \frac{1}{2} = \sin x - \frac{1}{2}$. لذلك

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} l(x) dx = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (\sin x - \frac{1}{2}) dx \\ &= \left[-\cos x - \frac{x}{2} \right]_{\pi/6}^{5\pi/6} = \left(-\cos \frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{12} \right) - \left(-\cos \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{12} \right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$



شكل ٦ - ١٣

مسائل :

أوجد مشتقة ماياتى :

$\sec \theta + 5 \cot \theta$	- ٣	$\cos x + \sin 2x$	- ٢	$\cos x + \tan x$	- ١
$\cos (2 - 6x)$	- ٦	$\sec 5\alpha$	- ٥	$\tan 3s$	- ٤
$\cot 3x \cos x$	- ٩	$\sin t \cos 2t$	- ٨	$\cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$	- ٧
$\sec^2 x - \tan^2 x$	- ١٢	$\cos (3x + 7)^2$	- ١١	$\cos^2 (3x + 7)$	- ١٠
$\sqrt{1 - \cos x}$	- ١٥	$\left(1 + 2 \tan \frac{\theta}{2} \right)^{3/2}$	- ١٤	$\frac{3}{\sin 4x}$	- ١٣
$\sin (\phi + c) \cos (\phi - c)$	- ١٨	$t^2 \csc^2 \pi t$	- ١٧	$3x \sin^2 3x$	- ١٦
$\sin^3 ax - x \cos bx$	- ٢١	$\frac{\sin x + x}{2x}$	- ٢٠	$3z \sin \frac{1}{z}$	- ١٩
$\frac{1 + \cot 3x}{\csc 3x}$	- ٢٥	$\frac{\sin w}{1 - \cos w}$	- ٢٤	$\tan \frac{u}{1 - u}$	- ٢٣
				$\tan^2 2\theta \cos 2\theta$	- ٢٢

أوجد dy / dx لما يأتي :

$$\tan x + \tan y = 1. \quad - ٢٧$$

$$\sin y = x \quad - ٢٦$$

$$\cot (2x + y) = 1 + \csc y \quad - ٢٩$$

$$y = \sin (x - y) \quad - ٢٨$$

أوجد المشتقة الثانية لما يأتي :

$$x \cos x. - ٣٤ \quad \sec 2x. - ٣٣ \quad \frac{1}{2} \sin^2 \theta - ٣٢ \quad \tan u. - ٣١ \quad \sin ax - ٣٠$$

للدوال الآتية أوجد تقريبا عشريا لـ $f'(a)$ عند a المعطاة

$$f(x) = \sin 2x \cos x, a = 1.5, - ٣٦$$

$$f(x) = x + \cos x, a = 1, - ٣٥$$

$$f(x) = \tan x, a = \pi/3, 2. - ٣٧$$

أوجد معادلة المماس للمنحنيات الآتية عند النقطة المعطى احداثيتها السيني

$$y = x^2 \sec x, x = \pi. - ٤٠ \quad y = x + \tan x, x = 0 - ٣٩ \quad y = \sin x - \cos x, x = 0 - ٣٨$$

٤١ - أثبت أن $y = -\sin \sqrt{k}x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' = ky$ ، حيث k عدد ثابت . أوجد حلا آخر .

٤٢ - أثبت أن $\sin 2x$ و $\cos 2x$ هما حلان للمعادلة التفاضلية $d^2y/dx^2 + 4y = 0$. أثبت أنه إذا كانت c_1 و c_2 أي عددين ثابتين ، فإن $c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ هو أيضا حل . أوجد حلا يمر بالنقطة $(\pi/4, 3)$ ويميله هناك يساوى I .

٤٣ - أوجد مشتقة $\cos x$ بالطريقة التي استخدمت في الكتاب لإيجاد مشتقة $\sin x$.

٤٤ - استخلص (أ) القاعدة ٦ - ١٣ (رابعا) ، (ب) القاعدة ٦ - ٣ (سادسا) .

٤٥ - بفرض أن $D \cos x = -\sin x$ ، أثبت أن $D \cos g(x) = -\sin g(x) g'(x)$.

٤٦ - بإجراء تفاضل طرفي المتطابقة $\sin(x+a) = \sin x \cos a + \cos x \sin a$ اشتق صيغة مفكوك $\cos(x+a)$.

٤٧ - أثبت أن $\frac{d}{dx} \sin^2 x = -\frac{d}{dx} \cos^2 x$. مستخدما هذا ، اثبت المتطابقة الشهيرة التي تربط $\sin^2 x$ و $\cos^2 x$.

خطط الشكل البياني للدوال الآتية وأوجد نقط الانقلاب التي قد توجد :

$$g(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \quad - ٥٠ \quad f(x) = 3 \sin \frac{1}{2}x \quad - ٤٩ \quad f(x) = 2 \cos x \quad - ٤٨$$

$$f(\theta) = \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta \quad - ٥٣ \quad f(x) = \sec x \quad - ٥٢ \quad g(x) = \cot x \quad - ٥١$$

$$h(x) = x + \sin x \quad - ٥٦ \quad g(x) = 2 \sec x + \tan x \quad - ٥٥ \quad F(x) = \sin^2 x \quad - ٥٤$$

أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدوال الآتية في الفترة المعطاة :

$$g(x) = \sin \pi x - \cos \pi x, [-1, 1] \quad - ٥٨$$

$$F(x) = x - \sin 2x, [0, \pi] \quad - ٥٧$$

$$f(t) = \tan t - 2t - 1, (-\pi/2, \pi/2) \quad - ٦٠$$

$$f(x) = \cos x + \cot x, (0, 2\pi) \quad - ٥٩$$

$$f(x) = \sin^2 x - \cos x, [0, 2\pi] \quad - ٦١$$

٦٢ - اثبت أن القيمة العظمى لـ $a \sin t + b \cos t$ هي $\sqrt{a^2 + b^2}$. ما هي القيمة الصغرى ؟

في المسائل الآتية $s(t)$ هي الموقع عند الزمن t لنقطة تتحرك على خط للاحداثيات . أوجد سرعة النقطة عند الزمن t وصف الحركة .

$$s(t) = \sin 2t, [0, \pi] \quad - ٦٤$$

$$s(t) = 2 \sin t, [-2\pi, 2\pi] \quad - ٦٣$$

أجر التكاملات الآتية :

$$\int 3 \cos 3\theta \, d\theta \quad - ٦٦$$

$$\int \sin 2w \, dw \quad - ٦٥$$

$$\int \sin(ax + b) \, dx, a \neq 0 \quad - ٦٨$$

$$\int \sec^2(-2y) \, dy \quad - ٦٧$$

$$\int b \csc^2 ax \, dx, a \neq 0 \quad - ٧٥$$

$$\int_2^3 5 \cos \frac{1}{2}\pi t \, dt \quad - ٦٩$$

$$\int_{\pi/3}^{\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \, dt \quad - ٧٢$$

$$\int_0^{\pi/2} \sec \frac{u}{2} \tan \frac{u}{2} \, du \quad - ٧١$$

$$\int \sin at \cos at \, dt, a \neq 0 \quad - ٧٤$$

$$\int \left(2 \sin \frac{4}{3}x + 4 \sec^2 \frac{x}{2} \right) dx \quad - ٧٣$$

$$\int \tan ax \sec^2 ax \, dx, a \neq 0 \quad - ٧٦$$

$$\int \sqrt{\cos x} \sin x \, dx \quad - ٧٥$$

$$\int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} \quad - ٧٨$$

$$\int x \sin x^2 \, dx \quad - ٧٧$$

$$\int (1 + \cos^4 2t) \sin 2t \, dt \quad - ٨١$$

$$\int \sec^3 \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\alpha}{2} \, d\alpha \quad - ٨٠$$

$$\int \frac{\cos 3x}{\sin^2 3x} \, dx \quad - ٧٩$$

$$\int (1 + \sin y)^2 \cos y \, dy \quad - ٨٣$$

$$\int \sin x \cos x (\sin x + \cos x) \, dx \quad - ٨٢$$

$$\int \sin^3 t \, dt \quad - ٨٤ \quad \text{[إرشاد : } \sin^3 t = \sin^2 t \sin t = (1 - \cos^2 t) \sin t \text{]}$$

حل المعادلات التفاضلية الآتية

$$(s + \sin s) \frac{ds}{dt} + t = 0 \quad - ٨٧$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} = -\csc 2y \quad - ٨٦$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec y \quad - ٨٥$$

٨٨ - أوجد الزاوية بين المنحنيين $y = \sin x$ و $y = \cos x$ عند نقطة واحدة من نقط تقاطعهما .

٨٩ - يراد عمل حوض من شريحة نحاس عرضها 10 in بشيها على شكل V ، ماذا ينبغي أن تكون

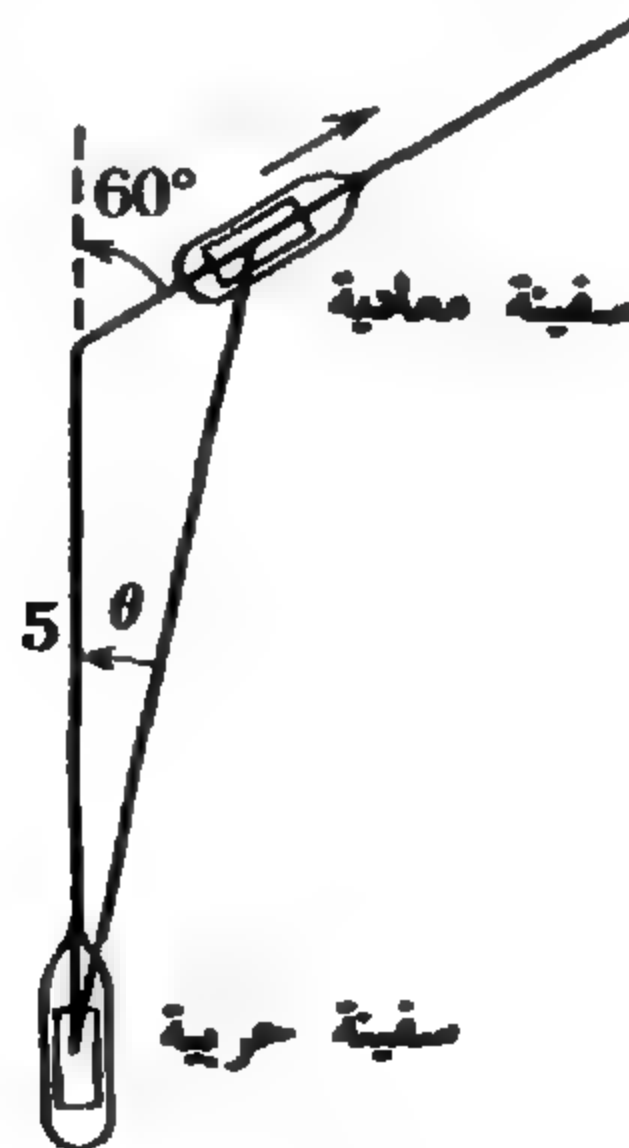
الزاوية بين الضلعين حتى يكون الحجم أكبر ما يمكن ؟

٩٠ - جسم ثقيل وزنه m يجز على سطح أفقى بحبل صانعا زاوية θ مع الأفقى . القوة المطلوبة

لعمل ذلك تعطى بالصيغة

$$F = \frac{mc}{c \sin \theta + \cos \theta}$$

- حيث c معامل الاحتكاك . اثبت أن القوة تكون أقل ما يمكن عندما $\tan \theta = c$.
- ٩١ - مولدان للتيار الكهربائي يغذيان نفس الخط . كل يعطى 60 دورة لتيار متردد سعته 110 فولت . الجهدان عند الزمن t sec يعطيان بالصيغتين : $E_1 = 110 \sin (120 \pi t)$ و $E_2 = 110 \cos (120 \pi t)$. أوجد أكبر قيمة وأصغر قيمة للجهد الكلى ، وأوجد متى يحدثان .
- ٩٢ - حائط ارتفاعه 8 ft يبعد 27 ft من منزل . أوجد أقصر سلك مستقيم يصل من المنزل إلى الأرض مارا فوق الحائط . (إرشاد : عبر عن طول السلك بدلالة الزاوية بين الأرض والسلك) .
- ٩٣ - سائق عربة برمائية يريد عبور بحيرة دائرية قطرها 4 miles إلى نقطة على الشاطئ المقابل في نهاية القطر . سرعة العربة في البر هي 16 mph وفي الماء 8 mph والعربة يمكنها أن تذهب إما حول البحيرة على الشاطئ ، أو مباشرة من جانب لجانب عبر الماء ، أو في خط مستقيم عبر الماء إلى نقطة متوسطة على الشاطئ ثم على الشاطئ باقى الطريق . أوجد أقصر وأطول وقت للرحلة . (إرشاد : عبر عن الزمن بدلالة الزاوية بين القطر ومسير العربة عبر الماء) .
- ٩٤ - ضوء دوار فى منارة على بعد 1 mile من الشاطئ يعمل دورتين فى الدقيقة . ما سرعة شعاع يتحرك على طول الشاطئ عندما يكون على بعد $\frac{1}{2}$ mile من النقطة على الشاطئ التى هى أقرب نقطة من المنارة ؟
- ٩٥ - سفينة حربية ثابتة تراقب سفينة للعدو على بعد 5 أميال بحرية . سفينة العدو تتحرك بمعدل 25 عقدة (أميال بحرية فى الساعة) فى اتجاه يصنع زاوية 60° مع محور السفينة الحربية (شكل ١٤ - ٦) . جهاز تعيين المدى فى السفينة الحربية وجه لسفينة العدو . ما سرعة دوران جهاز تعيين المدى عندما الزاوية θ بين محور السفينة الحربية واتجاه جهاز تعيين المدى 30° (إرشاد : استخدم قانون الـ sines وأوجد $d\theta / dt$) .



شكل ١٤ - ٦

- ٩٦ - باستخدام جدول حساب المثلثات المعطى فى التذييل B ، أوجد بطريقة التقريب بالعناصر التفاضلية $\sin 15^\circ 20' \cos 15^\circ 20'$. هل هذه التقريبات عالية جدا أم منخفضة جدا ؟ (إرشاد : خذ فى الاعتبار الأشكال البيانية لـ $\sin x$, $\cos x$) .
- ٩٧ - أوجد مساحة المنطقة تحت قوس واحد للمنحنى $y = \sin x$.
- ٩٨ - أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمحور الصادى والمنحنيين $y = \sin x$ و $y = \cos x$.
- ٩٩ - أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة تحت المنحنى $y = \tan x$ بين $x = \pi/4$ و $x = 0$ حول المحور السينى . (إرشاد : استخدم مطابقة مثلثية) .
- ١٠٠ - ماهى المشتقة النونية للدالة $\sin x$ ؟
- ١٠١ - حقق أن التكامل $\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x$ بإجراء تفاضل الطريق الأيمن للمعادلة . من ناحية أخرى ، باستخدام المطابقة $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. يكون

$$\int \sin x \cos x dx = \int \frac{1}{2} \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x$$

يوفق بين الاجابتين .

٤ - ٦

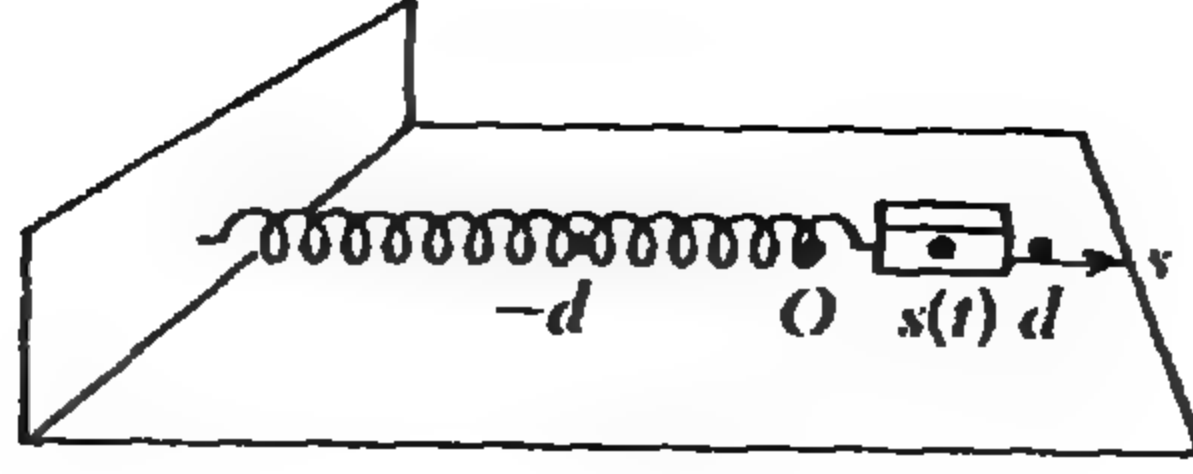
الحركة التوافقية البسيطة

فى هذا البند سنعطى توضيحا لاستخدام الدوال المثلثية فى الفيزياء . ثقل كتلته m يقع على نضد أفقى أملس . الثقل مربوط بأحد طرفى زنبرك أفقى طرفه الآخر مثبت (شكل ٦ - ١٥) . الزنبرك يمكنه أن يطول أو يتضاغف إذا جذب الثقل إلى اليمين ثم ترك ، فما هى حركته التالية ؟ نوجد أولا المعادلة التفاضلية التى تحكم الحركة ، باستخدام قانون نيوتن الثانى للحركة الذى يربط عجلة الثقل بالقوة المؤثرة عليه بالزنبرك (انظر بند ٤ - ١١) . خذ خط للاحداثيات s ، كما هو موضح فى الشكل ، حيث نقطة الأصل 0 عند الطرف غير المثبت للزنبرك عندما يكون فى حالته الطبيعية أى غير المشدودة . لتكن s هى إحداثى الثقل بعد زمن t sec ، أى بعده الاتجاهى من 0 بما أن s تعتمد على t ، سنرمز أيضا للاحداثى $s(t)$. لتكن m هى كتلة الثقل ، a عجلته ، و F مقدار القوة المبذولة بالزنبرك . F تكون دائما موجبة أو صفرا . عندما يكون الثقل على يمين 0 ، القوة المبذولة بالزنبرك تعمل على تناقص s والمعادلة التى تحكم الحركة هى من (٢) بيند ٤ - ١١ ،

$$(1) \quad ma = -F, \quad s \geq 0$$

عندما يكون الثقل على يسار 0 ، القوة تعمل على تزايد s والمعادلة تكون

$$(2) \quad ma = F, \quad s < 0$$



شكل ١٥-٦

من المعروف من التجارب العملية أن المقدار F للقوة المبذولة بشد أو تضغط الزنبرك يتناسب مع طول الجزء المشدود أو الضغوط • ومن ثم لنبركنا ، $F = c |s|$ ، حيث c ثابت موجب يعتمد فقط على الصلابة والطول الأصلي للزنبرك . بتعويض c/s لـ F في (١) و (٢) نرى أن

$$ma = -c|s| = -cs, \quad s \geq 0,$$

$$ma = c|s| = c(-s), \quad s < 0.$$

لكن هاتين المعادلتين هما نفس المعادلة ، وهي $ma = -cs$ لجميع s . إذا وضعنا $k = c/m$ واستبدلنا a بـ d^2s/dt^2 ، فإننا نحصل على

$$(٣) \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -ks, \quad k > 0$$

المعادلة التفاضلية التي تحكم حركة الثقل .

طريقة حل هذه المعادلة التفاضلية لا يمكن إعطاؤها هنا ، لكن من السهل تحقيق أن $\sin \sqrt{k}t$ و $\cos \sqrt{k}t$ هما حلان وأن حلا أعم هو

$$(٤) \quad s(t) = c_1 \sin \sqrt{k}t + c_2 \cos \sqrt{k}t$$

لأي ثابتين c_1 و c_2 . وهو أيضا صحيح ، إن لم يكن واضحا ، أن كل حل للمعادلة التفاضلية (٣) هو على الصورة (٤) لثابتين مناسبين c_1 و c_2 . لتعيين c_1 و c_2 ، نحتاج إلى معلومات إضافية عن الحركة في صورة شروط حديه . في البداية يجذب الثقل مسافة d إلى اليمين ثم يترك ، هذا يعني أن $s(0) = d$ و $s'(0) = 0$ ومن مشتقتها

$$s'(t) = c_1 \sqrt{k} \cos \sqrt{k}t - c_2 \sqrt{k} \sin \sqrt{k}t$$

• هذا المبدأ الفيزيائي يعرف بقانون Hooke نسبة إلى الفيزيائي الإنجليزي روبرت هوك (١٦٣٥-١٧٠٣)

نرى أن $s'(0) = c_1 \sqrt{k}$ و $s(0) = c_2$ وإذن $c_1 = 0$ و $c_2 = d$ و (٤) تصبح
 $s(t) = d \cos \sqrt{k}t$ (٥)

هذا يعطى موضع الثقل عند أى زمن $t \geq 0$. سرعة الثقل تعطى بالصيغة .

$$s'(t) = -d\sqrt{k} \sin \sqrt{k}t, \quad d > 0$$

السرعة تكون صفرا عندما $\sqrt{k}t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ أى عندما $t = 0, \pi/\sqrt{k}, 2\pi/\sqrt{k}, 3\pi/\sqrt{k}, \dots$.
 عندما يكون $0 < t < \pi/\sqrt{k}$ ، يكون $\sin \sqrt{k}t > 0$ ، فالسرعة تكون سالبة . وإذن الثقل يتحرك أولا إلى اليسار ، ويمر بنقطة الأصل عند $t = \pi/2\sqrt{k}$ ، ويقف لحظيا عند $t = \pi/\sqrt{k}$ حيث $s = -d$.
 عندما يكون $\pi/\sqrt{k} < t < 2\pi/\sqrt{k}$ ، يكون $\sin \sqrt{k}t < 0$ فالسرعة تكون موجبة ، والثقل يتحرك الآن إلى اليمين ويمر بنقطة الأصل عندما $t = 3\pi/2\sqrt{k}$ ، ويقف لحظيا عندما $t = 2\pi/\sqrt{k}$ حيث $s = d$. الآن الحركة تكرر نفسها ، وحيث أنه لا يوجد احتكاك ، فتستمر بدون انتهاء على هذا النمط . جيب التمام فى (٥) يعكس الطبيعة التذبذبية للحركة .

أى جسم ، مثل الثقل أعلاه ، موضعه عند الزمن t يعطى بالصيغة .

$$d \sin (\omega t + b), \quad d \cos (\omega t + b) \quad (٦)$$

أو

$$c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t \quad (٧)$$

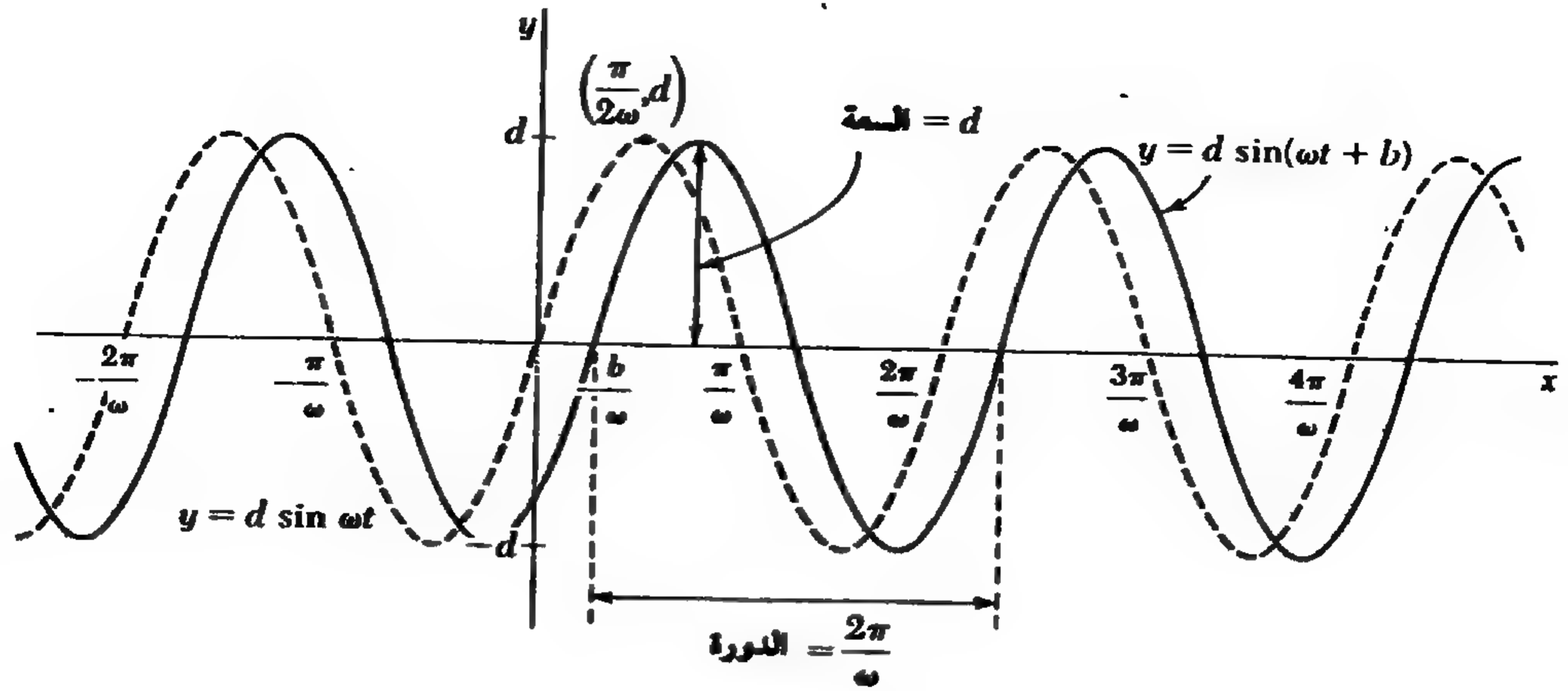
حيث ω, c_1, c_2, b, d ثوابت ، يقال أنه فى حركة توافقية بسيطة . مثل هذه الحركة دائما تذبذبية . الصيغ الثلاث فى (٦) و (٧) متكافئة بمعنى أن كلا منها يمكن كتابتها فى أى من صورتين الآخرين (المسألة ٨) . الأشكال البيانية مشابهة للشكل البيانى لدالة الجيب .

العدد d فى (٦) يسمى سعة الدالة . وهو المسافة من المحور السينى إلى قمة الموجة فى الشكل ٦-١٦ وهى أيضا المسافة من نقطة الأصل إلى أقصى موضع للثقل الذى درسناه أعلاه . الزمن الدورى لأى دالة من الدوال فى (٦) و (٧) نرى بسهولة أنه $2\pi/\omega$ الشكل البيانى للدالة $y = d \sin (\omega t + b)$ هو نفس الشكل البيانى للدالة

$$y = d \sin \omega t$$

لكن مزاحا إلى اليمين مسافة b/ω . العدد b يسمى زاوية الطور للدالة .

الزمن الدورى لأى جسم يتحرك حركة توافقية بسيطة هو الزمن الذى يستغرقه فى دورة كاملة واحدة أى ليرجع إلى نقطته الابتدائية . عدد الدورات فى كل وحدة زمن يسمى التردد . ومن ثم التردد هو مقلوب الزمن الدورى ، أى $2\pi/\omega$ ، للزنبك المتذبذب فى (٥) ، $\omega = \sqrt{k}$ ، والتردد هو $\sqrt{k}/2\pi$ دورة فى الثانية .



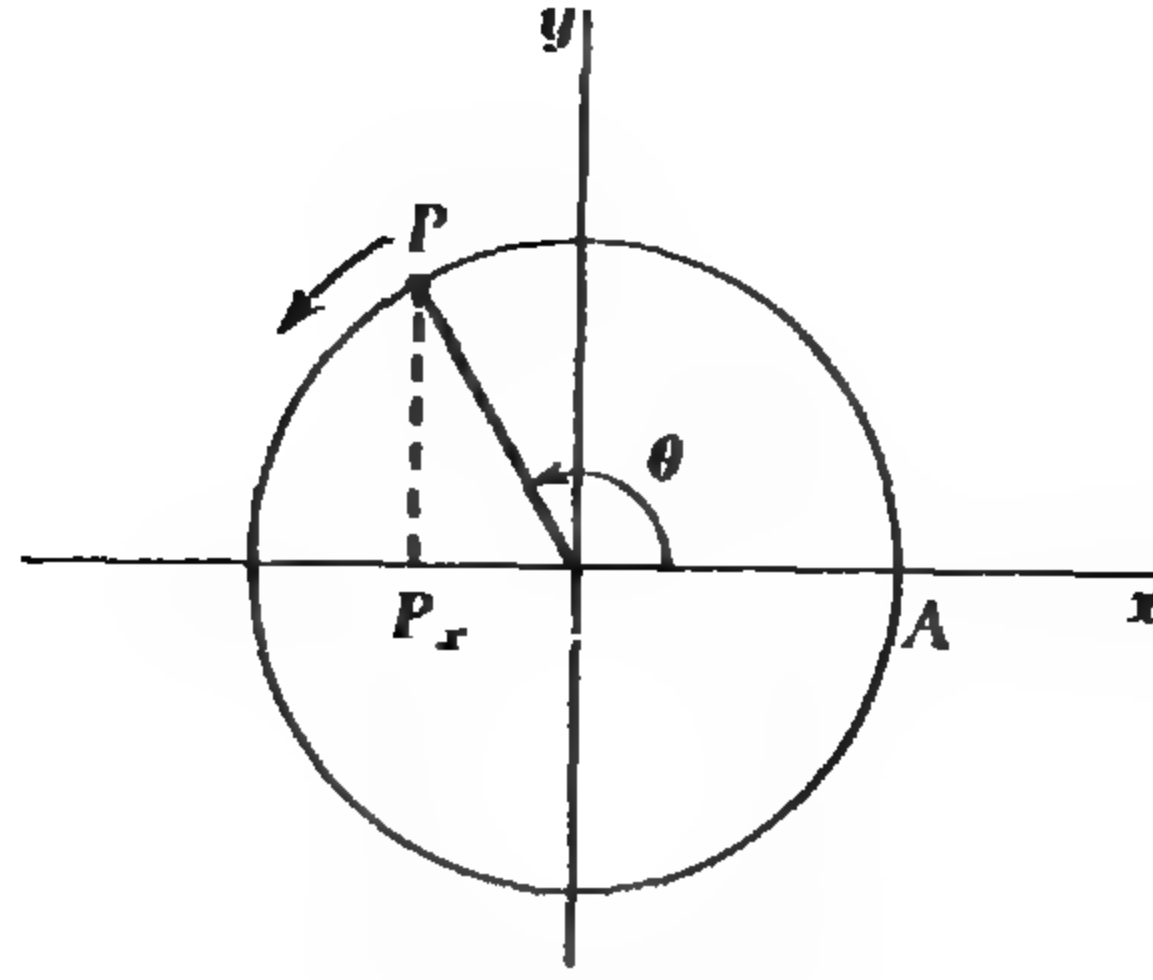
شكل ١٦-٦ .

مثال ١ . أوجد معادلة الحركة للثقل الذي سبق دراسته إذا كانت السعة هي 4 والتردد هو 2.5 دورة في الثانية .

معادلة الحركة معطاة بـ (٥) . في حالتنا $d = 4$ ، والتردد هو $\sqrt{k}/2\pi = 2.5$. ومن ثم $\sqrt{k} = 5\pi$ ، ومعادلة الحركة هي $s(t) = 4 \cos 5\pi t$

مسائل

- ١ - حقق أن (٤) هي حل للمعادلة التفاضلية (٣) لأي اختيار للثابتين c_1 و c_2 .
- ٢ - أثبت أن سرعة الثقل الذي سبقت دراسته تكون أكبر ما يمكن عند مروره بنقطة الأصل .
- ٣ - أوجد موضع الثقل الذي سبق دراسته بعد 3 sec إذا كانت $k = 2$ وكان الثقل قد بدأ بالحركة من سكون من نقطة على بعد 5 cm على يسار نقطة الأصل .
- ٤ - أوجد موضع الثقل الذي سبق دراسته عند الزمن t إذا كانت $k = \frac{1}{4}$ ، وفرض أن $s(\pi/3) = 4$ و $s(17\pi/3) = -2$.
- ٥ - كلما زادت صلابة الزنبرك كلما زادت القوة المؤثرة على الثقل الذي سبق دراسته . أثبت أن الذبذبة تكون أسرع للزنبرك الأشد صلابة .
- ٦ - تبدأ نقطة P عند A في الشكل ١٧-٦ وتتحرك في اتجاه مضاد لاتجاه عقرب الساعة حول الدائرة بمعدل ثابت هو دورتان في الدقيقة . وبالتالي الزاوية θ تعتمد على الزمن t ، ومعدل تغيرها $d\theta/dt$ ، ويسمى السرعة الزاوية للنقطة P ، هو 4π زاوية نصف قطرية في الدقيقة . أوجد θ بدلالة t . أوجد المسقط P_x للنقطة P على المحور السيني بدلالة t وأثبت أن P_x تتحرك حركة توافقية بسيطة .
- ٧ - ثقل قدرة 20 grams يتذبذب باستخدام زنبرك بالكيفية التي سبق دراستها ، بتردد قدره دورتان في الثانية . أوجد معامل الصلابة للزنبرك يعمل ذلك .



شكل ١٧-٦

٨- (أ) عبر عن $d \cos (.225t + b)$ في الصورة $d \sin (\omega t + b')$ وفي الصورة $c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$.

(ب) عبر عن $c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$ في الصورة $d \sin (\omega t + b)$.

(إرشاد : $c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin \omega t + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos \omega t \right)$.

اثبت أنه يوجد عدد b بحيث أن

$$\cos b = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \quad \text{و} \quad \sin b = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}]$$

٩- البندول البسيط هو بندول فيه كتلة السلك تهمل بالمقارنة مع كتلة الثقل وأبعاد الثقل صغيرة .
المعادلة التفاضلية التي تحكم حركة البندول البسيط هي

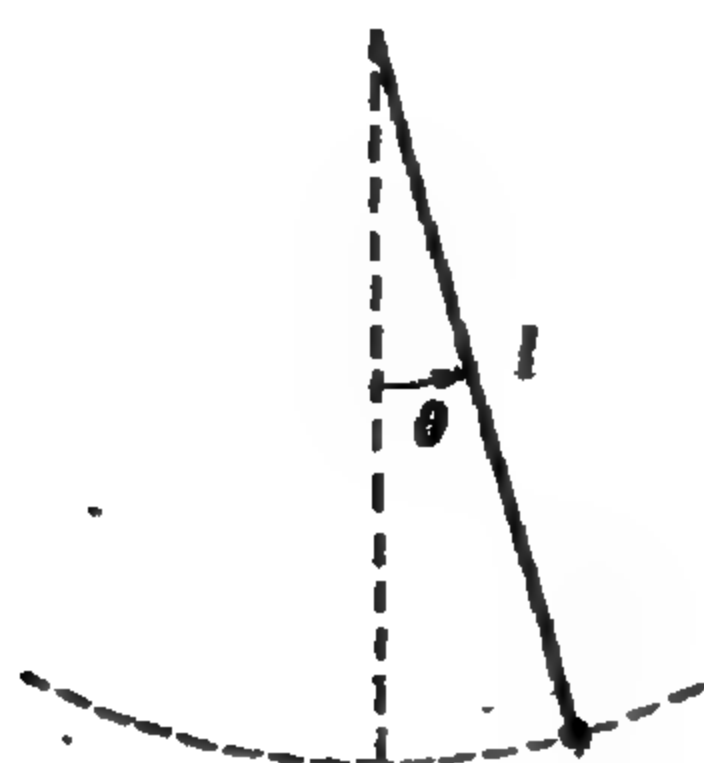
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

حيث l هي طول البندول ، g هي عجلة الجاذبية الأرضية ، θ هي الازاحة الزاوية للسلك عند الزمن t من الوضع الرأسى (شكل ١٨-٦) . هذه المعادلة لا يمكن حلها بدلالة دوال معروفة لنا . لكن إذا كانت θ صغيرة فإن $\sin \theta$ تكاد تساوى θ ، لأن $\lim_{\theta \rightarrow 0} [(\sin \theta)/\theta] = 1$ ، والمعادلة التفاضلية يمكن استبدالها بالمعادلة

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta$$

مع خطأ صغير . هذه المعادلة على الصورة (٣) ولها حل على الصورة (٤) . ومن ثم عندما يتذبذب البندول فى أقواس صغيرة ، حركته تكون نصبا لتقريب توافقية بسيطة . إذا ترك البندول فى البداية ، من سكون ، صانعا زاوية α ، $\theta = \alpha$ ، اثبت أن الزمن الدورى ، ذهابا وإيابا ، هو $2\pi\sqrt{l/g}$. لاحظ أن هذا الزمن لا يعتمد على الزاوية α . ما طول بندول ساعة تدق كل ثانية ، أى يأخذ البندول ثانية فى الحركة من أعلى نقطة على جانب واحد إلى أعلى نقطة على الجانب

الآخر ؟ ما هو طول البندول إذا كان يعمل دورة كاملة واحدة أى ذهابا وإيابا كل ثانية ؟
(خذ $g = 32 \text{ ft / sec / sec}$) .



شكل ١٨-٦
البندول البسيط

١٠ - ثقب مار بمركز الأرض سقط فيه حجر . مقدار قوة الجذب على الحجر يتناسب مع بعد الحجر عن المركز . بفرض عدم وجود مقاومة للهواء ، ما الزمن الذى يأخذه الحجر حتى يصل الجانب الآخر ؟ (إرشاد : استخدم قانون نيوتن الثانى للحركة لإيجاد المعادلة التفاضلية التى تحكم حركة الحجر . بما أن مقدار القوة معروف أنه mg عندما يكون الحجر على سطح الأرض ، حيث m هى كتلة الحجر وحيث g هى عجلة الجاذبية الأرضية فإن ثابت التناسب يمكن إيجاده . حل المعادلة التفاضلية .

٥ - ٦

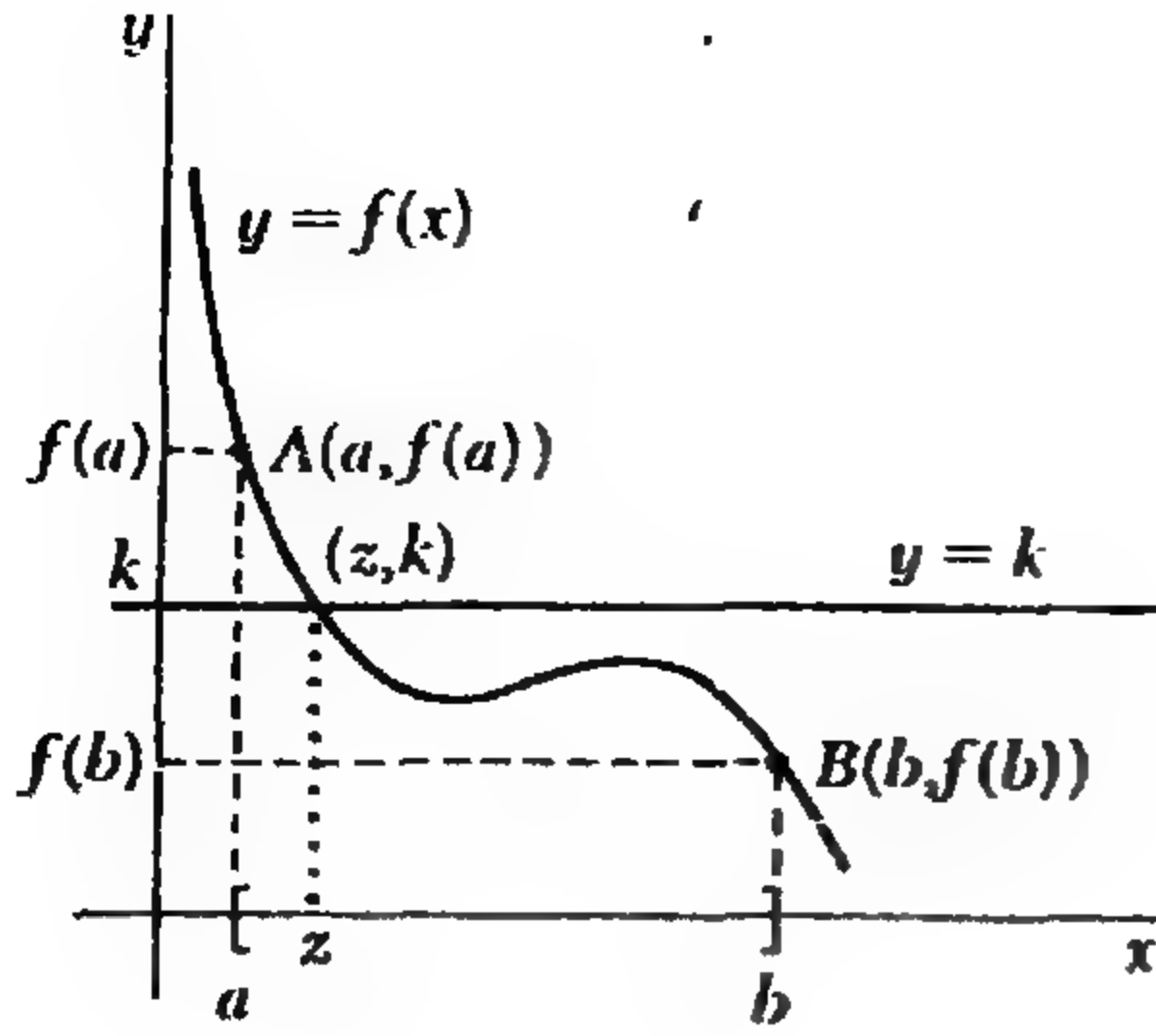
نظرية القيمة الوسط

الشكل البياني لدالة f متصلة فى الفترة $[a, b]$ موضح فى الشكل ٦ - ١٩ . عندما ترسم نقطة المنحنى من $A(a, f(a))$ إلى $B(b, f(b))$ تقطع على الأقل مرة واحدة كل خط أفقى $y = k$ واقع بين A و B ، ونقطة التقاطع هى (z, k) حيث z نقطة ما فى (a, b) . هذا هو التفسير الهندسى للنظرية القادمة ، التى لها أهميتها فى التحليل .

٥ - ٦ نظرية القيمة الوسط . لتكن f متصلة فى الفترة المغلقة $[a, b]$. لكل عدد k يقع بين $f(a)$ و $f(b)$ توجد z فى (a, b) بحيث أن $f(z) = k$.

عادة نقول أن الدالة المتصلة فى فترة مغلقة $[a, b]$ تأخذ كل قيمة بين $f(a)$ و $f(b)$. شرط الاتصال هام . النظرية قد لا تكون صحيحة إذا كانت f غير متصلة عند نقطة ما فى $[a, b]$ (المسألة ١) .

البرهان . نفرض أن $f(a) > k > f(b)$ ، بما أن $f(x)$ متصلة فى $[a, b]$ ، كذلك تكون الدالة $f(x) - k$ ، ومن ثم ، $f(x) - k$ لها معكوس تفاضلى $G(x)$ هناك . أى أنه توجد G بحيث أن $G'(x) = f(x) - k$. الدالة G تكون بالضرورة متصلة فى $[a, b]$ ، (لماذا ؟) وإذن يكون لها قيمة



شكل ٦-١٩ المنحنى المتصل يقطع كل خط أفقي بين A و B على الأقل مرة واحدة .

عظمى في الفترة . بالتمهيدية ٤ - ٢ ، هذه القيمة العظمى لا يمكن حدوثها عند النقطة الطرفية اليسرى a لأن $G'_+(a) = f(a) - k > 0$ ولا يمكن حدوثها عند النقطة الطرفية اليمنى b لأن $G'_-(b) = f(b) - k < 0$ إذن يجب حدوثها عند عدد حرج z داخل الفترة $[a, b]$. بمعنى آخر ، توجد z في (a, b) بحيث أن .

$$G'(z) = f(z) - k = 0$$

ولهذا z تكون $f(z) = k$. برهان مماثل لكن باستخدام القيمة الصغرى للدالة G تعالج الحالة $f(a) < k < f(b)$.

مسائل

- ١ - وضع بشكل تخطيطي أن نظرية القيمة الوسط قد لا تكون صحيحة إذا كانت f غير متصلة في $[a, b]$.
- ٢ - أثبت أن $\sqrt{2}$ موجود . أي أثبت أنه يوجد عدد موجب c بحيث أن $c^2 = 2$. (إرشاد : ضع $f(x) = x^2$. أوجد عددين a و b بحيث أن $f(a) < 2$, $f(b) > 2$.)
- ٣ - اثبت أن المعادلة $x^3 - 4x^2 + 7x - 5 = 0$ لها حل حقيقي . هل لها أكثر من حل واحد ؟ عيّن موضع كل حل بين عددين صحيحين متعاقبين [إرشاد : خطط الشكل البياني للدالة $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 5$] .
- ٤ - اثبت أن كثيرة الحدود للدرجة فردية بمعاملات حقيقية لها على الأقل جذر حقيقي واحد . [إرشاد : لتكن $p(x)$ كثيرة الحدود . ماذا يحدث للشكل البياني لـ p لقيم x الكبيرة الموجبة والسالبة ؟] .
- ٥ - سيارة قطعت 225 miles من Boston إلى New York في 5hr . وعلى ذلك سرعتها المتوسطة كانت 45 mph . أثبت أنه عند نقطة ما أثناء الرحلة كانت السرعة 45 mph بالضبط .

(إرشاد : يمكن فرض أن السرعة $v(t)$ متصلة . اثبت أن المسافة $s(t)$ للسيارة من Boston عند الزمن t تعطى بالصيغة .

$$[s(t) = \int_0^t v(t) dt.]$$

٦ - إذا كانت الدالة f متصلة في $[0, 1]$ وكان $0 \leq f(x) \leq 1$ لكل x في $[0, 1]$ ، فاثبت أنه

يوجد عدد z في $[0, 1]$ بحيث أن $f(z) = z$ [إرشاد : اعتبر الدالة $u(x) = f(x) - x$].

٧ - صورة أضعف قليلا من نظرية القيمة المتوسطة ٥ - ١٢ ، للتكاملات تقول إنه إذا كانت f متصلة

في الفترة $[a, b]$ ، فإنه توجد z في $[a, b]$ بحيث أن $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(z)$.

أضف التفصيلات للبرهان الاتي لهذه النظرية . لتكن $f(u)$ و $f(v)$ القيمتين الصغرى والعظمى

للدالة f في الفترة $[a, b]$. (لماذا توجدان ؟) فيكون

$$(b-a)f(u) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a)f(v)$$

العدد $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ يقع بين $f(u)$ و $f(v)$. الآن استخدم نظرية القيمة الوسط .

٨ - اثبت الحالة $f(a) < k < f(b)$ لنظرية القيمة الوسط .

٦ - ٦

الدوال المثلثية العكسية

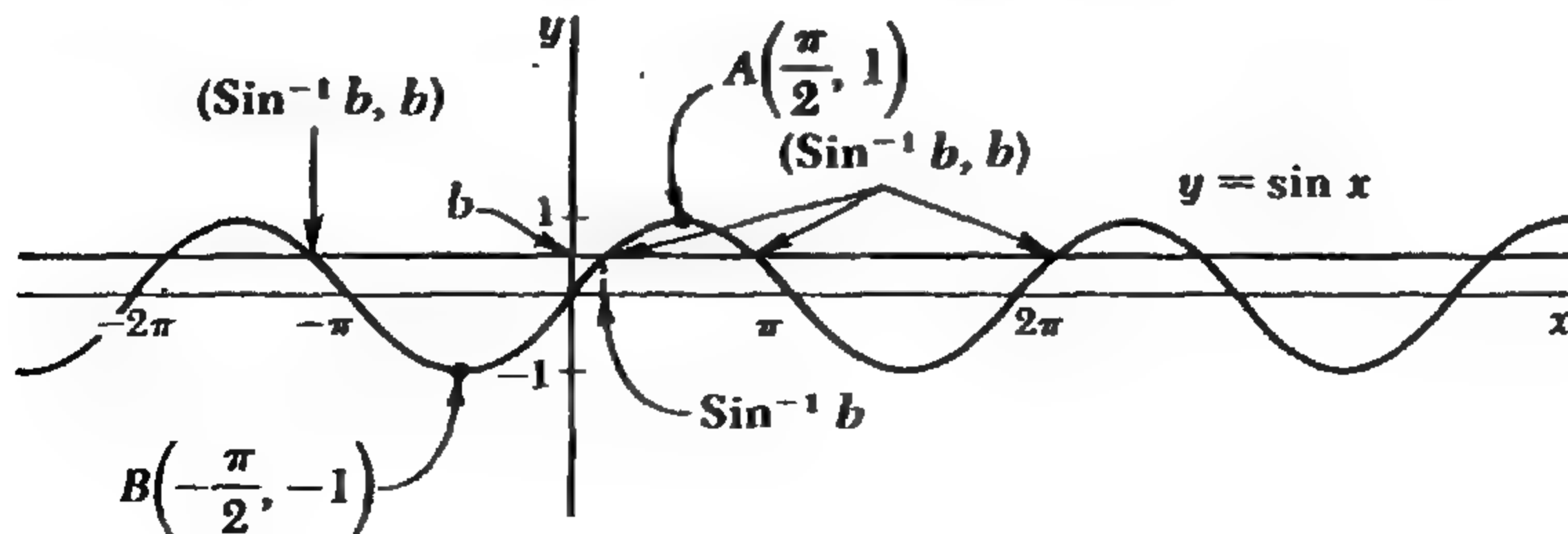
إذا كانت x زاوية (أو عدد) جيها b ، فإننا نشير إلى هذه الزاوية (أو العدد) بالرمز $\sin^{-1} b$ أو $\text{Arc sin } b$ بالحرف الأول كبيرا ، أى أن ،

$$x = \sin^{-1} b = \text{Arcsin } b \quad \text{if } \sin x = b$$

فمثلا ، $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ لأن $30^\circ = \sin^{-1} \frac{1}{2}$ وأيضا $\sin^{-1} 1 = \pi/2$ لأن $\sin(\pi/2) = 1$ ،

وأيضا ، $\sin^{-1}(-0.621) \approx -38^\circ 23'$ لأن $\sin(-38^\circ 23') \approx -0.621$. بما أن \sin كل

عدد يقع بين 1 و -1 ، أو عند أيهما ، فمن الواضح أن $\sin^{-1} b$ توجد فقط عندما $-1 \leq b \leq 1$.



شكل ٦ - ٢٠

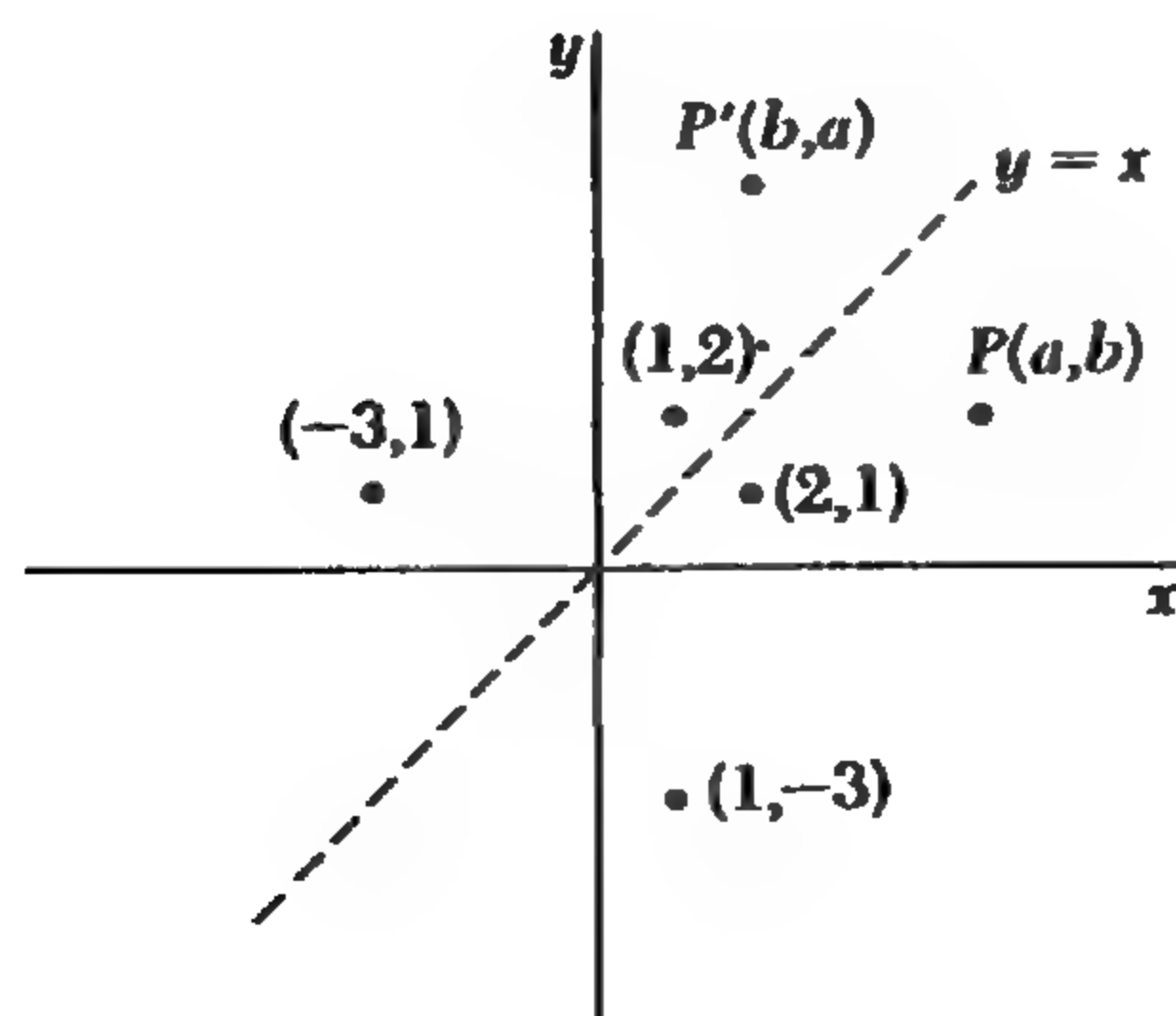
$\sin^{-1} b$ الاحداثى السينى لى نقطة على الشكل الباتى احداثيها
الصغرى هو b .

مع أن $\sin^{-1} b$ عادة تقرأ «arcsin» إلا أن الطالب قد يجد أنه من المفيد أن يقرأها «زاوية (أو عدد) الـ sine لها هو b ». الكتابة $\sin^{-1} b$ لا تتفق مع كتابة الأس فهي لا تعنى $1 / (\sin b)$. لنبين $1 / (\sin b)$ عن طريق الأس، نكتب $(\sin b)^{-1}$. هذا هو الاستثناء الوحيد، فمثلاً $\sin^{-2} b$ مثلاً، تعنى $1 / (\sin^2 b)$.

الرموز لا معنى لها ما لم تكن الأعداد التي تمثلها الرموز موجودة. قبل أن نتكلم عن $\sin^{-1} b$ يجب أن نوضح أنه يوجد فعلاً عدد حيث الـ sine له هو b . من الشكل البياني للدالة $y = \sin x$ في الشكل ٦-٢٠ نرى أن $\sin^{-1} b$ هي الإحداثي x لأي نقطة حيث الخط المستقيم الأفقي $y = b$ يقطع الشكل البياني. بما أن الدالة f متصلة والخط المستقيم $y = b$ يقع بين النقطتين $A(\pi/2, 1)$ و $B(-\pi/2, -1)$ على المنحنى، فنظرية القيمة الوسط ٦-٥ تؤكد أن الخط المستقيم يقطع المنحنى في مكان ما بين A و B ومن ثم فإنه يوجد عدد له الـ sine يساوي b .

رغم أن $\sin^{-1} \frac{1}{2} = 30^\circ$ ، فإن ليست الزاوية الوحيدة التي لها الـ sine $\frac{1}{2}$ زوايا أخرى هي $150^\circ, 390^\circ, -210^\circ$ ولا يزال توجد زوايا أخرى. نفس الشيء يكون صحيحاً لـ $\sin^{-1} b$ لأي b . الخط المستقيم $y = b$ حيث $-1 \leq b \leq 1$ ، يقطع الشكل البياني لـ $y = \sin x$ عدداً لا نهائياً من المرات. الإحداثي x لكل نقطة تقاطع هو عدد له الـ sine b .

بما أن $y = \sin^{-1} x$ إذا وإذا فقط كان $\sin y = x$ ، فإن المعادلتين لهما نفس الشكل البياني. إذا استبدلنا x و y في المعادلة الأخيرة، فإننا نحصل على $y = \sin x$. استبدال إحداثي نقطة $P(a, b)$ يعطى نقطة $P'(b, a)$ (و a و b) هي انعكاس النقطة p في الخط المستقيم $y = x$ (شكل ٦-٢١). ومن ثم استبدال y و x في معادلة يعكس شكلها البياني في نفس الخط. وإذن الشكل البياني لـ $y = \sin^{-1} x$ هو الانعكاس في الخط المستقيم $y = x$ للشكل البياني لـ $y = \sin x$. المنحنيان موضحان في الشكل ٦-٢٢.



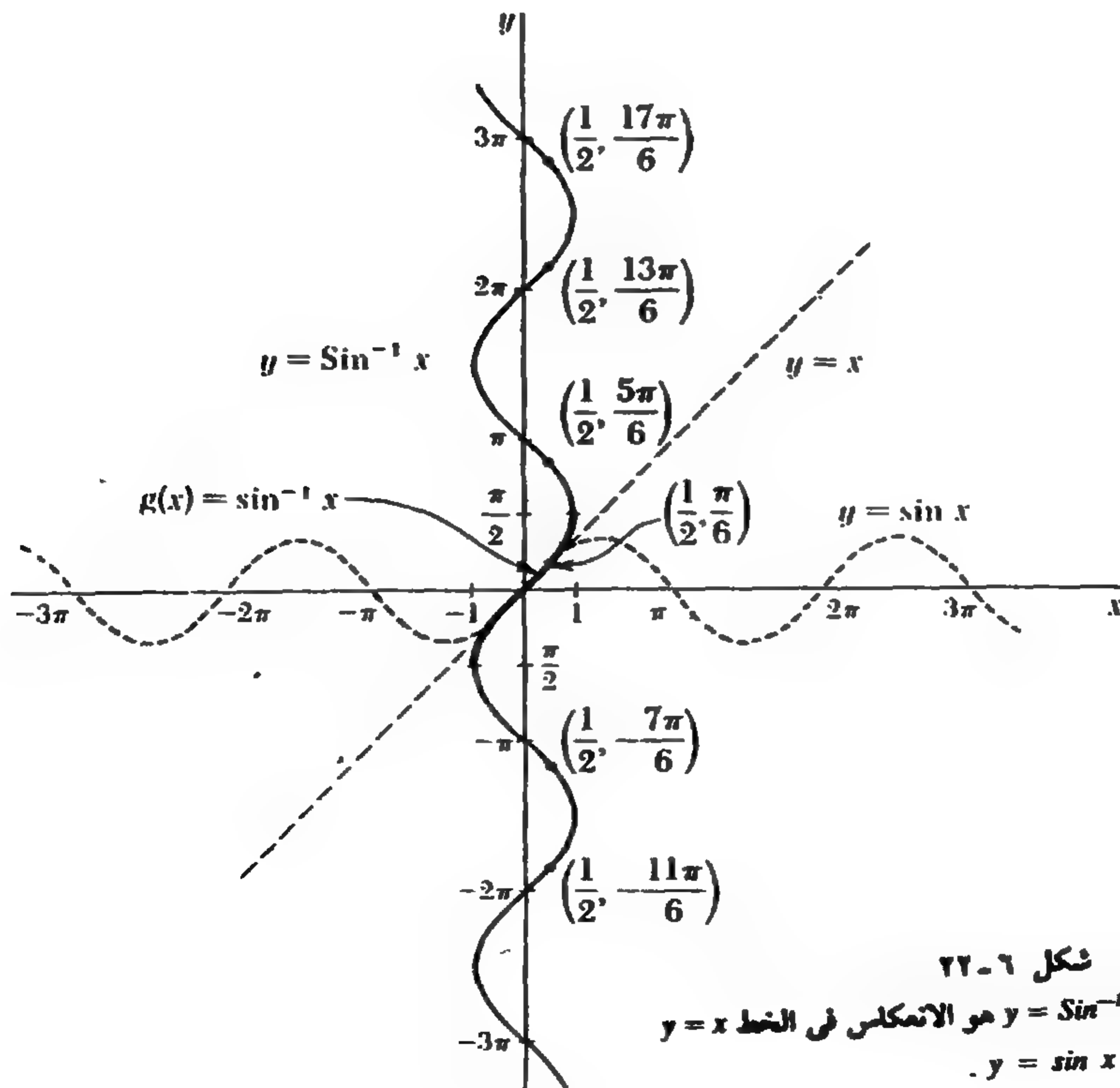
شكل ٦-٢١

استبدال إحداثي نقطة يجعل النقطة تنعكس في الخط $y = x$.

المعادلة $y = \sin^{-1}x$ لا تعرف دالة ، إذ أن لأي قيمة x في الفترة $[-1, 1]$ ، يوجد الكثير من x يحقق المعادلة ، مثلاً ، عند $x = \frac{1}{2}$ ، لدينا $y = \pi/6, 5\pi/6, 13\pi/6, -7\pi/6, \dots$ لكن إذا قيدنا أنفسنا بجزء الشكل البياني بين $y = \pi/2$ و $y = -\pi/2$ الموضح أثقل من الباقي في الشكل ٦-٢٢ ، فإنه توجد y واحدة لكل x ، وهذا الجزء من المنحنى يعرف دالة ، تسمى \arcsin أو دالة \sin عكسية* . الشكل البياني لدالة \sin العكسية هذه ، $g(x) = \sin^{-1}x$ مخططة في الشكل ٦-٢٣ . النطاق هو الفترة $[-1, 1]$ ، والمدى هو $[-\pi/2, \pi/2]$.

تبعاً لذلك ، قيمة الدالة $g(x) = \sin^{-1}x$ لقيمة معطاة x تعرف بأنها العدد الوحيد بين $\pi/2$ و $-\pi/2$ الذي جيبه هو x . سنحتفظ بالرمزين $\arcsin x$ و $\sin^{-1}x$ (بالحرف الأول صغيراً) لهذه القيمة الخاصة وسنشير إليها كالعدد الذي جيبه هو x . هذه القيمة تسمى أيضاً القيمة الرئيسية لـ $\sin^{-1}x$ وبذلك يكون

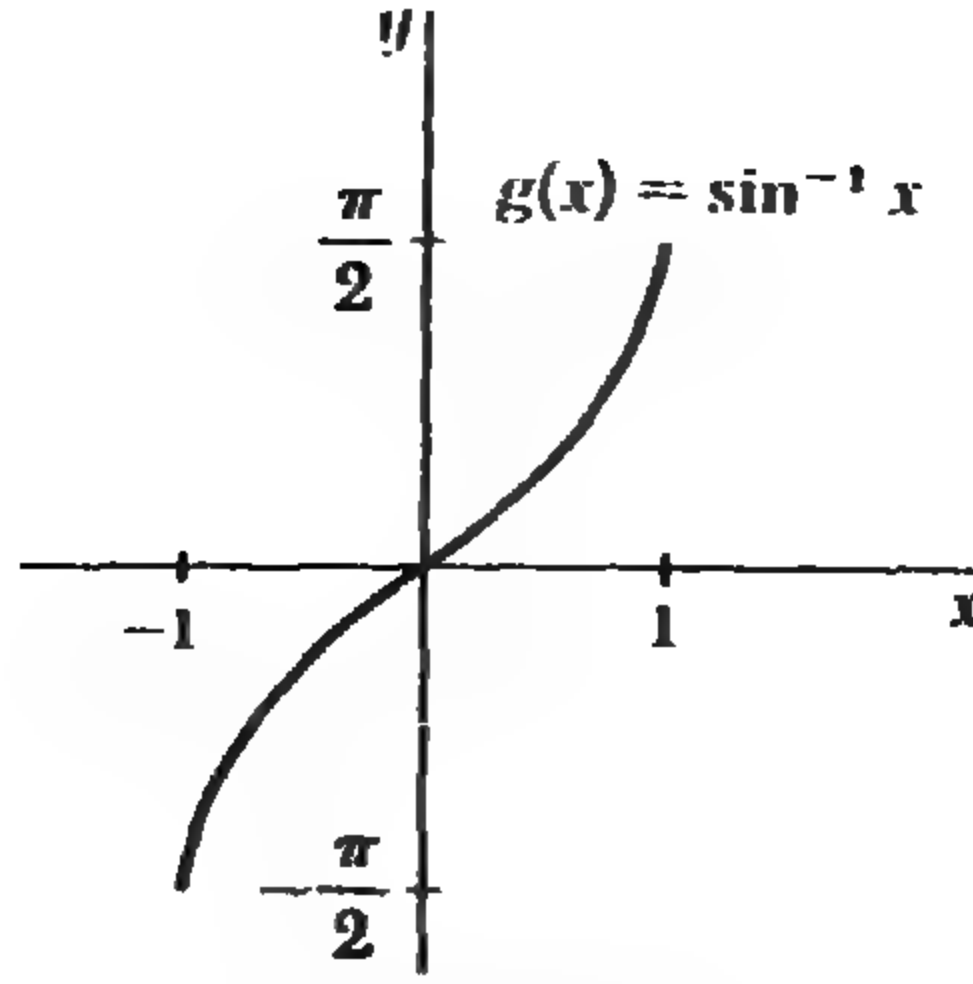
$\sin^{-1}(-1) = -\pi/2$ (أو 90° إذا كانت الزوايا مقيسة بالدرجات) ولا يساوي $3\pi/2$. بالمثل ، $\sin^{-1}(\sqrt{3}/2) = \pi/3$ (أو 60°) ولا يساوي $2\pi/3$.



شكل ٦-٢٢

الشكل البياني للدالة $y = \sin^{-1}x$ هو الانعكاس في الخط $y = x$ للشكل البياني للدالة $y = \sin x$.

* معنى الكلمة «عكسية» المستعملة هنا ينبغي ألا يلبس مع معناها الآخر المختلف تماماً «المقلوب» .



شكل ٦-٢٣

دراسة الـ arctangents تساهل دراسة الـ arcsines ، نستخدم إما الفترة $(-\pi/2, \pi/2)$ أو الفترة $[0, \pi]$ للقيم الأساسية للـ arctangent ، لكن الفترة الأولى أكثر ملاءمة لأن الظل يكون متصلاً هناك . تبعاً لذلك ، $\tan^{-1}x$ (أو $\arctan x$) تعرف بأنها العدد الوحيد في الفترة $(-\pi/2, \pi/2)$ الذي ظلّه x ، فمثلاً $\tan^{-1}(1/\sqrt{3}) = \pi/6$ (أو 30°) إذا كانت الزوايا مقيسة بالدرجات) وإيضاً $\tan^{-1}(-1) = -\pi/4$ (أو -45°) .

تعريف الـ arcsecant أكثر تعقيداً . حيث أن زوايا الربع الأول والرابع لها نفس الـ secant ، وهو موجب فقط ، هناك ، إذن يوجد عدداً في الفترة $(-\pi/2, \pi/2)$ لهما الـ secant 2 ولا يوجد عدد له الـ secant -2 . يمكن التغلب على كل من الصعوبتين باستخدام ، بدلاً من الفترة $(-\pi/2, \pi/2)$ ، اتحاد الفترتين $[0, \pi/2]$ و $[\pi, 3\pi/2]$ للقيم الأساسية الـ arcsecant . هذا ما سنعمله ، نعرف $\sec^{-1}x$ بأنه العدد الوحيد في $[0, \pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2]$ الذي له الـ secant x . الدالة secant منفصلة ، لكن هذا لا يمكن تجنبه لأي نطاق للتعريف . الشكل البياني لـ $x = \sec y$ موضح في الشكل ٦-٢٤ . الجزء الثقيل هو الشكل البياني لـ $y = \sec^{-1}x$. الفترة $[0, \pi]$ مع حذف $\pi/2$ قد تبدو اختياراً طبعياً للقيم الرئيسية لـ $\sec^{-1}x$ ، لكن هذا سيعرضنا لصعوبات مع المشتقة .

نلخص ماسبق في التعريف التالي .

٦-٦ تعريف

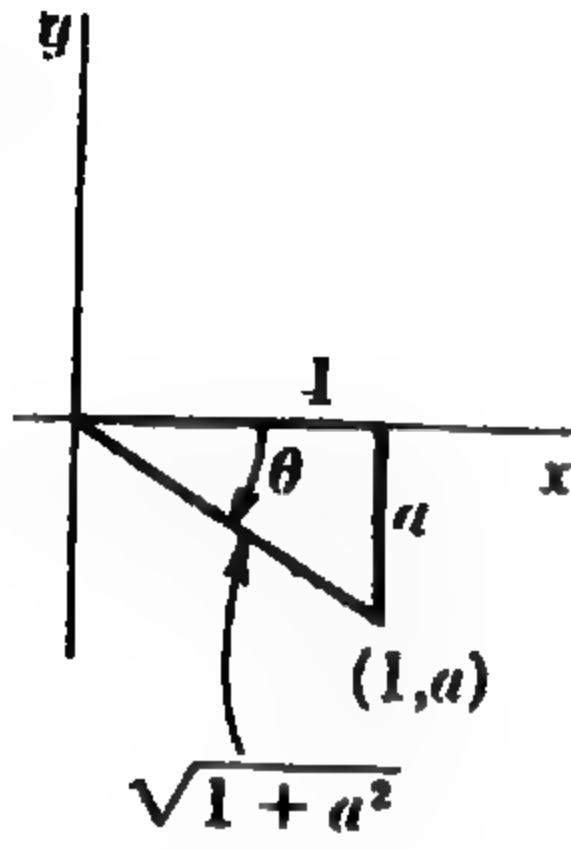
$$y = \tan^{-1} x \text{ if } \tan y = x \text{ and } -\pi/2 < y < \pi/2 \quad (\text{أولاً})$$

$$y = \sin^{-1} x \text{ if } \sin y = x \text{ and } -\pi/2 \leq y \leq \pi/2 \quad (\text{ثانياً})$$

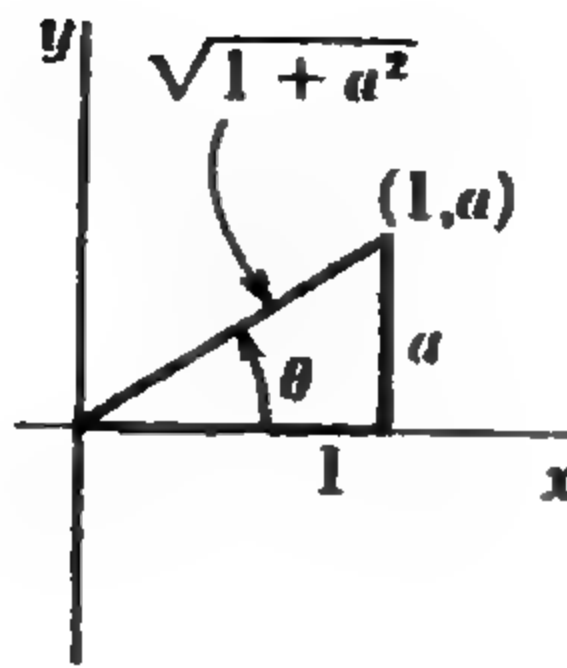
$$y = \sec^{-1} x \text{ if } \sec y = x \text{ and } 0 \leq y < \pi/2 \text{ or } \pi \leq y < 3\pi/2 \quad (\text{ثالثاً})$$

الدوال المثلثية العكسية الباقية $\cos^{-1}x$ ، $\cot^{-1}x$ ، $\csc^{-1}x$ يمكن تعريفها بالمثل لكننا لسنا في حاجة إليها إذ يمكن التعبير عنها بدلالة الدوال الأكثر نفعا $\sin^{-1}x$ ، $\tan^{-1}x$ ، $\sec^{-1}x$. أي مسألة

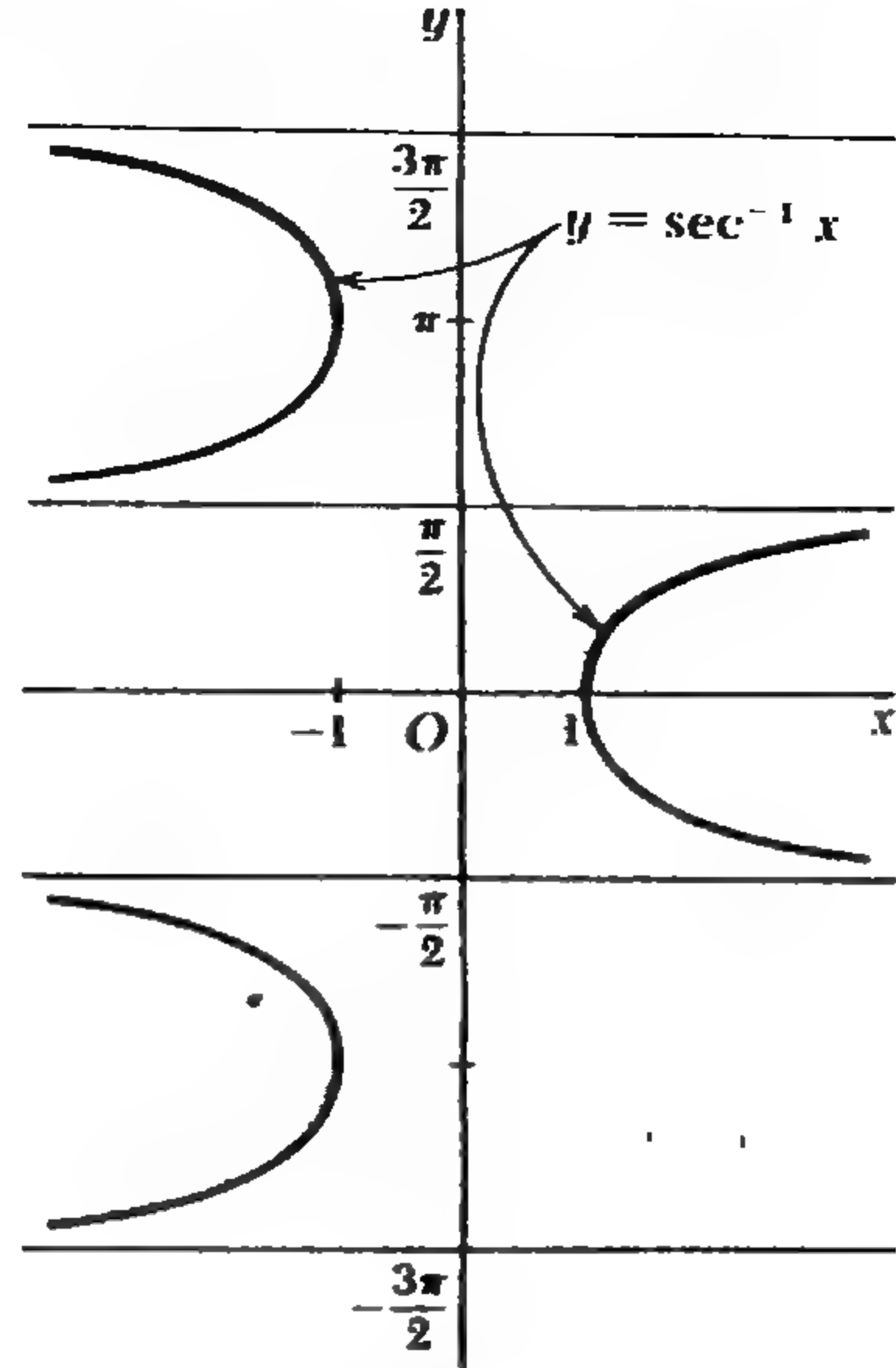
عملية تستخدم فيها الدوال المثلثية العكسية يمكن صياغتها بدلالة تلك التي عرفناها . التعريفان لـ $\cos^{-1} x$ و $\cot^{-1} x$ معطيان في المسألتين ٣٥ ، ٣٦ .



(ب)



(أ)



شكل ٢٤-٦

$$x = \sec y$$

شكل ٢٥-٦
إذا كان $\tan \theta = a$ ، فإن $\sin \theta = a / \sqrt{1+a^2}$.

مثال ١ . بسط $\sin (\tan^{-1} a)$.

لتكن $\theta = \tan^{-1} a$. نعلم أن $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ ، θ تكون موجبة أو سالبة تبعا لكون a موجبة أو سالبة . الاحتمالان موضحان في الشكل ٢٥-٦ . بما أن $\tan \theta = a$ ، يوجد مثلث قائم طولاه 1 و a ، كما هو موضح . الوتر طوله $\sqrt{1+a^2}$ ، ولأى الاحتمالين يكون $\sin (\tan^{-1} a) = \sin \theta = a / \sqrt{1+a^2}$.

مسائل

- ١- إذا كانت b عددا في الفترة $[-1, 1]$ ، وضع كيف تكون زاوية بين $90K$ و $-90K$ بحيث أن \sin لها يساوى b .
- ٢- إذا كانت b أى عدد ، وضع كيف تكون زاوية بين $90K$ و $-90K$ الـ \tan لها يساوى b .
- ٣- إذا كانت $b \geq 1$ أو كانت $b \leq -1$ ، وضع كيف تكون زاوية بين $90K$ و 0 أو بين $270K$ و $180K$ بحيث أن \sec لها هو b .

أوجد كلا من قياس الزاوية بالدرجات والعدد المساوى لكل مما يأتى :

$$\begin{array}{llll} \tan^{-1} 1 & = & 0 & \arcsin (1/\sqrt{2}) & = & 45^\circ & \sin^{-1} (-1/2) & = & \arccos 1 \\ \sec^{-1} \sqrt{2} & = & 45^\circ & \sin^{-1} (-\sqrt{3}/2) & = & 10^\circ & \arctan (-\sqrt{3}) & = & \sec^{-1} (-2/\sqrt{3}) \\ \sin^{-1} 2 & = & 13^\circ & \sec^{-1} 5.011 & = & 14^\circ & \arcsin (-0.407) & = & \tan^{-1} 2.5 \end{array}$$

بسط الآتى :

$$\begin{array}{llll} \cos [\sin^{-1} (\sqrt{3}/2)] - ١٨ & \sin^{-1} (\sin 47^\circ) - ١٧ & \sin (\sin^{-1} 0.415) - ١٦ & \\ \sec^{-1} (\csc 30^\circ) - ٢١ & \tan^{-1} [-\sin (\pi/6)] - ٢٠ & \sin (\tan^{-1} 1) - ١٩ & \\ \tan [\sec^{-1} (-1.25)] - ٢٤ & \cos (\sin^{-1} 0.6) - ٢٣ & \sin^{-1} (\sin 130^\circ) - ٢٢ & \\ \cos (\tan^{-1} 2x) - ٢٧ & \cot (\tan^{-1} z) - ٢٦ & \tan (\sin^{-1} a) - ٢٥ & \\ & \sin [\sin^{-1} (-\frac{1}{2}) + \tan^{-1} (\frac{1}{3})] - ٢٨ & & \end{array}$$

(إرشاد : استخدم متطابقة مثلثية)

$$\begin{array}{llll} \cos [2 \sec^{-1} (1/x)] - ٣١ & \sin (2 \sec^{-1} b) - ٣٠ & \sin (2 \sin^{-1} 0.6) - ٢٩ & \\ \text{خطط الشكل البياني للدالة } f(x) = \sin^{-1} 2x \text{ ما هو نطاق ومدى الدالة } f? & & & \\ \text{خطط الشكل البياني لدالة الظل العكسية } g(x) = \tan^{-1} x \text{ ما هو نطاق ومدى الدالة } g? & & & \\ \text{دالة الجيب العكسية } \sin^{-1} x \text{ عرفت من المعادلة } \sin y = x \text{ بقيد } y \text{ بالفترة } [-\pi/2, \pi/2] \text{ ما هي الفترات الأخرى التى يمكن استخدامها لتعريف دالة الجيب العكسية?} & & & \end{array}$$

العكسية ؟

$$\begin{array}{l} ٣٥ - (أ) عرف $\cos^{-1} x$ كالمعد فى الفترة $[0, \pi]$ الذى جيب تمامه هو x . خطط المنحنى $x = \cos y$ علم بخط ثقليل الجزء من المنحنى الذى هو الشكل البياني لدالة جيب التمام العكسية $g(x) = \cos^{-1} x$. ما هو نطاق ومدى الدالة g ؟ (ب) وضع هندسيا أن $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$ حيث $0 \leq x \leq 1$ (ج) وضع جبريا أن المعادلة فى (ب) صحيحة ، ووصفة أعم ، حيث $-1 \leq x \leq 1$ [إرشاد : اثبت أن$$

$$\left| \sin (\sin^{-1} x + \cos^{-1} x) = 1 \right|$$

$$\begin{array}{l} ٣٦ - (أ) عرف $\cot^{-1} x$ كالمعد فى الفترة $(0, \pi)$ الذى ظل تمامه هو x . خطط الشكلين البيانيين لـ $y = \cot x$ حيث $0 < x < \pi$ ، و $g(x) = \cot^{-1} x$ (ب) اثبت أنه لجميع قيم x الحقيقة $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2$.$$

$$\begin{array}{l} ٣٧ - (أ) اثبت أن $-(-x) = -$ فالدالة $\sin^{-1} x$ دالة فردية (ب) عبر عن $\tan^{-1} (-x)$ بدلالة $\tan^{-1} x$ ، هل $\tan^{-1} x$ دالة زوجية أم دالة فردية ؟$$

$$٣٨ - (أ) اثبت أن$$

$$\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1} (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

(إرشاد : خذ الجيب لكلا الطرفين) (ب) اثبت أن

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$$

$$\begin{array}{l} ٣٩ - اثبت أن $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \pi/4$. باستخدام المعادلة وجدول للظلال ، أوجد تقريبا عشريا للعدد π .$$

مشتقات الدوال المثلثية العكسية

دالة الجيب العكسية هي الانعكاس في الخط المستقيم $y = x$ لجزء الشكل البياني لدالة الجيب . سلاسة الشكل البياني لدالة الجيب تشير الى أن دالة الجيب العكسية ينبغي أن تكون قابلة للتفاضل ماعدا عند نقطتها الطرفية حيث الشكل البياني يكون رأسيا (شكل ٦ - ٥٣) . سنوجد مشتقتها .

لتكن $y = \sin^{-1} x$ ، حيث $-1 < x < 1$ وحيث $-\pi/2 < y < \pi/2$. نريد إيجاد dy/dx . بما أن $y = \sin^{-1} x$ ، إذن

$$\sin y = x$$

بإجراء تفاضل هذه المعادلة ضمينا ، باعتبار y دالة في x ، يكون

$$(\cos y) \frac{dy}{dx} = 1$$

ومن ثم

$$D \sin^{-1} x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

من السهل التعبير عن $\cos y$ بدلالة x . بما أن $-\pi/2 < y < \pi/2$ فإن $\cos y > 0$ وإذن $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ ، ويكون

$$(١) \quad D \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

هذا الاستنتاج البارع لـ $D \sin^{-1} x$ ، لسوء الحظ ، به ثغرة . التفاضل الضمني هو طريقة صحيحة لإيجاد مشتقة الدالة إذا كانت الدالة معروفة أن لها مشتقة ، وهذا ما لانعلمه بعد عن $\sin^{-1} x$. لكن عملنا لا يكون بأكمله خسارة . يمكننا أن نقول أنه إذا كانت $\sin^{-1} x$ لها مشتقة فهذه المشتقة تعطى بـ (١) . هذا يوحي بأنه قد يمكننا إثبات (١) بالبدء بالدالة المتصلة $1/\sqrt{1 - x^2}$ وإثبات أن $\sin^{-1} x$ هي معكوس تفاضلي لها . بالنظرية ٥ - ٧ ، معكوس تفاضلي لـ $1/\sqrt{1 - x^2}$ هو الدالة لـ x المعرفة بـ

$$(٢) \quad F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du, \quad -1 < x < 1$$

أى أن ، إذا كانت F معرفة بـ (٢) ، فإن

$$(٣) \quad DF(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

مشتت أن $F(x) = \sin^{-1} x$ ، أجر تغيير للمتغير فى (٢) بوضع $z = \sin^{-1} u$ ، حيث $-\pi/2 < z < \pi/2$ ، فيكون $du = \cos z \, dz$ و $u = \sin z$ ، (٢) تصبح

$$F(x) = \int_0^{\sin^{-1} x} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 z}} \cos z \, dz$$

حيث الحدان الجديدان للتكامل هما قيمتا z المناظرتان للحددين القديمين $u=x$ و $u=0$. نستمر فنحصل على

$$F(x) = \int_0^{\sin^{-1} x} \frac{1}{\cos z} \cos z \, dz = \int_0^{\sin^{-1} x} dz = z \Big|_0^{\sin^{-1} x} = \sin^{-1} x$$

بتطابق $\sin^{-1} x$ مع $F(x)$ ، يكون من (٣)

$$D \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

الصيغتان الثانية والثالثة أدناه يمكن اشتقاقهما بالمثل

٧ - ٦

$$D \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \sin^{-1} x < \frac{\pi}{2} \quad (أولا)$$

$$D \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2} \quad (ثانيا)$$

$$D \sec^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad \begin{array}{l} 0 < \sec^{-1} x < \frac{\pi}{2} \\ \text{or } \pi < \sec^{-1} x < \frac{3\pi}{2} \end{array} \quad (ثالثا)$$

بالاستعانة بقاعدة السلسلة ، القواعد فى ٧ - ٦ يمكن تعميمها الى دوال على الصورة $\sec^{-1} g(x)$ و $\tan^{-1} g(x)$ ، $\sin^{-1} g(x)$ ، بشرط أن $g'(x)$ تكون موجودة . لنعمل ذلك ، نضع $z = g(x)$ و $f(z) = \sin^{-1} z$. فيكون

$$\sin^{-1} g(x) = f(g(x))$$

من القاعدة ٧ - ٦ (أولا) ، تكون $f'(z) = 1 / \sqrt{1-z^2}$ ، وإذن بقاعدة السلسلة يكون

$$D \sin^{-1} g(x) = D_x f(g(x)) = f'(z) g'(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} g'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$$

هذا يثبت الصيغة الأولى من صيغ المشتقات أدناه . الصيغتان الباقيتان تبرهنان بالمثل .

٦ - ٨ . إذا كانت $g'(x)$ موجودة ، فإن

$$D \sin^{-1} g(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1 - g^2(x)}} \quad (\text{أولا})$$

$$D \tan^{-1} g(x) = \frac{g'(x)}{1 + g^2(x)} \quad (\text{ثانيا})$$

$$D \sec^{-1} g(x) = \frac{g'(x)}{g(x) \sqrt{g^2(x) - 1}} \quad (\text{ثالثا})$$

مثال ١ . أوجد $D \sin^{-1} (x/a)$, $a > 0$

بالقاعدة ٦ - ٨ (أولا) ، حيث $g(x) = x/a$ ، يكون

$$D \sin^{-1} \frac{x}{a} = \frac{D(x/a)}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} = \frac{1/a}{\sqrt{1 - x^2/a^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

مثال ٢ - أوجد $\frac{d}{dx} [x \tan^{-1} (x^2 + 1)]$

التعبير المطلوب إجراء تفاضله هو حاصل ضرب . نبدأ بقاعدة حاصل الضرب ثم نستخدم القاعدة ٦ - ٨ (ثانيا) :

$$\frac{d}{dx} [x \tan^{-1} (x^2 + 1)] = x \frac{d}{dx} \tan^{-1} (x^2 + 1) + \tan^{-1} (x^2 + 1)$$

$$= x \frac{\frac{d}{dx} (x^2 + 1)}{1 + (x^2 + 1)^2} + \tan^{-1} (x^2 + 1)$$

$$= \frac{2x^2}{x^4 + 2x^2 + 2} + \tan^{-1} (x^2 + 1)$$

نعطى ثلاث صيغ مفيدة ، سنرجع إليها مستقبلا :

٦ - ٩

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C, \quad a > 0 \quad (\text{أولا})$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0 \quad (\text{ثانيا})$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right) + C, \quad (\text{ثالثا})$$

$a > 0$.

البرهان . الصيغة الأولى نتيجة مباشرة لمثال ١ . الثانية والثالثة يمكن التحقق منهما بإجراء التفاضل ، لكن منشقتهما لتوضيح بعض الأفكار المستخدمة في إيجاد التكاملات . لاشتقاق (ثانياً) ، نقسم بسط ومقام الدالة المكاملة على a^2 ، فنحصل على

$$(٤) \quad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{1/a^2}{1 + (x/a)^2} dx$$

ماعدا العامل ثابت ، الدالة المكاملة الثانية تشبه الطرف الأيمن من القاعدة ٦ - ٨ (ثانياً) حيث $g(x) = x/a$ ، وتوحى بأن نحاول $\tan^{-1}(x/a)$ كمعكوس تفاضلي لـ $1/(a^2 + x^2)$ كتخمين أول .

$$D \tan^{-1} \frac{x}{a} = \frac{1/a}{1 + (x/a)^2}$$

مع الدالة المكاملة الثانية في (٤) نرى أن نعدل تخميننا إلى $(1/a) \tan^{-1}(x/a)$ ، ونرى أن هذا صحيح .

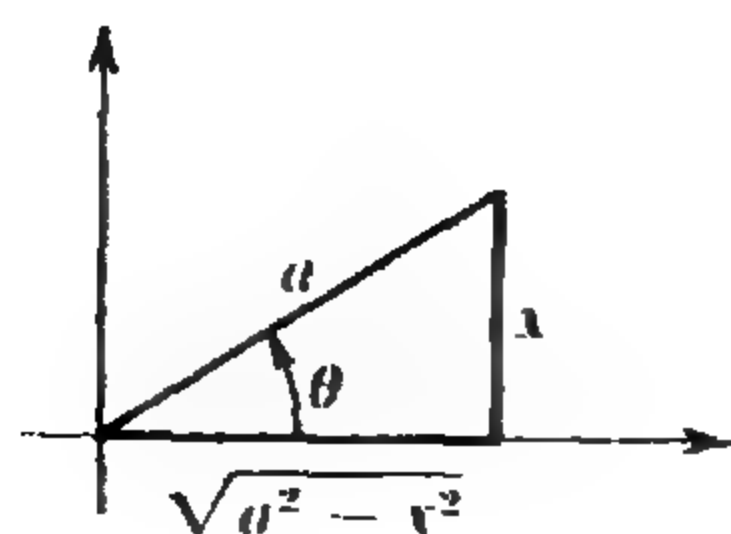
اشتقاق (ثالثاً) أصعب . نبدأ بتغيير للمتغير . دع $\theta = \sin^{-1}(x/a)$ ، حيث $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. فيكون $x = a \sin \theta$ ، $dx = a \cos \theta d\theta$ والتكامل يصبح

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int a \sqrt{1 - \sin^2 \theta} a \cos \theta d\theta \\ &= a^2 \int \sqrt{\cos^2 \theta} \cos \theta d\theta = a^2 \int |\cos \theta| \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

بما أن $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ إذن $\cos \theta \geq 0$ والتكامل الأخير يصبح $\int \cos^2 \theta d\theta$. يمكننا إجراء هذا التكامل باستخدام المتطابقة $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1)$ ونحصل على

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= a^2 \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{a^2}{2} \int (\cos 2\theta + 1) d\theta \\ (٥) \quad &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta \right) + C. \end{aligned}$$

الآن يجب التعبير عن النتيجة بدلالة x ، بصيغة جيب ضعف الزاوية لدينا $\frac{1}{2} \sin 2\theta = \sin \theta \cos \theta$. بما أن $\sin \theta = x/a$ و $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ ، يوجد مثلث قائم مثل ذلك الذي في شكل ٦ - ٢٦ ضلعه الرأسى x ووتره a واذن ضلعه الآخر يجب أن يكون $\sqrt{a^2 - x^2}$ ، وبذلك يكون $\cos \theta = \sqrt{a^2 - x^2}/a$. أيضاً $\theta = \sin^{-1}(x/a)$. بتعويض هذه القيم في (٥) ، يكون



شكل ٦ - ٢٦

إذا كانت $\sin \theta = x/a$ فإن $\cos \theta = \sqrt{a^2 - x^2}/a$.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{a^2}{2} (\sin \theta \cos \theta + \theta) + C \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{x}{a} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} + \sin^{-1} \frac{x}{a} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right) + C.\end{aligned}$$

القارىء يجب أن يتحقق من الاجابة بإجراء التفاضل .

مثال ٣ . أوجد قيمة $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

باستخدام الصيغة ٦-٩ (أولا) مع $a = 2$ ، يكون

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \sin^{-1} \frac{1}{2} - \sin^{-1} 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

مثال ٤ . أوجد مساحة المنطقة تحت المنحنى

$$y = \frac{1}{3x^2 + 1}$$

بين 0 و -1 .

المنحنى موضح فى الشكل ٦-٢٧ ، بما أن $l(x) = y = 1 / (3x^2 + 1)$ ، فإن مساحة المنطقة تعطى بالتكامل

$$A = \int_{-1}^0 l(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{dx}{3x^2 + 1}$$

هذا التكامل ليس على صورة المعادلة ٦-٩ (ثانيا) . لكن من السهل وضعه فى تلك الصورة : ويكون

$$\begin{aligned}A &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{3x^2 + 1} = \frac{1}{3} \int_{-1}^0 \frac{dx}{\frac{1}{3} + x^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{1/\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{x}{1/\sqrt{3}} \Big|_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \sqrt{3}x \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} [\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} (-\sqrt{3})] \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[0 - \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right] = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

عند إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية يجب أن نعرض على اختيار قيمها الأساسية . القيم الأساسية للـ arctangent تقع فى الفترة $(-\pi/2, \pi/2)$ ففى المثال الأخير $\tan^{-1} (-\sqrt{3}) = -\pi/3$ ولا تساوى $2\pi/3$. أيضا يجب أن يستخدم المقياس الدائرى للزوايا . وإلا كانت صيغ التفاضل والتكامل للدوال المثلثية والدوال المثلثية العكسية غير صحيحة .

مثال ٥ . اثبت أن مساحة الدائرة التى نصف قطرها r هى πr^2 .

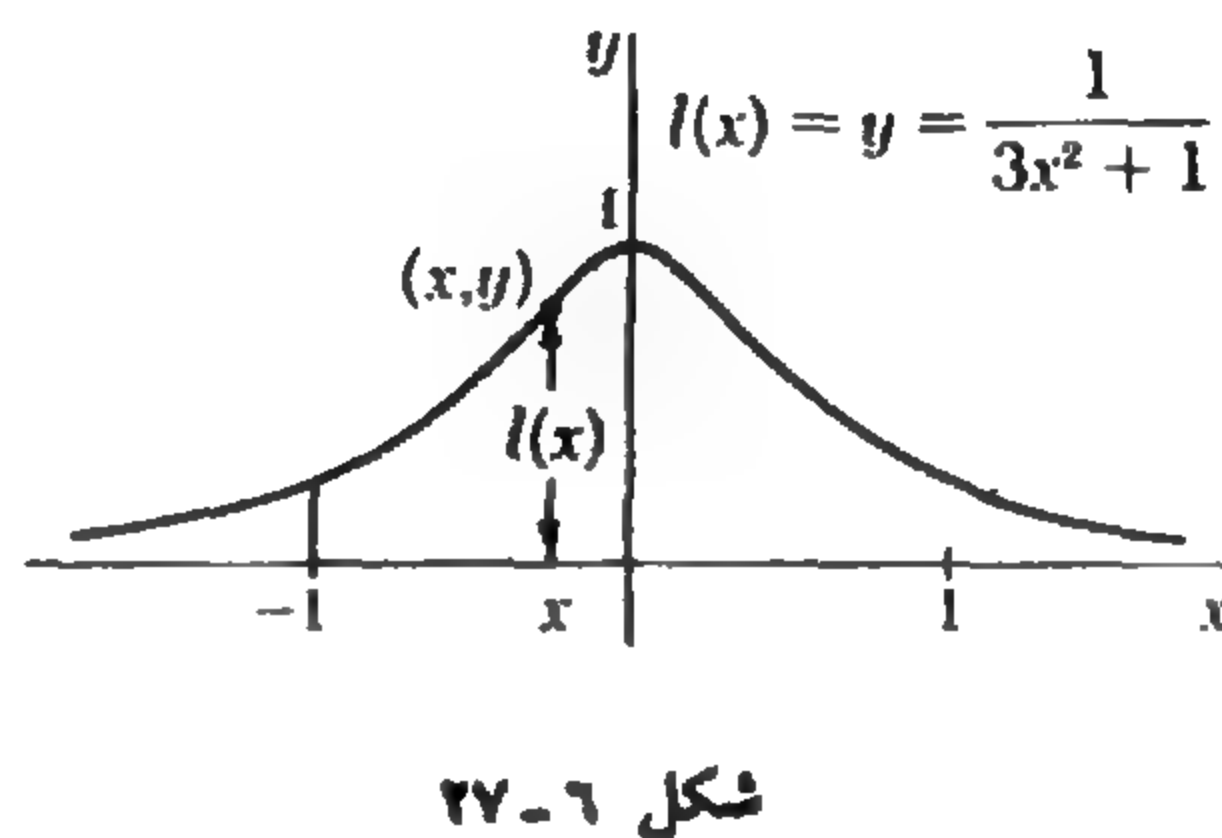
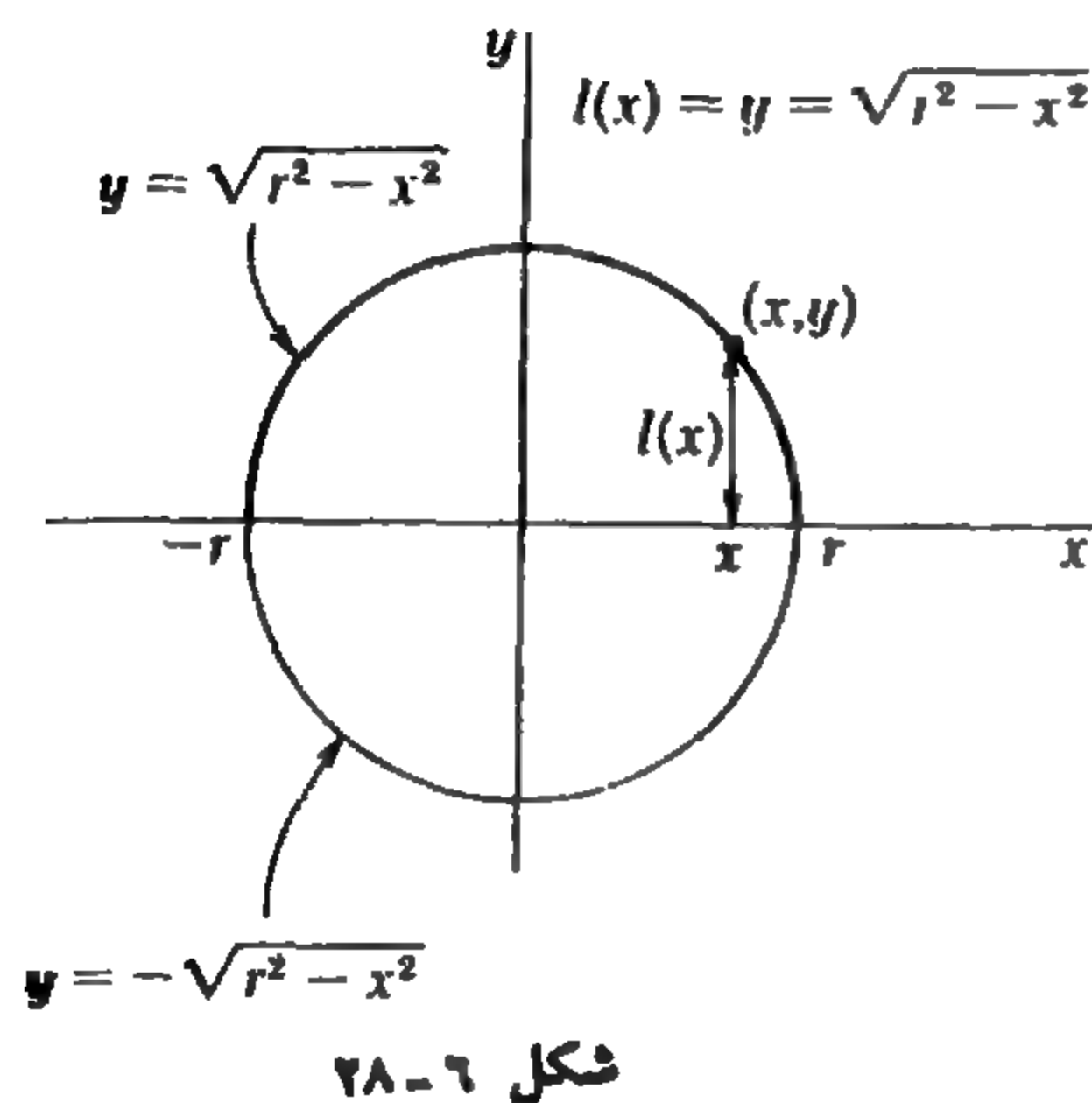
عندما يراد إيجاد المساحة بالتكامل ، يجب اعتبار المنطقة كمجموعة محدودة بأشكال بيانية لدالة أو أكثر . معادلة الدائرة هى $x^2 + y^2 = r^2$. المنطقة المقفلة بالنصف الأعلى للدائرة هى المنطقة

تحت منحنى الدالة $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ بين r و $-r$ (شكل ٦-٢٨) . مساحة الدائرة هي ضعف مساحة هذه المنطقة وعلى ذلك يكون

$$A = 2 \int_{-r}^r l(x) dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

نجرى التكامل باستخدام الصيغة ٦-٩ (ثالثاً) ، فنحصل على،

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \left[x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \sin^{-1} \frac{x}{r} \right]_{-r}^r \\ &= r^2 \sin^{-1} 1 - r^2 \sin^{-1} (-1) = r^2 \frac{\pi}{2} - r^2 \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi r^2. \end{aligned}$$



مسائل

أوجد المشتقة لما يأتي :

$a \sin^{-1} bx$	- ٣	$\tan^{-1} \frac{x}{c}$	- ٢	$\sin^{-1} 3x$	- ١
$\sec^{-1} \frac{1-u}{2}$	- ٦	$2 \sin^{-1} (1-x^2)$	- ٥	$\tan^{-1} (3z-2)$	- ٤
$6 \arctan \frac{2}{x^2}$	- ٩	$x^3 \sin^{-1} x$	- ٨	$\sin^{-1} x + x\sqrt{1-x^2}$	- ٧
$b \tan^{-1} \frac{x+a}{b}$	- ١٢	$z \arctan z$	- ١١	$\sec^{-1} \frac{a}{y}$	- ١٠
$\tan^{-1} \frac{b}{x} - \tan^{-1} \frac{a}{x}$	- ١٥	$\arcsin \frac{x-a}{x}$	- ١٤	$\frac{\tan^{-1} x}{x}$	- ١٣
$\operatorname{arcsec} \sqrt{y}$	- ١٨	$\sin^{-1} \sqrt{5x-2}$	- ١٧	$4 \arctan \sqrt{t}$	- ١٦
$c \sec^{-1} \sqrt{c^2 - x^2}$	- ٢١	$\sin^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$	- ٢٠	$\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{2+3t}{1-t}$	- ١٩

$$\frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} - ٢٤ \quad \sin^{-1} (2x \sqrt{1-x^2}) - ٢٣ \quad r(\sin^{-1} r)^2 - ٢٢$$

$$\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} - \sin^{-1} \frac{y}{a} - ٢٧ \quad z \sin^{-1} z + \sqrt{1-z^2} - ٢٦ \quad 4 \sec^{-1} (x+1) - x^2 - ٢٥$$

$$v \sec^{-1} \frac{1}{2v} - \frac{1}{2} \sqrt{1-4v^2} - ٣٠ \quad \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} + \sec^{-1} \frac{1}{t} - ٢٩ \quad \sin^{-1} \frac{u}{b} + \frac{\sqrt{b^2 - u^2}}{u} - ٢٨$$

$$\tan^{-1} \left(2 \tan \frac{z}{2} \right) - ٣٣ \quad \sin^{-1} (n \sin y) - ٣٢ \quad \sin^{-1} \frac{x}{2} + \sec^{-1} 2x - ٣١$$

أوجد قيمة المشتقة لما يأتي عند العدد المعطى :

$$\frac{\tan^{-1} z}{z}, 1 - ٣٦ \quad \sec^{-1} \frac{1-t}{2}, -2 - ٣٥ \quad x \sin^{-1} x, \frac{1}{2} - ٣٤$$

$$\tan^{-1} (x-y) + xy = 1 \quad \text{أوجد } dy/dx \text{ إذا كان}$$

$$x \arcsin y + y \arcsin x = \pi/4 \quad \text{أوجد } dy/dx \text{ إذا كان}$$

$$- ٣٩ \quad \text{أوجد معادلة المماس للمنحنى } y = \sin^{-1} x \text{ عند النقطة التى إحداثياتها السينى } \frac{1}{2} .$$

$$- ٤٠ \quad \text{أوجد معادلة المماس للمنحنى } y = \tan^{-1} (x/2) \text{ عند النقطة التى إحداثياتها السينى } -2 .$$

$$- ٤١ \quad \text{أثبت أن } (\sin^{-1} x)^2 \text{ حل للمعادلة التفاضلية}$$

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - 2 = 0$$

$$- ٤٢ \quad \text{أثبت أن } \sin (a \tan^{-1} t) \text{ حل للمعادلة التفاضلية}$$

$$(1+t^2)^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + 2t(1+t^2) \frac{du}{dt} + a^2 u = 0$$

$$- ٤٣ \quad \text{أثبت أن } \cos (n \cos^{-1} x) \text{ حل للمعادلة التفاضلية}$$

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$$

أجر التكاملات الآتية . (أعمل أى انفصال للدالة المكاملة عند نهاية فترة التكامل)

$$\int_{-1/\sqrt{3}}^1 \frac{dt}{1+3t^2} - ٤٦ \quad \int \frac{dy}{1+9y^2} - ٤٥ \quad \int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}} - ٤٤$$

$$\int_{-3}^3 \frac{6du}{9+u^2} - ٤٩ \quad \int_0^7 \frac{dx}{\sqrt{49-x^2}} - ٤٨ \quad \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - ٤٧$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-10}} - ٥٢ \quad \int \frac{dx}{3+4x^2} - ٥١ \quad \int_{\sqrt{3}}^8 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}} - ٥٠$$

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}} - ٥٥ \quad \int \frac{du}{\sqrt{36-12u^2}} - ٥٤ \quad \int_{-6}^{-3} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-9}} - ٥٣$$

$$\int \frac{2x dx}{\sqrt{1 - (x^2 - 2)^2}} \quad - ٥٨ \quad \int \frac{ds}{\sqrt{a^2 - b^2 s^2}}, ab \neq 0 \quad - ٥٧ \quad \int \frac{dx}{x \sqrt{9x^2 - 4}} \quad - ٥٦$$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{3 - \sin^2 x}} dx \quad - ٦٠ \quad \int \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt \quad - ٥٩$$

$$[\text{ارشاد : } 10 + 6x + x^2 = 1 + (3 + x)^2] \quad \int \frac{dx}{10 + 6x + x^2} \quad - ٦١$$

$$\int \frac{u}{1 + u^4} du \quad ٦٤ \quad \int \frac{dy}{\sqrt{3 - 2y - y^2}} \quad - ٦٣ \quad \int \frac{dx}{6 + 4x + 4x^2} \quad - ٦٢$$

$$\int \sqrt{a^2 - b^2 x^2} dx, ab \neq 0 \quad - ٦٦ \quad \int \sqrt{4 - 3x^2} dx \quad - ٦٥$$

٦٧ - صورة ارتفاعها a ft معلقة على حائط وقاعدتها b ft فوق مستوى النظر لمشاهد . أثبت أنه عندما يكون المشاهد على بعد x ft من الحائط ، الزاوية θ التي تعملها الصورة عند عين المشاهد تعطى بالصيغة .

$$\theta = \tan^{-1} \frac{a+b}{x} - \tan^{-1} \frac{b}{x}$$

ما هو البعد عن الحائط الذي يقف عنده المشاهد ليحصل على أحسن رؤية للصورة ، وذلك يحدث عندما تكون θ نهاية عظمى .

٦٨ - كاميرا تلفزيونية تستقبل الصور لنهائي سباق للجري ، موضوعة عند الخط النهائي وبعدها 20 ft على أحد جانبي حلبة السباق . إذا كانت سرعة المتسابقين هي 22 ft / sec ، ما هي سرعة دوران الكاميرا عندما يكون المتسابقون على بعد 50 ft من خط الانتهاء ؟ (ارشاد : معدل دوران الكاميرا هو معدل تغير الزاوية بين العمودى على الحلبة واتجاه الكاميرا) .

٦٩ - أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى $y = 3 / \sqrt{6 - x^2}$ والمحور السيني والمحور الصادي والخط المستقيم $x = \sqrt{3}$.

٧٠ - أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى $y = 4 / (2 + x^2)$ والمستقيم $y = \frac{1}{2}x$ والمحور الصادي .

٧١ - أثبت أن مساحة القطع الناقص الذى طول نصف محوره الأكبر a وطول نصف محوره الأصغر b هي πab .

٧٢ - خطط المنحنى $y = 1 / (1 + x^2)$ وأوجد المساحة $A(t)$ للمنطقة تحت المنحنى بين t و 0 . أوجد الآن $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$. هذه النهاية يمكن تفسيرها بأنها مساحة المنطقة تحت النصف الأيمن للمنحنى رغم أن المنحنى يمتد الى اليمين بدون انتهاء .

٧٣ - أوجد حجم الجسم الناشء بدوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $y = 2 / \sqrt{1 + x^2}$ والمحور السيني والمستقيمين $x = -1$ ، $x = 1$ حول المحور السيني .

٧٤ - الجسم الناشئ من دوران دائرة حول مستقيم في مستواها وخارج عنها يسمى تورس . أثبت أن حجم التورس هو $2\pi^2 a^2 b$ ، حيث a هي نصف قطر الدائرة المنشئة و b هي المسافة بين مركز هذه الدائرة والخط المستقيم .

٧٥ - (أ) كمية الاضاءة عند نقطة P الناشئة عن مصدر ضوئي تساوى شدة الضوء مقسومة على مربع المسافة بين P ومصدر الضوء . مصدر ضوء فلورسنت معين هو أنبوبة طولها 4 ft وشدة الضوء منتظمة وقدرها 30 قوة شمعة لكل قدم طولى . الأنبوبة رفيعة ويمكن اعتبارها كخط مستقيم . أوجد كمية الاضاءة الناتجة عن مصدر الضوء عند نقطة P على بعد 6 ft من أحد طرفي الضوء وعلى المستقيم العمودى على مصدر الضوء عند ذلك الطرف . (إرشاد : قسّم الأنبوبة إلى أجزاء صغيرة وقرب كمية الضوء عند P الناشئة عن كل جزء) . (ب) ما هو طول الأنبوبة التى تجعل كمية الضوء عند P ضعف تلك التى فى (أ) ؟

(ج) هل من الممكن جعل طول الأنبوبة كافيا للحصول على أى كمية من الضوء عند P ؟
٧٦ - أثبت $\frac{d}{dx} \tan^{-1} (1/x) = -\frac{d}{dx} \tan^{-1} x$. بما أن $\tan^{-1} x$ و $\tan^{-1} (1/x)$ متصلتان لـ $x > 0$ ، يوجد ثابت c بحيث أن

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = c$$

(٦)

لجميع $x > 0$ ، أوجد c . الدالتان أيضا متصلتان لـ $x < 0$ ، وإذن يوجد ثابت c' قد يختلف عن c بحيث أن (٦) تبقى صحيحة مع c' مكان c لجميع $x < 0$. أوجد c' .
٧٧ - بمعاملة y كثابت واجراء التفاضل بالنسبة إلى x ، أثبت العلاقة

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$$

٧٨ - خطط المنحنى $y = \sin^{-1} 1/x$.

٧٩ - كيف نهتدى إلى تخمين أن $1/(1+x^2)$ هي مشتقة $\tan^{-1} x$ ؟ أثبت تخمينك ، لتحصل على القاعدة ٦ - ٧ (ثانياً) .

٨٠ - كيف نهتدى إلى تخمين أن $1/(x\sqrt{x^2-1})$ هي مشتقة $\sec^{-1} x$ ؟ أثبت تخمينك ، لتحصل على القاعدة ٦ - ٧ (ثالثاً) .

٨١ - بافتراض القاعدة ٦ - ٧ (ثانياً) ، أثبت القاعدة ٦ - ٨ (ثانياً) .

٨٢ - بافتراض القاعدة ٦ - ٧ (ثالثاً) ، أثبت القاعدة ٦ - ٨ (ثالثاً) .

٨٣ - (أ) إذا كانت $\cos^{-1} x$ تعرف بأنها العدد فى الفترة $[0, \pi]$ الذى جيب تمامه x ، اثبت أن $D \cos^{-1} x = -1/\sqrt{1-x^2}$. (ب) من العلاقة $D \cos^{-1} x = -D \sin^{-1} x$. المشتقة من

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$$

٨٤ - إذا كانت $\cot^{-1} x$ تعرف بأنها العدد فى الفترة $(0, \pi)$ الذى ظل تمامه x ، اثبت أن $D \cot^{-1} x = -1/(1+x^2)$.

الفصل السابع

الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية

٧ - ١

الأسس والدوال الأسية*

فى هذا البند سنعمم الفكرة عن القوة الى الأسس غير الكسرية ، بحيث أن الرمز مثل $3^{\sqrt{2}}$ يكون لها معنى . المسألة ليست لإيجاد قيمة a^u حيث u غير كسرية ولكن هى لتعريف ماذا نقصد بهذا الرمز . لصياغة التعريف سنقاد باعتبارين : الأول هو أن قوانين الأسس تبقى صحيحة للأسس غير الكسرية حتى يكون ، مثلاً ، $3^{\sqrt{2}}(3^{\pi}) = 3^{\sqrt{2}+\pi}$ ، والثانى هو أن a^u ينبغى أن تكون متصلة حتى تكون a^v قريبة من a^u عندما تكون v قريبة من u . أى أن $3^{\sqrt{2}}$ يجب أن تعرف كعدد بحيث أن $3^{1.4}$ تكون قريبة من $3^{\sqrt{2}}$ ، وبحيث أن $3^{1.41}$ تكون أقرب الى $3^{\sqrt{2}}$ لأن 1.41 أقرب الى $\sqrt{2}$ عن 1.4 . فى الواقع ، $3^{\sqrt{2}}$ ينبغى أن تكون عددا بحيث أن اختيار v قريبة قريبا كافيا من $\sqrt{2}$ يجعل 3^v قريبة كما نريد من $3^{\sqrt{2}}$.

شرط الاتصال يعطينا لمحة لصياغة تعريف مناسب لـ a^u . نوضح بـ $3^{\sqrt{2}}$ نعتبر الفئة S لجميع الأعداد الكسرية $r < \sqrt{2}$. أى أن ،

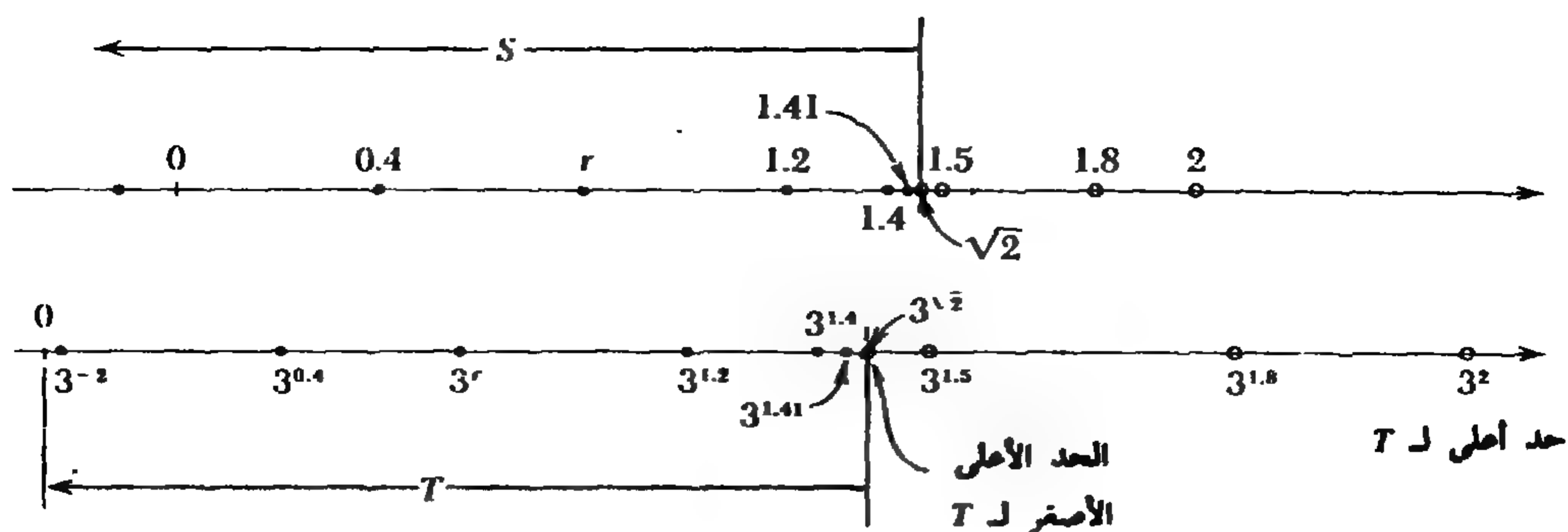
$$S = \{r | r \text{ وكسرية } r < \sqrt{2}\}$$

فمثلاً 1.41 و 1.4 ، 1.2 ، 0.4 ، -2 تكون فى S ، لكن $\sqrt{1.1}$ و 1.5 لا يكونان فى S . ليكن

$$T = \{3^r | r \text{ in } S\}$$

أى أن ، 3^r تكون فى T اذا واذا فقط كانت r فى S فمثلاً ، $3^{1.41}$ و $3^{1.4}$ ، $3^{1.2}$ ، $3^{0.4}$ ، 3^{-2} جميعها فى T ، بينما $3^{1.5}$ ليست فى T . بعض الأعداد فى T و S مشار إليها بنقط على الخطين الحقيقيين الأعلى والأدنى فى الشكل ٧ - ١ .

* يجب على القارئ أن يراجع المادة من الحد الأعلى الأصغر بيند ٥ - ٨ قبل قراءة هذا البند .



شكل ١-٧
 $\sqrt{2}$ هو l.u.b.s. لـ 3^r يعرف بأنه l.u.b.T.

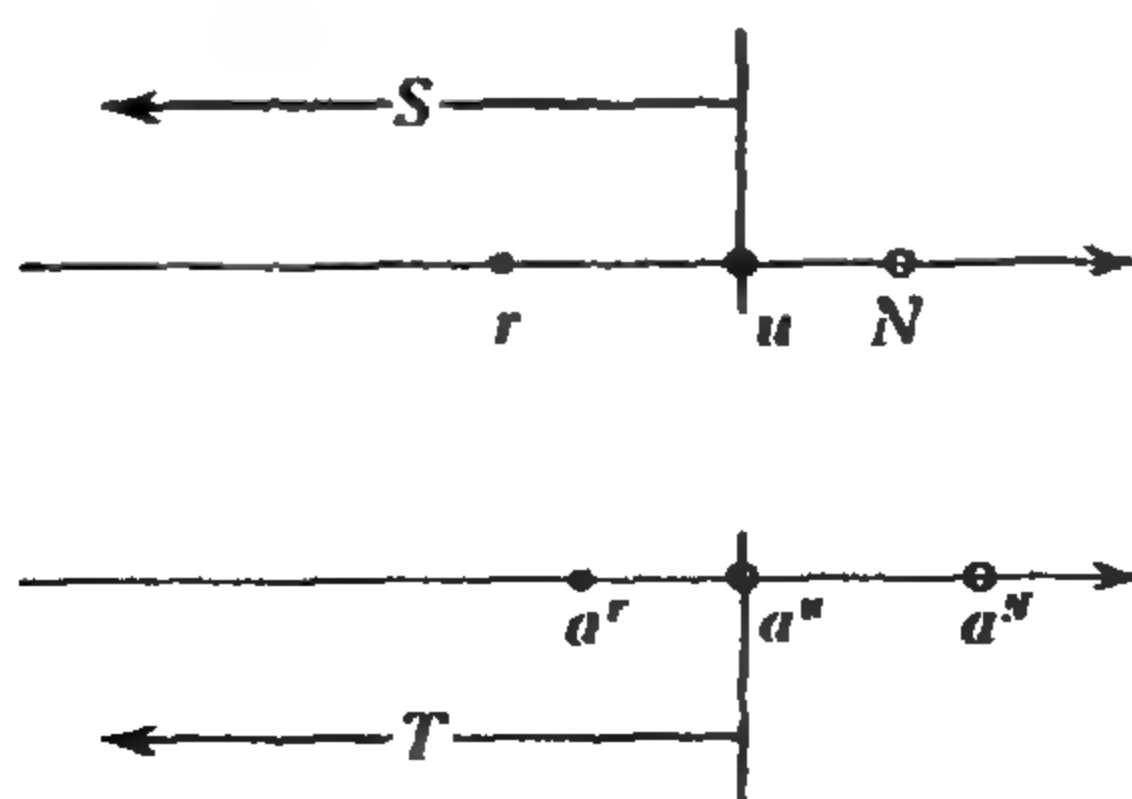
الأعداد التي ليست في T و S مشار إليها بدوائر. إذا كانت 3^r أي عدد في T ، فإن r تكون كسرية ويكون $2 > \sqrt{2} > r$ ومن ثم $3^r < 3^2$. هذا يبين أن T لها حد أعلى هو 3^2 ، وبالتالي لها حد أعلى أصغر. نعرف قيمة $3^{\sqrt{2}}$ بأنها هذا الحد الأعلى الأصغر. تقريب كسري لها هو 4.7287، الأعداد 3^r تضغط ناحية الحد الأعلى الأصغر من جهة اليسار.

يمكن استخدام طريقة مماثلة لتعريف a^u لأي عدد كسري u ولأي عدد $a \geq 1$. لتكن

$$S = \{r \mid r \text{ كسرية و } r < u\}$$

$$T = \{a^r \mid r \text{ في } S\} \quad \text{و}$$

(شكل ٢-٧). نريد تعريف a^u كالحد الأعلى الأصغر للفترة T ، لكن يجب أولاً إثبات أن T لها حد أعلى. لتكن N عددا صحيحا ما حيث $u < N$. فيكون $a^r < a^N$ لجميع الأعداد الكسرية r التي تحقق $r < u < N$ ، وهذا يثبت أن T لها حد أعلى. وبالتالي T لها حد أعلى أصغر. نعرف a^u بأنها هذا الحد الأعلى الأصغر. إذا كان $0 < a < 1$ ، فإن $1/a > 1$ ويكون $(1/a)^n$ له معنى. نعرف a^u في هذه الحالة بأنه $1 / (1/a)^u$. نلخص ماسبق في التعريف الآتي.



شكل ٢-٧
 u هو l.u.b. S. | a^u تعرف بأنها l.u.b.T.

٧-١ تعريف . لتكن u عددا غير كسرى .

(أولا) اذا كانت $a \geq 1$ ، فان $a^u = 1. u. b. T$ حيث $\{ a^r / r < u \text{ وكسرية } r \}$.

(ثانيا) اذا كانت $0 < a < 1$ ، فان $a^u = 1 / (1/a)^u$.

(ثالثا) $0^u = 0 \quad u > 0$.

التعريف يتضمن أن $I^u = 1$ لجميع u . بما أننا لم نعط تعريفا مقنعا لـ a^u عندما تكون $a < 0$ وتكون u غير كسرية ، فاننا لانستخدم التعبيرات مثل $(-5)^{1/2}$ وأيضا 0^{-u} غير معرفة عندما $u \geq 0$. نعلم من قبل معنى a^u عندما تكون u كسرية ، ويمكن اثبات أن التعريف ٧-١ (أولا) يكون صحيحا عندما تكون u كسرية . واذن التعريف ٧-١ يصبح نظرية لـ u الكسرية .

القوانين الأساسية للأسس المعطاة أدناه يمكن برهنتها من التعريف ٧-١ . البراهين مملة أكثر منها صعبة ، وبما أن الموضوع قد حاد عن الغرض الأساسى لهذا الفصل ، فاننا نحذف البراهين .
٧-٢ قوانين الأسس . هذه القوانين تكون صحيحة لجميع v و u الحقيقية حيث الرموز تكون معرفة .

$$a^{-u} = 1/a^u \quad (\text{ثانيا}) \quad a^u > 0, \text{ if } a > 0 \quad (\text{أولا})$$

$$\frac{a^u}{a^r} = a^{u-r} = 1/a^{r-u} \quad (\text{رابعا}) \quad a^u a^r = a^{u+r} \quad (\text{ثالثا})$$

$$a^u/b^u = (a/b)^u \quad (\text{سادسا}) \quad a^u b^u = (ab)^u \quad (\text{خامسا})$$

$$(a^u)^r = a^{ur} \quad (\text{سابعا})$$

(ثامنا) لتكن $u > 0$ و $a > 0, b > 0$. فيكون $a^u < b^u$ اذا واذا فقط كان $a < b$.

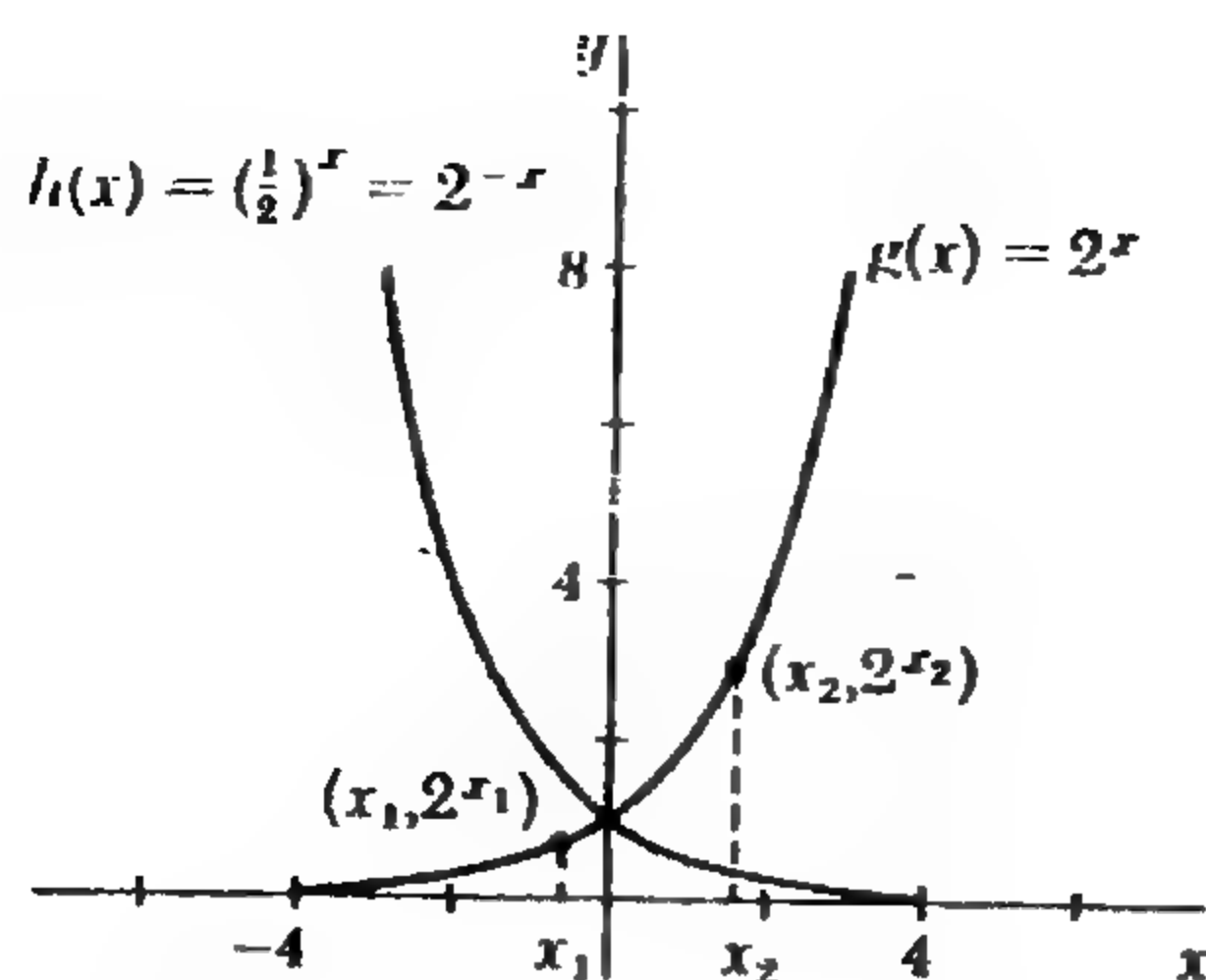
(تاسعا) لتكن $a > 1$. فيكون $a^u < a^v$ اذا واذا فقط كان $u < v$. لتكن $0 < a < 1$. فيكون $a^u > a^v$ اذا واذا فقط كان $u < v$.

اذا كانت الأسس كسرية ، فان بعضا من هذه القوانين ، مع قيود واضحة ، تكون صحيحة لـ b و a السالبين .

بما أن a^x لها معنى لجميع x الحقيقية اذا كانت $a > 0$ ، فان الدالة f المعرفة بـ

$$f(x) = a^x, \quad a > 0$$

لها فئة جميع الاعداد الحقيقية كنطاقها . مثل هذه الدوال تسمى دوال أسية . الدالة الأسية الخاصة $g(x) = 2^x$ مجدولة فى الهامش ، وشكلها البيانى مخطط فى الشكل ٧-٣ .



شكل ٣-٧

الشكلان البيانيان لـ $h(x) = 2^{-x}$ و $g(x) = 2^x$ انعكاسان كل منهما للآخر في المحور الصادي .

هذه الدالة نمطية لجميع الدوال الأسية $f(x) = a^x$ إذا كانت $a > 1$. وجميعها موجبة في كل مكان القانون ٧-٢ (أولا) وتتزايد في الفترة $(-\infty, \infty)$ ، لأن بالقانون ٧-٢ (تاسعا) ، إذا كانت $x_1 < x_2$ فإن $a^{x_1} < a^{x_2}$. الأشكال البيانية جميعها تقطع المحور الصادي عند $(0, 1)$ وبعدها ترتفع بسرعة . في الواقع ، كما سنرى في بند ٣-٧ ، $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$ ، سنرى أيضا هناك أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ وهذا يثبت أن الشكل البياني يكون مقاربا للمحور السيني السالب .

إذا كانت $0 < a < 1$ فإن $f(x) = a^x$ تكون دالة تناقصية بالقانون ٧-٢ (تاسعا) وهي موجبة في كل مكان وأيضا $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$ مما يثبت أن شكلها البياني يكون مقاربا للمحور السيني الموجب . في الشكل ٣-٧ مخطط أيضا الدالة النمطية $h(x) = (\frac{1}{2})^x$.

إذا عوضنا $-x$ لـ x في المعادلة $y = 2^x$ فإننا نحصل على $y = 2^{-x} = (\frac{1}{2})^x$. ومن ثم الشكل البياني لـ $y = (\frac{1}{2})^x$ هو الانعكاس في المحور الصادي للشكل البياني لـ $y = 2^x$. جميع الدوال التي على الصورة $u(x) = a^{-x}$ ، حيث $a > 1$ ، لها أشكال بيانية متناقصة مثل الشكل البياني لـ $h(x) = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$.

x	$g(x) = 2^x$
-10	$2^{-10} \approx 0.00098$
-4	$2^{-4} = 0.0625$
-3	$2^{-3} = 0.125$
-2	$2^{-2} = 0.25$
-1	$2^{-1} = 0.5$
$-\frac{1}{2}$	$1/\sqrt{2} \approx 0.707$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2} \approx 1.414$
1	2
2	4
$\sqrt{7}$	$2^{\sqrt{7}} \approx 6.258$
3	8
10	1024

الدالة الأسية لا يمكن الاستغناء عنها في كثير من موضوعات الفيزياء والكيمياء والبيولوجي . وهي تستخدم في الوصف الكمي لانحلال المواد المشعة ونمو المستعمرات البكتيرية .

مسائل :

حل المعادلات الآتية :

$$1 - 3^{4x} = 81 \quad 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{64} \quad 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 32$$

$$4 - 17^u = 1/\sqrt{17} \quad 5 - 6(12^x) = \frac{1}{2}(12^{3x}) \quad 6 - 16^x = 8$$

حدد موقع x بين عددين صحيحين متتاليين إذا كان :

$$7 - 7^x = 93.4 \quad 8 - 2^x = \frac{1}{2} \quad 9 - 10^x = 0.036 \quad 10 - \left(\frac{2}{3}\right)^x = 16$$

ما هو العدد الأكبر في الأزواج الآتية ؟ (إرشاد : استخدم قوانين الأسس ٧ - ٢) .

$$11 - \left(\frac{1}{4}\right)^\pi, \left(\frac{1}{4}\right)^3 \quad \pi^{1/4}, 3^{1/4}$$

$$13 - 5^{2/3}, 5^{3/4} \quad 10^{-\sqrt{3}}, 10^{-\sqrt{7}}$$

$$15 - 5^{-3}, (2\pi)^{-5} \quad (\pi/3)^{1/3}, (\sqrt{2}/5)^{1/3}$$

$$17 - (1.2)^{-1/4}, (1.2)^{-3/7} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{7}}, \left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{10}}$$

$$19 - (2\sqrt{3}-3)^{-1}, (2\sqrt{3}-3)^2 \quad (\pi-3)^{-2/3}, (\pi-3)^{-3/4}$$

$$21 - (\sqrt{2})^{-\sqrt{5}}, (\pi/2)^{-\sqrt{5}} \quad (\sqrt[3]{70})^5, (\sqrt{17})^5$$

$$23 - 2^5, 10^{3/2} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3}, \left(\frac{2}{3}\right)^{3/5} \quad [إرشاد : خذ في الاعتبار$$

$$. \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3}]$$

أوجد قيمة تقريبية للأعداد الآتية :

$$25 - 2^\pi \quad 26 - 15^{\sqrt{3}} \quad 27 - 1/5^{\sqrt{2}}$$

٢٨ - أثبت أنه إذا كانت $a \neq 1$ و $a > 0$ ، فإن $a^x = a^y$ تضمن أن $x = y$. (إرشاد : افترض أن $x > y$)

٢٩ - أثبت أنه لجميع u الموجبة ، $a^u > 1$ إذا كانت $a > 1$ وأيضا $0 < a^u < 1$ إذا كانت $0 < a < 1$.

٣٠ - بافتراض قوانين الأسس ٧ - ٢ ، اذكر واثبت النتيجة المناظرة لـ ٧ - ٢ (ثامنا) عندما تكون $u < 0$.

٣١ - يمكننا ، بتبرير مماثل ، تعريف a^u ، حيث $a \geq 1$ وحيث u غير كسرية ، بأنها الحد الأدنى الأكبر للفترة w ، حيث $w = \{a^s \mid s \text{ كسرية } s > u\}$. أثبت أن العدد a^u المعروف هكذا هو

نفس العدد المعطى بالتعريف ٧ - ١ (إرشاد : لتكن $T = \{a^r / r < u\}$ ، حيث $r < u$ ، كسرية r ، ولتكن $W = \{a^r / r \leq w\}$. أثبت أن $w = g \cdot 1 \cdot b$. ثم اثبت أن العدد غير السالب $t - w$ أصغر من كل عدد موجب) .

٣٢ - خطط على نفس مستوى الاحداثيات الأشكال البيانية للمعادلات الآتية :

$$(أ) y = 3^x \quad (ب) y = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x} \quad (ج) y = 5^x \quad (د) y = 5^{-x} \quad (هـ) y = 1^x$$

خطط الشكل البياني للمعادلات الآتية . (جداول الجذور والمقلوبات ستسهل الحسابات) .

$$٣٣ - y = 3^{x+1} \quad ٣٤ - y = -3^x \quad ٣٥ - y = 2^{x/2} \quad ٣٦ - y = -5^{-x} \quad ٣٧ - y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$$

$$٣٨ - y = 2^{-x^2} \quad ٣٩ - y = 2^{|x|} \quad ٤٠ - y = x2^x \quad ٤١ - y = 1.3^x \quad ٤٢ - y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

٤٣ - عند وقت معين تحتوى مزرعة 1000 بكتيريا . المشاهدات عند نفس الساعة فى أيام متعاقبة تبين أنه بعد t يوما المزرعة تحتوى $(2)^2 1000$ بكتيريا . كم سيوجد بعد يومين ؟ بعد 8 أيام ؟ كم كان يوجد منذ يومين ؟

٤٤ - عند وقت معين كتلة المادة المشعة هي 0.01 gram . الكتلة تتناقص باستمرار تبعا للفاقد بالإشعاع . من المعلوم من نظرية المواد المشعة أن بعد t سنة سيكون المتبقى $(3^{-0.2}) 0.01$. كم سيكون المتبقى بعد سنة واحدة ؟ بعد 8 سنوات ؟ كم كانت المادة منذ سنة واحدة ؟ متى تنتهى المادة ؟

٤٥ - الكتلة لكمية من الراديوم تتناقص باستمرار تبعا للفاقد بالإشعاع . عند وقت معين الكتلة هي A ، ومن المعروف أن بعد t من السنوات كتلة الكمية المتبقية تعطى بـ $A\left(\frac{1}{2}\right)^{t/1600}$ (أ) كم سيوجد بعد 800 سنة ؟ بعد 4800 سنة ؟ (ب) أثبت أنه بصرف النظر عن حجم القطعة ، الزمن المطلوب لتتناقص قطعة راديوم إلى النصف هو دائما نفس الزمن . هذا الزمن يسمى عمر النصف للراديوم .

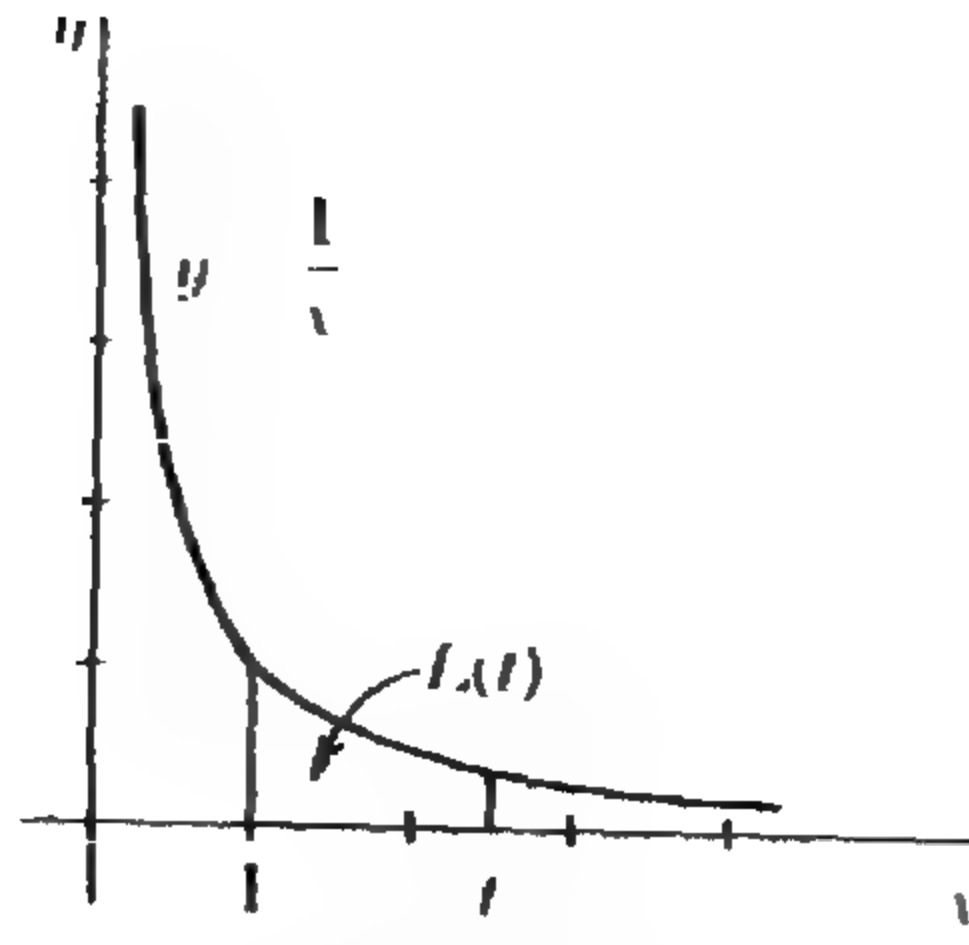
٧ - ٢

الدالة L

الدالة الأسية a^x لها مشتقة ، لكن إيجادها بالطرق المباشرة ليس سهلا . سنستخدم طريقة غير مباشرة ، وإن كانت طويلة إلا أنها أسهل ، وأيضا تعطى معلومات ستكون مفيدة فى دراستنا للدالة اللوغاريتمية فى بند ٧ - ٥ .

بما أن $1/x$ متصلة لجميع $x > 0$ ، التكامل المعين

$$\int_1^x \frac{1}{x} dx$$



شكل ٧-٤

$L(t)$ هي مساحة المنطقة المظلمة

يوجد لجميع $t > 0$ بالنظرية ٥-٣ . عندما تكون $t > 1$ فإنه يمثل مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = 1/x$ بين t و 1 (شكل ٧-٤) . التكامل لا يمكن إيجاده بقاعدة القوة :
 $\int x^r dx = x^{r+1}/(r+1)$ لأن هذه ليست صحيحة عندما $r = -1$. لأي عدد معين t ، قيمة التكامل يمكن التقريب إليها إلى أى درجة نريدها من الدقة بحواصل جمع ريمان أو بقاعدة شبه المنحرف . التقريبات لقيم قليلة من t معطاة فى جدول فى الهامش . كل t تعين قيمة للتكامل ، وإذن التكامل يعرف دالة ، نرسم لها بـ L . أى أن

$$(1) \quad L(t) = \int_1^t \frac{1}{x} dx, \quad t > 0$$

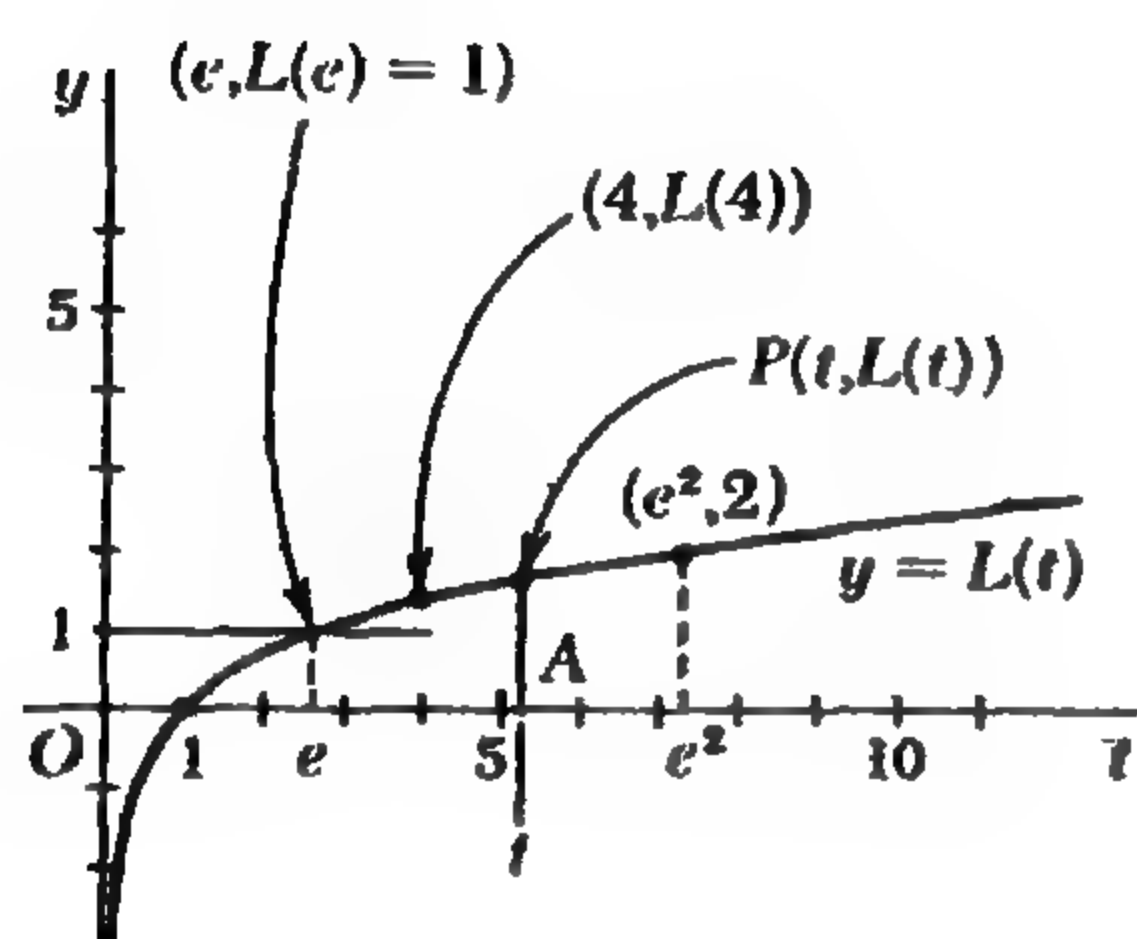
الدالة L ستساعدنا على إيجاد مشتقة a^x . مثبت فيما بعد أن $L(x)$ تطابق الدالة اللوغاريتمية $\log_e x$ ، حيث الأساس e هو عدد سيعرف أدناه .

بما أن الدالة المكاملة موجبة ، فإن $L(t) > 0$ لـ $t > 1$ ، $L(1) = 0$ و $L(t) < 0$ لـ $0 < t < 1$.
 بالنظرية ٥-٧ ، مشتقة L هي

t	$L(t) = \int_1^t \frac{1}{x} dx$
0.01	-4.605
0.1	-2.303
0.5	-0.693
1	0
2	0.693
3	1.099
6	1.792
8	2.079

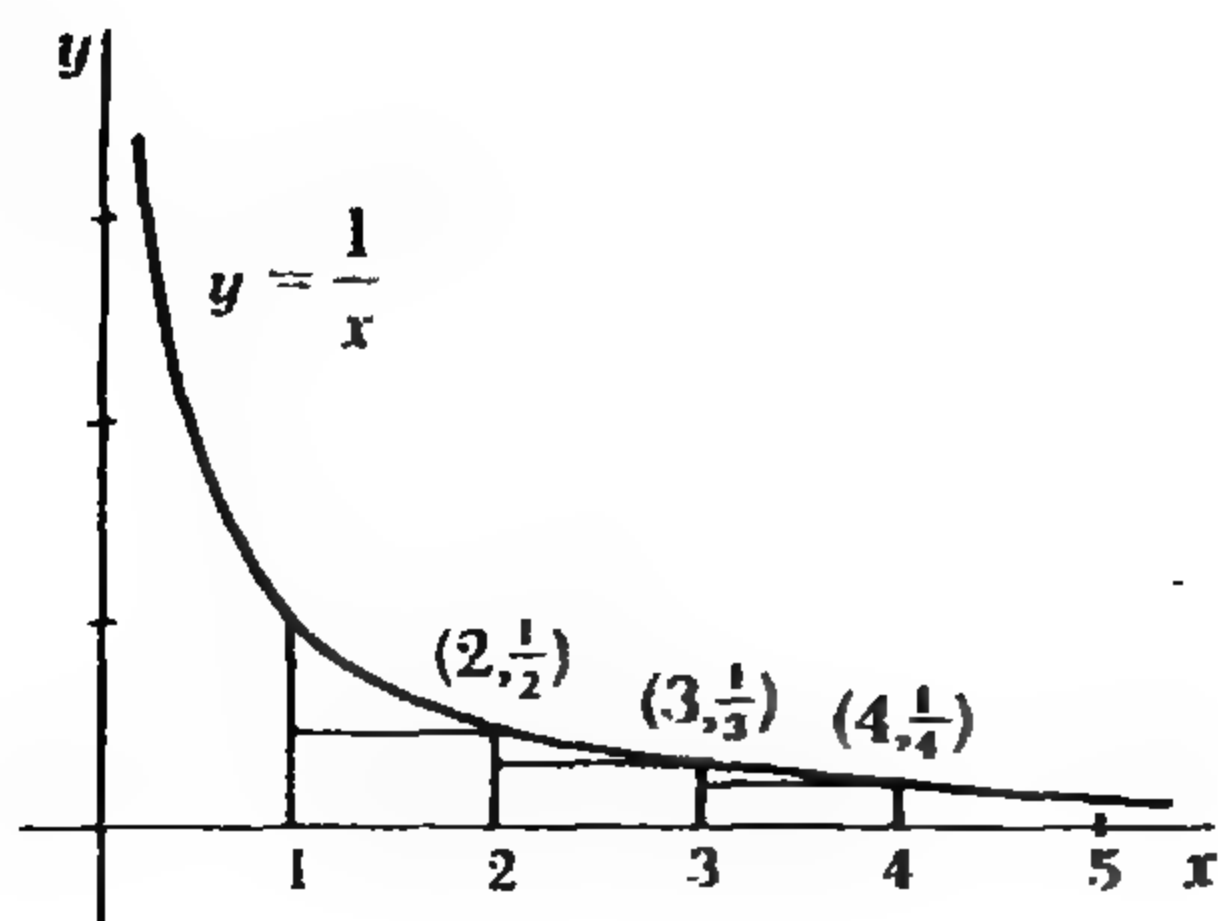
$$(٢) \quad L'(t) = \frac{1}{t} > 0$$

وهذا يثبت أن L متصلة ومتزايدة في الفترة $(0, \infty)$ وأن ميل شكلها البياني يقترب من الصفر عندما t تصبح كبيرة . بما أن المشتقة الثانية ، $L''(t) = -1/t^2$ ، دائما سالبة ، فإن الشكل البياني لـ L يكون مقعرا إلى تحت . بهذه المعلومات والجدول أعلاه يمكننا تخطيط الشكل البياني للدالة L (شكل ٥-٧) . إذا كانت $t \geq 1$ ، فإن الاحداثي الصادي لأي نقطة $P(t, L(t))$ على الشكل البياني يساوي المساحة تحت المنحنى $y = 1/x$ بين 1 و t .

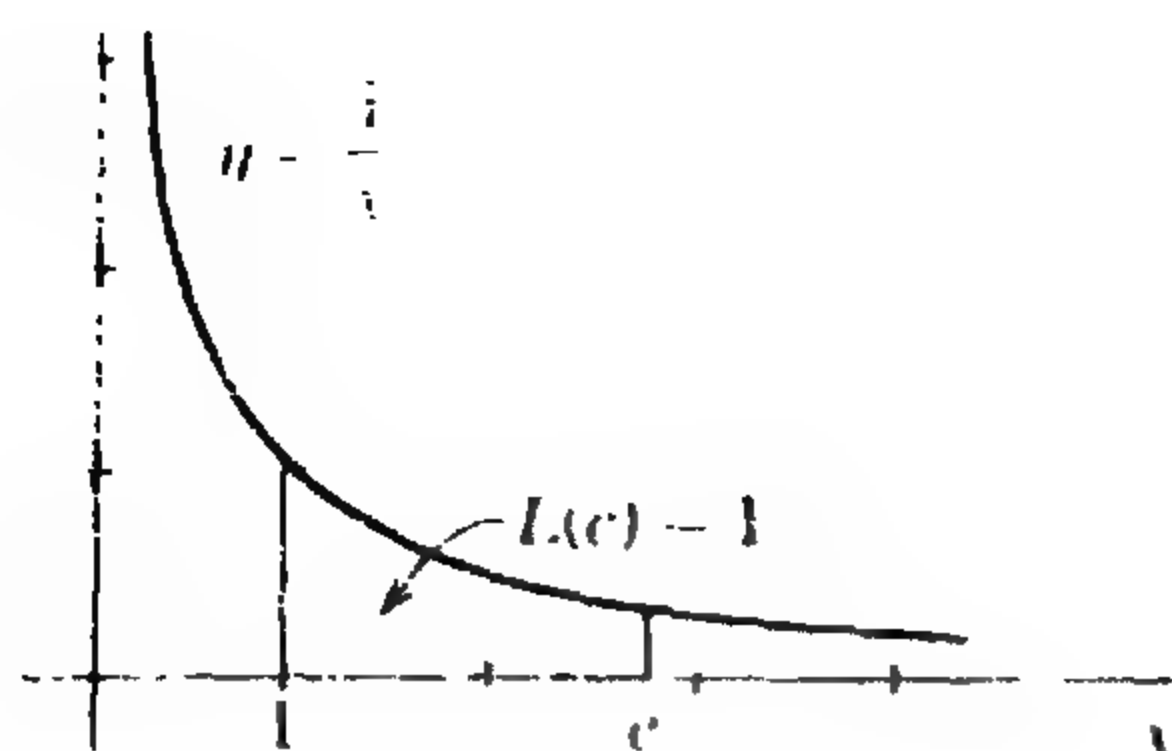


شكل ٥-٧
الشكل البياني للدالة $y = L(t)$. طول الخط المستقيم AP يساوي مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = 1/x$ بين 1 و t .

المساحة تحت المنحنى $y = 1/x$ بين 1 و 4 أكبر من مجموع مساحات المستطيلات المظللة الثلاث الموضحة في الشكل ٦-٧ . وإذن $L(4) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1 > 0 = L(1)$. هذا يثبت أن الخط الافقي $y = 1$ يقع بين النقطتين $(1, L(1))$ و $(4, L(4))$ على المنحنى $y = L(t)$ (شكل ٥-٧) . بما أن L متصلة ، فالمنحنى يجب بنظرية القيمة الوسط ٦-٥ أن يقطع هذا الخط عند نقطة $(t, 1)$ لقيمة ما t بين 1 و 4 . هذه القيمة لـ t حيث $L(t) = 1$ يرمز لها عالميا بالحرف e . أي أن ، $L(e) = 1$. بعبارة أخرى ، e هي القيمة لـ t حيث مساحة المنطقة المظللة في الشكل ٦-٧ هي 1 (شكل ٧-٧)



شكل ٦-٧
مساحة المنطقة تحت المنحنى بين 1 و 4 أكبر من مساحة المنطقة المظللة .



شكل ٧-٧

e هي قيمة e التي تجعل مساحة المنطقة المظللة 1 .

العدد e له أهمية كبرى في الرياضيات وتطبيقاتها . وهو عدد غير كسرى وعلى وجه التقريب يساوى 2.71828 . في الفصل السادس عشر سنتعلم كيف نقربه إلى أى درجة من الدقة . الدالة f المعروفة بـ $f(x) = e^x$ مفيدة للغاية حتى أنها تعرف بالدالة الأسية . جدول لقيم e^x معطى في التذييل B ، والشكل البياني للدالة مخطط في الشكل ٧-٨ .

من السهل إيجاد مشتقة e^x عن الدوال الأسية الأخرى ، لكن نحتاج أولاً إلى تمهيدتين .

٧-٣ تمهيدية . $L(e^u) = u$ لجميع u .

فمثلاً ، $L(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$ و $L(e^\pi) = \pi$.

البرهان . نبرهن أولاً التمهيدية ٧-٣ لعدد كسرى u ، ثم نستخدم هذه النتيجة لبرهنتها لأى عدد حقيقى u . إذا كانت $u = 0$ ، فالتمهيدية تافهة لأن $L(1) = 0$. لتكن r أى عدد كسرى غير الصفر . من التعريف

$$L(t) = \int_1^t \frac{1}{x} dx$$

وإذن

$$(٣) \quad L(e^r) = \int_1^{e^r} \frac{1}{x} dx$$

أجر تغييراً للمتغير فى التكامل بوضع $z = x^{1/r}$. فيكون $dx = rz^{r-1} dz$ و $x = z^r$ ، و (٣) تصبح

$$L(e^r) = \int_1^e \frac{rz^{r-1}}{z^r} dz = r \int_1^e \frac{1}{z} dz$$

حيث الحدان الجديدان للتكامل هما قيمتا z المناظرتان للحددين القديمين $x = e^r$ و $x = 1$ ، لكن

$$\int_1^e \frac{1}{z} dz = L(e) = 1$$

ومن ثم

$$(4) \quad L(e^r) = r \quad \text{حيث } r \text{ عدد كسري .}$$

هذا يبرهن التمهيدية ٧-٣ لعدد كسري u .

لبرهنة التمهيدية لجميع الأعداد الحقيقية u ، نفرض أن u أي عدد حقيقي وأن $L(e^u)$ أقل من u . يوجد دائما عدد كسري بين أي عددين حقيقيين . اختر عددا كسريا r بين u و $L(e^u)$:

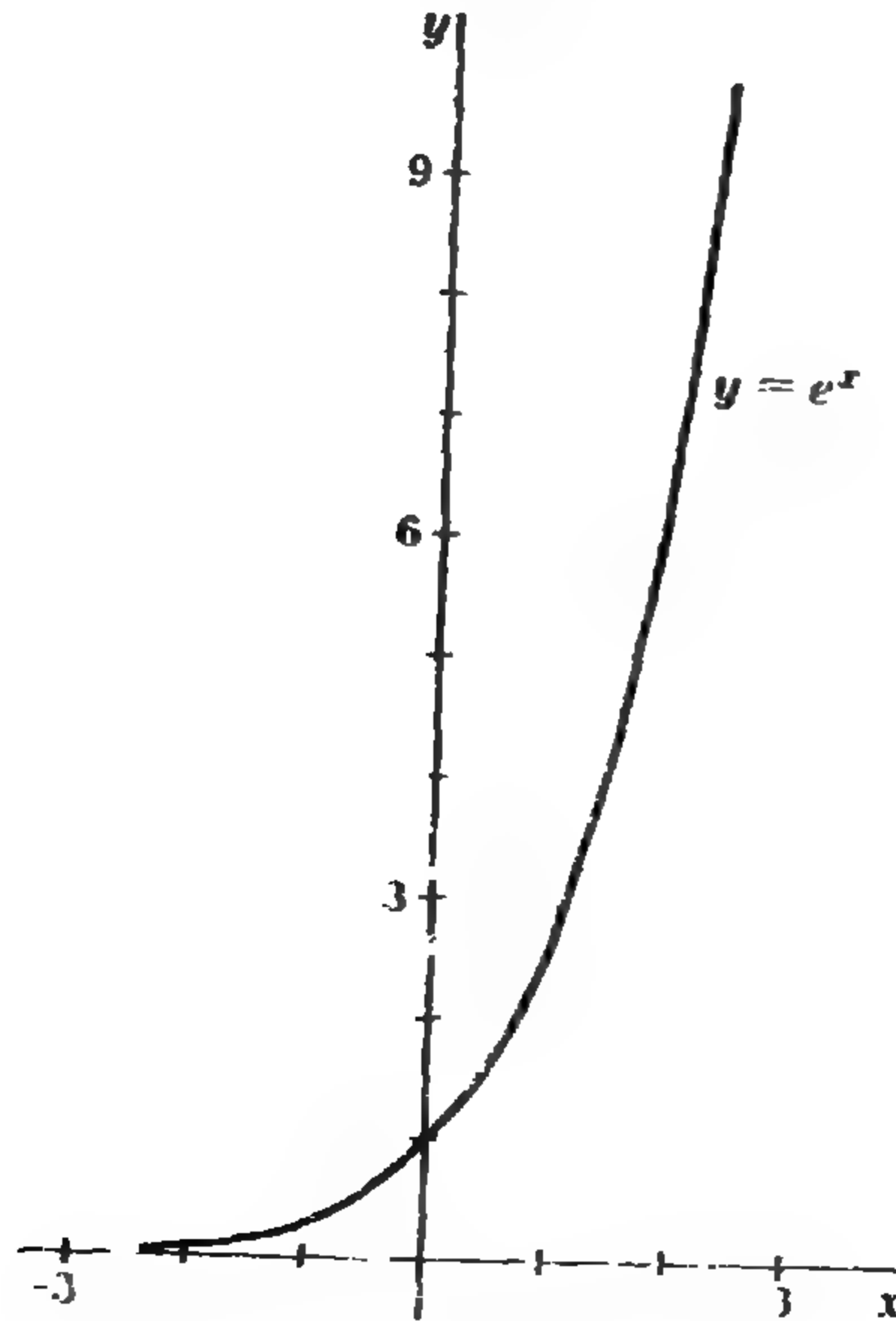
(5)

بما أن e^x هي دالة متزايدة ، النصف الأيمن لهذه المتباينة يتضمن أن $e^r < e^u$ وهذا بدوره ، لأن L أيضا متزايدة ، يتضمن أن

$$L(e^u) < r < u$$

بما أن r عدد كسري والتمهيدية قد برهنت للأسس الكسرية ، فإن $L(e^r) = r$ ، ومن ثم : $r < L(e^u)$. لكن هذا يناقض (5) ، وإذن $L(e^u)$ لا يمكن أن تكون أقل من u . برهان مماثل يبين أن $L(e^u)$ لا يمكن أن تكون أكبر من u . هذا يجعل $L(e^u) = u$ الاحتمال الوحيد ، وبذلك يكمل البرهان .

نستخدم هذه التمهيدية لإيجاد قيمة نهاية نحتاج إليها لإيجاد مشتقة e^x .



شكل ٧-٨

$$٧ - \{ \text{تمهيدية ١} \} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

البرهان . بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدالة L فوق الفترة التي طرفاها النقطتان h و 1 ، يكون

$$L(e^h) - L(1) = (e^h - 1)L'(z)$$

لقيمة ما z بين e^h و 1 . بما أن $L(e^h) = h$ بالتمهيدية ٧ - ٣ ، و $L(1) = 0$ ، وأيضا $L'(z) = 1/z$ ، من (٢) ، فهذا يختزل إلى $h = (e^h - 1)(1/z)$. من هذا ، يكون

$$(٦) \quad \frac{e^h - 1}{h} = z \quad \text{و} \quad e^h = 1 + hz$$

لأننا نهتم بقيم h القريبة من الصفر ، فليس بقيد حقيقى أن نفترض أن $h < 1$. إذا كانت $0 < h < 1$ ، فإن $e^0 < e^h < e$ ، بما أن z بين e^h و 1 فإن $1 < z < e^h < e$ ، ومن (٦) ، يكون

$$(٧) \quad 1 < \frac{e^h - 1}{h} = z < e^h = 1 + hz < 1 + he$$

إذا كانت $h < 0$ ، فإن $1 < z < e^h < e^0 = 1$ و $e^h < z < 1$ ، إذن $hz > 0$ ، لأن $h > 0$ ويكون

$$(٨) \quad 1 > z = \frac{e^h - 1}{h} > e^h = 1 + hz > 1 + h$$

تطبيق نظرية الحصر على (٧) و (٨) يبين أن $\lim_{h \rightarrow 0} [(e^h - 1)/h] = 1$.

مسائل :

١ - باستخدام جدول e^x الموجود فى التذييل B ، خطط الشكل البياني للدالة $y = e^x$.

٢ - إذا كانت $f(x) = L(x)/x$ ، فأوجد $f'(x)$.

٣ - حقق أن $L(4) \approx 1.39$ بتقريب المساحة تحت المنحنى $y = 1/x$ بين ١ و ٤ بقاعدة شبه المنحرف بفترات جزئية طولها 0.25 .

٤ - أثبت أن $e \approx 2.7$ بتقريب المساحة تحت المنحنى $y = 1/x$ بين ١ و 2.7 بقاعدة شبه المنحرف بفترات جزئية طولها 0.1 .

٥ - استخدم الشكل البياني لـ L لإيجاد المساحة تحت المنحنى $y = 1/x$ (أ) بين ١ و 7 ، (ب) بين 3 و 8 .

٦ - استخدم الشكل البياني لـ L لإيجاد العدد m الذى يجعل المساحة تحت المنحنى $y = 1/x$ بين m و 1 تساوى 1.5 .

٧ - أوجد شاهدا يدعم أن $\lim_{h \rightarrow 0} [(e^h - 1)/h] = 1$ بحساب $(e^h - 1)/h$ لقيم صغيرة متعددة لـ h موجبة وسالبة . (إرشاد : استخدم جدول e^x الموجودة فى التذييل B) .

٨ - من المعادلة (٦) ، $e = (1 + hz)^{1/h}$ ، حيث z بين e^h و 1 اذن لقيم h الصغيرة تكون $e \approx (1 + h)^{1/h}$ (لماذا ؟) . أوجد قيمة e بحساب $(1 + h)^{1/h}$ عندما $h = 1, 0.5, 0.1, 0.01$. يمكن استخدام اللوغاريتمات .

٩ - العدد e عرف بأنه العدد الذى يجعل $L(e) = 1$. ما هى خاصية L التى تؤكد أنه يوجد عدد واحد فقط هكذا ؟

١٠ - اثبت أن $L(at) = L(a) + L(t)$ لجميع $t > 0$ و $a > 0$ [ارشاد :

$$L(at) = \int_1^{at} \frac{dx}{x} = \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_a^{at} \frac{dx}{x}$$

أجر تغييرا للمتغير فى التكامل الثالث بوضع $y = x/a$) .
١١ - لماذا يكون الجزء الأول من برهان التمهيدية ٧ - ٣ ، الى (٤) ، ليس صحيحا لجميع قيم r الحقيقية ؟ لو كان صحيحا ، لامكن حذف باقى البرهان .

٧ - ٣

مشتقة e^x

بمعلومات التمهيدية ٧ - ٤ ، من السهل ايجاد مشتقة e^x .

$$De^x = e^x \quad ٧ - ٥$$

البرهان . لتكن $f(x) = e^x$ من تعريف المشتقة ، يكون

$$\begin{aligned} De^x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x(1) = e^x \end{aligned}$$

الدالة الأسية دالة مميزة ، مشتقتها هى نفسها . فى بند ٧ - ٦ سنرى ما إذا كان يوجد دوال أخرى بهذه الخاصية .

لايجاد مشتقة تعبير مثل e^{x^2+3x} ، نحتاج الى تعميم للقاعدة ٧ - ٥ الى الدوال التى على الصورة $e^{g(x)}$.

$$De^{g(x)} = e^{g(x)} g'(x) \quad ٧ - ٦ \quad \text{بشرط وجود } g'(x)$$

البرهان . كما نتوقع ، نعبر عن $e^{g(x)}$ كدالة تركيبية لدالتين ونستخدم قاعدة السلسلة . ضع : $z = g(x)$ و $f(z) = e^z$. فيكون

$$e^{g(x)} = f(g(x))$$

من القاعدة ٧ - ٥ ، يكون $f'(z) = e^z$ ، واذن بقاعدة السلسلة يكون

$$De^{g(x)} = D_x f(g(x)) = f'(z) g'(x) = e^z g'(x) = e^{g(x)} g'(x)$$

مثال ١ . أوجد De^{x^2+3x}

هنا $g(x) = x^2+3x$ وبالقاعدة ٧ - ٦ ، يكون

$$De^{x^2+3x} = e^{x^2+3x}D(x^2+3x) = e^{x^2+3x}(2x+3)$$

مثال ٢ . أوجد $Dx^2e^{\sqrt{x}}$

بما أن التعبير المطلوب اجراء تفاضله هو حاصل ضرب ، فنبداً بقاعدة حاصل الضرب ، ويكون

$$Dx^2e^{\sqrt{x}} = x^2 De^{\sqrt{x}} + 2xe^{\sqrt{x}}$$

لايجاد $De^{\sqrt{x}}$ ، نستخدم القاعدة ٧ - ٦ ونحصل على

$$Dx^2e^{\sqrt{x}} = x^2e^{\sqrt{x}}D\sqrt{x} + 2xe^{\sqrt{x}} = x^2e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2xe^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}(\frac{1}{2}x^{3/2} + 2x)$$

مثال ٣ . أوجد $\frac{d}{dx}(e^{-4x} + x^2)^3$

التعبير المطلوب اجراء تفاضله هو قوة . نبدأ بقاعدة القوة ثم نستخدم القاعدة ٧ - ٦ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^{-4x} + x^2)^3 &= 3(e^{-4x} + x^2)^2 \frac{d}{dx}(e^{-4x} + x^2) \\ &= 3(e^{-4x} + x^2)^2 [e^{-4x}(-4) + 2x] \\ &= 6(e^{-4x} + x^2)^2 (-2e^{-4x} + x).\end{aligned}$$

مثال ٤ . اذا كانت $g(x) = e^x / x$ ، فابعد اصفار $g'(x)$. باستخدام قاعدة خارج القسمة يكون

$$g'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = e^x \frac{x-1}{x^2}$$

بما أن e^x لا تكون أبدا صفرا ، فإن $g'(x) = 0$ فقط اذا كانت $(x-1)/x^2 = 0$ ، أى أن فقط اذا كانت $x = 1$. الشكل البياني للدالة g اذن له مماس أفقى عند النقطة $(1, e) \approx (1, 2.7)$.

لأن مشتقة التعبير المحتوى على $e^{u(x)}$ هي أيضا تحتوي على $e^{u(x)}$ ، فاننا نتوقع أن المعكوس التفاضلى للتعبير المحتوى على $e^{u(x)}$ أيضا يتضمن $e^{u(x)}$. القاعدة ٧ - ٦ تبين أن أى تعبير على الصورة $e^{u(x)}g'(x)$ سيكون لها $e^{u(x)}$ كمعكوس تفاضلى .

مثال ٥ . اجر التكامل $\int 3xe^{x^2} dx$

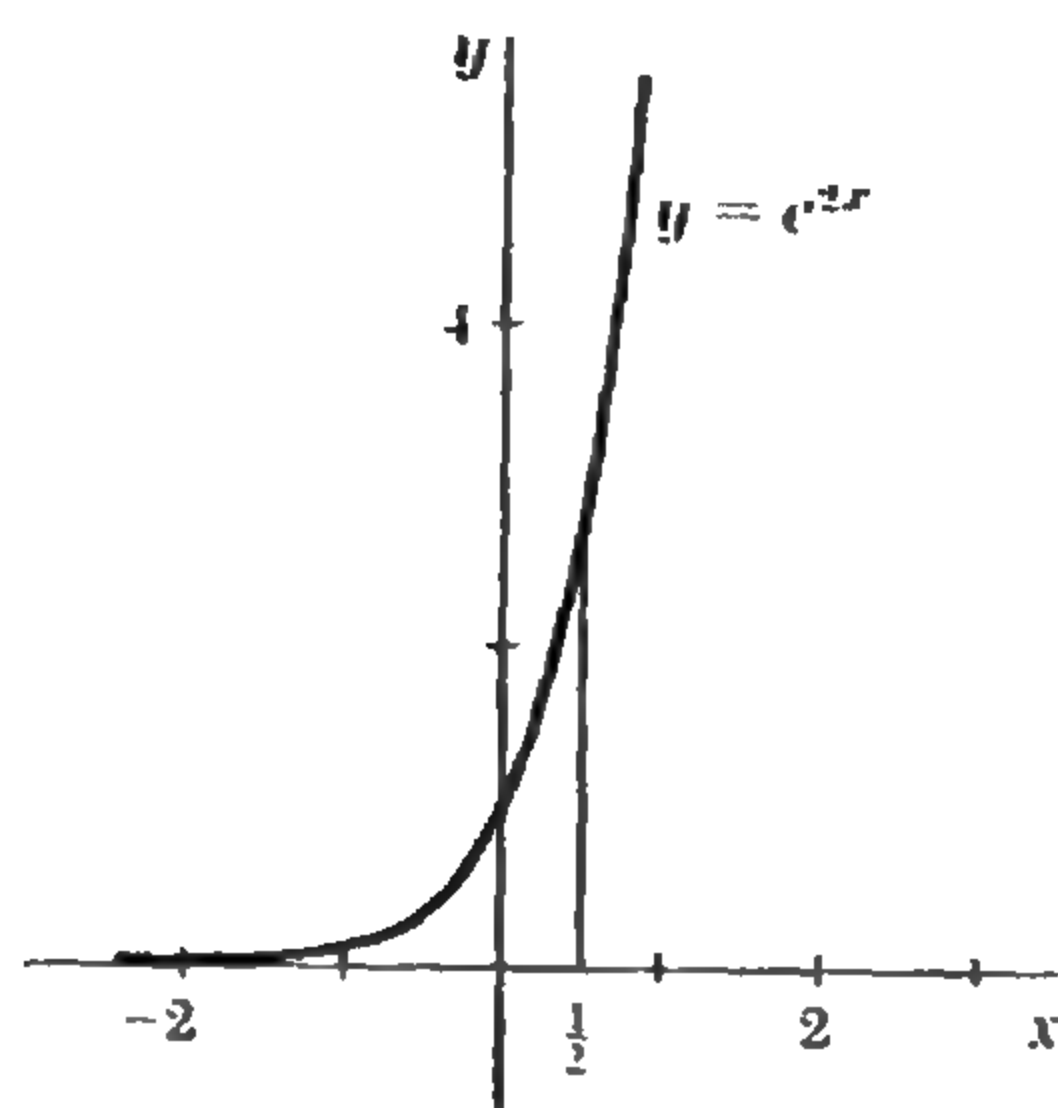
ماعدا لعامل ثابت ، الدالة المكاملة هي على الصورة $e^{u(x)}g'(x)$ ، حيث $g(x) = x^2$. هذا يوحي بأن نحاول e^{x^2} كتخمين أول لمعكوس تفاضلى . بمقارنة $\frac{d}{dx} e^{x^2} = 2xe^{x^2}$ بالدالة المكاملة ، نرى تعديل تخميننا الى $\frac{3}{2}e^{x^2}$ ، وهذا صحيح . لذلك $\int 3xe^{x^2} dx = \frac{3}{2}e^{x^2} + C$

مثال ٦ . أوجد المساحة تحت المنحنى $y = e^{2x}$ بين 1 و -2 (شكل ٧ - ٩) .

المساحة A تعطى بـ

$$A = \int_{-2}^{1/2} e^{2x} dx = \left. \frac{1}{2} e^{2x} \right|_{-2}^{1/2} = \frac{1}{2} (e - e^{-4})$$

$$\approx \frac{1}{2} (2.718 - 0.018) = 1.350$$



شكل ٧ - ٩

لقد استخدمنا الجدول الموجود في التذييل لإيجاد $e^{-4} \approx 0.018$

مثال ٧ . أوجد قيمة $\int_0^1 3e^{x^2} dx$

كل تخمين معقول لمعكوس تفاضلى لـ $3e^{x^2}$ يتضمن e^{x^2} لكن مشتقة هذه تعطى x غير مرغوب فيها . لأن $3e^{x^2}$ متصلة ، النظرية الأساسية للتكامل تؤكد وجود معكوس تفاضلى لكن لاتعد بأنه يمكن التعبير عنه فى صورة بسيطة . يمكن اثبات أن المعكوس التفاضلى لـ $3e^{x^2}$ لايمكن التعبير عنه بدلالة الدوال العادية . أفضل ما يمكننا عمله هو إيجاد تقريب للتكامل المعين .

بما أن e^x قابلة للتفاضل ، فهي متصلة فى كل مكان . أعم من ذلك ، $a^{g(x)}$ و $e^{g(x)}$ متصلتان طالما كانت $g(x)$ متصلة (المسألة ٨٩) . فمثلا ، $e^{1/(x+1)}$ متصلة عند كل $x = -1$.

من التمهيدية ٧ - ٣ مع $L(a)$ مكان u ، يكون $L(e^{L(a)}) = L(a)$ ، ولأن L هى دالة متزايدة ، فيحتم أن يكون $t_1 = t_2$ إذا ما كانت $L(t_1) = L(t_2)$. واذن

$$e^{L(a)} = a$$

من ثم $a^x = e^{xL(a)}$ ، ومرة أخرى بالتمهيدية ٧ - ٣ يكون

$$(١) \quad L(a^x) = L(e^{xL(a)}) = xL(a)$$

هذا هو تعميم للتمهيدية ٧ - ٣ ، يختزل اليها عندما $a = e$.

٧ - ٧ نظرية . إذا كانت $a > 1$ ، فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$.

البرهان . النهاية الأولى تقول أن المنحنى $y = a^x$ في آخر الأمر يقطع ويظل فوق كل خط مستقيم أفقى $y = M$. لبرهنة ذلك ، يجب اثبات أنه إذا أعطينا أى عدد M فانه يوجد عدد N بحيث أن $a^x > M$ لكل $x > N$. لتكن M أى عدد موجب . فيكون ، باستخدام (١) ، $a^x > M$ اذا واذا كان

$$(٢) \quad L(a^x) = xL(a) > L(M)$$

[لماذا $a^x > M$ تتضمن $L(a^x) > L(M)$ ؟] بما أن $a > 1$ ، فان $L(a) > 0$ والعبارة (٢) تكون صحيحة اذا واذا فقط كان $x > L(M) / L(a)$. لذلك يمكننا اختيار $N = L(M) / L(a)$.
النهاية الثانية تتبع بسهولة من الأولى (المسألة ٨٧) . وهى تبين أن المنحنى $y = a^x$ يكون مقاربا للمحور السيني السالب .

الدالة a^x ، حيث $a \neq e$ ، أقل أهمية من e^x مع أننا يمكننا ايجاد مشتقتها الآن ، الا أننا سنتظر الى حين الانتهاء من مناقشة اللوغاريتمات .

مسائل

أوجد مشتقة ما يأتى :

١ -	e^{-3x}	٢ -	e^{3x^2-1}	٣ -	e^{x^2+1}
٤ -	$\frac{1}{2}(e^{3x} + e^{-3x})$	٥ -	$\frac{e}{2}(e^{x/r} - e^{-x/r})$	٦ -	e^{x^2+x+1}
٧ -	t^2e^{-t}	٨ -	$xe^{x/2}$	٩ -	$(3-4x)e^{-3x}$
١٠ -	$(7x^2 + 5x - 2)e^{-2x+3}$	١١ -	z^2e^{-uz}	١٢ -	$xe^x - 5e^{2x} - 7$
١٣ -	$1/e^{x/4}$	١٤ -	e^re^{9x}	١٥ -	$1/e^{2x-7}$
١٦ -	be^{ux}	١٧ -	$(2 + e^x)^2$	١٨ -	$-7(u + e^{2u})^3$
١٩ -	$e^{-3x}/(x-1)$	٢٠ -	$x/5e^{x/3}$	٢١ -	$x(e^x - e^{-x})^2$
٢٢ -	$e^{ux}(\sin bx + \cos bx)$	٢٣ -	$e^{1/x}$	٢٤ -	$\frac{cx-1}{c^2}e^{cx}$
٢٥ -	$\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$	٢٦ -	$4\sqrt{e^x}$	٢٧ -	$\sqrt{3(e^x + e^{-x})}$
٢٨ -	$e^{-ux}\sqrt{e^{bx}+2}$	٢٩ -	$e^u/\sqrt{e^{2u}-1}$	٣٠ -	$e^{\sin x}$
٣١ -	$e^{\sin^{-1}x}$	٣٢ -	$\tan^{-1}e^x$	٣٣ -	$e^{x^{-2}}$
٣٤ -	$x^2e^{3x} \sin 2x$				

أوجد dy/dx لما يأتى :

$$٣٥ - e^u = \sin x \quad ٣٦ - y + e^u = x \quad ٣٧ - e^uy^2 = x^2 + 2x \quad ٣٨ - e^{3x} = \cos(x+2y)$$

للدوال الآتية ، أوجد تقريبا عشريا للمشتقة $f'(a)$ عند القيمة المعطاه a :

$$٣٩ - f(x) = \frac{1}{2}(e^{x/2} + e^{-x/2}), a = 3 \quad ٤٠ - f(x) = e^{x^2}, a = 0.9 \quad ٤١ - f(x) = (x/2)e^{2x}, a = 1.7$$

- ٤٢ - إذا كانت $y = e^{2x-1}/e^{2x+1}$ ، فاثبت أن $y' = 1 - y^2$.
- ٤٣ - أوجد القيمة العظمى للدالة $f(x) = 2x + e^{-2x}$ في الفترة $[-1, 1]$.
- ٤٤ - تحقق أن e^{2x} و e^{-3x} هما حلان للمعادلة التفاضلية $d^2y/dx^2 + dy/dx - 6y = 0$. أثبت أن $c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$ لأي ثابتين c_1 و c_2 ، هو أيضا حل .
- ٤٥ - تحقق أن e^x و e^{-x} هما حلان للمعادلة التفاضلية $y'' = y$ أوجد حلا يمر بالنقطة $(0, 3)$ بميل قدرة 1 هناك . (ارشاد : انظر المسألة ٤٤)
- ٤٦ - اختر الثابت m بحيث أن $s = e^{mt}$ يكون حلا للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2s}{dt^2} - 5 \frac{ds}{dt} - 6s = 0$$

- ٤٧ - إذا كانت $x = e^{-t} \sin t$ ، فاثبت أن $d^4x/dt^4 + 4x = 0$ لجميع t . أوجد حلا آخر لهذه المعادلة التفاضلية .

خطط الشكل البياني للدوال الآتية وأوجد نقط الانقلاب ، أن وجدت . (يمكنك افتراض أن

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x/x^n) = \infty$$

$$\begin{aligned} \text{٤٨} \quad f(x) = e^{-x} & \quad \text{٤٩} \quad f(x) = e^{1/x} & \text{٥٠} \quad f(x) = xe^x & \text{٥١} \quad f(x) = e^{-x}/x \\ \text{٥٢} \quad g(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \text{٥٣} \quad g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \text{٥٤} \quad f(x) = x^2e^x \end{aligned}$$

- ٥٥ - أوجد الأجزاء المقطوعة ومكان حدوث النهايات القصوى الموضعية للمنحنى : $y = e^{-x} \sin x$. أثبت أن هذا المنحنى يمس المنحنيين $y = -e^{-x}$ و $y = e^{-x}$ كلما كان له نقطة مشتركة مع أى منهما ، ارسم الشكلين البيانيين $y = -e^{-x}$ و $y = e^{-x}$ على نفس المحورين . واستخدم المعلومات السابقة لتخطيط المنحنى $y = e^{-x} \sin x$ أوجد الانقلاب لهذا المنحنى .

اجر التكاملات الآتية :

$$\begin{aligned} \text{٥٦} \quad \int 2e^{3x+2} dx & \quad \text{٥٧} \quad \int e^{ax} dx & \text{٥٨} \quad \int ex dx \\ \text{٥٩} \quad \int e^{-t/2} dt & \quad \text{٦٠} \quad \int_0^c e^{ax+b} dx & \text{٦١} \quad \int e^{\sin x} \cos x dx \\ \text{٦٢} \quad \int (e^x + e^{-x})^2 dx & \quad \text{٦٣} \quad \int e^s \cos e^s ds & \text{٦٤} \quad \int \frac{x^2 dx}{e^{x^3}} \\ \text{٦٥} \quad \int \frac{e^z - 2}{e^z} dz & \quad \text{٦٦} \quad \int \sqrt{e^x} dx & \text{٦٧} \quad \int \frac{3dx}{e^{4x+1}} \\ \text{٦٨} \quad \int \frac{e^z}{(e^z + 3)^2} dz & \quad \text{٦٩} \quad \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx & \text{٧٠} \quad \int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx \\ \text{٧١} \quad \int (x + 3)e^{x^2+6x} dx & \end{aligned}$$

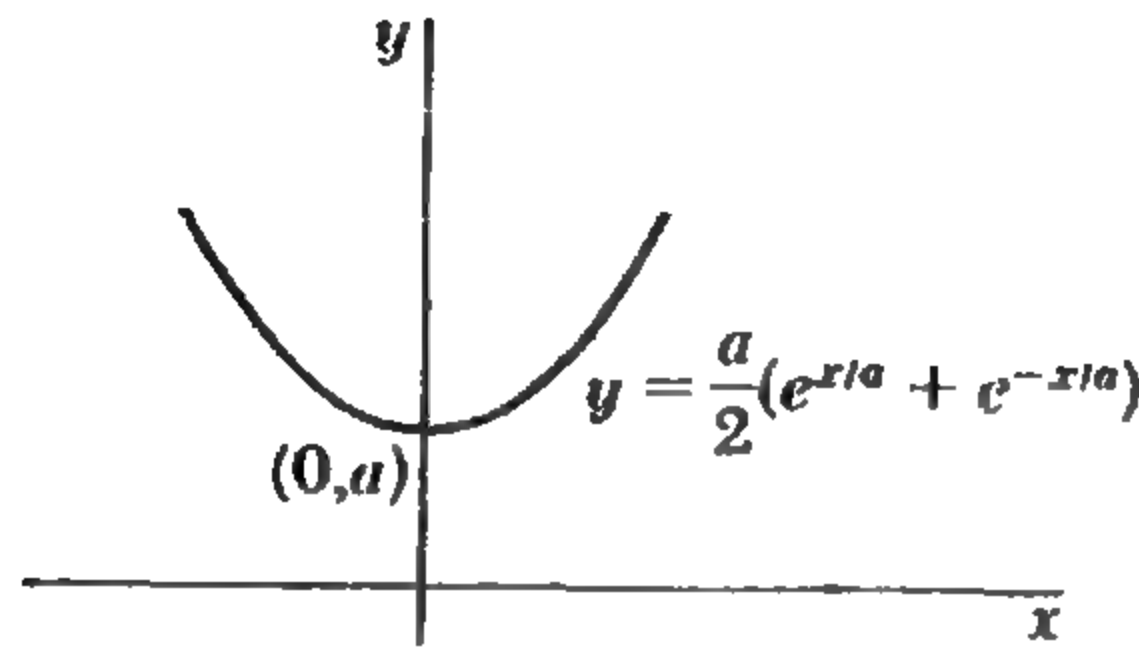
أوجد تقريباً عشرياً للتكاملات الآتية :

$$\int_1^2 2e^{-2x} dx = 72 \quad - \int_0^3 e^{u-2} du = 73$$

أوجد مساحة المنطقة تحت المنحنيين الآتين بين العددين المعطيين :

$$y = e^{x^2}; -2, 4 = 74 \quad y = xe^{-x^2}; 0, 2 = 75$$

٧٦- عندما تعلق سلسلة من طرفيها تأخذ شكل منحنى يسمى الكتينة . معادلتها عندما يوضع المحوران كما فى الشكل ٧- ١٠ هى $y = (a/2)(e^{x/a} + e^{-x/a})$ حيث الثابت $a > 0$ هو بعد أدنى نقطة للسلسلة فوق المحور السينى . اثبت أن مساحة المنطقة تحت الكتينة بين a و $-a$ هى $a^2(e - e^{-1})$.



شكل ٧- ١٠
الكتينة

٧٧- رسم المماس عند نقطة P على الكتينة فى المسألة ٧٦ . لتكن A مسقط النقطة P على المحور السينى ، ولتكن T مسقط A على المماس . اثبت أن المسافة $|AT|$ هى نفس المقدار لجميع اختيارات P .

٧٨- المنطقة المحدودة بالمنحنى $y = be^{ax}$ والمحورين السينى والصادى والخط المستقيم $x = c$ ، حيث $c > 0$ ، دارت حول المحور السينى . أوجد حجم الجسم الناشء بهذه الكيفية .

٧٩- حل المعادلة التفاضلية $e^{x+y} dy/dx + 1 = 0$.

٨٠- أوجد مساحة أكبر مثلث يقع فى الربع الأول ومتكون من المحور السينى والمحور الصادى ومماس للمنحنى $y = e^{-x}$.

٨١- اثبت أن المعادلة $x + e^x = 0$ لها جذر واحد ، وواحد فقط . أوجد الجذر الى أقرب 0.1 .
(ارشاد : خذ فى الاعتبار الشكل البيانى لـ $y = x + e^x$)

٨٢- أوجد $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cos x$ ٨٣- إذا كانت $f(t) = \int_0^t e^{x^2} dx$ فأوجد $f'(2)$

٨٤- المنحنى الطبيعى للخطأ

$$(3) \quad y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

يستخدم بكثرة فى الاحتمالات والاحصاء . خطط المنحنى وأوجد نقط الانقلاب له . رغم أن المعكوس التفاضلى لـ $e^{-x^2/2}$ لايمكن التعبير عنه بدلالة دوال معروفة لنا ، إلا أنه يمكن

إثبات أن المساحة تحت المنحنى (٣) بين 4 و 0 هي 0.5000 ، صحيحة الى أربعة أرقام عشرية . قرب المساحة تحت المنحنى $y = e^{-x^2/2}$ بين 4 و 0 بقاعدة شبه المنحرف ويفترات جزئية طولها 0.5 ، واستخدم هذا لإيجاد تقريب لـ π .

٨٥ - خطط المنحنى $y = e^{-x^2}$. أوجد مساحة أكبر مستطيل أحد جوانبه على المحور السيني ، وجانب آخر على الخط المستقيم $x = -\frac{1}{2}$ ، ورأسه المقابل لنقطة تقاطعهما على المنحنى .

٨٦ - أوجد تعبيراً لـ $D^n(x e^x)$. (ارشاد : من المشتقات الأربع أو الخمس الأولى خمن المشتقة النونية . أثبت تخمينك بالاستنتاج الرياضي) .

٨٧ - أثبت أنه إذا كانت $a > 1$ ، فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ (ارشاد : ضع $x = -z$) .

٨٨ - أثبت أنه إذا كانت $0 < a < 1$ ، فإن $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$ (ارشاد : $a = 1 / (1/a)$)

٨٩* - (أ) أثبت أن $e^{g(x)}$ تكون متصلة أينما كانت $g(x)$ متصلة . (ارشاد : ضع $f(z) = e^z$ ، فيكون $(e^{g(x)}) = f(g(x))$. (ب) أثبت أن $a^{g(x)}$ تكون متصلة أينما كانت $g(x)$ متصلة . (ارشاد $a = e^{L(a)}$)

٧ - ٤

اللوغاريتمات

العدد يمكن التعبير عنه بطرق كثيرة ، فمثلاً ، 72 يمكن كتابتها 144 و $(3)(24)$ و $50 + 22$. صورة أخرى هي قوة للعدد 10 :

$$(١) \quad 72 = 10^{1.8573}$$

الأس 1.8573 الذي يجب وضعه فوق 10 ليعطى 72 يسمى لوغاريتم العدد 72 للأساس 10 ويرمز له بالرمز $\log_{10} 72$ بما أن $10^{1.8573}$ لايساوى 72 بالضبط ، فالأصح كتابة

$$72 \approx 10^{1.8573} \text{ and } 1.8573 \approx \log_{10} 72$$

بوجه عام ، إذا عبرنا عن عدد t كقوة للعدد 10 ، فإن الأس فوق 10 يسمى لوغاريتم العدد t للأساس 10 ويرمز له بالرمز $\log_{10} t$. أى أن ،

$$t = 10^{\log_{10} t}$$

للتبسيط ، عادة سنحذف دليل الأساس 10 ونكتب $\log t$ لـ $\log_{10} t$ فمثلاً ،

$$1000 = 10^3 \quad \text{لأن} \quad 3 = \log 1000$$

$$236 \approx 10^{2.3729} \quad \text{لأن} \quad 2.3729 \approx \log 236$$

$$6.2 \approx 10^{0.7924} \quad \text{لأن} \quad 0.7924 \approx \log 6.2$$

$$0.1394 \approx 10^{-0.8557} \quad \text{لأن} \quad -0.8557 \approx \log 0.1394$$

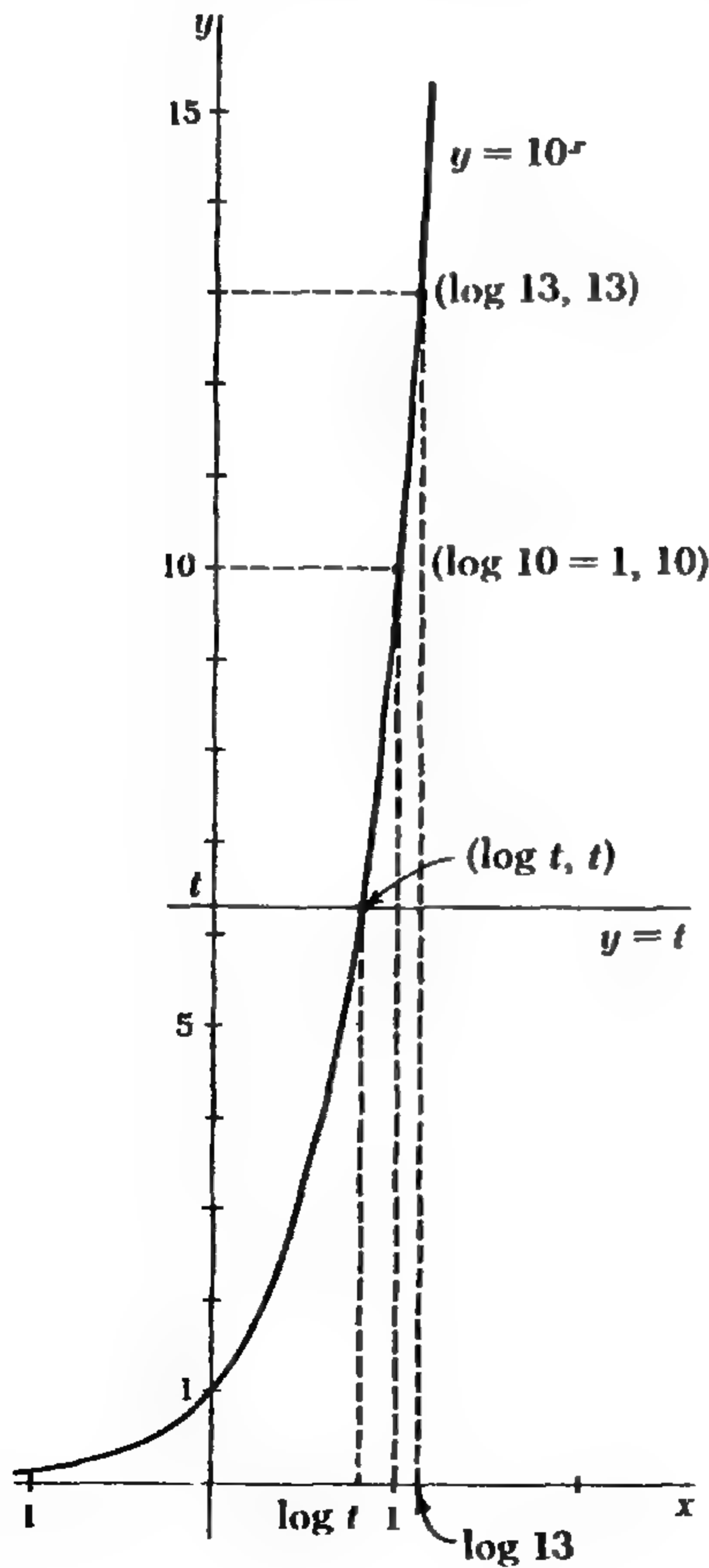
٧-٨ تعريف . لكل $t > 0$ ، يكون $\log t$ (أى $\log_{10} t$) العدد حيث $10^{\log t} = t$.

بما أن لاقوة للعدد 10 يمكن أن تكون صفرا أو سالبة ، فهذه الأعداد ليس لها لوغاريتمات .
أيضا ، إذا كانت $\log t \geq 0$ ، فإن

$$t = 10^{\log t} \geq 10^0 = 1$$

وبالعكس . بالمثل ، $\log t < 0$ إذا وإذا فقط كان $0 < t < 1$.

قبل أن نستطيع الحديث عن $\log t$ يجب اثبات أن العدد الممثل بالرمز موجود ، أى أن ، توجد قوة ما للعدد 10 تساوى t . فى معظم الأمثلة السابقة لدينا فقط تقريب للقوة . الشكل البياني لـ $y = 10^x$ موضح فى الشكل ٧-١١ . لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} 10^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} 10^x = \infty$ بالنظرية ٧-٧ ، فإنه توجد نقط على الشكل البياني أعلى وأسفل أى خط مستقيم أفقى معطى $y = t$ واقع أعلى المحور السينى . الدالة $f(x) = 10^x$ متصلة فى أى مكان (الجزء (ب) من المسألة ٨٩ ، بيند ٧-٣) . اذن نظرية القيمة الوسط ٥-٦ تؤكد أن الخط المستقيم $y = t$ يقطع الشكل البياني ، ولأن 10^x دالة



شكل ٧-١١

$\log t$ هو الاحداثى السينى لتقاطع الخط المستقيم $y = t$ مع المنحنى $y = 10^x$.

متزايدة يقطعه مرة واحدة فقط . أنه الاحداثى السينى لنقطة التقاطع هذه ، ما هو $\log t$ ، لأن $10^x = t$. لذلك $\log t$ موجود ووحيد . كل عدد موجب له لوغاريتم واحد فقط . الشكل البياني يوضح ما سبق أن برهنناه وهو أن $\log t \geq 0$ لـ $t \geq 1$ وأن $\log t < 0$ لـ $0 < t < 1$. أيضا ، إذا كانت $t \leq 0$ ، فإن الخط المستقيم $y = t$ لا يقطع الشكل البياني ، وبالتالي الصفر والاعداد السالبة لا يمكن أن يكون لها لوغاريتمات .

يجب على القارئ أن يتذكر أن اللوغاريتمات هي أعداد وأنها تظهر كأسس . مثل الأعداد الأخرى ، يمكن جمعها بعضها على بعض ، ويمكن ضربها فى أعداد ، أوحتى ، إذا كانت موجبة ، فهي ذاتها لها لوغاريتمات .

مثال ١ . حل المعادلة $\log (x + 7) = 2$

ارفع طرفى المعادلة الى قوة للعدد 10 ، فيكون

$$10^{\log (x+7)} = 10^{-2}$$

من تعريف اللوغاريتم ، الطرف الأيسر هو $x + 7$. ومن ثم يكون $x + 7 = 10^{-2}$ ومنها

$$x = -7 + 10^{-2} = -6.99$$

فائدة اللوغاريتمات فى الحساب ترجع الى ثلاث خواص :

٧ - ٩ نظرية . لجميع u و v الموجبة ، يكون

$$\log (uv) = \log u + \log v \quad (\text{أولا})$$

$$\log \frac{u}{v} = \log u - \log v \quad (\text{ثانيا})$$

$$\log (u^r) = r \log u \quad (\text{ثالثا})$$

البرهان . براهين هذه الخواص سهلة . لاثبات (أولا) ، لدينا من التعريف ٧ - ٨

$$u = 10^{\log u} \quad \text{and} \quad v = 10^{\log v} \quad (٢)$$

واذن

$$uv = (10^{\log u})(10^{\log v}) = 10^{\log u + \log v}$$

ومن ناحية أخرى ، بالتعريف ، $uv = 10^{\log (uv)}$ إذا كانت قوتان لنفس الأساس متساويتين ، فإن أساهما يجب أن يكونا متساويين (المسألة ٢٨ ، بيند ٧ - ١) بناء على ذلك ، يكون

$$\log (uv) = \log u + \log v$$

برهان الخاصية (ثانيا) مماثل . لاثبات (ثالثا) ، لدينا من (٢)

$$u^r = (10^{\log u})^r = 10^{r \log u}$$

لكن بالتعريف $u^r = 10^{\log (u^r)}$ اذن $\log (u^r) = r \log u$.

من الآن فصاعدا سنحذف الأقواس فى التعبيرات مثل $\log (u^r)$. ونكتب $\log u^r$.

توجد فقط اعداد قليلة ، لوغاريتماتها يمكن ايجادها مباشرة من التعريف . فى الفصل السادس عشر سنتعلم كيف نوجد تقريبات كسرية ، لآى درجة نريدها من الدقة ، للوغاريتم أى عدد . يوجد جدول قصير للوغاريتمات للأساس 10 فى التذييل B. الجدول يحتوى على تقريبات صحيحة الى أربعة أرقام عشرية ، للوغاريتمات جميع الأعداد من 1.00 الى 9.99 على فترات قدرها 0.01 .

اللوغاريتمات اكتشفت بواسطة جون نابيير (١٥٥٠ - ١٦١٧) الاسكتلندى ، وقد رحب بها كأداة الحاجة اليها ماسة فى الحسابات الفلكية . اليوم الآلات الحاسبة تقوم بالحسابات الروتينية بكفاءة أكثر ، لكن اللوغاريتمات لاتزال تستخدم فى إيجاد القوى والجذور وحل المعادلات الأسية .

مثال ٢ . حل المعادلة $4^z = 72$

بأخذ لوغاريتم الطرفين ، نحصل على المعادلة المكافئة

$$\log 4^z = \log 72,$$

$$z \log 4 = \log 72.$$

أو

اذن

$$(٣) \quad z = \frac{\log 72}{\log 4} = \frac{1.8573}{0.6021} = 3.0847 \quad \bullet \text{ (على وجه التقريب)}$$

لاحظ أن هذه المعادلة تعطى z وليس $\log z$. خارج القسمة فى (٣) يمكن إيجاد قيمته بأى طريقة ملائمة . بوجه خاص ، يمكن استخدام اللوغاريتمات ، لكن هذا ليس ضروريا .

العدد 10 ليس حيويا فى تعريف اللوغاريتم . لا فى التعريف ولا فى براهين النظرية ٧ - ٩ استخدمت أى خواص خاصة بالعدد 10 . فى مثال ٢ أوجدنا z بحيث أن

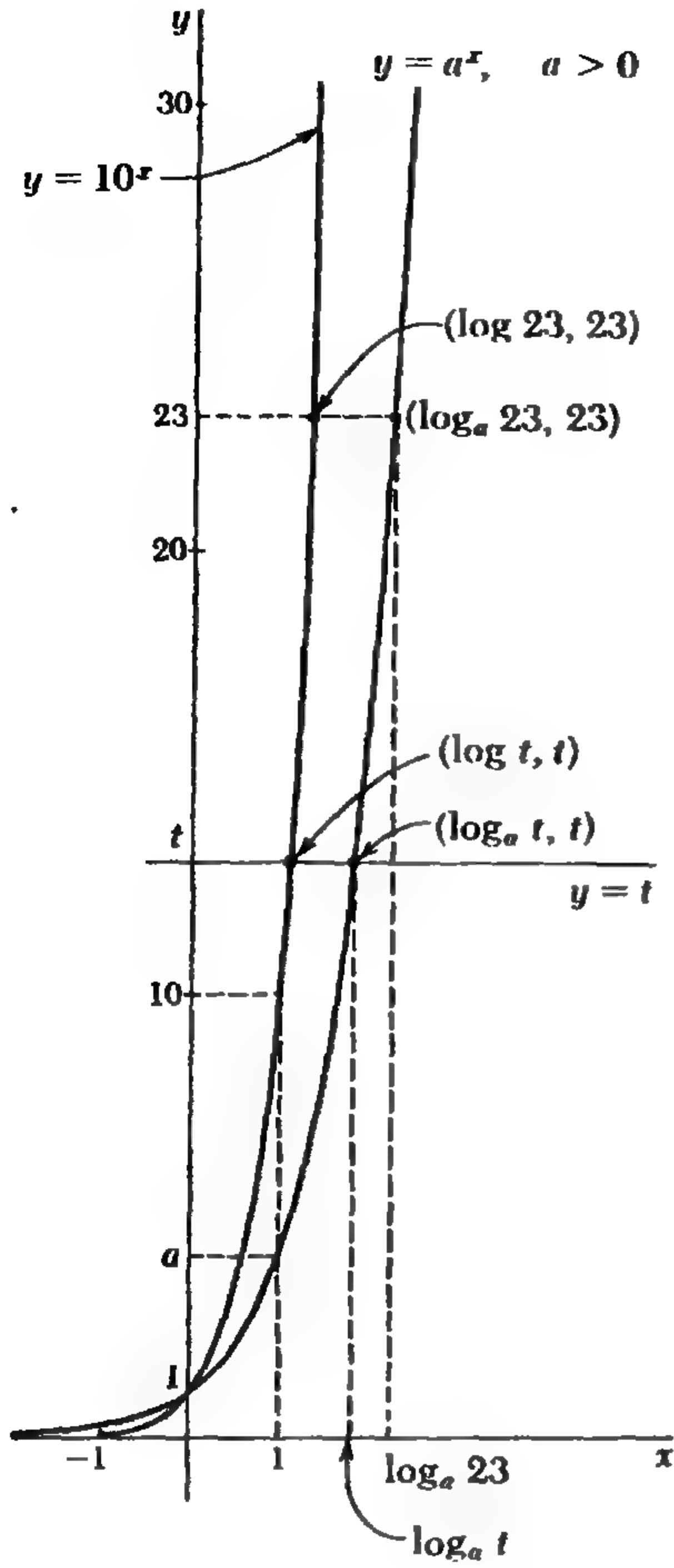
$$(٤) \quad 4^z = 72$$

هذه الـ z لها مطلب عادل بأن تسمى « لوغاريتم 72 » . لكى نميز بين الاثنين ، نكتب $z = \log_4 72$ ونسمى z لوغاريتم العدد 72 للأساس 4 . وإذن $\log_4 72 = 3.0847$ بينما $\log_{10} 72 = \log 72 = 1.8573$ من (١) .

أى عدد موجب a غير الـ 1 ، سواء كان عدداً صحيحاً أو لم يكن ، يمكن أن يلعب دور العدد 10 فى تعريف اللوغاريتم . العدد x حيث $a^x = t$ يسمى لوغاريتم العدد t للأساس a ويرمز له بالرمز $\log_a t$. أى أن

$$a^{\log_a t} = t$$

• الكتابة الدقيقة هى $\log 72 \approx 1.8573$ and $\log 4 \approx 0.6021$ لكن من المعتاد استخدام علامة التساوى مع مفهوية أن الأرقام العشرية هى فقط تقريبات للوغاريتمات .



شكل ١٢-٧
 $\log_a t$ هو الاحداثى السينى لتقاطع الخط المستقيم $y = t$ مع المنحنى $y = a^x$.

البرهان على أنه يوجد لكل $t > 0$ عدد x بحيث أن $a^x = t$ هو نفسه الذى أعطى سابقا فى حالة $a = 10$. الدالة a^x ، حيث $a > 1$ ، متزايدة ومتصلة فى كل مكان (الجزء (ب) من المسألة ٨٩، بيند ٧-٣)، وبالنظرية ٧-٧ $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ ومن ثم كل خط مستقيم أفقى $y = t$ يقع فوق المحور السينى يجب أن يقطع المنحنى $y = a^x$ مرة واحدة (شكل ١٢-٧). هو الاحداثى x لنقطة التقاطع ما يسمى $\log t$ اذا كانت $0 < a < 1$ فإن a^x تكون متناقصة، لكن رغما عن ذلك، فإن الخط المستقيم $y = t$ يقطع المنحنى $y = a^x$ ، وإذن فى هذه الحالة أيضا $\log t$ يوجد.

٧-١٠ تعريف. ليكن a أى عدد موجب غير الـ ١. لكل $t > 0$ يكون $\log_a t$ ذلك العدد الذى يجعل

$$a^{\log_a t} = t \quad \text{فمثلا}$$

$$5^2 = 25 \quad \text{لأن} \quad \log_5 25 = 2$$

$$4^{-3} = \frac{1}{64} \quad \text{لأن} \quad \log_4 \frac{1}{64} = -3$$

$$8^{1/3} = 2 \quad \text{لأن} \quad \log_8 2 = \frac{1}{3}$$

$$23.3^{1.3583} \approx 72 \quad \text{لأن} \quad \log_{23.3} 72 \approx 1.3583$$

أيضا لأي أساس a ، يكون

$$a^0 = 1 \quad \text{لأن} \quad \log_a 1 = 0 \quad \text{١١ - ٧}$$

ويكون

$$a^1 = a \quad \text{لأن} \quad \log_a a = 1 \quad \text{١٢ - ٧}$$

الشكل ٧ - ١٢ يوضح أنه إذا كانت $a > 1$ ، فإن $\log_a t < 0$ لجميع $0 < t < 1$ أيضا يوضح أن الأعداد السالبة والصفر ليس لها لوغاريتمات .

خواص اللوغاريتمات في النظرية ٧ - ٩ صحيحة للوغاريتمات لأي أساس ، البرهان هو نفسه المعطى هناك لكن بوضع a مكان 10 . من الواضح أن $\log_a b = \log_a c$ إذا كانت $b = c$. العكس ، ونترك برهانه للقارئ ، (المسألة ١٠٥) ، كثيرا ما يستخدم .

$$\text{١٣ - ٧} \quad \text{إذا كان} \quad \log_a b = \log_a c \quad \text{فإن} \quad b = c .$$

توجد صيغة بسيطة تعبر عن لوغاريتم عدد لأساس ما بدلالة اللوغاريتم لأساس آخر . ليكن a و b الأساسين بالتعريف

$$a^{\log_a t} = t$$

خذ لوغاريتم الطرفين للأساس b ، فيكون

$$\log_b a^{\log_a t} = \log_b t$$

واستخدم النظرية ٧ - ٩ (ثالثا) لتحصل على

$$(\log_a t)(\log_b a) = \log_b t$$

هذا يعطى

$$\log_a t = \frac{1}{\log_b a} \log_b t \quad \text{١٤ - ٧}$$

لأن العدد $1 / (\log_b a)$. هذه القاعدة لتغيير الأساس يعتمد فقط على الأساسين a و b وليس على t ، فجميع المدخلات في جدول اللوغاريتمات للأساس a يمكن إيجادها بضرب المدخلات المناظرة في جدول اللوغاريتمات للأساس b في العامل الثابت $1 / (\log_b a)$. فمثلا ، إذا كان لدينا جدول لوغاريتمات للأساس 10 ونريد تكوين جدول لوغاريتمات للأساس 4 . كل ما نحتاج الى إجرائه هو ضرب كل مدخل في جدول الأساس 10 في العدد $1.6608 \approx 1 / (\log_{10} 4)$ ، لأن

$$\log_4 t = \frac{1}{\log_{10} 4} \log_{10} t \approx 1.6608 \log_{10} t$$

رغم أن أي عدد موجب ماعدا الـ 1 يمكن أن يخدم كأساس لنظام لوغاريتمى ، لكن عمليا e و 10 فقط يستخدمان . لأن 10 هو الأساس لنظامنا العددي ، اللوغاريتمات للأساس 10 هي الأكثر

ملاءمة للحساب ، لكن في تطبيقات حساب التفاضل والتكامل التي تحتوي الدالة اللوغاريتمية $f(x) = \log_a x$ ، التعبير للمشتقة يكون الأبسط اذا اختير الأساس a ليكون e . لهذا السبب ، تستخدم اللوغاريتمات للأساس e في الرياضيات والعلوم .

اللوغاريتمات للأساس 10 تسمى اللوغاريتمات العادية أما تلك للأساس e فتسمى اللوغاريتمات الطبيعية . جدول قصير للوغاريتمات الطبيعية معطى في التذييل B . فمثلا ، من هذا الجدول ، $\log_e 9.6 \approx 2.2618$ و $\log_e 0.3 \approx -1.2040$ مخالفا لجدول اللوغاريتمات العادية جدول اللوغاريتمات الطبيعية يدون اللوغاريتم بالكامل ، المميز وجميعه . في الفصل السادس عشر سنتعلم كيف تحسب اللوغاريتمات الطبيعية . حسابها أسهل من حساب اللوغاريتمات العادية ، أليس هذا غريبا ؟ جداول اللوغاريتمات العادية تكون بعمل جدول اللوغاريتمات الطبيعية أولا . هذه تحول بعدئذ الى لوغاريتمات عادية بضرب كل مدخل في العامل $(1 / \log_e 10) \approx 0.43429$ ، وذلك وفقا للقاعدة ٧ - ١٤ لتغيير الأساس :

$$\log t = \frac{1}{\log_e 10} \log_e t \approx 0.43429 \log_e t$$

مثال ٣ . حل المعادلة $\log_e (x - 10) = 2t + c$ بالنسبة الى x . ارفع الطرفين الى قوة للعدد e ، فيكون

$$e^{\log_e (x-10)} = e^{2t+c}$$

بالتعريف $e^{\log_e (x-10)} = x - 10$ ، اذن $x - 10 = e^{2t+c}$ ومنها

$$x = 10 + e^{2t+c} = 10 + e^c e^{2t}$$

مسائل

أوجد تقريبا عشريا لما يأتي (للأعداد بأرقام معنوية أكثر من تلك التي في جدولك ، استخدم أقرب عدد مدخل في الجدول)

$$\log 42.5 \quad - ١ \quad \log 0.2568 \quad - ٢ \quad \log 0.00297 \quad - ٣ \quad \log \log 213 \quad - ٤$$

أوجد x مستخدما أقرب عدد مدخل في الجدول ، اذا كان :

$$\begin{aligned} \log x = 0.8913 \quad - ٥ \quad \log x = 1.5652 \quad - ٦ \quad \log x = 2.0012 \quad - ٧ \quad \log x = 9.4120 - 10 \quad - ٨ \\ \log x = -1.7878 \quad - ٩ \end{aligned}$$

استخدم اللوغاريتمات لإيجاد القيمة التقريبية لما يأتي :

$$\begin{aligned} 1.06^{-22} \quad - ١٣ \quad 18^{3/4} \quad - ١٢ \quad 0.04674^{1/2} \quad - ١١ \quad 81.3(0.1117/66.8) \quad - ١٠ \\ 10^{\log 17.6} \quad - ١٧ \quad 2^\pi \quad - ١٦ \quad 159^{0.806} \quad - ١٥ \quad 12^{1.6} \sqrt{23.44} \quad - ١٤ \end{aligned}$$

١٨ - أوجد نصف قطر الكرة التي حجمها 136 cu in

- ١٩ - الزمن الدورى للبندول هو الزمن الذى يأخذه البندول لعمل ذبذبة كاملة ذهابا وإيابا . بندول بسيط طوله l ft يتذبذب داخل قوس صغير ، زمنه الدورى T (بالثواني) يعطى بالتقريب بالصيغة $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ ، حيث $g \approx 32 \text{ ft/sec/sec}$ (أ) أوجد بالتقريب الزمن الدورى لبندول طوله 10.8 ft (ب) ماهو بالتقريب طول البندول الذى يجعل الزمن الدورى 2.75 sec ؟
- ٢٠ - عند وقت معين تحتوى مزرعة بكتيرية 500 بكتيريا . بعد t يوما المزرعة تحتوى $(2^t) 500$ بكتيريا . (أ) ماهو عددها بعد 2.5 يوما ؟ (ب) متى ستحتوى المزرعة 20000 بكتيريا ؟
- ٢١ - معمل به كمية من الراديوم وزنها 0.0108 gram ، بعد t سنة وزن الكمية المتبقية يعطى بالصيغة $0.0108(\frac{1}{2})^{t/1600} \text{ gram}$. كم سيوجد بعد 500 سنة ؟

عبر عن الآتى بدلالة $\log 2$ و $\log 3$:

$$\log \sqrt{13.5} - 24$$

$$\log 36 - 23$$

$$\log \frac{8}{3} - 22$$

حل المعادلات الآتية بالنسبة الى x :

$$\log (3x + 2) = 3 - 27$$

$$\log x = -1 - 26$$

$$\log x = 0 - 25$$

$$\log (x + 6) = kt + C - 30$$

$$\log x = 1.4014 - 29$$

$$\log (3 - x^2) = -2 - 28$$

حل المتباينات الآتية :

$$\log |x| < -1 - 34 \quad \log (z + 5) < 0 - 33$$

$$\log x < -3 - 32$$

$$\log x \geq 2 - 31$$

أوجد حلا تقريبا عشريا للدوال الآتية :

$$0.41^t = 5$$

$$11^{3x} = 11^{x+4} - 38$$

$$6^{2x-1} = 76 - 37$$

$$2^x = 15 - 36$$

$$(\frac{2}{3})^{x-6} = 17 - 39$$

$$\log (4z + 10) = 2 + \log z - 42$$

$$2^x + 12/2^x = 8 - 41$$

$$2^{1/x} = 50 - 40$$

$$(\frac{2}{3})^{x-6} = 17 - 39$$

$$2^{1/x} = 50 - 40$$

$$(\frac{2}{3})^{x-6} = 17 - 39$$

$$2^{1/x} = 50 - 40$$

٤٣ - اشرح الفرق فى المعنى بين $\log 23.7^2$ و $(\log 23.7)^2$ أوجد قيمة كل منهما .

٤٤ - بافتراض الجزئين (أولا) و (ثالثا) من النظرية ٧ - ٩ ، اثبت الجزء (ثانيا) . استخدم تعريف اللوغاريتم لإيجاد ما يأتى :

$$\log_4 \frac{1}{\sqrt{64}} - 49$$

$$\log_2 \sqrt{2} - 48$$

$$\log_{27} 3 - 47$$

$$\log_3 27 - 46$$

$$\log_2 16 - 45$$

$$\log_{\sqrt{5}} 5 - 53$$

$$\log_{1/2} 64 - 52$$

$$\log_{12} 1 - 51$$

$$\log_e \frac{1}{e} - 50$$

أوجد N أوجد a إذا كان

$$\log_e N = -2 - 57$$

$$\log_5 (N + 2) = \frac{1}{3} - 56$$

$$\log_8 N = \frac{1}{3} - 55$$

$$\log_{10} N = 4 - 54$$

أوجد a إذا كان

$$\log_a 1 = 0 - 60$$

$$\log_a 8 = -1 - 59$$

$$\log_a 36 = 2 - 58$$

رتب الأعداد فى الفئتين التاليتين ترتيبا تصاعديا (ليس من الضرورى إيجاد تقريرات عشرية لعمل ذلك) .

$$\log_e t, \log_{10} t - 62$$

$$\log_{10} 13, \log_7 13, \log_{1/2} 13 - 61$$

بدون إيجاد اللوغاريتم ، عين موضع الآتى بين عددين صحيحين متعاقبين :

$$\log_e 12 - ٦٧ \quad \log_{10} 0.0058 - ٢٦ \quad \log_2 \frac{1}{2} - ٦٥ \quad \log_3 14 - ٦٤ \quad \log_{10} 29 - ٦٣$$

بحل المعادلة الأسية المناسبة أو باستخدام القاعدة ٧ - ١٤ لتغيير الأساس وجدول اللوغاريتمات العادية ، أوجد تقريبا عشريا لكل مما يأتى : $(e \approx 2.71828)$:

$$\log_{11.6} 29.4 - ٧١ \quad \log_6 36 - ٧٠ \quad \log_{12} 136 - ٦٩ \quad \log_7 17.6 - ٦٨$$

$$\log_e (1/e) - ٧٥ \quad \log_e 1.86 - ٧٤ \quad \log_5 \sqrt{5} - ٧٣ \quad \log_2 0.0224 - ٧٢$$

٧٦ - باستخدام جدول اللوغاريتمات العادية والقاعدة ٧ - ١٤ لتغيير الأساس ، أوجد

$$\log_e 768 \text{ (أ) } , \log_e 7.68 \text{ (ب) } , \log_e 0.0768 \text{ (ج) }$$

٧٧ - استخدم جدول اللوغاريتمات الطبيعية والقاعدة ٧ - ١٤ لتغيير الأساس ، أوجد (أ) $\log 4.3$ ،

(ب) $\log 35$ ، (ج) $\log 4$. تحقق من إجابتك من جدول اللوغاريتمات العادية .

حل المعادلات الآتية بالنسبة الى x أو y

$$\log_e (y - 3)^2 = 4 - ٨٠ \quad \log_e (2x + 4) = 2 - ٧٩ \quad \log_e x = 1 - ٧٨$$

$$\log_e (3y + 2) = kt + C - ٨٢ \quad \log_e x = 2b + C - ٨١$$

حل المتباينات الآتية :

$$\log_e |x| < -1 - ٨٦ \quad \log_e (x + 5) < 0 - ٨٥ \quad \log_e z \leq -3 - ٨٤ \quad \log_e x \geq 2 - ٨٣$$

حل المعادلات الآتية بالنسبة إلى C أو k

$$e^{k-1} = (\frac{1}{2})^{1/15} - ٩٠ \quad e^k = (\frac{1}{2})^{1/10} - ٨٩ \quad e^{3k} = 4 - ٨٨ \quad e^{C+2} = \frac{2}{3} - ٨٧$$

٩١ - إذا كان $\log_e y = 2x - 3$ فأوجد y بدلالة x .

٩٢ - إذا كان $\log_e y = kx + c$ فأوجد y بدلالة x وعين الثابتين k و c بحيث أن $y = 10$:

عند $x = 0$ و $y = 5$ عند $x = 2$. ما قيمة y عند $x = 6$ ؟

بسط الآتى

$$\log_e e^{-(2x+3)} - ٩٣ \quad \log_e (1/e^{2x}) - ٩٤ \quad \log_e \sqrt{e} - ٩٥ \quad e^{-3 \log_e 4} - ٩٦ \quad e^{1+\log_e 4} - ٩٧$$

٩٨ - حل المعادلة $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{3}$ (ارشاد : اكتب المعادلة كمعادلة من الدرجة الثانية فى e^x)

٩٩ - (أ) حقق الأجزاء الثلاثة للنظرية ٧ - ٩ للوغاريتمات للأساس 10 عندما

$r = 2$ و $v = 3$, $u = 16.1$ (ب) حقق الأجزاء الثلاثة للنظرية ٧ - ٩ للوغاريتمات للأساس

3 عندما $r = 1/2$ و $v = 27$, $u = 81$.

١٠٠ - استخدم جدول اللوغاريتمات الطبيعية فى التبديل B لإيجاد

$$\log_e 170, \log_e 7300, \log_e 0.012$$

(ارشاد : $(10) = 17.0$) .

١٠١ - لماذا العدد 1 لا يمكن استخدامه كأساس للوغاريتمات .

١٠٢ - اثبت أنه لأي عددين موجبين a و b ماعدا 1 ، يكون $\log_a b = 1/(\log_b a)$

١٠٣ - اثبت أن $c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$ لأي أساس a .

١٠٤ - اثبت أن $\log_{1/a} x = -\log_a x$ لكل $x > 0$ و $a > 0$.

١٠٥ - أثبت النظرية ٧ - ١٣ $a^{1/\log_e a}$ ، بسط $a > 0$. ١٠٦

٧ - ٥

الدالة اللوغاريتمية

مع أنه حاليا استخدام اللوغاريتمات في الحسابات قليل ، إلا أنها أكثر فائدة ، في الرياضيات والعلوم من أي وقت مضى . فهي توجد في حلول المعادلات التفاضلية وفي الصياغة الرياضية للقوانين الفيزيائية . في هذا البند ندرس الدالة اللوغاريتمية وفي البند التالي نوضح بعض استخداماتها في العلوم .

بما أن كل عدد موجب له لوغاريتم للأساس a ، فالمعادلة $y = \log_a x$ تعرف دالة : $f: f(x) = \log_a x$ ، نطاقها هي الفئة لجميع $x > 0$. العلاقة الوطيدة بين الاسس واللوغاريتمات يمكننا من إيجاد الشكل البياني بسهولة . من تعريف اللوغاريتم ، $y = \log_a x$ إذا وفقط إذا كان

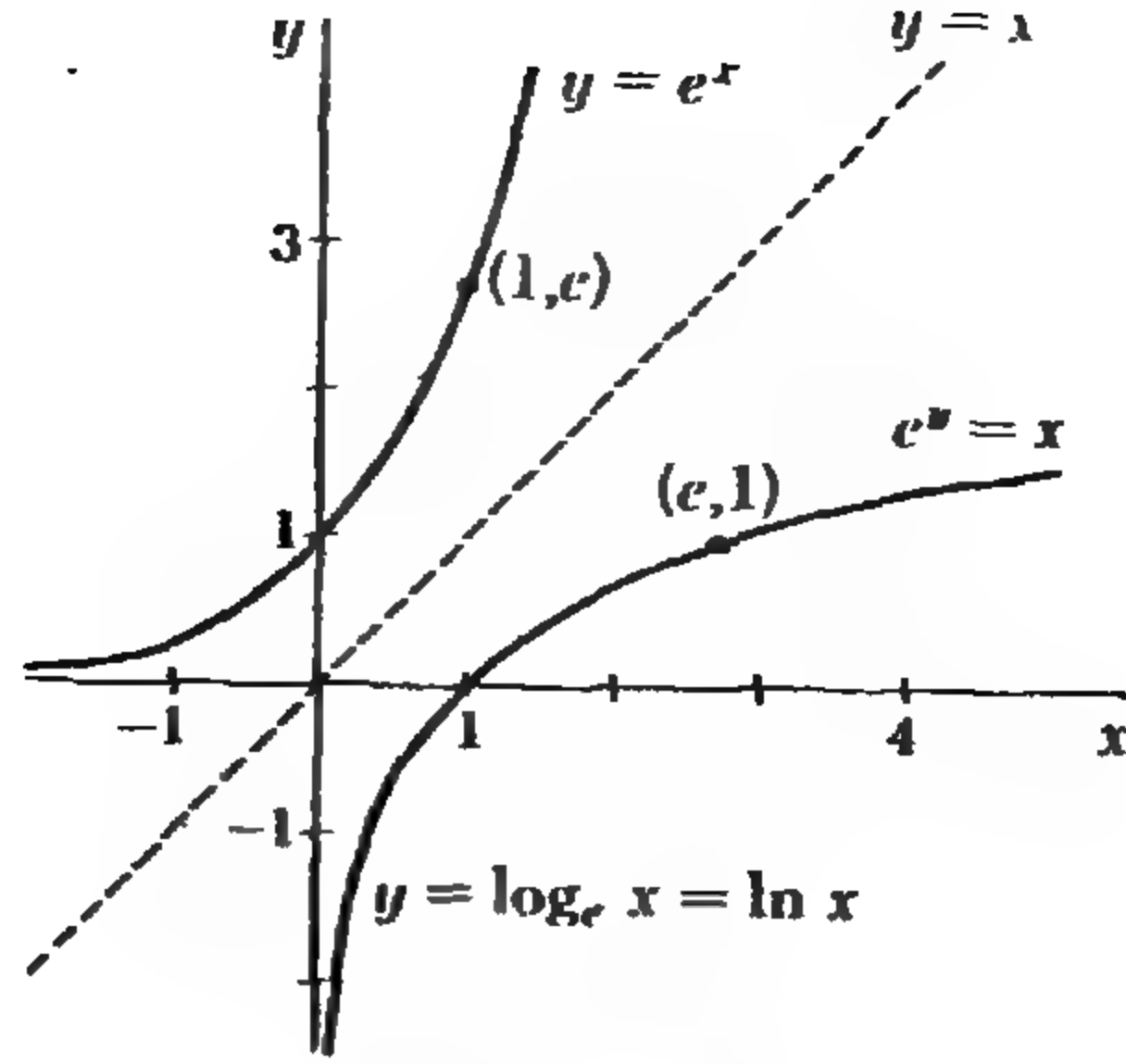
$$a^y = x$$

وإذن هاتان المعادلتان لهما نفس الشكل البياني . إذا أبدلنا y و x في هذه المعادلة الأخيرة ، فإننا نحصل على

$$y = a^x$$

لكن إبدال y و x في معادلة يعكس شكلها البياني في الخط المستقيم $y = x$. أي أن الشكل البياني للدالة $y = \log_a x$ هو انعكاس الشكل البياني لـ $y = a^x$ في الخط المستقيم $y = x$. هذا موضع في الشكل ٧ - ١٣ للمنحنين $y = \log_e x$ و $y = e^x$.

الشكل البياني للدالة $y = \log_a x$ لأي أساس $a > 1$ يشبه كثيرا ذلك للدالة $y = \log_e x$. فهو يكون مقاربا للمحور الصادي السالب ، يرتفع بسرعة في الأول ، يقطع المحور السيني عند $(1,0)$ ، ثم يتفرطح ، مرتفعا ببطء أكثر عندما تزداد x . كل ذلك نتيجة للنظرية ٧ - ١٥ ومشتقة $\log_a x$ ، التي سنوجدتها في النظرية ٧ - ٢٣ . الشكل البياني يوضح تماما أن الأعداد بين 1 و 0 لها لوغاريتمات سالبة وأن الصفر والأعداد السالبة ليس لها لوغاريتمات . النظرية القادمة توضح أنه بالرغم من معدل تزايدها البطيء ، $\log_e x$ أخيرا تصبح كبيرة جدا ، وأن شكلها البياني يكون مقاربا للمحور الصادي السالب .



شكل ٧-١٣

الشكل البياني للدالة $y = \log_e x$ هو الانعكاس في الخط المستقيم $y = x$ للشكل البياني للدالة $y = e^x$.

٧-١٥ نظرية . اذا كانت $a > 1$ ، فإن

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty$$

البرهان . القول أن $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty$ يعني أن الشكل البياني للدالة $y = \log_a x$ أخيراً يقطع ويظل فوق الخط المستقيم الأفقي $y = M$ مهما كانت M كبيرة . لتكن M أى عدد . بما أن a^x دالة متزايدة ، فإن $\log_a x > M$ اذا وفقط اذا كان $a^{\log_a x} > a^M$. نكن $a^{\log_a x} = x$. واذن $\log_a x$ ستكون أكبر من M طالما كانت x أكبر من a^M . بما أن M كانت اختيارية ، فهذا يثبت النهاية الأولى . اثبات الثانية يترك للقارئ (المسألة ١١٧) .

اذا كانت $a < 1$ ، الشكل البياني للدالة $y = \log_a x$ يكون متناقصاً ، وله الشكل العام للانعكاس في المحور السيني للشكل البياني للدالة $y = \log_e x$.

الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \log_a x$ تسمى دالة لوغاريتمية . وهي دالة متزايدة اذا كانت $a > 1$ ومتناقصة اذا كانت $0 < a < 1$. الدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية والعكسية يشار إليها جميعاً بأنها دوال مسترسلة .

من الآن فصاعداً سنهتم فى الأكثر باللوغاريتمات للأساس e لتجنب كتابة دليل الأساس e ، سنستخدم رمز الفيزيائيين والمهندسين للوغاريتم الطبيعي . ونكتب $\ln x$ لـ $\log_e x$. دالة اللوغاريتمات الطبيعي $f(x) = \ln x$ مفيدة حتى أنها تعرف بالدالة اللوغاريتمية . بسبب أهميتها نكرر التعريف ٧-١٠ للحالة الخاصة للوغاريتم الطبيعي .

• الرمز \ln هو اختصار "Natural logarithm" رغم أنه منتشر ، إلا أنه ليس عالمياً . الرياضيون عادة يكتبون $\log x$ لـ $\log_e x$.

٧ - ١٦ تعريف . لكل $t > 0$ و $\ln t$ هي ذلك العدد حيث $e^{\ln t} = t$.

ينبغي للقارئ أن يحتفظ بالمعادلة $e^{\ln t} = t$ جيدا في ذاكرته ، كما يحتفظ أيضا بالحالتين الخاصتين للمعادلتين ٧ - ١١ ، ٧ - ١٢ ، وهما

$$\ln e = 1 \quad \text{و} \quad \ln 1 = 0$$

لقد قابلنا من قبل دالة اللوغاريتم الطبيعي تحت اسم آخر . هي الدالة L التي عرفت في البند ٧ - ٢ . لأن $x = e^{\ln x}$ بالتعريف ، فمن ثم بالتمهيدية ٧ - ٣ يكون

$$L(x) = L(e^{\ln x}) = \ln x$$

الدالة اللوغاريتمية الطبيعية لذلك تكون متصلة عند كل $x > 0$ ، ومن (٢) بيند ٧ - ٢ ، مشتقها تعطى بالصيغة

$$D \ln x = \frac{1}{x}, \quad x > 0 \quad \text{٧ - ١٧}$$

لايجاد مشتقات تعبيرات أعم مثل $\ln(x^2 + 3x)$ يجب تعميم القاعدة ٧ - ١٧ للدوال التي على الصورة $\ln g(x)$.

٧ - ١٨ $g(x) = g'(x)/g(x)$ بفرض أن $g(x) > 0$ وان $g'(x)$ موجودة .

البرهان ضع $z = g(x)$ و $f(z) = \ln z$ فيكون

$$\ln g(x) = f(g(x))$$

من القاعدة ٧ - ١٧ ، $f'(z) = 1/z$ ، واذن بقاعدة السلسلة ، يكون

$$D \ln g(x) = D_x f(g(x)) = f'(z)g'(x) = \frac{1}{z} g'(x) = \frac{1}{g(x)} g'(x)$$

مثال ١ . أوجد $D \ln(x^2 + 3x)$

بالقاعدة ٧ - ١٨ حيث $g(x) = x^2 + 3x$ ، يكون

$$D \ln(x^2 + 3x) = \frac{D(x^2 + 3x)}{x^2 + 3x} = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x}$$

مثال ٢ . أوجد $D[x^3 \ln(4x^2 - 7x + 6)]$

الدالة المطلوبة اجراء تفاضلها هي حاصل ضرب . نستخدم قاعدة حاصل الضرب متبوعة بالقاعدة ٧ - ١٨ :

$$\begin{aligned}
D[x^3 \ln (4x^2 - 7x + 6)] &= x^3 D \ln (4x^2 - 7x + 6) + 3x^2 \ln (4x^2 - 7x + 6) \\
&= x^3 \frac{D(4x^2 - 7x + 6)}{4x^2 - 7x + 6} + 3x^2 \ln (4x^2 - 7x + 6) \\
&= \frac{x^3(8x - 7)}{4x^2 - 7x + 6} + 3x^2 \ln (4x^2 - 7x + 6).
\end{aligned}$$

مثال ٣ . اذا كانت $f(x) = \ln \sqrt{5+3x}$ ، فأوجد $f'(x)$.

الطريقة الأولى . بالقاعدة ٧ - ١٨ ، يكون

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{5+3x}} \cdot \frac{1}{2} (5+3x)^{-1/2} (3) = \frac{3}{2(5+3x)}$$

الطريقة الثانية . نستخدم أولا خاصية القوة للوغاريتم لتبسيط التعبير للدالة $f(x)$.

$$f(x) = \ln (5+3x)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln (5+3x)$$

ويكون

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{3}{5+3x} = \frac{3}{2(5+3x)}$$

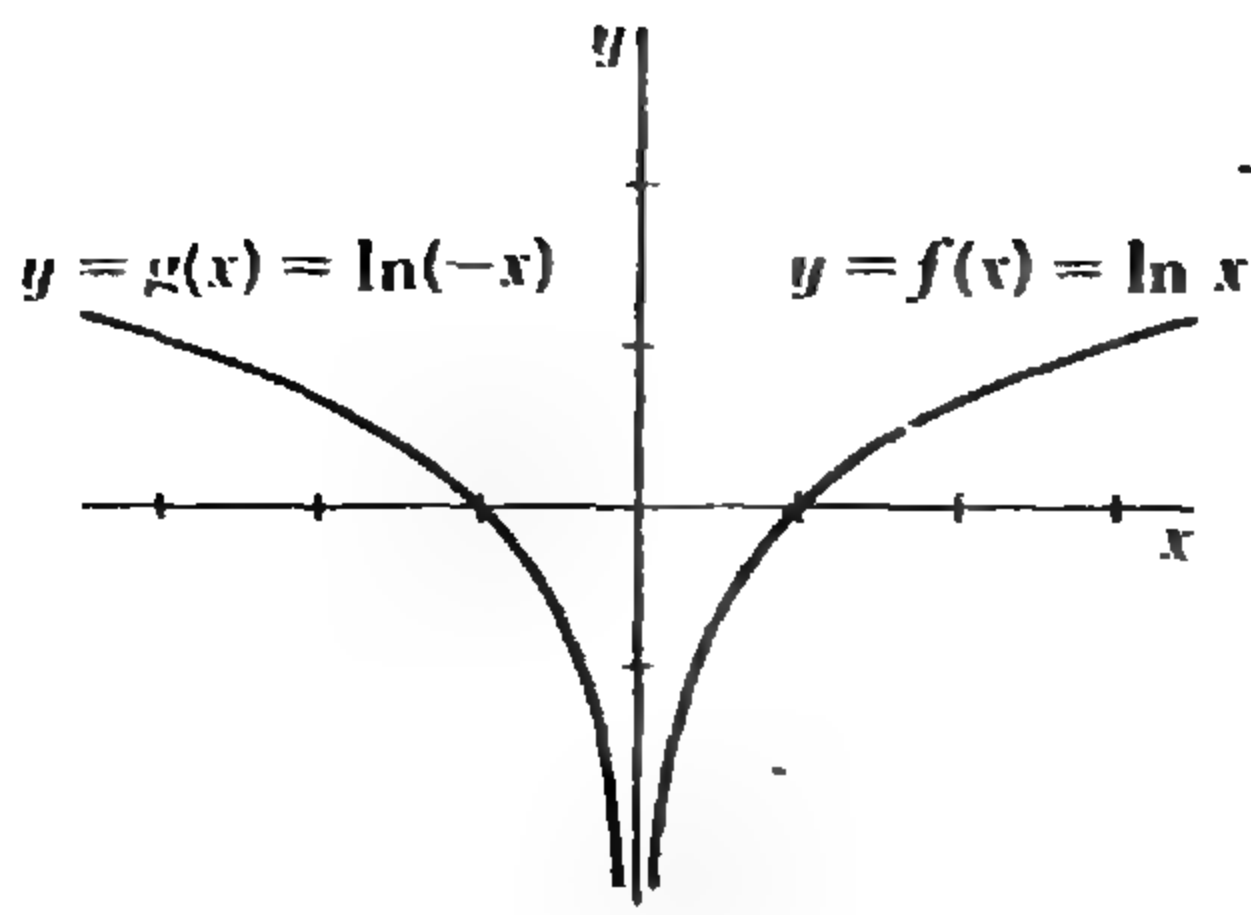
إجراءات مماثلة لذلك المستخدم في الطريقة الثانية عادة تبسط إجراء تفاضل لوغاريتمات حواصل الضرب وخارج القسمة والقوى .

مثال ٤ . خطط الشكل البياني للدالة $f(x) = x \ln x$. بما أن $\ln x$ تعرف فقط لـ $x > 0$ فإن $f(x)$ يمكن أن تكون صفرا فقط عندما تكون $\ln x = 0$ ، أي أن ، فقط عندما $x = 1$. مشتقة الدالة f هي

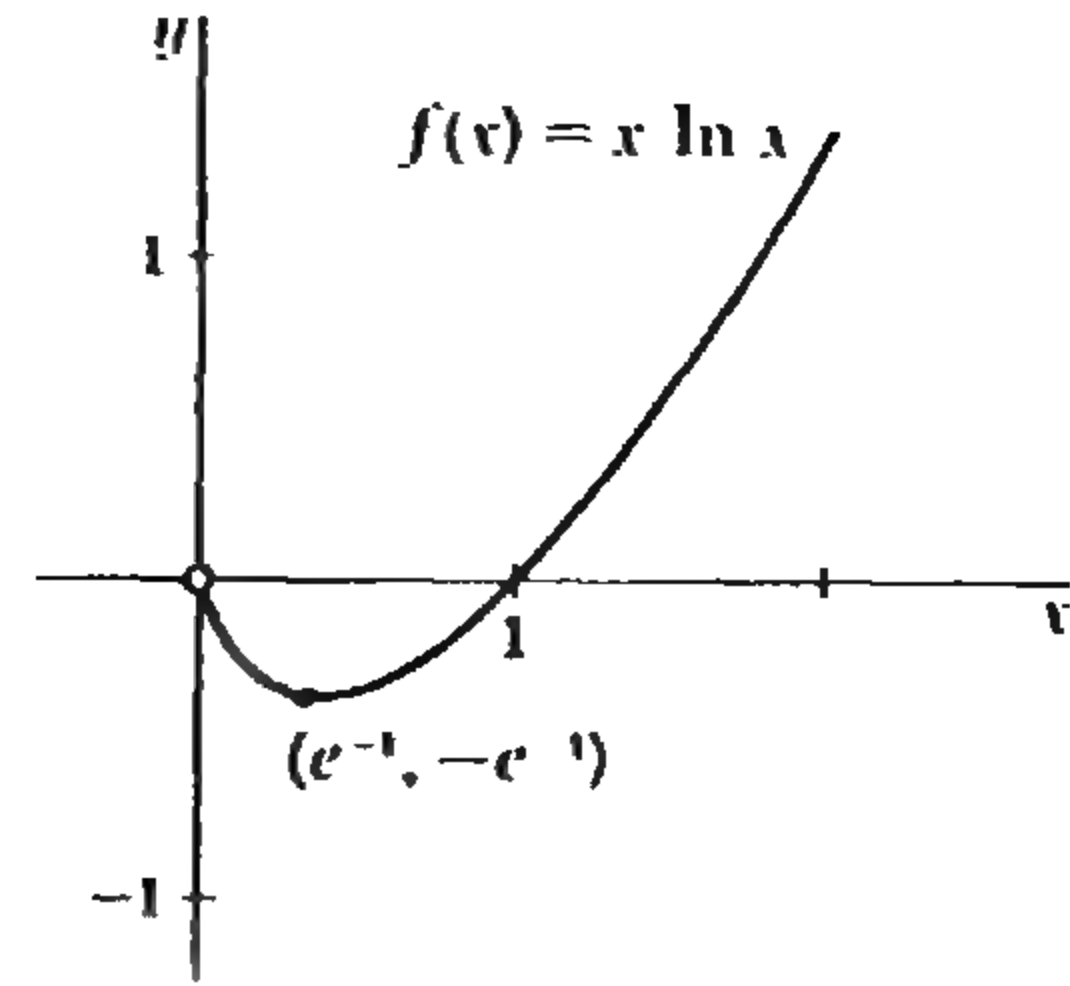
$$f'(x) = x \frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x$$

واذن العدد الحرج الوحيد هو ذلك العدد حيث $\ln x = -1$. لحل هذه المعادلة ، نرفع كلا الطرفين الى قوة لـ e ، فنحصل على $e^{\ln x} = e^{-1}$ لأن $e^{\ln x} = x$ ، الحل هو $x = e^{-1}$ والشكل البياني له مماس أفقى عند النقطة $(e^{-1}, -e^{-1})$. بما أن $f''(x) = 1/x$ ، اختبار المشتقة الثانية يوضح أن الدالة لها نهاية صغرى موضعية عند e^{-1} . الشكل البياني مقرر الى أعلى فى كل مكان . يمكن اثبات أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ (المسألة ١٢٥) . واذن المنحنى يقترب من نقطة الاصل . انحداره جوار نقطة الاصل يقاس بالمشتقة . لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty$ ، الشكل البياني منحدر بشدة قرب نقطة الاصل . وهو مخطط فى الشكل ٧ - ١٤

الدالة $f(x) = \ln x$ معرفة فقط لـ $x > 0$ والدالة $g(x) = \ln (-x)$ فقط لـ $x < 0$. الشكل البياني للدالة g هو الانعكاس فى المحور الصادى للشكل البياني للدالة f ، وهو موضح فى الشكل ٧ - ١٥ .



شكل ١٥-٧



شكل ١٤-٧

لدينا

$$(١) \quad D \ln x = \frac{1}{x} \quad \text{if } x > 0$$

ومن القاعدة ١٨-٧ ، يكون

$$(٢) \quad D \ln (-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} \quad \text{if } x < 0$$

المشتقة في (٢) سالبة ، كما نتوقع من الشكل البياني لـ g

$$\ln |x| = \begin{cases} \ln x & \text{if } x > 0 \\ \ln (-x) & \text{if } x < 0 \end{cases} \quad \text{بما أن}$$

(١) ، (٢) يمكن الجمع بينهما في المعادلة الواحدة

$$D \ln |x| = \frac{1}{x} \quad \text{١٩-٧}$$

وبالاستعانة بقاعدة السلسلة يكون لدينا الصيغة الأعم

$$D \ln |g(x)| = \frac{g'(x)}{g(x)} \quad \text{٢٠-٧}$$

$$D \ln |3x^3 - 4x - 1| = \frac{9x^2 - 4}{3x^3 - 4x - 1} \quad \text{فمثلا ،}$$

الصور العكسية لهذه المعادلات أكثر نفعا ،

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \quad \text{٢١-٧}$$

و

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + C \quad \text{٢٢-٧}$$

مثال ٥ . اجر التكامل $\int \frac{2x}{x^2 + 3} dx$

البسط تفاضل المقام ، فالدالة المكاملة على الصورة $g'(x)/g(x)$ حيث $g(x) = x^2 + 3$. واذن

بالمعادلة ٢٢-٧ ، يكون

$$\int \frac{2x}{x^2 + 3} dx = \ln |x^2 + 3| = \ln (x^2 + 3) + C$$

هنا يمكننا حذف علامة القيمة المطلقة إذ أن $x^2 + 3$ دائما موجبة . الجواب يمكن ويجب التأكد منه بتفاضل $\ln(x^2 + 3)$.

مثال ٦ . أوجد قيمة $\int_1^3 \frac{4}{3t-11} dt$

فيما عدا لعامل ثابت البسط هو تفاضل المقام ، فالدالة المكاملة أساسا على الصورة $g'(t)/g(t)$ حيث $g(t) = 3t - 11$. الصيغة ٧ - ٢٢ توحى بأن فيما عدا لعامل ثابت التكامل غير المعين يساوى $\ln|3t-11|$ ليكن هذا تخميننا الأول . بالقاعدة ٧ - ٢٠

$$\frac{d}{dt} \ln|3t-11| = \frac{3}{3t-11}$$

بمقارنة هذه المشتقة مع الدالة المكاملة ، نرى تعديل تخميننا الى $\frac{4}{3} \ln|3t-11|$ وهذا صحيح . لذلك

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{4}{3t-11} dt &= \frac{4}{3} \ln|3t-11| \Big|_1^3 \\ &= \frac{4}{3} (\ln|-2| - \ln|-8|) = \frac{4}{3} (\ln 2 - \ln 8) \\ &= \frac{4}{3} \ln \frac{1}{4} = \frac{4}{3} (\ln 1 - \ln 4) = -\frac{4}{3} \ln 4 \approx -1.8484. \end{aligned}$$

لقد استخدمنا مرتين خاصية لوغاريتم خارج القسمة . واذ أن الدالة المكاملة سالبة في الفترة $[1, 3]$ ، فالتكامل أيضا يجب أن يكون سالبا .

يمكننا أيضا إيجاد قيمة التكامل بإجراء تغيير للمتغير نضع $u = 3t - 11$ فيكون $dt = du/3$ ، ويكون

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{4}{3t-11} dt &= \int_{-8}^{-2} \frac{4}{u} \frac{du}{3} = \frac{4}{3} \ln|u| \Big|_{-8}^{-2} \\ &= \frac{4}{3} (\ln|-2| - \ln|-8|) \approx -1.8484. \end{aligned}$$

هنا غيرنا حدى التكامل الى ماينظر مدى المتغير الجديد u .

مثال ٧ . أوجد مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = \frac{5(3x+1)}{3x^2+2x+2}$ بين ٠ و ٢ .

المساحة تعطى بـ

$$\int_0^2 \frac{5(3x+1)}{3x^2+2x+2} dx$$

مرة أخرى ، البسط هو تفاضل المقام فيما عدا لعامل ثابت ، فالدالة المكاملة أساسا على الصورة $g'(x) / g(x)$. بالتجربة والخطأ أو بإجراء تغيير للمتغير نجد أن

$$\begin{aligned} \text{المساحة} &= \int_0^2 \frac{5(3x+1)}{3x^2+2x+2} dx = \frac{5}{2} \ln |3x^2+2x+2| \Big|_0^2 \\ &= \frac{5}{2} (\ln |18| - \ln |2|) = \frac{5}{2} \ln 9 \approx 5.4930. \end{aligned}$$

عند استخدام تكاملات معينة على الصورة $\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)} dx$ يجب أن نتأكد أن الدالة المكاملة متصلة في الفترة $[a, b]$.

مثال ٨ . اجر التكامل $\int \tan \theta d\theta$.

يمكن اجراء التكامل بسهولة بحيلة بسيطة

$$\int \tan \theta d\theta = \int \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta = -\ln |\cos \theta| + C$$

مشتقة اللوغاريتم لأساس غير e يمكن ايجادها بالاستعانة بالقاعدة ٧ - ١٤ لتغيير الأساس حيث $b = e$.

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x$$

اجراء التفاضل يعطينا

$$D \log_a x = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x} \quad \quad \quad ٧ - ٢٣$$

وبصفة أعم ، يكون

$$D \log_a g(x) = \frac{1}{\ln a} \frac{g'(x)}{g(x)} \quad \quad \quad ٧ - ٢٤$$

فمثلا ،

$$D \log_{10} (x^2 + 1) = \frac{1}{\ln 10} \frac{2x}{x^2 + 1} \approx \frac{1}{2.3026} \frac{2x}{x^2 + 1}$$

القاعدة ٧ - ٢٣ لمشتقة $\log_a x$ تكون أبسط عندما يكون الأساس a هو e ، لأن حينئذ العامل $(1 / \ln a)$ يساوي 1 . هذا التبسيط في صيغة المشتقة يكفي لتبرير افضلية استخدام الأساس e عن استخدام الأساس 10 في العمل العلمي غير الحساب . العدد e لا يمكن تجنبه عندما نعالج مشتقات اللوغاريتمات ، مهما كان الأساس ، لكن يكون أقل تطفلا عند استخدام اللوغاريتمات الطبيعية .

التعريف ٧ - ١٦ للوغاريتم يمكننا من التعبير عن $a^{g(x)}$ كقوة لـ e وبالتالي من ايجاد مشتقتها . لدينا

$$a^{g(x)} = e^{\ln a^{g(x)}} = e^{g(x) \ln a}$$

واذن

$$Da^{g(x)} = De^{g(x) \ln a} = e^{g(x) \ln a} g'(x) \ln a$$

باستبدال $e^{g(x) \ln a}$ بـ $a^{g(x)}$ ، التى تكافئها هذا ييسط الى الصيغة الثانية من الصيغتين أدناه . الصيغة الأولى هى حال خاصة منها

$$Da^x = a^x \ln a \quad ٢٥ - ٧$$

$$Da^{g(x)} = a^{g(x)} g'(x) \ln a \quad ٢٦ - ٧$$

$$D7^{2x-x^3} = 7^{2x-x^3} (2 - 3x^2) \ln 7 \quad \text{، فمثلا}$$

الى الآن قاعدة القوة $Dx^r = rx^{r-1}$ مقيدة بالأسس الكسرية r . يمكننا الآن اثبات أنها صحيحة أيضا للأسس غير الكسرية r . نكتب x^r كقوة لـ e

$$x^r = e^{\ln x^r} = e^{r \ln x}$$

فيكون

$$Dx^r = e^{r \ln x} D(r \ln x) = e^{r \ln x} \frac{r}{x} = x^r \frac{r}{x} = rx^{r-1}$$

الحيلة التى استخدمت هنا ومن قبل ، للتعبير عن كمية كقوة لـ e وهى حيلة نافعة ، يجب على القارئ أن يحفظها فى ذاكرته .

الدالة x^x ليست على الصورة x^r ولا على الصورة a^x ، حيث a و r ثابتان . واذن لا قاعدة القوة ولا القاعدة ٢٥ - ٧ يمكن استخدامها لايجاد مشتقتها . على الرغم من ذلك ، يمكن ايجاد المشتقة بالطريقة التى استخدمت لايجاد مشتقة $a^{g(x)}$. نكتب x^x كقوة لـ e ، فيكون

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

ويكون

$$\begin{aligned} Dx^x &= e^{x \ln x} D(x \ln x) = e^{x \ln x} (1 + \ln x) \\ &= x^x (1 + \ln x) \end{aligned}$$

يمكننا ايجاد مشتقة أى دالة على الصورة $[f(x)]^{g(x)}$ بنفس الطريقة ، طبعا بشرط أن g و f يكون لهما مشتقتان .

فى البند ٧ - ٢ عرفنا العدد e بأنه قيمة t التى تجعل المساحة تحت المنحنى $y = 1/x$ بين t و 1 تساوى 1 . التعريف التاريخى للعدد e هو قيمة نهاية معينة .

$$e = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{1/t} \quad ٢٧ - ٧$$

البرهان المباشر لوجود هذه النهاية صعب ، لكن بالنظريات التي لدينا الآن يكون اسهل نسبيا . ضع $h = \ln (1 + t)$ فيكون $1 + t = e^h$ ويكون

$$(1 + t)^{1/t} = (e^h)^{1/(e^h-1)} = e^{h/(e^h-1)}$$

عندما تقترب t من الصفر ، تقترب h من الصفر . واذن

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{1/t} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{h/(e^h-1)} = e^{\lim_{h \rightarrow 0} [h/(e^h-1)]}$$

حيث الخطوة الاخيرة صحيحة بسبب اتصال e^x . باستخدام التمهيدية ٧ - ٤ ، لدينا

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{e^h - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(e^h - 1)/h} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{1/t} = e \quad \text{واذن}$$

اذا وضعنا في المعادلة ٧ - ٢٧ ، $t = 1/x$ ، فان t تقترب من 0^+ عندما تصبح x لانهاية ويكون لدينا صورة أخرى للنهاية :

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \text{٧ - ٢٨}$$

مسائل

- ١ - خطط الشكل البياني للدالة $y = \log x$ بتعيين مواقع بعض النقاط ، مستخدما جدولا للوغاريتمات العادية .
- ٢ - خطط الشكل البياني للدالة $y = \ln x$ بتعيين مواقع بعض النقاط ، مستخدما جدولا للوغاريتمات الطبيعية .
- ٣ - (أ) لاي x يقطع المنحنى $y = \log x$ الخط الأفقى الذى على بعد 2 فوق المحور السينى ؟ الخط الأفقى على بعد 3 فوق المحور السينى ؟ لاي x يكون $\log x$ أكبر من 100؟ 1,000,000 ؟ (ب) كرر (أ) مع المنحنى $y = \ln x$.
- ٤ - خطط الشكل البياني للدالة $y = \log_{12} x$ (ارشاد : اعتبر الشكل البياني لـ $y = (1/2)^x$)

اجر تفاضل مايتأتى :

$$\ln (3x + 4x^2) \quad - \quad ٧$$

$$\ln (at^2 + b) \quad - \quad ٦$$

$$\ln (5 - 3x) \quad - \quad ٥$$

$$\ln (7z - 4)^2 \quad - \quad ١٠$$

$$\ln (ax^n) \quad - \quad ٩$$

$$\ln (ax + b)^2 \quad - \quad ٨$$

$$(9x - 1) \ln 3x \quad - \quad ١٣$$

$$\ln \frac{2}{r} \quad - \quad ١٢$$

$$x^2 \ln x \quad - \quad ١١$$

$$\frac{u^2}{\ln u} \quad - \quad ١٦$$

$$\ln \frac{ax - b}{ax + b} \quad - \quad ١٥$$

$$\frac{\ln x}{x} \quad - \quad ١٤$$

$$\ln \left| \frac{t}{t+1} \right| \quad - \quad ١٩$$

$$\ln \sqrt{x^2 + 7} \quad - \quad ١٨$$

$$\ln |x^2 - 2x + 5| \quad - \quad ١٧$$

$$\begin{array}{lll}
\ln \frac{y}{\sqrt{3y+2}} - ٢٢ & (x+1) \ln \sqrt{x+3} - ٢١ & \ln \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} - ٢٠ \\
\ln \sin ax - ٢٥ & 3z(\ln z + \sqrt{z}) - ٢٤ & x(\ln x)^2 - ٢٣ \\
\ln e^y - ٢٨ & \ln |\sec \theta + \tan \theta| - ٢٧ & \sin (\ln ax) - ٢٦ \\
\ln (e^x + e^{-x}) - ٣١ & \ln (e^{2x} + 5e^x - 3) - ٣٠ & \ln ye^y - ٢٩ \\
\ln (\ln 3x) - ٣٣ & \ln [(x^2 + 10x + 3)(x^3 - x^2 + 7)] - ٣٧ & \\
-\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + \ln (x + \sqrt{x^2 - a^2}) - ٣٥ & x \tan^{-1} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln (a^2 + x^2) - ٣٤ &
\end{array}$$

اجر تفاضل ما يأتى :

$$\begin{array}{lll}
\log_{10} \sqrt{y^2 + c^2} - ٣٩ & x^3 \log_{10} (a^2 + x^2) - ٣٨ & \log_2 \frac{1}{3x+10} - ٣٧ \\
\log_{10} (x^2 + 4) - ٣٦ & \log_{10} e^x - ٤٠ &
\end{array}$$

أوجد المشتقة الثانية لما يأتى :

$$\begin{array}{lll}
x \log_{10} x - ٤٤ & \ln \frac{ax-3}{ax+3} - ٤٣ & x \ln x - ٤٢ \\
\ln bx - ٤١ & &
\end{array}$$

أوجد dy/dx لما يأتى :

$$\begin{array}{ll}
\ln (x^2 + y^2) + 2 \tan^{-1} (x/y) = 0 - ٤٧ & e^y = \ln x - ٤٦ \quad y = \ln (x + y) - ٤٥ \\
٤٨ - \text{إذا فرض أن الدالة اللوغاريتمية لها مشتقة ، يمكن إيجاد المشتقة كما يلي . لتكن } y = \ln x \\
\text{فيكون } e^y = x \text{ أوجد } dy/dx \text{ بالتفاضل الضمني .} \\
٤٩ - \text{اثبت } y = (\ln x)/x \text{ حل للمعادلة التفاضلية } x^2 y'' + 3x y' + y = 0 \\
٥٠ - \text{حق أن } y = \cos (\ln x) \text{ حل للمعادلة التفاضلية } x^2 d^2 y / dx^2 + x dy / dx + y = 0 \text{ . هل} \\
\text{يمكنك إيجاد حل آخر ؟}
\end{array}$$

خطط الشكل البياني للمعادلات الآتية . (النهايتان $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} [(\ln x)/x] = 0$)
المبرهتان في المسألة ١٢٥ ، قد تفيدان

$$\begin{array}{llll}
y = x + \ln x - ٥٤ & y = x - \ln x - ٥٣ & y = \ln |x| - ٥٢ & y = \ln (x + 2) - ٥١ \\
y = x/(\ln x) - ٥٧ & y = (\ln x)/x - ٥٦ & y = x \ln x - x - ٥٥ &
\end{array}$$

اجر التكاملات الآتية :

$$\begin{array}{lll}
\int_1^4 \frac{4x}{x^2+3} dx - ٦٠ & \int \frac{6}{3x+5} dx - ٥٩ & \int \frac{1}{x+2} dx - ٥٨ \\
\int \frac{1}{(2x+3)^2} dx - ٦٣ & \int \frac{8x+10}{2x^2+5x} dx - ٦٢ & \int \frac{u+1}{u^2+2u+11} du - ٦١ \\
\int_{-3}^{-2} \frac{y^2+1}{5y^3} dy - ٦٦ & \int \frac{3x^2-2x}{x^3-x^2} dx - ٦٥ & \int \left(\frac{2}{1-2t} + t \right) dt - ٦٤ \\
\int \frac{3-x^4}{x^2} dx - ٦٩ & \int \frac{\sec^2 \theta}{a+b \tan \theta} d\theta, b \neq 0 - ٦٨ & \int_0^{\pi/4} \frac{1-\sin \alpha}{\alpha + \cos \alpha} d\alpha - ٦٧
\end{array}$$

$$\int \frac{3x-1}{x^2+1} dx - ٧٠ \quad \int \frac{z+2}{z^2+3} dz - ٧١ \quad \int \frac{x}{2x+3} dx - ٧٢ \quad (\text{ارشاد ضع } u = 2x+3)$$

$$\int \frac{v}{v-4} dv - ٧٣ \quad \int \frac{\ln x}{x} dx - ٧٤ \quad \int \left(y - \frac{1}{y}\right)^3 dy - ٧٥$$

$$\int \cot \theta d\theta - ٧٨ \quad \int \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} dy - ٧٧ \quad \int \frac{dw}{w\sqrt{2w}} - ٧٦$$

أوجد تقريبا عشريا للتكاملات المعينة الآتية :

$$\int_0^1 \frac{dx}{4x+3} - ٧٩ \quad \int_1^2 \frac{dy}{2y-7} - ٨٠ \quad \int_{3/2}^3 \frac{x}{x^2-1} dx - ٨١ \quad \int_1^{e^2} \frac{1}{t} dt - ٨٢$$

أوجد مشتقة مايتى :

$$2^s \ln s - ٨٨ \quad t^{1+e} - ٨٧ \quad (1+e)^t - ٨٦ \quad \frac{1}{t} 6^t - ٨٥ \quad 8^{\sqrt{t}} - ٨٤ \quad 2^{3x+4} - ٨٣$$

$$e^{e^x} - ٨٩ \quad e^{\ln x} - ٩٠ \quad u^{\sqrt{u}} - ٩١ \quad \left(\frac{a}{x}\right)^x - ٩٢ \quad x^{\ln x} - ٩٣ \quad (1+x)^{1/x} - ٩٤$$

أوجد تقريبا عشريا للمشتقة عند العدد المشار اليه :

$$x \ln \sqrt{x-3}, 13 - ٩٥ \quad 7^x, 2 - ٩٦$$

اجر التكاملات الآتية :

$$\int (1+e)^x dx - ١٠١ \quad \int du/3^{2u} - ١٠٠ \quad \int x 4^{x^2+6} dx - ٩٩ \quad \int_{-2}^1 10^{-x} dx - ٩٨ \quad \int 5^{3t} dt - ٩٧$$

١٠٢ - كابل تليفون يتكون من سلك نحاسى مغطى بعازل . من المعروف أن سرعة الاشارة تتناسب مع $y^2 \ln(i/y)$ ، حيث y ترمز الى نسبة نصف قطر السلك النحاسى الى سمك العازل . أوجد قيمة y التى تجعل السرعة أكبر مايمكن .

١٠٣ - ليكن المماس للمنحنى $y = e^x + 1$ عند النقطة A يقطع المحور السينى عند B ماهى احداثيات A اذا كانت المسافة $|AB|$ أقل مايمكن ؟

١٠٤ - أوجد أكبر قيمة للدالة $f(x) = x + e^{-2x}$ فى الفترة $[-1, 1]$.

١٠٥ - لاي قيمة لـ x تكون x^x أصغر مايمكن .

١٠٦ - أوجد مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = 2^x$ بين 3 و -3 .

١٠٧ - اثبت أن مساحة المنطقة تحت القطع الزائد $xy = c, c > 0$ بين $b > 0$ و $a > 0$ تساوى مساحة المنطقة تحت القطع الزائد بين $1/b$ و $1/a$.

١٠٨ - أوجد حجم الجسم المتكون بدوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $y = 1/\sqrt{3x-2}$ والمحور السينى والمستقيمين $x = 1$ و $x = 2$ ، حول المحور السينى .

١٠٩ - بدون ايجاد تقريب عشري لاي العددين ، عين ما اذا كانت e^x أكبر أو أصغر من x^e . (ارشاد : ادرس لوغاريتمى العددين) .

اللوغاريتمات يمكن استخدامها لتبسيط تفاضل بعض حواصل الضرب وخارج القسمة والقوى . الطريقة ، وتسمى التفاضل اللوغاريتمى ، موضحة بالمثال الآتى . لايجاد $\frac{d}{dx} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$(٣) \quad y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

فيكون $\ln y = \ln x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2)$. توجد الآن dy / dx باجراء التفاضل الضمني :

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{x(1+x^2)},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x(1+x^2)} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}},$$

حيث عوضنا عن y بقيمتها المعطاه في (٣) . استخدم التفاضل اللوغاريتمي لايجاد مشتقة مايتى :

$$\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1-z^2}} - 112 \quad \frac{\sqrt{4+x^2}}{2x} - 111 \quad (1+ax)(1+bx) - 110$$

$$\frac{x^2 \sqrt{x^2+4}}{\sqrt[3]{15-2x}} - 114 \quad \frac{\sqrt{6+x^2}}{x\sqrt{6-x^2}} - 113$$

١١٥ - أوجد تعبيراً لـ $\frac{d^n}{dx^n} \ln (1-x)$ (ارشاد : من المشتقات القليلة الأولى ضمن المشتقة النونية . اثبت تخمينك بالاستنتاج الرياضي) .

١١٦ - اثبت أن $\log_a x$ دالة متناقصة اذا كان $0 < a < 1$.

١١٧ - اثبت أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$ اذا كانت $a > 1$ (ارشاد : ضع $x = 1/z$)

١١٨ - في برهان $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$ اعتمدنا على أن

$$\lim_{z \rightarrow 0} e^{g(z)} = e^{\lim_{z \rightarrow 0} g(z)}$$

برر هذه العبارة (ارشاد : ضع $f(u) = e^u$ فيكون $f(g(z)) = e^{g(z)}$.

١١٩ - اثبت أن $\lim_{x \rightarrow a} [\ln g(x)] = \ln [\lim_{x \rightarrow a} g(x)]$ بفرض أن $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ تكون موجودة . استخدم

هذه النتيجة لايجاد $\lim_{x \rightarrow 5} (\ln \sqrt{x^2+3})$. تحت أى شروط تكون

$$\lim_{x \rightarrow a} [\ln g(x)] = \ln g(a)?$$

١٢٠ - اوجد تقريبا للعدد e بايجاد قيمة $(1 + 1/x)$ في المعادلة $7 - 28$ عند $x = 10$. اوجد تقريبا أفضل بأخذ $x = 100$.

١٢١ - اثبت أن $1 - 1/x < \ln x < x - 1$ اذا كانت $x > 1$ (ارشاد : $1/x^2 < 1/x < 1$)

١٢٢ - اثبت أن $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x = \sqrt{e}$.

١٢٣ - يبدو من (١) ، (٢) أن $\ln x$ و $\ln (-x)$ لهما نفس المشتقة . لماذا لايمكن استنتاج أن $\ln x = \ln (-x) + c$ لثابت ما C ؟

١٢٤ - اثبت أن المعادلة $x + \ln x = 0$ لها حل . هل المعادلة لها أكثر من حل ؟ استخدم الجداول

لايجاد تقريب لكل حل . (ارشاد : خطط الشكل البياني للدالة $y = x + \ln x$)

١٢٥ - اثبت أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)/x = 0$ (ارشاد : خطط المنحنيين $y = 1/\sqrt{x}$)

و $y = 1/x$ على نفس مستوى الاحداثيات . اثبت أن

$$0 \leq \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \leq \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2(\sqrt{x} - 1)$$

لجميع $x \geq 1$. (ارشاد جزئى : ماذا يمثل التكاملان ؟) . استخدم هذه المتباينة لاثبات أن $\lim_{x \rightarrow \infty} [(\ln x)/x] = 0$. النهاية الثانية تنتج من الأولى باستبدال x بـ $1/x$. اثبت النتيجة $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$ (ارشاد : x^x كقوة لـ e) .

١٢٦ - أثبت أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2$$

(ارشاد : كون حاصل جمع ريمان للدالة $f(x) = 1/(1+x)$ والفترة $[0, 1]$.
١٢٧ - اذا افترضنا صحة المعادلة ٧ - ٢٧ ، فانه يمكننا مباشرة ، من تعريف المشتقة ، اثبات أن $\frac{d}{dx} \log_a x = (1/x) \log_a e$ بالطريقة الآتية :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log_a x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a (x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{x/h} = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{x/h} \right] \\ &= \frac{1}{x} \log_a \left[\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{x/h} \right] = \frac{1}{x} \log_a e. \end{aligned}$$

أضف التفاصيل لهذا البرهان . ماهى خاصية الدالة اللوغاريتمية التى افترضناها عند اجراء تبادل \ln و \lim فى الخطوة قبل الأخيرة ؟ أثبت أن $\log_a e = 1 / (\log_e a)$ حاصلًا على القاعدة ٧ - ٢٣ .

١٢٨ - النظرية ٢ - ١٦ تقول أن $\lim_{x \rightarrow a} g^r(x) = [\lim_{x \rightarrow a} g(x)]^r$ لجميع r الكسرية ، بفرض وجود $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$. عمم هذه النتيجة لجميع قيم r الحقيقية . (ارشاد : ضع $f(z) = z^r$. تحت أى شروط يكون $\lim_{x \rightarrow a} g^r(x) = g^r(a)$ ؟)

٦ - ٧

تطبيقات الدالة الأسية

مسائل عديدة فى الفيزياء والكيمياء تؤدى الى معادلات تفاضلية حلها يحتوى على دوال لوغاريتمية أو أسية . قبل الشروع فى معالجة الأمثلة سندرس الأسلوب الفنى لحل المعادلات التفاضلية النمطية لهذه المسائل . يجب أن يكون القارئ ملما بالطريقة المشروحة فى بند ٤ - ١٥ لحل المعادلات التفاضلية بفصل المتغيرين .

مثال ١ . أوجد الحل $y = f(x)$ للمعادلة التفاضلية (١)

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = 2y$$

حيث $y = 5$ عند $x = 0$.

يمكن إيجاد الحل بفصل المتغيرين واجراء تكامل كل من الطرفين للمعادلة الناتجة :

$$(2) \quad \int \frac{dy}{y} = \int 2dx$$

$$(3) \quad \ln |y| = 2x + C$$

حيث C أى ثابت . المعادلة (١) تتضمن أن أى حل y يجب أن يكون قابلا للتفاضل واذن متصل .
المعادلة (٢) تتضمن ، لوجود y فى المقام ، ان نأمل فى الحصول على الحل المطلوب من بين الحلول التى لاتنعدم أبدا . الدالة المتصلة التى لاتساوى صفرا أبدا ، تكون اما موجبة دائما واما سالبة دائما (لماذا ؟) . بما أن $y = 5$ عند $x = 0$ ، فالحل المطلوب يجب أن يكون بحيث أن y تكون موجبة لجميع x . ومن ثم يمكننا اسقاط علامة القيمة المطلقة فى (٣) ونبحث عن حل من بين الحلول حيث $\ln y = 2x + c$. لحل هذه المعادلة بالنسبة الى y ، نرفع كلا الطرفين الى قوة e ، فيكون

$$e^{\ln y} = e^{2x+c} = e^c e^{2x}$$

بما أن $e^{\ln y} = y$ ، فيكون

$$(4) \quad y = e^c e^{2x}$$

يمكننا تعيين C أو مكافئا لذلك وأكثر ملاءمة تعيين e^c ، من المعلومات أن $y = 5$ عند $x = 0$. بتعويض هذين العددين فى (٤) ، نرى أن $e^c = 5$ وبالتالي (٤) تصبح

$$y = 5e^{2x}$$

على القارىء أن يتحقق أن $f(x) = 5e^{2x}$ تحقق (١) لجميع x وأن $f(0) = 5$. فهذا اذن هو الحل المطلوب . لاحظ أننا لانحتاج لايجاد قيمة C نفسها . يمكن ايجادها ، اذا اردنا ، بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكل من طرفى المعادلة $5 = e^c$ ، وبذلك نحصل على $C = \ln 5$.

مثال ٢ . حل المعادلة التفاضلية

$$(5) \quad (x-5) \frac{dy}{dx} = 2y, \quad y < 0$$

لدينا

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x-5}$$

ومن ثم بالتكامل ، يكون

$$(6) \quad \ln |y| = 2 \ln |x-5| + C = \ln (x-5)^2 + C$$

لأن $y < 0$ فإن $\ln |y| = \ln (-y)$. اذا كان لكل C ، C' هى العدد ، بالضرورة موجب ، حيث $\ln C' = C$ فإن المعادلة (٦) يمكن التعبير عنها بتبسيط أكثر هكذا

$$\ln(-y) = \ln(x-5)^2 + \ln C' = \ln [C'(x-5)^2]$$

لحلها بالنسبة الى y ، يمكننا إما رفع كل من طرفي هذه المعادلة الى قوة e ، كما فعلنا في المثال ١ ، أو مجرد أن نلاحظ أن العددين اللذين لهما نفس اللوغاريتم يجب أن يتساويا . أى من الطريقتين تعطينا

$$y = -C'(x-5)^2, \quad C' > 0$$

يمكن للقارئ إن يتحقق أن هذه الدالة تحقق (٥) لـ C' .

مثال ٣ . حل المعادلة التفاضلية

$$x + 1 + x(e^y + 1)y' = 0$$

لدينا

$$(e^y + 1) dy = -\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

ومن ثم

$$e^y + y = -x - \ln |x| + C$$

هذه المعادلة لا يمكن حلها لـ y . يجب أن نقنع بالحل $y = f(x)$ الذى تعرفه ضمنا .

المواد المشعة مثل الراديوم تبعث بجسيمات على فترات متكررة ، بحيث أن أى كمية معطاة من المادة تتناقص باستمرار أو تتحلل . يحتمل انبعاث جسيم من أى نقطة داخل أو على سطح المادة كما من أى نقطة أخرى . أيضا على فترات قصيرة من الوقت القطع ذات الحجم الواحد تبعث فى المتوسط نفس العدد من الجسيمات ، فالقطع الكبيرة تبعث جسيمات أكثر فى اليوم ، ومن ثم تفقد من حجمها فى اليوم أكثر مما تفقده القطع الصغيرة . هذا يدل على أن الكمية الكبيرة من مادة مشعة تتناقص أولا بسرعة أكبر نسبيا . عندما يصبح حجمها أصغر ، معدل التناقص أيضا يصبح أقل ، وتفقد من حجمها ببطء أكثر فاكثرا . فمثلا ، قطعة من الراديوم كتلتها 80 mg تفقد 40 mg أثناء الـ 1600 سنة الأولى ، وتفقد 20 mg أثناء الـ 1600 سنة التالية ، فقط 10 mg أثناء الـ 1600 سنة التالية . الدراسات العملية والنظرية تبين أنه للقطع الكبيرة نسبيا (1 mg أو أكثر) من مادة مشعة ، معدل التناقص فى الحجم (أو الكتلة) عند أى وقت يتناسب مع الكمية المتبقية عند ذلك الوقت .

نفرض أننا لدينا قطعة من الراديوم يوم كتلتها 100 mg ونريد معرفة الكمية المتبقية بعد 1000 سنة . لتكن M هى كتلة القطعة بعد t من السنوات . فتكون M دالة للزمن t نرسم لها أيضا بالرمز الدالى $M(t)$ معدل التغير فى $M(t)$ عند الزمن t يعطى بالمشتقة dM/dt . الافتراض الفيزيائى أن معدل تغير M عند الزمن t يتناسب مع M يمكن صياغته رياضيا هكذا

• 1 mg (milligram) = 0.001 gram

$$(٧) \quad \frac{dM}{dt} = kM$$

لثابت ما k غير معين بعد . بما أن M متناقصة فانا نتوقع أن k تكون سالبة .

الآن نحل المعادلة التفاضلية (٧) :

$$\frac{dM}{M} = k dt,$$

$$\ln |M| = kt + C.$$

بما أن M موجبة ، فيمكننا حذف علامة القيمة المطلقة ، ويكون لدينا

$$\ln M = kt + C$$

برفع كلا الطرفين الى قوة e لكي نحل المعادلة لـ M ، يكون

$$M = e^{\ln M} = e^{kt+C}$$

أى

$$(٨) \quad M = e^C e^{kt}$$

يجب الآن تعيين الثابتين k و C هذا يتطلب أن نعرف قيمة M عند زمنين معينين . من الحقيقة أن $M = 100$ عند $t = 0$ يمكننا تعيين e^C ، لأنه بتعويض هذين العددين فى (٨) يكون لدينا $e^C = 100$. والمعادلة (٨) تصبح

$$(٩) \quad M = 100e^{kt}$$

لتعيين k يجب أن نعرف قيمة M عند وقت ما t غير 0 ، ولم نعط معلومات كهذه فى منطوق المسألة . من التجارب العملية قد حسب أن أى قطعة من الراديوم ، بصرف النظر عن حجمها ، تتخلل الى نصفها فى 1600 سنة تقريبا . إذن فى حالتنا $M = 50$ عند $t = 1600$ وبتعويض هذين العددين فى (٩)

نحصل على

$$50 = 100(e^k)^{1600}$$

ومن ثم

$$(١٠) \quad e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/1600}$$

يمكننا حل هذه المعادلة لـ k بأخذ اللوغاريتم الطبيعى لكل من الطرفين ، وبذلك نحصل على

$$k = \frac{1}{1600} \ln \frac{1}{2} \approx -0.000433$$

بتعويض هذه فى (٩) يكون لدينا صيغة كمية الراديوم المتبقية بعد t من السنوات :

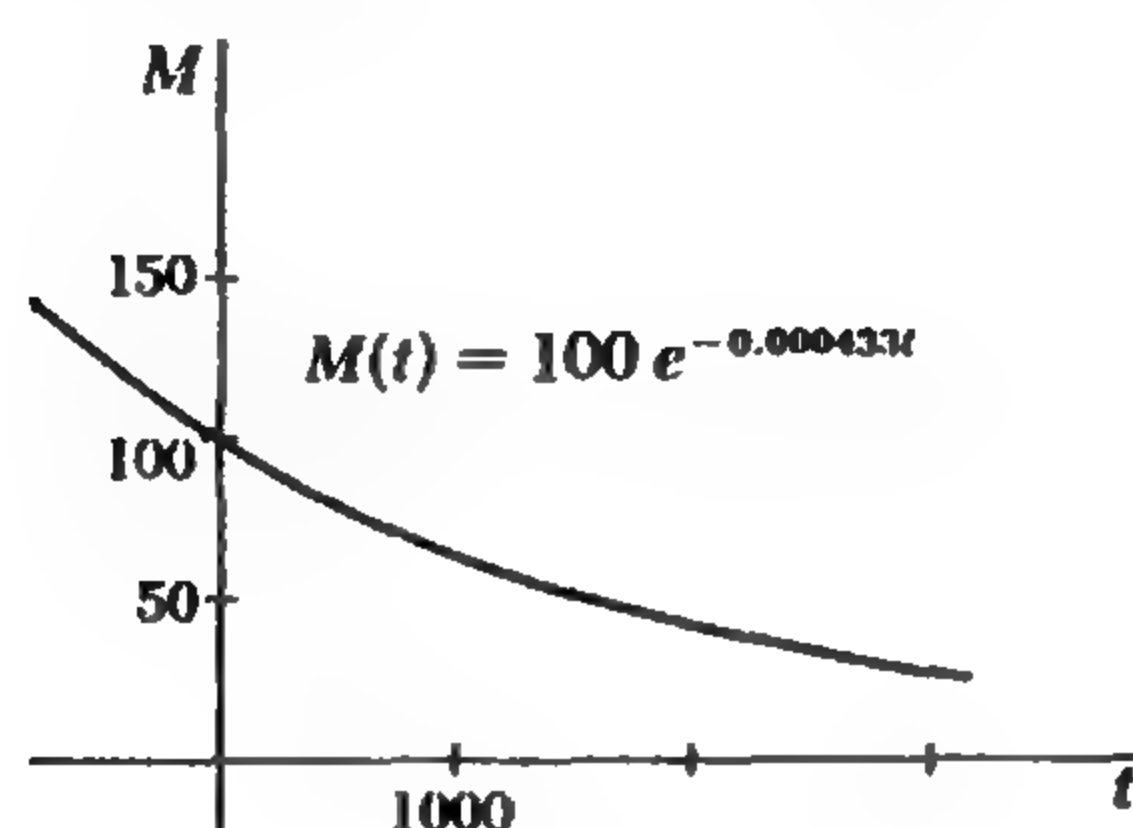
$$(١١) \quad M = M(t) = 100e^{-0.000433t}$$

الشكل البياني لـ M موضح في الشكل ٧-١٦ . وهو دالة متناقصة ، كما نتوقع من طبيعة المسألة .
بعد 1000 سنة تكون الكمية المتبقية هي

$$M(1000) = 100e^{-0.433} \approx 64.86 \text{ mg}$$

قيمة $e^{-0.433}$ نحصل عليها بالاستعانة باللوغاريتمات أو من جدول لقيم e^x .

لاحظ أنه لكي نوجد كمية الراديوم المتبقية بعد 1000 سنة كان علينا أن نوجد أولا صيغة للكمية المتبقية بعد t من السنوات. هذه الطريقة نمطية لمسائل المعادلات التفاضلية .



شكل ٧-١٦

مقدار الراديوم بالمليجرام بعد t من السنوات .

صورة أخرى لـ M ، تكون لبعض الأغراض أكثر ملاءمة من (١١) ، يمكن إيجادها ليس بإيجاد k وإنما بإيجاد $t_{1/2}$. بالتعويض عن t في (9) بقيمتها المعطاة في (١٠) ، يكون لدينا

$$M(t) = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{t/1600}.$$

من هذه ، يكون

$$M(1000) = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{5/8} \approx 64.86 \text{ mg},$$

كما سبق

معادلة (٧) ، وبالتالي المعادلة (٨) ، صحيحة لكل المواد المشعة . الزمن المطلوب لأي مادة مشعة لتحلل إلى نصف حجمها الحالي يسمى عمر النصف . العدد يعتمد فقط على المادة ، وليس على الكمية (انظر تايخ قطعة الراديوم التي كتلتها 80 mg التي شرحت سابقا) ، ويعين الثابت k في المعادلة (٨) . أعمار النصف قد تختلف من ملايين السنين إلى كسر صغير من الثانية . لقد رأينا أن عمر النصف للراديوم هو 1600 سنة ، عمر النصف للثوريوم هو 1.65×10^{10} سنة ، بينما لمادة البولونيوم 213 هو 4.2×10^{-6} ثانية . هذه المواد قصيرة العمر جدا يمكن مشاهدتها في المعامل فقط .

مسألة التحلل المشع هي نموذج لنوع كبير من السائل التي فيها تتغير كمية معينة بمعدل يتناسب مع مقدار الكمية عند ذلك الوقت . الكمية قد لا تتناقص بل يمكن أن تكون متزايدة ، كما في مزرعة البكتريا أو سكان بعض أقطار . في جميع هذه المسائل طريقة الحل معادلة لمسألة التحلل المشع ، والتعبير للكمية الموجودة عند أي وقت يتضمن دالة أسية .

المعادلتان (٨) و (٩) حيث $k = I$ توضحان ، عرضا ، أن الدوال غير الصفريية التي تساوي مشتقاتها هي فقط تلك التي تكون على الصورة e^{kt} ، حيث A ثابت .

مثال ٤ . دلو به ماء يغلي عند درجة حرارة 100°C ، وضع في العراء حيث درجة الحرارة تكون 10°C . قانون نيوتن للتبريد يقول أن الشيء المغمور في وسط أبرد يفقد حرارة بمعدل يتناسب مع الفرق في الحرارة بين الشيء والوسط المحيط به . إذا كان بعد 20 min درجة حرارة الماء قد انخفضت إلى 60° ماذا ستكون درجة الحرارة بعد 1 hr ؟

لتكن $T = T(t)$ درجة حرارة الماء بعد $t \text{ min}$ فيكون dT/dt هو معدل تغير T ، وقانون نيوتن يمكن صياغته رياضيا هكذا

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 10)$$

حيث k ثابت التناسب ، وهو غير معلوم بعد . نحل هذه المعادلة :

$$\frac{dT}{T - 10} = k dt,$$

$$\ln |T - 10| = kt + C. \quad (12)$$

من الاعتبارات الفيزيائية ، درجة حرارة الماء لا يمكن أن تهبط عن درجة الهواء . إذن $T > 10$ ، والمعادلة (١٢) تصبح

$$\ln (T - 10) = kt + C$$

واذن

$$T - 10 = e^{\ln (T - 10)} = e^{kt + C}$$

ومنها

$$T = 10 + e^C e^{kt} \quad (13)$$

عندما $T = 100$ و $t = 0$ ، واذن $100 = 10 + e^C$ ومنها $e^C = 90$ والمعادلة (١٣) تصبح

$$T = T(t) = 10 + 90e^{kt} \quad (14)$$

لايجاد k ، نستخدم الشرط الحدى الثانى $T(20) = 60$. هذا الشرط مع (١٤) يستلزمان

$$60 = 10 + 90e^{20k},$$

$$e^{20k} = \left(\frac{5}{9}\right)^{1/20}.$$

وإذن

بدلا من إيجاد k والتعبير عن t بدلالة قوة لـ e ، سنعوض عن e^{kt} فى (١٤) بقيمتها التى أوجدناها ، ونحصل على

$$T = T(t) = 10 + 90\left(\frac{5}{9}\right)^{t/20} \quad (١٥)$$

بعد 60 min يكون

$$T(60) = 10 + 90\left(\frac{5}{9}\right)^3 \approx 25.4^\circ\text{C}$$

وفقا للمعادلة (١٥) ، درجة حرارة الماء لن تصل أبدا لدرجة حرارة الهواء المحيط به اذ أن الحد الأخير من حاصل الجمع لايمكن أن يكون صفرا . لا يوجد هنا تناقض . لأن قانون نيوتن هو فقط تقريبي ولايميل لان يكون صحيحا للفترات الطويلة من الزمن .

مسائل

١ - أوجد حلا للمعادلة $dy/dx = 2y$ فى مثال ١ بحيث أن $y = -3$ عند $x = 2$.
حل المعادلات التفاضلية الآتية :

$$٢ - \frac{dy}{dx} = x^2y \quad ٣ - \frac{dy}{dx} = xy^2 \quad ٤ - \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad ٥ - \frac{du}{dt} = \frac{u}{t}$$

$$٦ - xy' = 2y \quad ٧ - \frac{dy}{dx} = 5(y+b) \quad ٨ - \frac{ds}{dx} = \frac{s+3}{x} \quad (x-3)y' = a$$

$$١٠ - e^t \frac{dx}{dt} - 2 = 0 \quad ١١ - xy' + x^3 = 1 \quad ١٢ - x \frac{dx}{dt} + tx^2 = t \quad ١٣ - \sqrt{2rz} \frac{dz}{dr} = 1$$

$$١٤ - (x+1)^2 \frac{dy}{dx} + \sqrt{y+1} = 0 \quad ١٥ - (\csc x) \frac{dy}{dx} = \frac{y}{y+1} \quad ١٦ - \frac{dy}{dx} = 2e^{x-y}$$

أوجد حلا $y = f(x)$ للمعادلات التفاضلية الآتية يحقق الشرط الحدى المعطى :

$$١٧ - \frac{dy}{dx} = 2y, f(0) = 1 \quad ١٨ - \frac{dy}{dx} = -3y, f(1) = 2 \quad ١٩ - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}y, f(0) = -1$$

$$٢٠ - \text{عند } x = -6 \quad x \frac{dy}{dx} - y = 0, y = 2 \quad ٢١ - \text{عند } x = 0 \quad x = 0 \quad 3 \frac{dy}{dx} = yx, y = -3$$

$$٢٢ - \text{عند } x = 2 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y+1}{x^2}, y = 0$$

فى المسائل الآتية أوجد دالة f وثابت k يحققان المعادلة التفاضلية $f'(x) = k f(x)$ والشروط الحدية المعطاة . عبر عن $f(x)$ بصورتين ، احدهما تحتوى على قوة لـ e والاخرى تحتوى على قوة لعدد آخر .

$$23 - f(0) = 1, f(1) = 6 \quad 24 - f(0) = 20, f(1) = 10 \quad 25 - f(1) = 4, f(3) = 12$$

26 - اثبت أن $w = a + b/r$ ، حيث a و b ثابتان اختياريان ، هو حل للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dw}{dr} = 0$$

هل يمكنك إيجاد هذا الحل ؟ (ارشاد : ضع $z = dw/dr$) .

27 - (أ) لقطعة الراديوم التى كتلتها 100 gm التى سبق دراستها فى الكتاب ، أوجد الكمية المتبقية بعد 500 سنة ، بعد 4800 سنة ، منذ 1600 سنة ، منذ 500 سنة . (ب) كم من الزمن ستأخذ قطعة من الراديوم كتلتها 100 mg لتحلل الى ربع حجمها الاصلى ؟ هل كان يمكن توقع هذه النتيجة ؟

28 - أثبت أن عمر النصف لمادة مشعة يكون مستقلا عن الكمية الاصلية . (ارشاد : حل المعادلة التفاضلية لكن افترض أنه عند الابتداء كانت كتلة القطعة M_0 mg) .

29 - لقد قيل فى الكتاب أن الرقم 1600 سنة لعمر النصف للراديوم قد عين بتجربة معملية . صف مثل هذه التجربة .

30 - منحنى يمر بالنقطة $(0, 6)$ وميله عند كل نقطة (x, y) عليه هو $y - 2$. أوجد معادلته .

31 - عمر النصف لـ 90 strontium هو 27 سنة . لكمية كتلتها 150 mg كم يكون المتبقى بعد 5 سنوات ؟

32 - اذا كان 10 mg من النظير المشع Cobalt 60 يتحلل الى 8.77 mg فى سنة واحدة ، ماهو عمر النصف لـ Cobalt 60 ؟

33 - مستعمرات البكتيريا تزايد بمعدل يتناسب مع العدد الموجود عند أى لحظة . مزرعة بكتيريا بدأت بـ 500 بكتيريا ، وبعد 6 hr العدد زاد الى 1500 . كم يكون العدد بعد يوم من الابتداء ؟ متى سيكون العدد 100,000 بكتيريا ؟

34 - فى سنة 1960 كان عدد سكان مدينة معينة 100,000 وفى سنة 1970 كان 130,000 . بافترض أن عدد السكان يزداد بمعدل يتناسب مع عدد الاشخاص عند أى زمن معطى ، ماذا سيكون عدد السكان فى سنة 1980 ؟ متى سيصل عدد السكان الى 200,000 ؟

35 - المعدل الحالى لزيادة عدد السكان فى الهند تقريبا 2.5 فى المائة كل سنة . بافترض أن عدد السكان يزداد بمعدل يتناسب مع عدد السكان عند أى وقت معطى ، اثبت أن عدد السكان يتضاعف كل 28 سنة .

36 - عمر النصف للنظير المشع Iodine 131 هو 8 أيام . اذا حقن مريض بكمية معينة كم من الزمن يمر قبل أن يتناقص الـ iodine الى المقدار غير المضر 0.1 فى المائة من الكمية الاصلية ؟

٣٧ - عندما يرتفع معدل تغير الضغط الجوى بالنسبة للارتفاع يتناسب مع الضغط عند الارتفاع . اذا كان الضغط عند سطح البحر هو 30 in من الزئبق وعند ارتفاع 10000 ft هو 21 in ، فاوجد الضغط عند قمة افرست ، التى تكاد تكون على ارتفاع 30,000 ft .

٣٨ - كل عضو حيوى يحتوى على كربون ، كسر صغير منه يمكن قياسه هو النظير المشع carbon 14 والباقى كربون خامل . هذا الكسر واحد لجميع الاعضاء الحىوية . بعد موت العضو يظل الكربون الخامل ثابتا ، لكن carbon 14 المشع ، لايتجدد بعد ذلك ، فيتناقص ، وبذلك يتناقص الكسر . عمر النصف لـ carbon 14 هو 5570 سنة . هذا يعنى أن العضو الميت مثل حيوان ، أو حيوان رخوى ، أو نبات التى بقاياها تحتوى على كربون 50 فى المائة من الكسر carbon 14 للعضو الحى قد مضى على موته 5570 سنة . كربون من بقايا خشب وجد فى سنة 1965 فى فجوة حجرية يحتوى على 62.2 فى المائة من الكسر الاصلى لـ carbon 14 . اثبت أن هذا الجزء من الحفرة قد بنى حوالى عام 1850 قبل الميلاد

٣٩ - قطعة حديد سخنت لدرجة حرارة 1000° F وضعت فى العراء حيث درجة الحرارة 60° F . اذا كان بعد ساعتين درجة حرارة القطعة قد هبطت الى 500° F ، متى ستكون درجة حرارتها 100° F .

٤٠ - سكر خام فى محلول يتغير الى مواد أخرى بمعدل يتناسب مع كمية السكر الخام المتبقية . اذا كان 100 lb من السكر الخام تختزل الى 40 lb فى 6 ساعات ، ما هو المتبقى بعد 24 ساعة ؟

٤١ - مكعب من الثلج ، طول ضلعه 10 in ، يبدأ فى الذوبان . حيث أن الهواء المحيط به يكون ملاصقا لسطح المكعب فقط ، من المعقول أن نفترض أن المكعب يذوب بمعدل يتناسب مع مساحة سطحه . اذا كان بعد ساعة واحدة المكعب الاصلى قد تناقص الى مكعب طول ضلعه 6 in ، فمتى سيدوب كلية ؟

٤٢ - عجلة نقطة تتحرك على المحور السينى تتناسب مع السرعة v أوجد موضع وسرعة النقطة عند الزمن t اذا كان $x = 0$ و $v = 8$ عند $t = 0$ وكان $v = 2$ عند $t = 5$.

٤٣ - الكابل المتحد المحور هو سلك محاط بعازل مغطى بغلاف معدنى موصل . يسير التيار فى السلك والغلاف . عند أى نقطة فى العازل على بعد r من محور السلك ، الجهد الكهربى V الناتج عن التيار فى السلك والغلاف يحقق المعادلة التفاضلية .

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} = 0$$

اثبت أن $V = a + b \ln r$ ، حيث a ، b ثابتان اختياريان هو حل لهذه المعادلة . هل يمكنك الحصول على هذا الحل ؟ اذا كان الجهد صفرا عند نقطة 0.3 cm من المحور والجهد 5 عند نقطة 1.1 cm من المحور ، أوجد الجهد عند نقطة تبعد 1 cm من المحور .

٤٤ - الجسم الهابط في وسط مقاوم ، مثل الهواء ، توجد بالإضافة الى القوة الناتجة عن الجاذبية لأسفل قوة لأعلى ناتجة عن مقاومة الوسط ، التي للسرعات العادية تتناسب مع سرعة الجسم . اذا كان خط الاحداثيات متجها لأسفل ، فهذا يعنى ان مقدار القوة المؤثرة ليس mg بل $mg - kv$ ، حيث الثابت k يعتمد على المقاومة وحيث m هي كتلة الجسم ، v سرعته . معادلة الحركة هي $ma = F = mg - kv$ ، حيث a هي العجلة . (أ) اذا كانت السرعة الابتدائية هي $v_0 \text{ ft / sec}$ ، اثبت أن السرعة بعد $t \text{ sec}$ تعطى بالصيغة

$$v(t) = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k} \right) e^{-k/m t}$$

(ب) اثبت أنه بصرف النظر عن السرعة الابتدائية فان السرعة تقترب من العدد mg/k ، ويسمى السرعة النهائية للجسم . (ج) عين عامل المقاومة k لبارشوت بحيث أن رجل مظلات كتلته 180 lb يقفز من ارتفاع $10,000 \text{ ft}$ يصطدم بالأرض بسرعة لا تزيد عن 6 ft / sec (ارشاد : اثبت أن $v(t) < mg/k$ لجميع $k > 0$) .

تعريفات التعبيرات الاقتصادية المستخدمة في المسألتين ٤٥ و ٤٦ معطاة في البند ٤ - ١٣ .
٤٥ - من مبدأ في الاقتصاديات أنه عندما يزيد المعروض من سلعة عن الطلب ، يهبط الثمن بمعدل بحيث أن الزيادة (المعروض ناقصا الطلب) تنقص بمعدل يتناسب مع الزيادة عند ذلك الوقت . اذا كان المعروض $\sigma(p)$ والمطلوب $\phi(p)$ كلاهما دالة خطية للثمن $p = p(t)$ ، أى كان

$$\phi(p) = a_2 p + b_2 \quad \text{و} \quad \sigma(p) = a_1 p + b_1$$

لبعض الثوابت a_1, b_1, a_2, b_2 حيث $a_1 > a_2$ ، فاثبت أن $p(t) = \bar{c} + (p_0 - \bar{c}) e^{-kt}$ ، حيث k ثابت موجب $p_0 = p(0)$ وحيث $c = -(b_1 - b_2) / (a_1 - a_2)$. ما هي القيمة النهائية للثمن $p(t)$ عندما تتزايد t ؟

٤٦ - الطلب والعرض لسلعة عند أى وقت t لا يعتمدان فقط على سعرها $p(t)$ لكن ايضا على اتجاه السعر ، أى $p'(t)$. ثمن البن عن زمن معين 30 cents للرتل وبعد t شهرا الطلب يعطى بالصيغة $100 - 3p(t) + 10p'(t)$ والعرض بالصيغة $20 + 2p(t) + 60p'(t)$. أوجد الثمن كدالة للزمن t الذى يجعل العرض مساويا للطلب في جميع الأوقات .

٤٧ - اذا كانت $f(x)$ هي عدد الاشخاص في الولايات المتحدة الامريكية الذين دخلهم السنوى مقداره x دولارا أو أكثر ، فمن المعروف أن $f'(x) = cf(x)/x$ حيث c ثابت ما موجب . أوجد $f(x)$ اذا علم أن 100 مليون شخص دخل كل منهم 52000 أو أكثر ، وأن 20 مليون شخص دخل كل منهم 6000 أو أكثر . كم من الاشخاص دخل كل منهم مقداره $\$10,000$ أو أكثر ؟ كم من الاشخاص دخل كل منهم يتراوح بين $\$10,000$ و $\$20,000$ ؟

الفصل الثامن

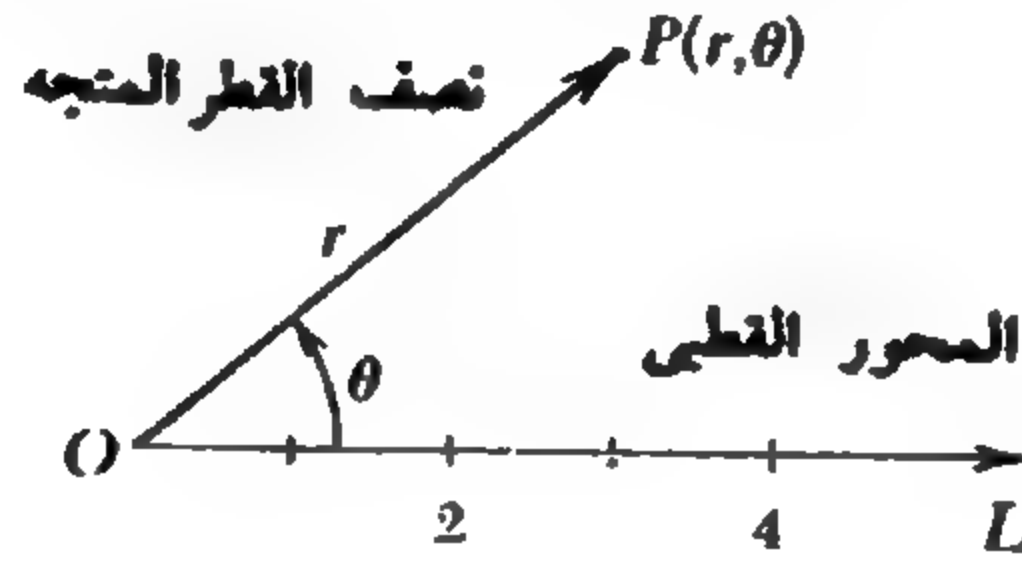
الاحداثيات القطبية

٨ - ١

الاحداثيات القطبية

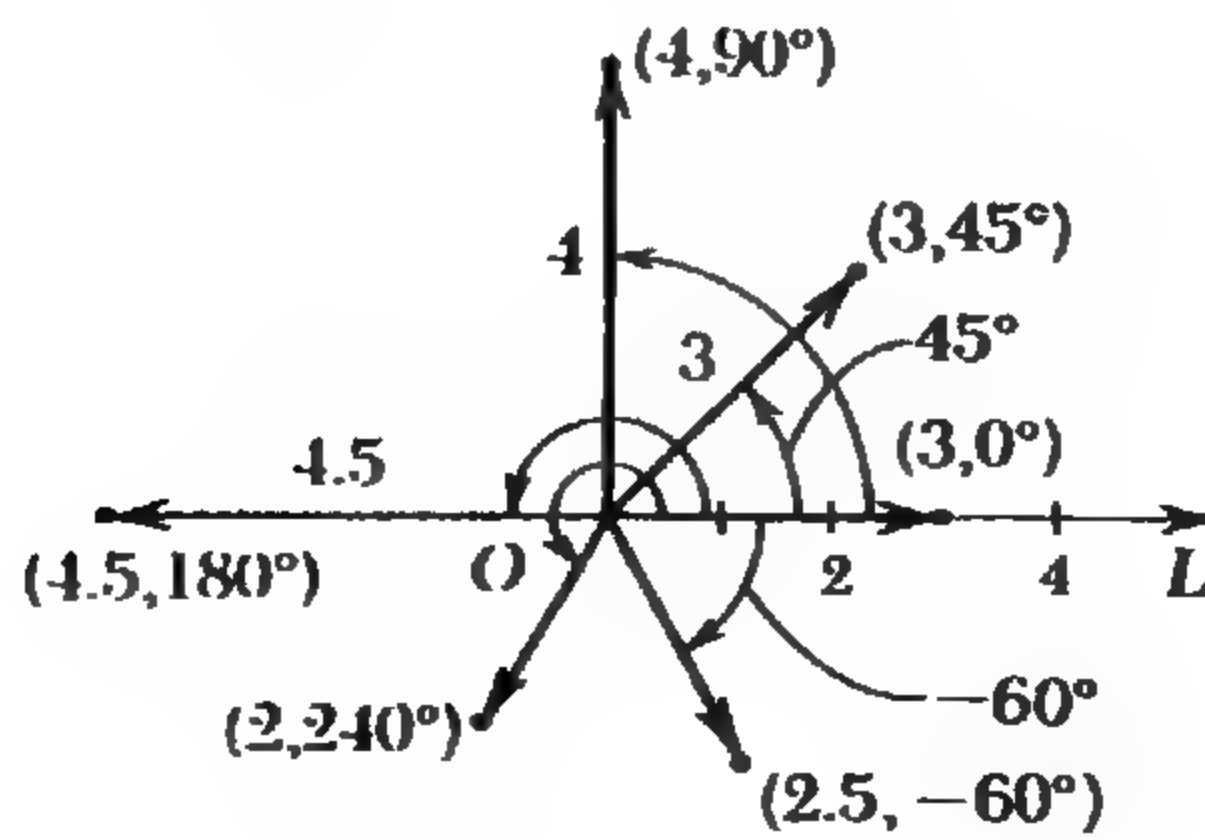
الاحداثيات الكارتيزية تعين النقطة باعطاء بعدها عن مستقيمين متعامدين . في هذا البند سندرس طريقة أخرى لتعيين النقط في مستوى وهي أكثر ملاءمة لبعض الأغراض .

ليكن L هو النصف الموجب لخط الاحداثيات في المستوى حيث نقطة الاصل يرمز لها بالحرف O (شكل ٨ - ١) . لأي نقطة P في المستوى لتكن r طول القطعة OP ولتكن θ هي مقياس الزاوية



شكل ٨ - ١

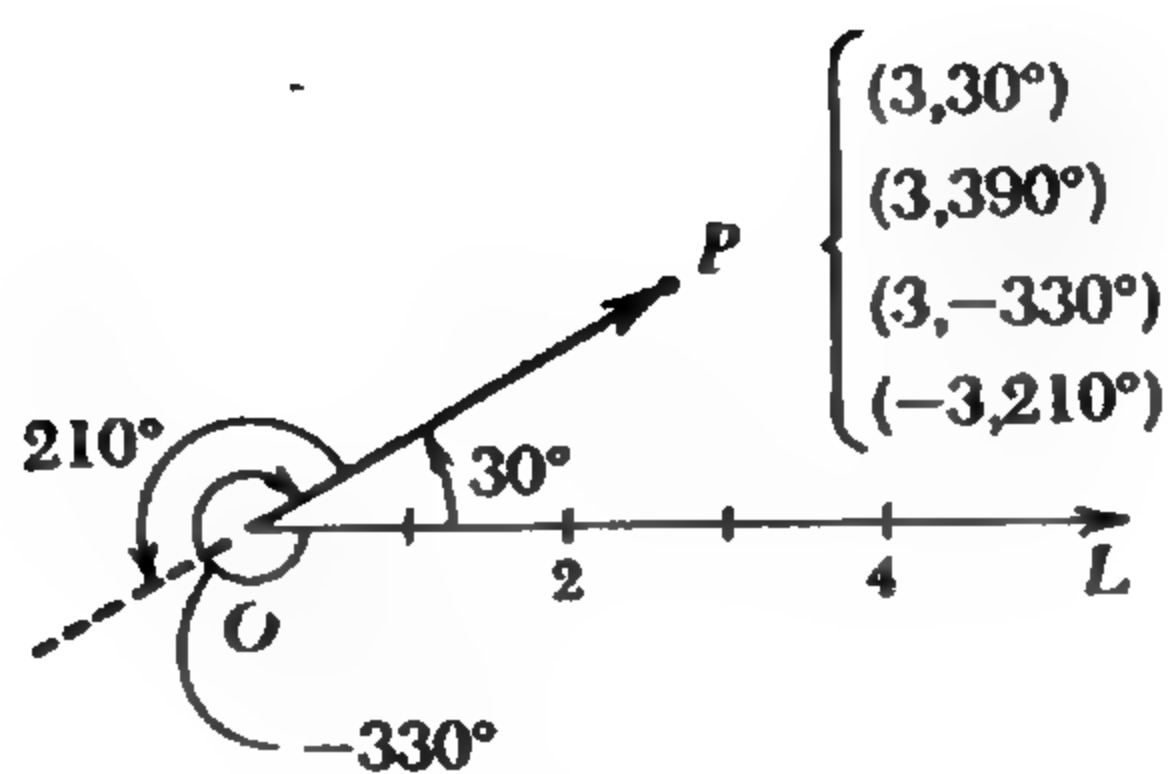
LOP التي ضلعها الابتدائي على L وضلعها النهائي على الخط المستقيم OP . زوج الاعداد (r, θ) يعين P ويسمى احداثياتها القطبيتان . نقط متعددة باحداثياتها القطبية موضحة في الشكل ٨ - ٢ . لاحظ أن الاحداثي r دائما يعطى أولا . الشعاع L يسمى المحور القطبي ، النقطة O تسمى القطب أو نقطة الاصل ، والقطعة المستقيمة OP تسمى نصف القطر المتجه للنقطة P .



شكل ٨ - ٢

طريقة شكلية ومفيدة للنظر الى الاحداثيات القطبية هي أن تتصور نفسك واقفا عند نقطة الأصل O وملتفتا على طول المحور القطبي L . ادر نفسك حتى تجد نفسك ملتفتا على طول الخط OP . الزاوية θ التي أدت نفسك خلالها تكون موجبة أو سالبة طبقا دورائك ضد اتجاه عقرب الساعة أم في اتجاه عقرب الساعة . الان سر الى الامام على الخط OP الى أن تصل P . المسافة التي سرتها هي r .

النقطة يمكن أن يكون لها زوج واحد فقط من الاحداثيات الكارتيزية ، لكن يمكن أن يكون لها أكثر من زوج من الاحداثيات القطبية . النقطة $P(3,30^\circ)$ في شكل ٨ - ٣ أيضا لها الاحداثيات

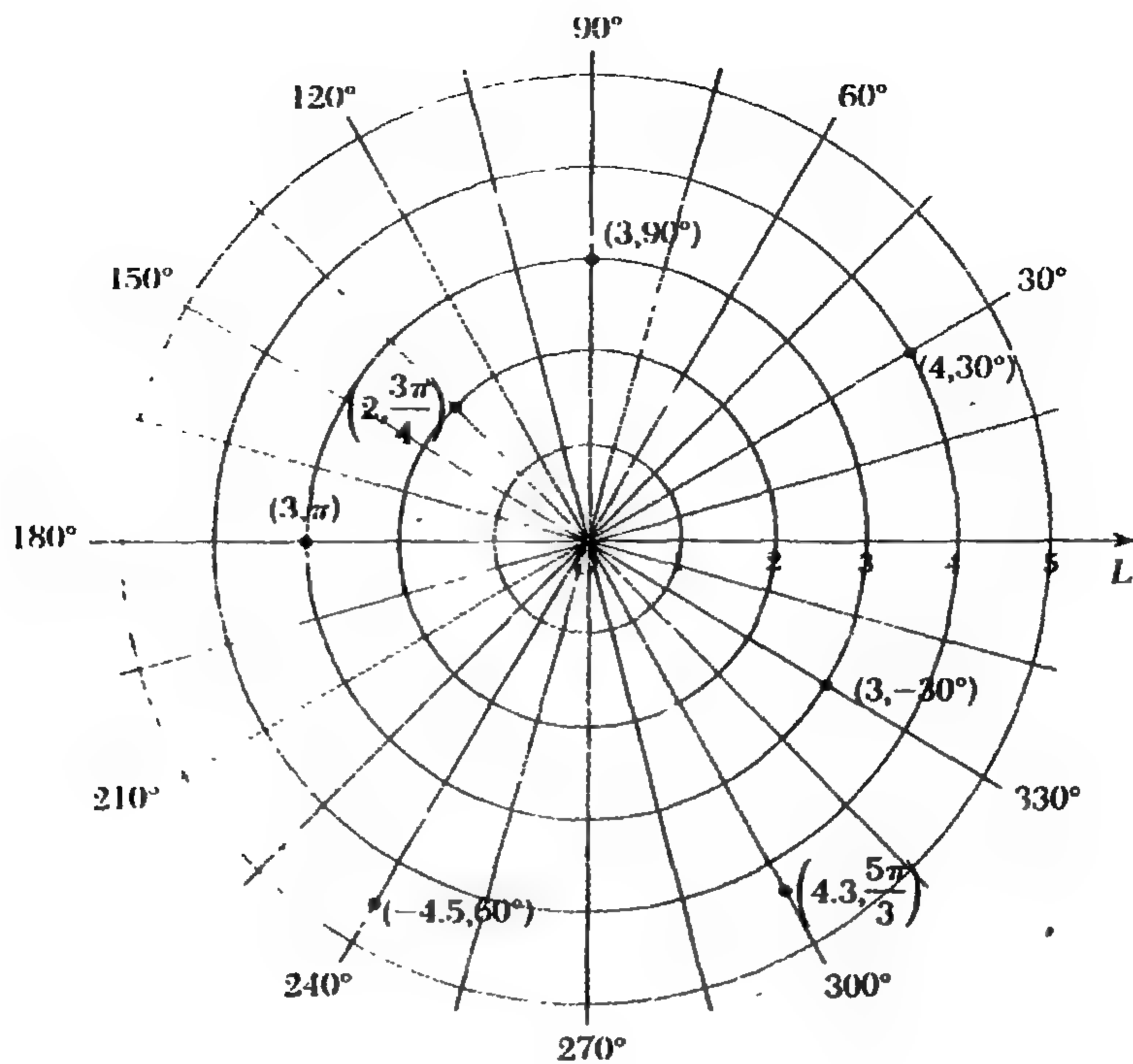


شكل ٨ - ٣

$(3, -330^\circ)$, $(3, 750^\circ)$, $(3, 390^\circ)$ واحداثيات أخرى نحصل عليها باضافة مضاعفات لـ 360° الى 30° . من المناسب في الاحداثيات القطبية أن نجعل المسافة r سالبة مثلما نجعلها موجبة . بهذا الاصطلاح ، احداثيات قطبية أخرى للنقطة $P(3, 30^\circ)$ هي $(-3, 210^\circ)$. لترى لماذا هذه تكون احداثيات ، ادر نفسك زاوية 210° ، لتصبح ملتفتا مباشرة بعيدا عن P . الان سر للخلف مسافة 3 ، فتصل للنقطة P .

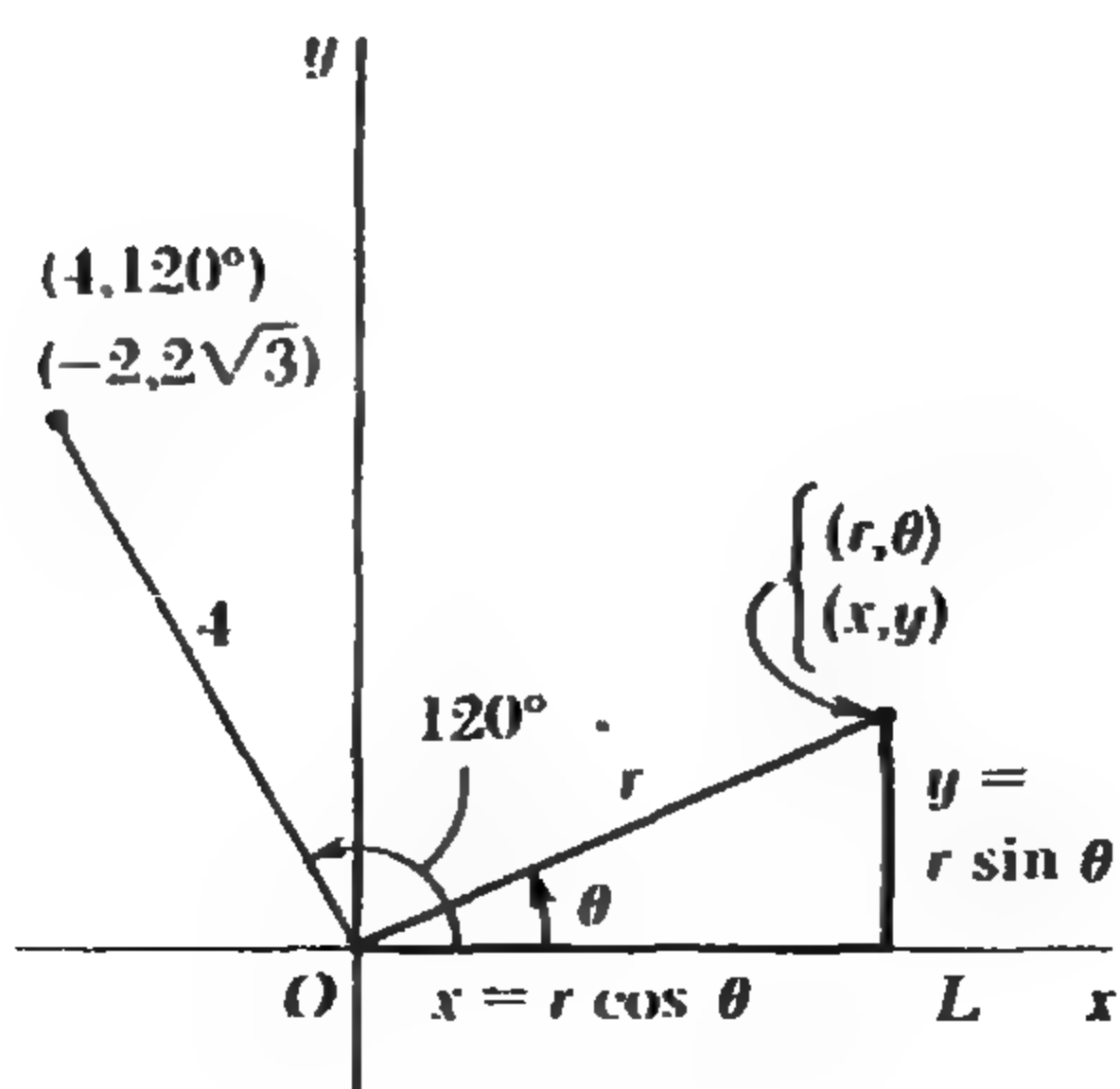
r السالبة تعنى سيرا للخلف . نقطة الاصل غير عادية في أن لها الاحداثيات (r, θ) لأي زاوية θ . زاوية الاحداثي القطبي تقاس عادة بالتقدير الدائري .

ورق احداثيات قطبية خاص عليه نموذج من الاشعة والدوائر المتحدة المركز مثل ذلك الموضح في الشكل ٨ - ٤ يبسط تعيين مواقع النقط وتخطيط المنحنيات المعطاة بمعادلات احداثيات قطبية .



شكل ٨ - ٤

إذا وضع نظام الإحداثيات الكارتيزيه ونظام الإحداثيات القطبية على مستوى بحيث أن نقطتي الأصل لهما تنطبقان ويحيث المحور القطبي يقع على المحور السيني الموجب (شكل ٨ - ٥) ،



شكل ٨ - ٥

فان كل نقطة فى المستوى لها زوج من الاحداثيات القطبية (r, θ) كما لها زوج من الاحداثيات الكارتيزية (x, y) . من تعريف الدوال المثلثية ، $y/r = \sin \theta$ و $x/r = \cos \theta$ اذا كانت $r > 0$. ومن ثم يكون

$$(1) \quad y = r \sin \theta. \quad \text{و} \quad x = r \cos \theta$$

المعادلتان أيضا صحيحتان اذا كانت $r \leq 0$. هاتان المعادلتان تمكنا من ايجاد الاحداثيين الكارتيزيين لنقطة معلوم احداثياها القطبيين . فمثلا ، النقطة التى احداثياها القطبيان $(4, 120^\circ)$ لها الاحداثيات الكارتيزيان $y = 4 \sin 120^\circ = 2\sqrt{3}$ و $x = 4 \cos 120^\circ = -2$ (شكل ٨ - ٥) . من (١) ، $y/x = \tan \theta$ و $x^2 + y^2 = r^2$. وبالتالي يكون

$$(2) \quad r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

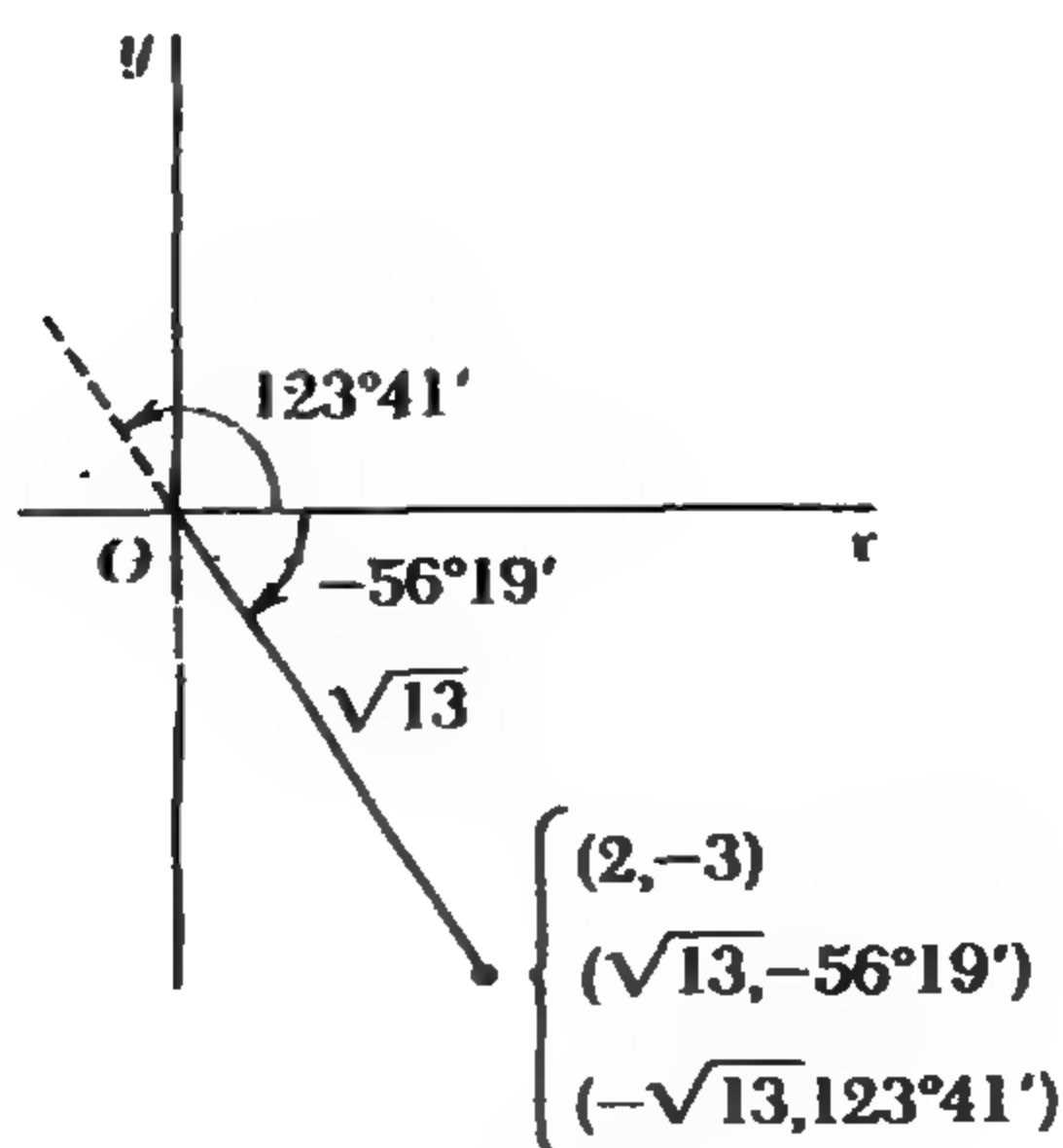
$$(3) \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

حيث $\tan^{-1}(y/x)$ يمكن أن تكون أى من الزوايا التى ظلها هو y/x . تعدد الاختيارات لـ r, θ يعكس الحقيقة أن النقطة ليس لها زوج وحيد من الاحداثيات القطبية . المعادلتان (٢) تمكنا من ايجاد الاحداثيات القطبية لنقطة معلوم احداثياها الكارتيزيان .

النقطة التى احداثياها الكارتيزيان هما $(2, -3)$ لهما الاحداثيان القطبيان

$$\theta = \tan^{-1} (-3/2) \approx -56^\circ 19', \quad r = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

(شكل ٨ - ٦) . احداثيان قطبيان آخران هما $(-\sqrt{13}, 123^\circ 41')$. يجب علينا أن نحرص عند استخدام المعادلتين (٢) على اختيار العلامة الصحيحة لـ r التى تتفق مع اختيارنا لـ θ .



شكل ٨ - ٦

عندما نستخدم نظامى الاحداثيات الكارتيزية والقطبية فى آن واحد أو نغير من نظام الى آخر ، سنفترض أنهما موضوعان كما شرحنا أعلاه .

مسائل

عين مواقع النقط التى احداثياتها القطبية معطاة :

- ١ - $(2, 60^\circ)$ ٢ - $(1, 180^\circ)$ ٣ - $(0, 17^\circ)$ ٤ - $(4, \pi/4)$ ٥ - $(-1, 60^\circ)$
 ٦ - $(2, 0)$ ٧ - $(1.8, 315^\circ)$ ٨ - $(2, -90^\circ)$ ٩ - $(3, -300^\circ)$ ١٠ - $(5, 420^\circ)$
 ١١ - $(-4.3, 140^\circ)$ ١٢ - $(-1, \pi)$ ١٣ - $(-2, -\pi/6)$

أوجد مجموعتين أخريين من الاحداثيات القطبية ، احدهما بها الاشارة العكسية لـ r ، لكل من النقط المعطاه احداثياتها القطبية أدناه :

- ١٤ - $(4, 60^\circ)$ ١٥ - $(-2, 225^\circ)$ ١٦ - $(2, -15^\circ)$ ١٧ - $(1, \pi/3)$
 ١٨ - $(3.3, -\pi/2)$ ١٩ - $(-4, 53^\circ)$ ٢٠ - $(-0.5, 3\pi/4)$ ٢١ - $(0, 0)$

أوجد الاحداثيات الكارتيزية للنقط التى احداثياتها القطبية معطاة :

- ٢٢ - $(0, 0)$ ٢٣ - $(1, 90^\circ)$ ٢٤ - $(4, 180^\circ)$ ٢٥ - $(0, -\pi)$ ٢٦ - $(1, 3\pi/2)$
 ٢٧ - $(-2, -3\pi/2)$ ٢٨ - $(2, 30^\circ)$ ٢٩ - $(-3, -60^\circ)$ ٣٠ - $(-2, -\pi/4)$ ٣١ - $(6, 3\pi/4)$
 ٣٢ - $(-2, -\pi/3)$ ٣٣ - $(1, -5\pi/6)$ ٣٤ - $(4.5, 230^\circ)$

أوجد احداثيات قطبية للنقط التى احداثياتها الكارتيزية معطاة :

- ٣٥ - $(0, 0)$ ٣٦ - $(3, 0)$ ٣٧ - $(0, 1)$ ٣٨ - $(0, -5)$ ٣٩ - $(-2, 0)$
 ٤٠ - $(8, 8)$ ٤١ - $(4, -4)$ ٤٢ - $(-3, -3)$ ٤٣ - $(-1, \sqrt{3})$ ٤٤ - $(-2\sqrt{3}, 2)$
 ٤٥ - $(-4\sqrt{3}, 4)$ ٤٦ - $(2, 5)$ ٤٧ - $(8, -3)$

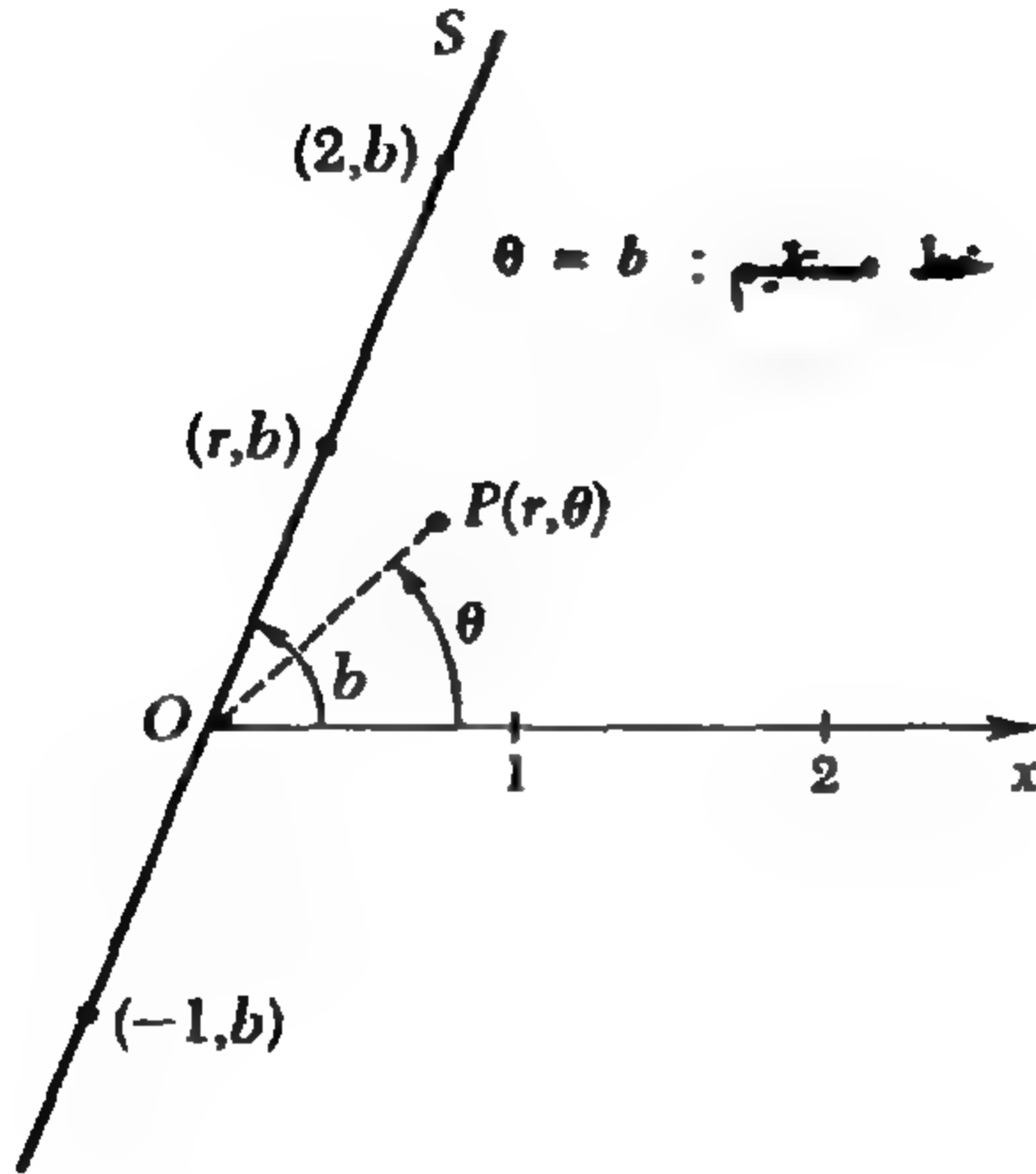
٨ - ٢

الاشكال البيانية للمعادلات الاحداثيات القطبية

كما فى الاحداثيات الكارتيزية ، المعادلات فى الاحداثيات القطبية لها اشكال بيانية . الشكل البيانى لمعادلة فى الاحداثيات القطبية θ و r تعرف بأنها فئة جميع النقط التى كل منها له زوج ما من الاحداثيات القطبية يحقق المعادلة . ليس ضروريا أن جميع الاحداثيات الممكنة للنقطة تحقق المعادلة حتى تكون النقطة على الشكل البيانى . فمثلا ، زوج الاحداثيات $(1, 45^\circ)$ لا يحقق

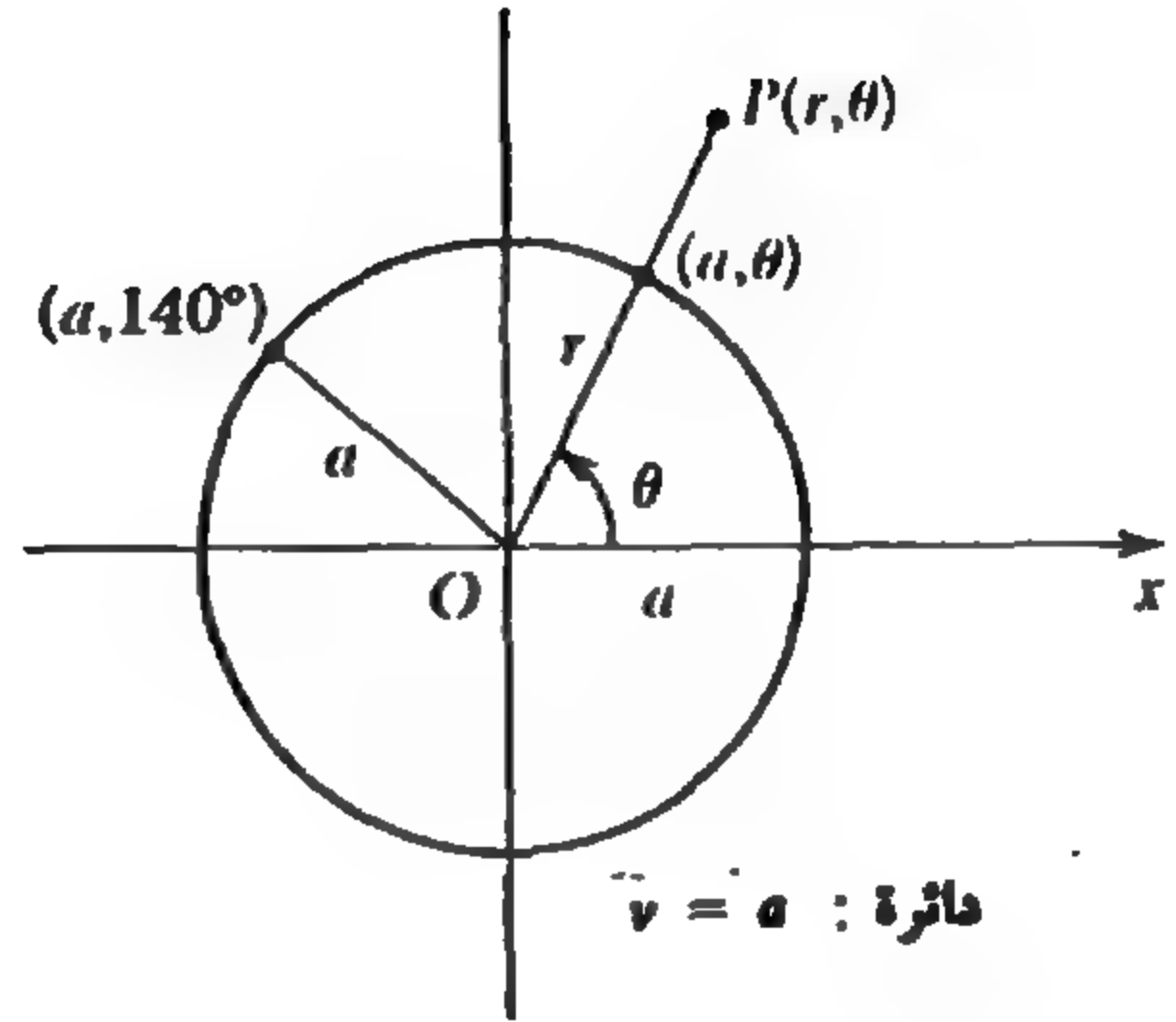
المعادلة $r = \tan \theta$. لكن رغما من ذلك ، النقطة $P(1, 45^\circ)$ تكون على الشكل البياني لان زوجا آخر لاحداثيات P ، $(-1, 225^\circ)$ ، يحقق المعادلة .

نبدأ بالمنحنى البسيط $r = a$. حيث أن متغيرا واحدا موجود ، فإن قيم الاحداثى الآخر يمكن أن تكون اختيارية . ولان الاحداثيين (a, θ) يحققان المعادلة لاي θ وأي زوج (r, θ) لا يعمل ذلك ما لم تكن $r = a$ ، فالمنحنى يتكون من جميع النقط (a, θ) (شكل ٨ - ٧) . هذه تكون دائرة نصف قطرها a ومركزها عند نقطة الاصل . ومن ثم الدائرة هي الشكل البياني للمعادلة . المنحنى $\theta = b$ هو الخط المستقيم الذى يمر بنقطة الاصل ويصنع زاوية b مع المحور القطبى (شكل ٨ - ٨) . أى نقطة على هذا الخط ، وفقط مثل هذه النقطة ، لها الاحداثيات (r, b) لقيمة ما لـ r .



شكل ٨-٨

النقطة P على الخط المستقيم S إذا كانت $\theta = b$.



شكل ٨-٧

النقطة P على الدائرة إذا وإذا فقط كان $r = a$.

مثال ١ . خطط الشكل البياني للمعادلة $r = 4 \sin \theta$.

عندما يكون r, θ متغيرين فى معادلة ، عادة نفترض أنهما تشيران الى احداثيات قطبية ما لم ينص على غير ذلك . نعمل قائمة (جدول ١) بقيم θ و r التى تحقق المعادلة . بما أن قيم $\sin \theta$ ، ومن ثم قيم r ، تتكرر لـ $\theta \geq 360^\circ$ ، فلاتوجد حاجة للاستمرار فى الجدول بعد 360° ، نعين مواقع النقط التى احداثياتها هى القيم θ و r . هذه النقط تكون المنحنى الموضح فى الشكل ٨ - ٩ . النقط التى احداثياتها معطاة فى النصف الثانى من الجدول هى نفسها النقط التى فى النصف الاول . ومن ثم فالمنحنى يرسم بأكمله عندما θ تذهب من 0 الى 180° . سنوضح فى مثال ٦ أن المنحنى هو دائرة .

جدول ١

r	θ
0	0°
2	30°
$2\sqrt{2} \approx 2.82$	45°
$2\sqrt{3} \approx 3.46$	60°
4	90°
$2\sqrt{3} \approx 3.46$	120°
$2\sqrt{2} \approx 2.82$	135°
2	150°
0	180°
-2	210°
$-2\sqrt{2} \approx -2.82$	225°
$-2\sqrt{3} \approx -3.46$	240°
-4	270°
$-2\sqrt{3} \approx -3.46$	300°
$-2\sqrt{2} \approx -2.82$	315°
-2	330°
0	360°

مثال ٢ . خطط الشكل البياني للمعادلة $r = 1 + 2 \cos \theta$.

مرة أخرى ، نحتاج فقط أن نعمل جدولاً لـ θ و r حيث $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ ، لأن قيم r تتكرر مرة أخرى . (جدول ٢) . المنحنى ، ويسمى ليماسون (limaçon) ، مخطط في الشكل ٨ - ١٠ .
عندما تزداد θ من صفر إلى 180° ، تتناقص r من 3 إلى -1 ، وعندما تزداد θ من 180° إلى 360° تزداد r من -1 إلى 3 . العروة الداخلية ترسم أثناء فترة $120^\circ < \theta < 240^\circ$ عندما تكون r سالبة .
المنحنى يكون مماساً للشعاعين عند 120° و 240° .

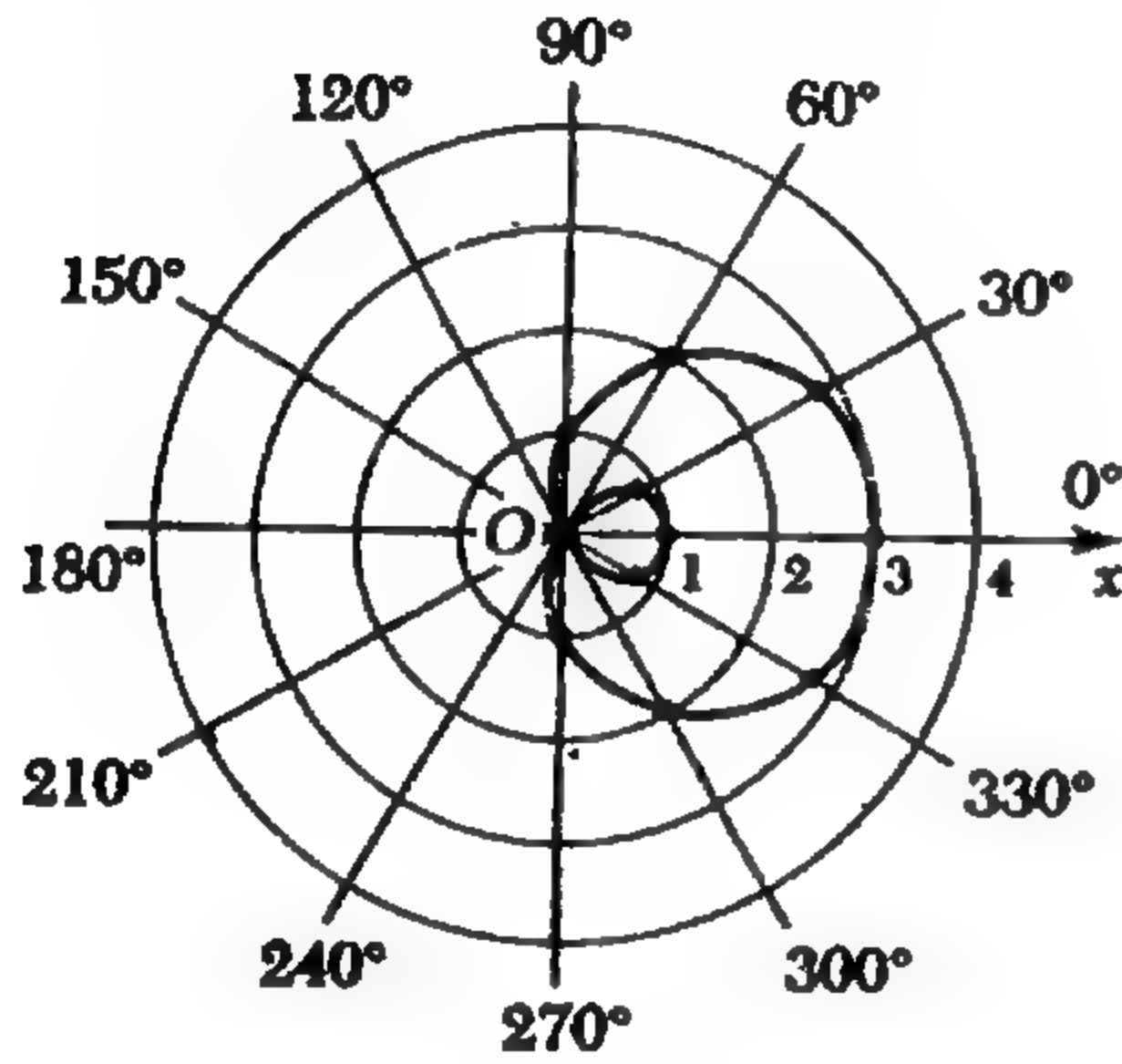
جدول ٢

r	θ
3	0°
$1 + \sqrt{3} \approx 2.73$	30°
2	60°
1	90°
0	120°
$1 - \sqrt{3} \approx -0.73$	150°
-1	180°
$1 - \sqrt{3} \approx -0.73$	210°
0	240°
1	270°
2	300°
$1 + \sqrt{3} \approx 2.73$	330°
3	360°

عند تخطيط منحنيات الاحداثيات القطبية ، θ يجب السماح لها أن تذهب من 0 الى 360° والى ما بعد ذلك ، اذا كان ضروريا ، حتى تبدأ قيم r أن تتكرر .

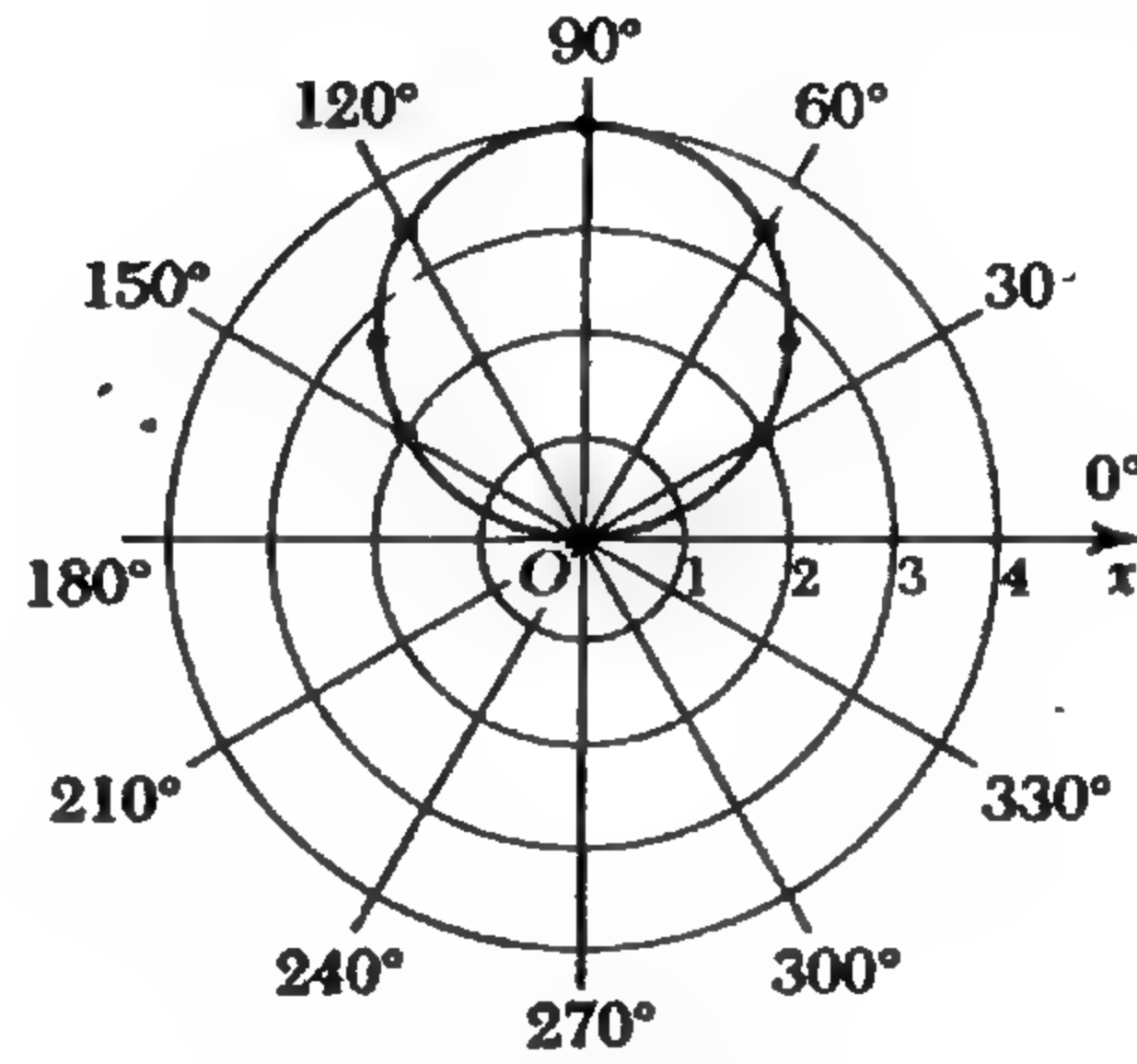
مثال ٣ . خطط الشكل البياني للمعادلة $r = a \sin 3\theta$ حيث $a > 0$.

سوف لا نعمل جدولا لقيم θ و r ، لكن سنستخدم معلوماتنا عن سلوك الدوال المثلثية ، لرسم الشكل البياني . هذه المرة سنقيس θ بالتقدير الدائري . اختر مسافة مناسبة على المحور القطبي وسمها a (شكل ٨ - ١١) . عندما $r = 0$ و $\theta = 0$. عندما تزداد θ تزداد r وتصل الى قيمتها العظمى a عندما $\theta = \pi/6$. عندما تزداد θ من $\pi/6$ الى $\pi/3$ ، تزداد 3θ من $\pi/2$ الى π ، وبالتالي تتناقص r وتكون صفرا عندما $\theta = \pi/3$. هذا يكمل العروة اليمنى للمنحنى .



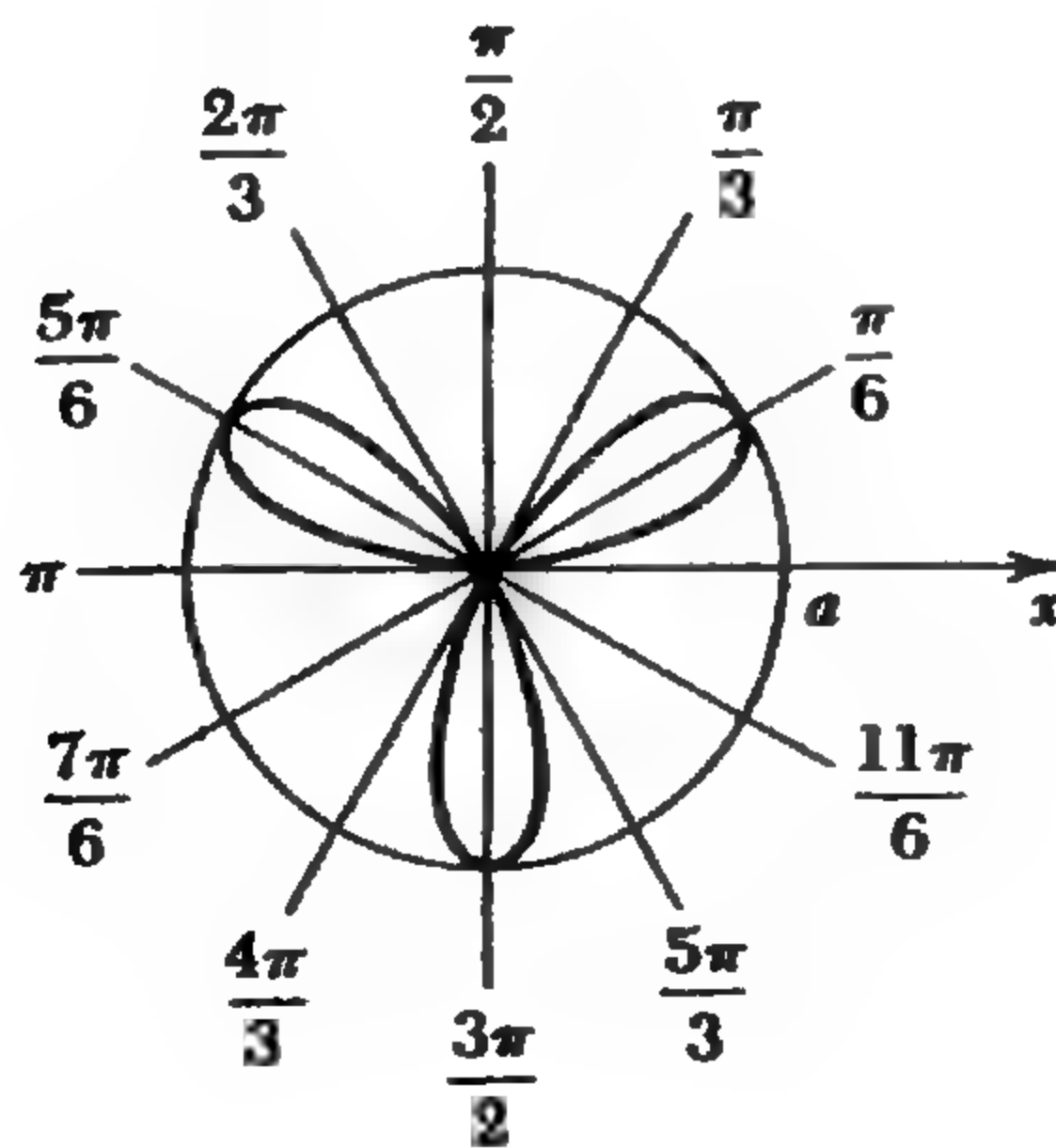
شكل ٨ - ١٠

ليماسون : $r = 1 + 2 \cos \theta$



شكل ٨ - ٩

دائرة : $r = 4 \sin \theta$



شكل ٨ - ١١

وردة بثلاث وركبات :

$$r = a \sin 3\theta$$

المنحنى يكون مماسا عند نقطة الأصل للمحور القطبي وللشعاع $\theta = \pi/3$. عندما تكون $\pi/3 \leq \theta \leq 2\pi/3$ تكون r سالبة . عندما تتزايد θ من $\pi/3$ الى $2\pi/3$ ، تتناقص r ثم تتزايد من صفر الى $-a$ الى صفر ، وترسم العروة السفلى للمنحنى . لـ $2\pi/3 \leq \theta \leq \pi$ تكون r موجبة . عندما تتزايد θ من $2\pi/3$ الى π ، r تتزايد ثم تتناقص من 0 الى a ، راسمة العروة اليسرى . لـ $\pi \leq \theta \leq 4\pi/3$ تكون r سالبة والعروة اليمنى ترسم مرة أخرى . بالمثل ، عندما تزداد θ من $4\pi/3$ الى 2π ، العروة السفلى ثم العروة اليسرى ترسمان مرة أخرى . هذا المنحنى يسمى وردة بثلاث ورقات .

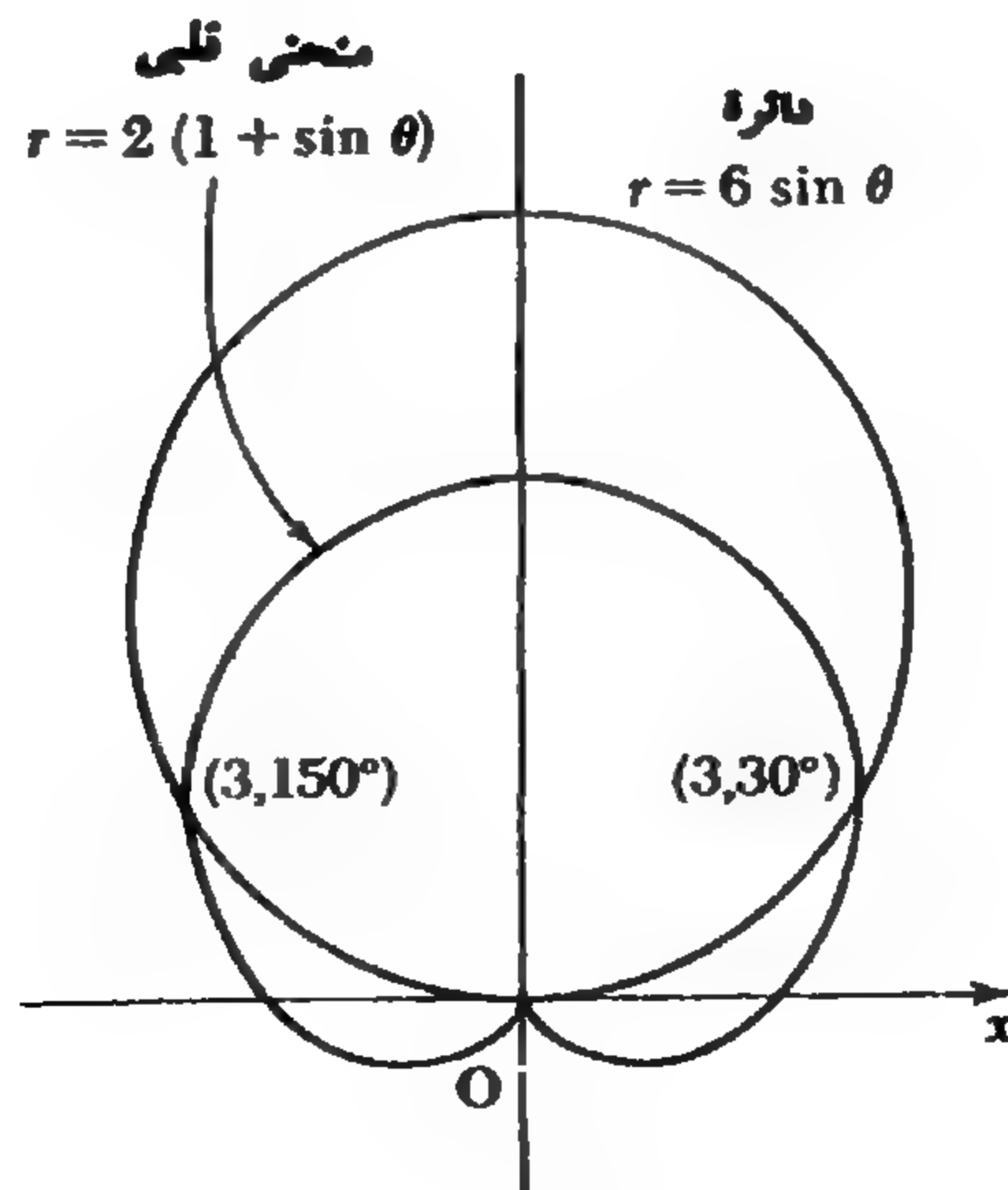
مثال ٤ : أوجد نقط تقاطع المنحنى القلبي $r = 2(1 + \sin \theta)$ والدائرة $r = 6 \sin \theta$.
نحل المعادلتين معا :

$$2(1 + \sin \theta) = 6 \sin \theta,$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2},$$

$$\theta = 30^\circ \text{ and } 150^\circ.$$

بتعويض $\frac{1}{2}$ لـ $\sin \theta$ في معادلة احد المنحنيين ، نجد أن $r = 3$. اذن النقطتان $(3, 150^\circ)$ و $(3, 30^\circ)$ على المنحنيين . تخطيط المنحنيين في الشكل ٨-١٢ يوضح أن نقطة الأصل تكون أيضا على المنحنيين مع أن حل المعادلتين معا لا يعطيها . السبب في ذلك هو تعدد الاحداثيات لنقطة . لا يوجد زوج واحد من احداثيات نقطة الأصل يحقق كلا من المعادلتين ، لكن الزوج



شكل ٨-١٢

($0, 270^\circ$) يحقق الأولى والزوج ($0, 0^\circ$) يحقق الثانية . عند إيجاد نقط تقاطع منحنين ينبغي عمل تخطيط تقريبي للمنحنين لنرى ما إذا كان المنحنيان لهما نقط مشتركة غير تلك التي توجد بحل المعادلتين معا .

المنحنى القلبي (الكارديويد) $r = 2(1 + \sin \theta)$ المخطط في الشكل ٨ - ١٢ معادلته الكارتيزية

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 4y^3 - 4x^2y - 4x^2 = 0$$

تخطيط هذا المنحنى من هذه المعادلة أمر مروع . منحنيات مفيدة كثيرة لها معادلات أبسط في الاحداثيات القطبية عن الاحداثيات الكارتيزية ومن الأسهل دراستها بتلك الصورة .

مثال ٥ . أوجد معادلة في الاحداثيات القطبية للقطع المكافئ $y^2 = 4px$.

رأينا في بند ٨ - ١ أن (r, θ) و (x, y) ترتبطان بالمعادلتين $x = r \cos \theta$; $y = r \sin \theta$. بتعويض هاتين لـ x, y في المعادلة ، نحصل على

$$r^2 \sin^2 \theta = 4pr \cos \theta$$

كمعادلة احداثيات قطبية للقطع المكافئ . اذا حذفنا r من طرفي المعادلة المعادلة ، نحصل على المعادلة الأبسط

$$r \sin^2 \theta = 4p \cos \theta$$

لان $r = 0$ تحقق المعادلة الأولى ، يوجد خطر في الحذف ، فقد نفقد نقطة الأصل كنقطة على المنحنى . هذا لا يحدث هنا لان الاحداثيات ($0, 90^\circ$) لنقطة الأصل تحقق المعادلة الثانية . المعادلتان متكافئتان .

مثال ٦ . اثبت أن المنحنى $r = 4 \sin \theta$ الذي يخطط في مثال ١ هو دائرة .

سنوجد معادلة المنحنى بالاحداثيات الكارتيزية . مع أننا يمكننا التعويض مباشرة عن θ و r أو $\sin \theta$ كما هي معطاة في (٢) و (٣) ، بيند ٨ - ١ ، الا أنه من الأسهل أن نضرب أولا المعادلة في r ، لنحصل على

$$r^2 = 4r \sin \theta \quad (1)$$

هذه المعادلة مكافئة للمعادلة الأصلية . لان النقطة الجديدة الوحيدة التي قد تكون أضيفت بعمل ذلك هي النقطة حيث $r = 0$ ، أي نقطة الأصل . لكن بما أن ($0, 0^\circ$) تحقق المعادلة الأصلية ، فنقطة الأصل تكون فعلا على المنحنى . بما أن $y = r \sin \theta$, $x^2 + y^2 = r^2$ ، فانا نحصل بتعويض هذه القيم في (١) على

$$x^2 + y^2 = 4y$$

وهذه معادلة دائرة . بكتابة المعادلة على الصورة

$$x^2 + (y - 2)^2 = 4$$

نرى أن المركز احداثياته الكارتيزية هي $(0, 2)$ وطول القطر هو 4 .

مسائل

خطط الشكل البياني للمعادلات الآتية :

- ١ - $r = 4.5$ ٢ - $r = -3$ ٣ - $\theta = 120^\circ$
- ٤ - $\theta = -\pi/4$ ٥ - $r = 3 \cos \theta$ ٦ - $r = 1 + \cos \theta$ (كارديويد)
- ٧ - $r = a(1 - \sin \theta), a > 0$ ٨ - $r = 2 + 4 \sin \theta$ ٩ - $r = 1 - 2 \sin \theta$
- ١٠ - $r = 3 + \cos \theta$ (ليماسون) ١١ - $r = 2 - \sin \theta$ ١٢ - $r \cos \theta = 4$
- ١٣ - $r = 2 \csc \theta$ ١٤ - $r^2 = a^2 \cos 2\theta, a > 0$ (ليمنسكيت)
- ١٥ - $r^2 = 4 \sin 2\theta$ ١٦ - $r = \sin 2\theta$ (وردة بأربع ورقات)
- ١٧ - $r = a \cos 3\theta, a > 0$ ١٨ - $r = \cos 4\theta$ ١٩ - $r = \sin \frac{\theta}{2}$
- ٢٠ - $r = \theta$ ٢١ - $r^2 = \theta$ ٢٢ - $r = e^\theta$
- ٢٣ - $r = a \sec^2 (\theta/2), a > 0$ ٢٤ - $r = \frac{1}{1 + \sin \theta}$ ٢٥ - $r = 1 + \sin 2\theta$

٢٦ - خطط المنحنى $r = \tan \theta$ واثبت أنه مقارب للمستقيمين $x = \pm 1$ (ارشاد : المسافة من المحور الصادي الى المنحنى هي $r \cos \theta$)

خطط أزواج المنحنيات الآتية وأوجد احداثيات نقط تقاطعها :

- ٢٧ - $r = 4 \sin \theta, r = 2$ ٢٨ - $r = -4 \sec \theta, \theta = 315^\circ$
- ٢٩ - $r = a(1 - \cos \theta), r = a(1 + \sin \theta); a > 0$ ٣٠ - $r = 2(1 - \cos \theta), r = -4 \cos \theta$
- ٣١ - $r = 4 \sin 2\theta, r = 4 \sin \theta$ ٣٢ - $r^2 = 4 \cos \theta, r = 1 - \cos \theta$
- ٣٣ - ادرس شكل منحنى الليماسون $r = a + b \cos \theta$ عندما $b > a > 0$ و $a > b > 0$ و $a = b > 0$.

٣٤ - كم ورقة للوردة $r = \sin n\theta$ ، حيث n عدد صحيح موجب ؟

٣٥ - اثبت أن المنحنى $r = a \cos \theta$ و $a > 0$ ، هو دائرة . أوجد مركزها وقطرها .

٣٦ - بدون ايجاد معادلته بالاحداثيات الكارتيزية ، اثبت أن المنحنى $r \cos \theta = a$ يكون خطا

مستقيما . (ارشاد : خطط المنحنى وفسر هندسيا المعادلة $a/r = \cos \theta$ ماذا يكون المنحنى

عندما $a = 0$ ؟

٣٧ - اذا استبدلت θ بـ $\theta + 45^\circ$ فى المعادلة $r = f(\theta)$ ، ماذا يكون التأثير على الشكل البيانى ؟

أوجد المعادلة بالاحداثيات القطبية للمنحنيات الآتية :

٣٨ - $y = -3$ ٣٩ - $y = 4x$ ٤٠ - $2x + 3y = 9$

٤١ - $x^2 + y^2 = 16$ ٤٢ - $x^2 = 4y$ ٤٣ - $xy = 2$

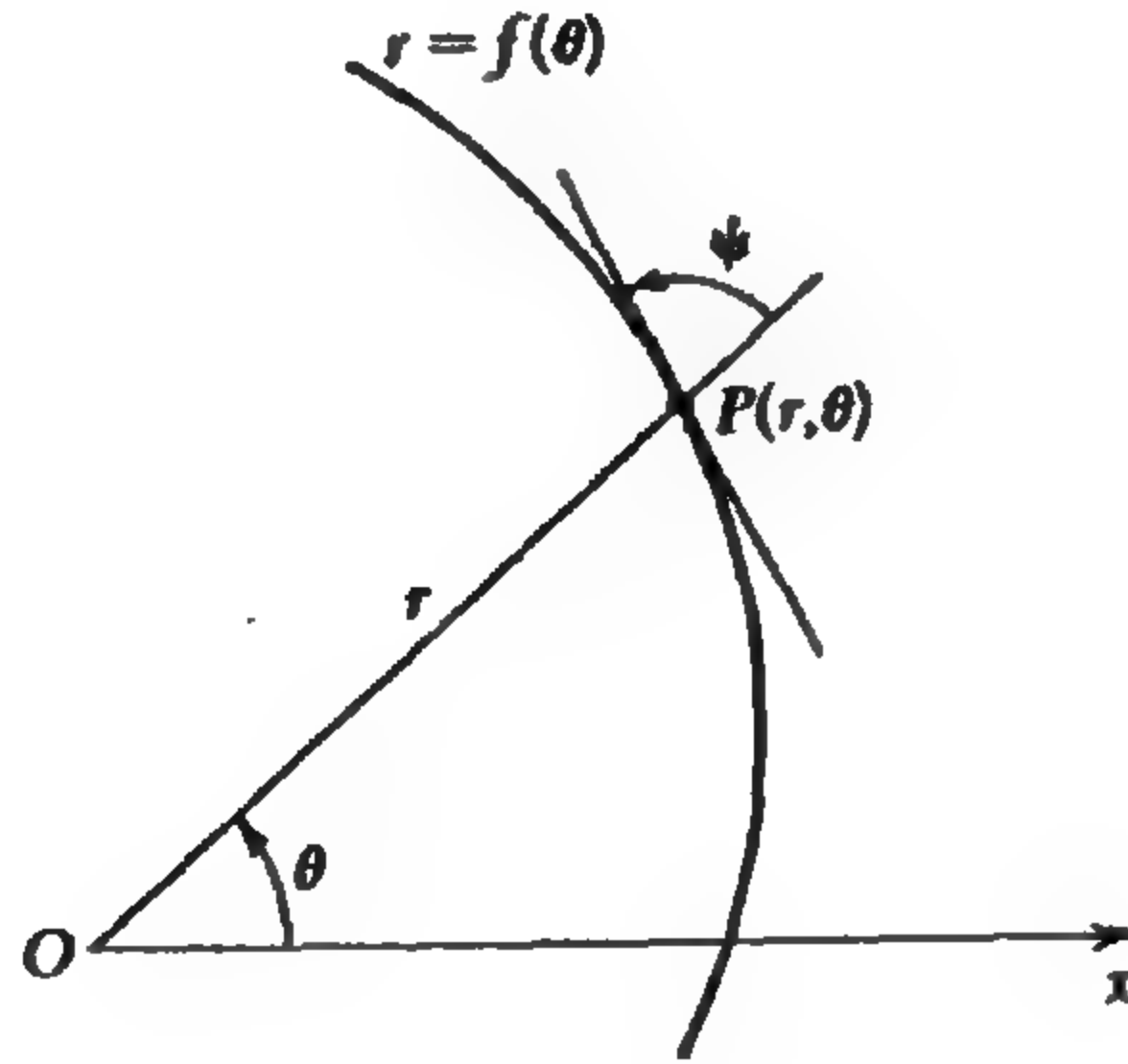
أوجد المعادلة بالاحداثيات المتعامدة للمنحنيات الآتية :

٤٤ - $r \cos \theta = -2$ ٤٥ - $r = 5 \cos \theta$ ٤٦ - $r = a \sin \theta$ ٤٧ - $r = 5$

٤٨ - $r = 5 \csc \theta$ ٤٩ - $r = 4 - 3 \cos \theta$ ٥٠ - $\theta = \pi/3$ ٥١ - $r = 4 \tan \theta$

٥٢ - $r = a \sin 2\theta$ (ارشاد : عبر عن $\sin 2\theta$ بدلالة $\sin \theta$ و $\cos \theta$) ٥٣ - $r^2 \cos 2\theta = 9$

٥٤ - أوجد معادلة بالاحداثيات القطبية لدائرة نصف قطرها b ومركزها عند النقطة $(a, 0)$.



شكل ٨-١٣

$$\cot \psi = f'(\theta)/f(\theta)$$

٥٥ - لتكن $P(r, \theta)$ نقطة على المنحنى $r = f(\theta)$ ولتكن ψ هى الزاوية من امتداد نصف القطر المتجه الى المماس عند النقطة ، مقيسة فى اتجاه ضد عقرب الساعة (شكل ٨-١٣) . من الممكن اثبات أن $\cot \psi = f'(\theta)/f(\theta)$. المنحنى الذى يقطع كل خط نصف قطرى بنفس الزاوية يسمى منحنى متساوى الزوايا . خطط المنحنى $r = e^\theta$ واثبت أنه منحنى متساوى الزوايا . أوجد جميع المنحنيات الاخرى المتساوية الزوايا .

٥٦ - باى زاوية يقطع المنحنى القلبي (الكارديويد) $r = 2(1 + \sin \theta)$ المحور القطبى (انظر المسألة ٥٥) ؟

أوجد زاوية تقاطع ازواج المنحنيات الآتية (انظر المسألة ٥٥) :

٥٧ - $r = \sin \theta, r = \cos \theta$ ٥٨ - $r = 2 \cos \theta, r = 2(1 - \cos \theta)$

٥٩ - $r = a(1 + \cos \theta), r = a(1 - \cos \theta)$

٦٠ - خطط الشكل البياني للمنحنى الحلزوني $r\theta = a$ ، حيث a ثابت موجب . بأى زاوية يقطع المنحنى الخط المستقيم $\theta = \pi/2$ لأول مرة (انظر المسألة ٥٥) ؟ اثبت أن المنحنى له خط تقاربي مواز للمحور القطبي . (ارشاد : المسافة من المحور القطبي الى المنحنى هي $(r \sin \theta)$)

٦١ - (أ) ماهو امتداد المنحنى القلبي $r = 1 - \cos \theta$ على يمين المحور الصادي ؟ (ارشاد $x = r \cos \theta$) . (ب) أين يكون المماس للمنحنى القلبي أفقياً ؟ (ج) بأى زاوية يقطع المنحنى القلبي المحور الصادي الموجب (انظر المسألة ٥٥) ؟

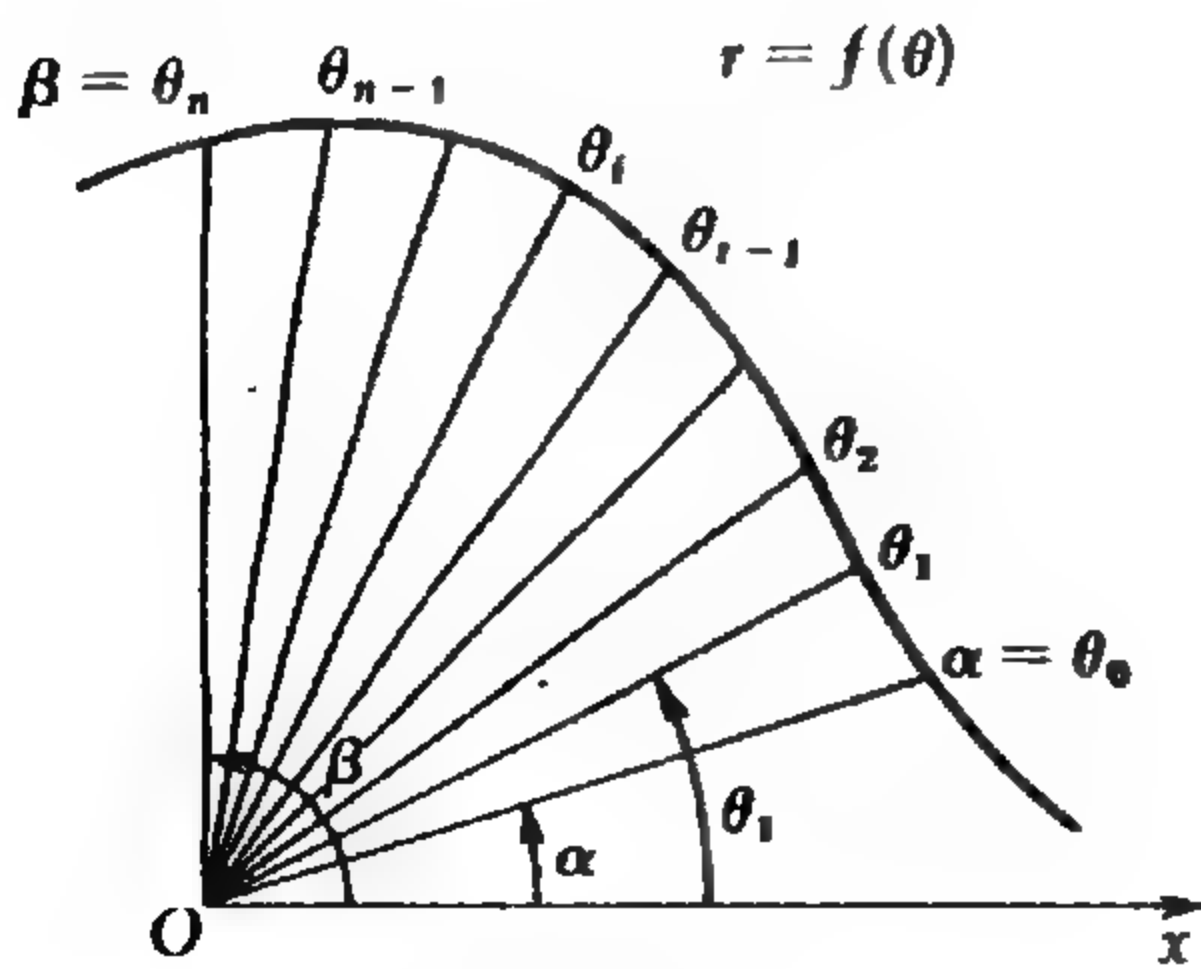
٨ - ٣

المساحات بالاحداثيات القطبية

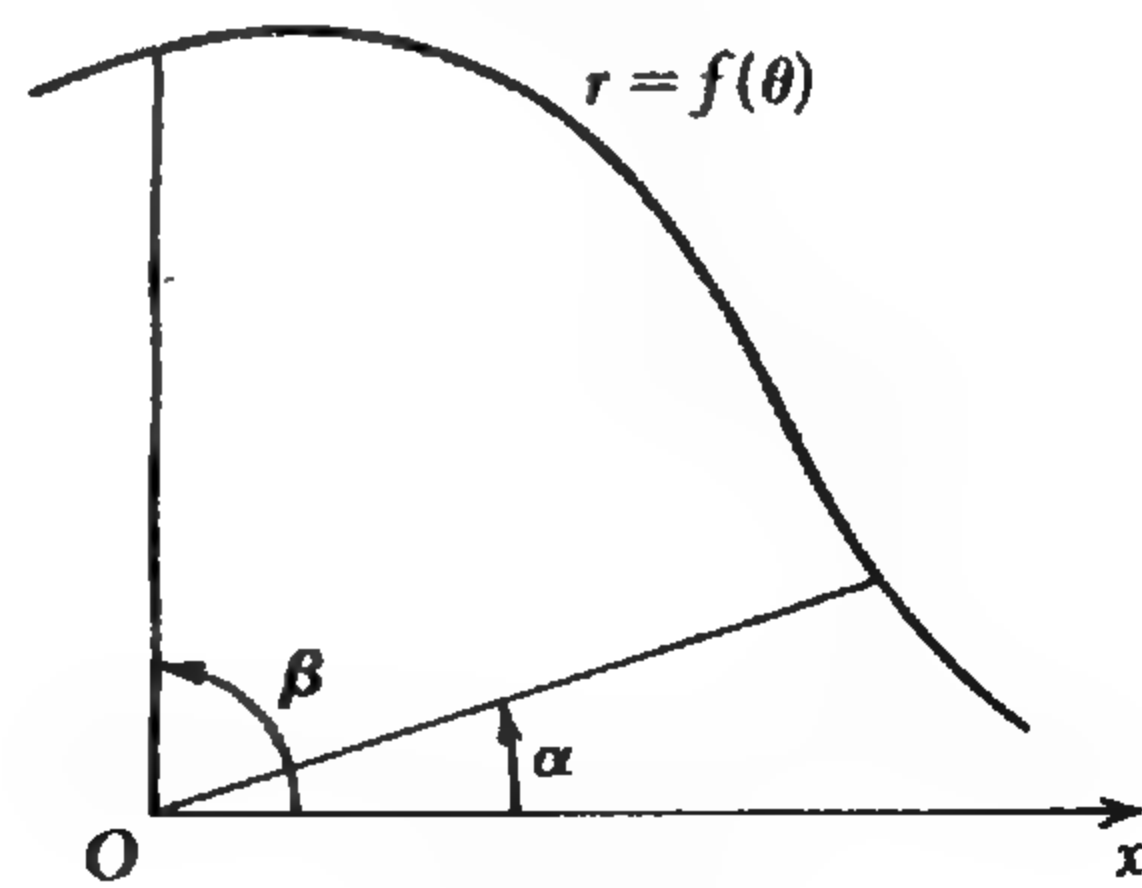
مساحات المناطق المحدودة بمنحنيات احداثيات قطبية توجد بنفس المبادئ العامة المستخدمة للمنحنيات باحداثيات كارتيزية . أبسط مسائل المساحة هي تلك الخاصة بإيجاد مساحة منطقة محدودة بمنحنى معادلته بالاحداثيات القطبية $r = f(\theta)$ ، والشعاعين $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ (شكل ٨ - ١٤) . سندرس فقط المناطق حيث f تكون متصلة . نقسم المنطقة الى قطاعات ضيقة بأشعة تبدأ من نقطة الاصل (شكل ٨ - ١٥) . استخدام القطاعات أفضل من استخدام الشرائط المستطيلة لأن في الاحداثيات القطبية من السهل التقريب الى مساحة القطاع عن التقريب الى مساحة المستطيل . لتكن زوايا الاشعة هي $\theta_0 = \alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}, \theta_n = \beta$. هذه الزوايا تعين تجزئاً

$$[\alpha = \theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}, \theta_n = \beta]$$

للفترة الزاوية $[\alpha, \beta]$. القطاع المعين بالشعاعين اللذين زاويتاهما θ_{i-1} و θ_i موضع مكبراً في الشكل ٨ - ١٦ . لتكن P_{i-1} و P_i النقطتين حيث هذان الشعاعان يقابلان المنحنى اختر عدداً $\bar{\theta}_i$ في الفترة الجزئية رقم i ، أى $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ ، وارسم الشعاع التي زاويته θ_i . لتكن $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)$



شكل ٨ - ١٥



شكل ٨ - ١٤

احداثيات النقطة حيث هذا الشعاع يقابل المنحنى . ارسم القوس الدائري الذى يمر بهذه النقطة ومركزه النقطة O . لتكن M و N النقطتين يحث يقابل هذا القوس الشعاعين OP_{i-1} و OP_i . مقياس الزاوية $P_{i-1} O P_i$ هو $\theta_i - \theta_{i-1} = \Delta\theta_i$ ، ونصف قطر القوس هو \bar{r}_i . مساحة القطاع $P_{i-1} O P_i$ هي بالتقريب مساحة القطاع الدائرة MON ، التى هي $\frac{1}{2} \bar{r}_i^2 \Delta\theta_i$. بالنظرية ٦ - ١ .

إذا أنشأنا قطاعا دائريا مماثلا لكل قطاع ، فإن حاصل جمع مساحاتها

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \bar{r}_i^2 \Delta\theta_i$$

هو تقريب لمساحة المنطقة . بما أن $\bar{r}_i = f(\bar{\theta}_i)$ ، فإن هذا يساوى

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f^2(\bar{\theta}_i) \Delta\theta_i$$

الذى هو حاصل جمع ريمان للدالة $g(\theta) = \frac{1}{2} f^2(\theta)$ لتجزىء دقيق ، تكون القطاعات ضيقة ، والتقريب فى (١) يكون جيدا . باستخدام تجزىء دقيق الى درجة كافية يمكننا التقريب الى مساحة المنطقة الى أى درجة من الدقة ، كما نريد ، بحواصل جمع على الصورة (١) . واذن المساحة A تعطى بالضبط بنهاية حواصل الجمع هذه ،

$$A = \lim_{w \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f^2(\bar{\theta}_i) \Delta\theta_i = \int_a^b \frac{1}{2} f^2(\theta) d\theta$$

حيث w هي معيار التجزىء . النهاية موجودة لان f ، ومن ثم $\frac{1}{2} f^2(\theta)$ ، مفترض أنها متصلة .

٨ - ١ مساحة منطقة . مساحة المنطقة المحدودة بنحنى معادلته بالاحداثيات القطبية $r = f(\theta)$ ، والشعاعين $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ تعطى بالصيغة

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(\theta) d\theta$$

الصيغة للمساحة عادة تكتب

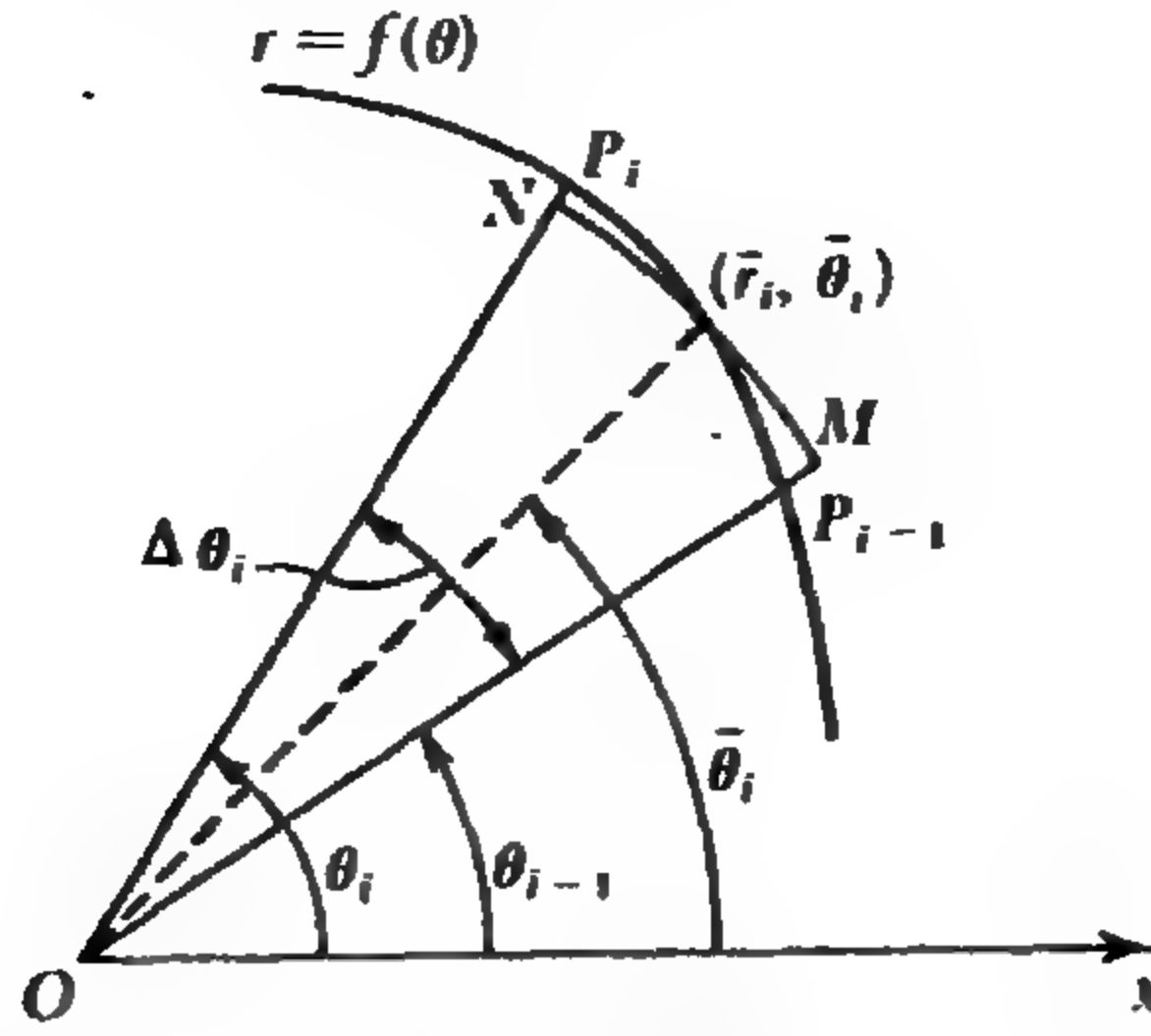
$$A = \frac{1}{2} \int_a^b r^2 d\theta$$

مع فهم أن r يجب استبدالها بالدالة $f(\theta)$ قبل ايجاد التكامل . فى أى مسألة خاصة ، حدا التكامل يوجدان بسهولة بتصور المنطقة مكتسحة بشعاع دائر . الحدان الادنى والاعلى هما الزاويتان α و β المناظرتان للوضعين الابتدائى والنهائى للشعاع .

التكاملان $\int \cos^2 \theta d\theta$ و $\int \sin^2 \theta d\theta$ يحدثان بكثرة فى مسائل المساحة بالاحداثيات القطبية . التكامل الاول يمكن ايجاده باستخدام المتطابقة $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$

$$(2) \quad \int \sin^2 \theta d\theta = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta$$

$$\text{المساحة } MON = \frac{1}{2} \bar{r}_i^2 \Delta \theta_i$$



شكل ١٦-٨

مساحة $P_i O P_{i-1}$ تقرب بمساحة القطاع الدائري MON .

بالمثل ، يكون

$$\int \cos^2 \theta d\theta = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta$$

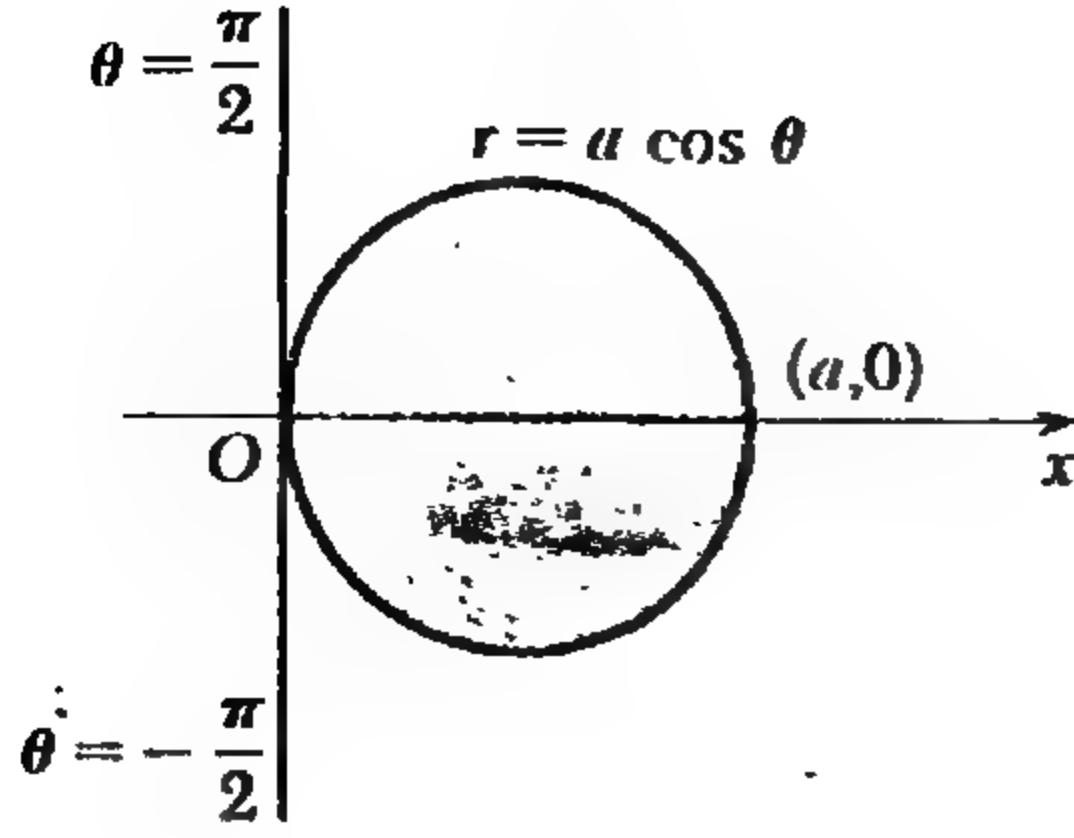
مثال ١ . أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى القلبي $r = 1 + \sin \theta$ والشعاعين $\theta = 90^\circ$ و $\theta = 0^\circ$.

المنحنى القلبي مخطط في الشكل ١٧-٨ ، الجزء المظلل هو المنطقة المراد إيجاد مساحتها . لدينا $f(\theta) = r = 1 + \sin \theta$. بما أننا سوف نكامل دوال مثلثية ، فيجب أن نستخدم القياس الدائري . المنطقة تسمح بشعاع يدور من $\theta = 0$ الى $\theta = \pi/2$. وإذن حدا التكامل هما 0 و $\pi/2$ ، والمساحة تعطى بـ

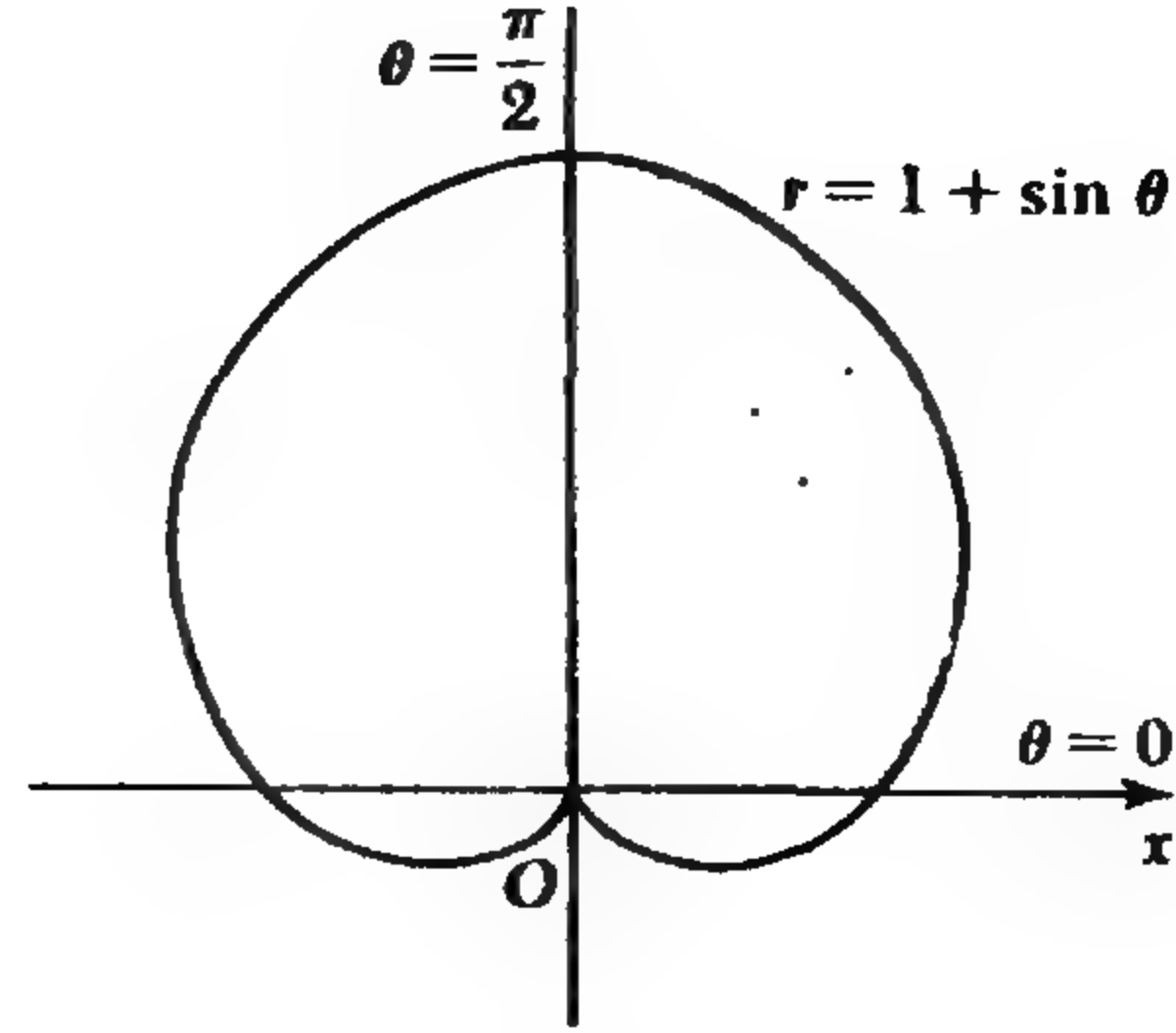
$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} f^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \sin \theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + 2 \sin \theta + \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta - 2 \cos \theta + \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - (-2) \right] = \frac{3\pi}{8} + 1, \end{aligned}$$

حيث استخدمنا (٢) لاجراء تكامل $\sin^2 \theta$.

مثال ٢ . أوجد مساحة الدائرة $r = a \cos \theta$, $a > 0$ الدائرة مخططة في الشكل ١٨-٨ . المنطقة داخل الدائرة تسمح بشعاع يدور من $-\pi/2$ الى $\pi/2$. إذن مساحة الدائرة تعطى بـ



شكل ١٨-٨



شكل ١٧-٨

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{a^2}{2} \left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] = \frac{\pi a^2}{4}$$

كان يمكننا أيضا إيجاد مساحة نصف الدائرة بالتكامل من صفر الى $\pi/2$ ومضاعفة النتيجة .

مثال ٣ . أوجد مساحة المنطقة داخل عروة واحدة من منحنى الورد ذات الورقات الثلاث $r = a \sin 3\theta$, $a > 0$

المنحنى مخطط في الشكل ١١-٨ . المنطقة داخل العروة اليمنى تمسح بشعاع يدور من 0 الى $\pi/3$ مساحة العروة تعطى بـ

$$(٣) \quad A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} r^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/3} \sin^2 3\theta d\theta$$

هذا التكامل لا يمكن ايجاده بالاستخدام المباشر لـ (٢) لأن الدالة المكاملة هي $\sin^2 3\theta$ وليست $\sin^2 \theta$ ومع ذلك ، فالصيغة (٢) يمكن استخدامها اذا أجرينا أولا تغييرا للمتغير في (٣) بوضع $u = 3\theta$ الحدان الجديدان هما $u = \pi$ و $u = 0$ ، والتكامل يصبح

$$A = \frac{a^2}{6} \int_0^{\pi} \sin^2 u du = \frac{a^2}{6} \left[\frac{u}{2} - \frac{1}{4} \sin 2u \right]_0^{\pi} = \frac{\pi a^2}{12}$$

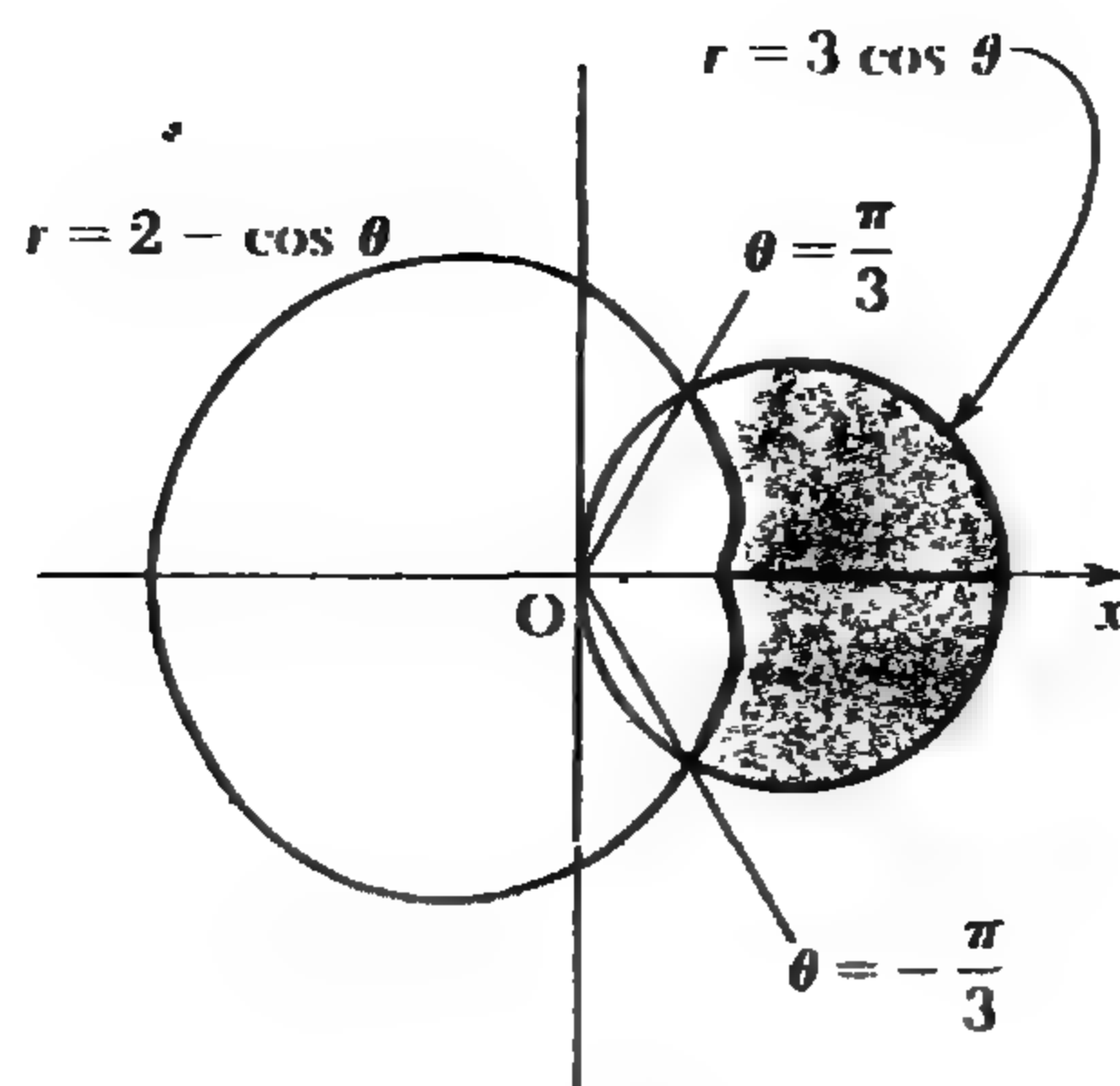
مثال ٤ . أوجد مساحة المنطقة داخل الدائرة $r = 3 \cos \theta$ وخارج الليماسون $r = 2 - \cos \theta$.

المنحنيان موضحان في الشكل ١٩-٨ . نقط تقاطعهما توجد بحل المعادلتين معا :

$$3 \cos \theta = 2 - \cos \theta,$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2},$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ and } -\frac{\pi}{3}$$



شكل ٨-١٩

الشكل يوضح أن النقطتين انماظرتين لهاتين القيمتين لـ θ هما نقطتا التقاطع الوحيدتان . مساحة المنطقة المطلوبة يمكن إيجادها بإيجاد مساحة المنطقة المحدودة بالدائرة والشعاعين $\theta = \pi/3$ و $\theta = -\pi/3$ والطرح من هذه المساحة مساحة المنطقة المظللة خفيفا المحدودة بالليماسون ونفس الشعاعين . بسبب التماثل ، كل من هاتين المساحتين يمكن إيجادها بالتكامل من 0 الى $\pi/3$ ومضاعفة النتيجة . بذلك يكون

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \left(\frac{1}{2} \right) \int_0^{\pi/3} 9 \cos^2 \theta \, d\theta - 2 \left(\frac{1}{2} \right) \int_0^{\pi/3} (2 - \cos \theta)^2 \, d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/3} (8 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta - 4) \, d\theta \\
 &= \left[4\theta + 2 \sin 2\theta + 4 \sin \theta - 4\theta \right]_0^{\pi/3} \\
 &= 2 \sin \frac{2\pi}{3} + 4 \sin \frac{\pi}{3} = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

سواء هنا أو في الفصل الخامس عملنا بالبداية ولم نعرف مطلقاً مساحة منطقة . من الممكن الشك في أن مساحة المنطقة التي توجد بالاحداثيات القطبية قد تختلف عن المساحة التي توجد بالاحداثيات الكارتيزيه . تعريف المساحة معطى في الكتب المتقدمة ، وقد أثبت هناك أن كلا من الطريقة القطبية والطريقة الكارتيزيه تعطى نفس النتيجة .

مسائل

أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى والشعاعين :

١ - $r = \theta; \theta = 0, \theta = 3\pi/2 (0 \leq r \leq 3\pi/2)$ - ١

٢ - $r = 3 \sec \theta; \theta = 0^\circ, \theta = 45^\circ$ - ٢

٣ - $r = \tan \theta; 0 = \pi/6, \theta = \pi/4$ - ٣

٤ - $r = 6/\sin \theta; 0 = \pi/3, \theta = 2\pi/3$ - ٤

٥ - أوجد مساحة النصف الأيمن من المنحنى القلبي $r = 1 + \sin \theta$.

خط المنحنى وأوجد مساحة المنطقة أو المناطق داخله :

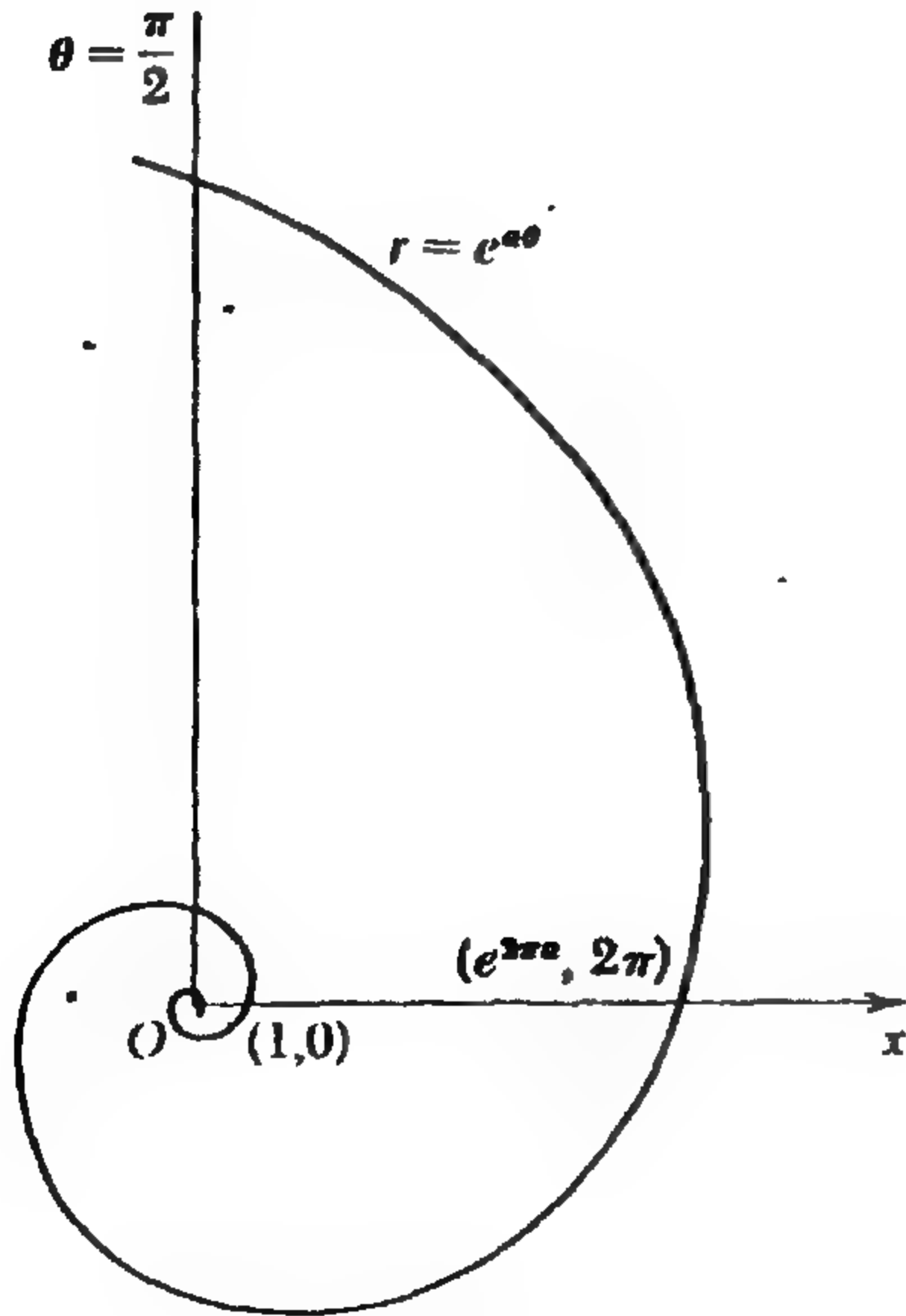
٦ - $r = a$ - ٦

٧ - $r = a(1 - \cos \theta), a > 0$ - ٧

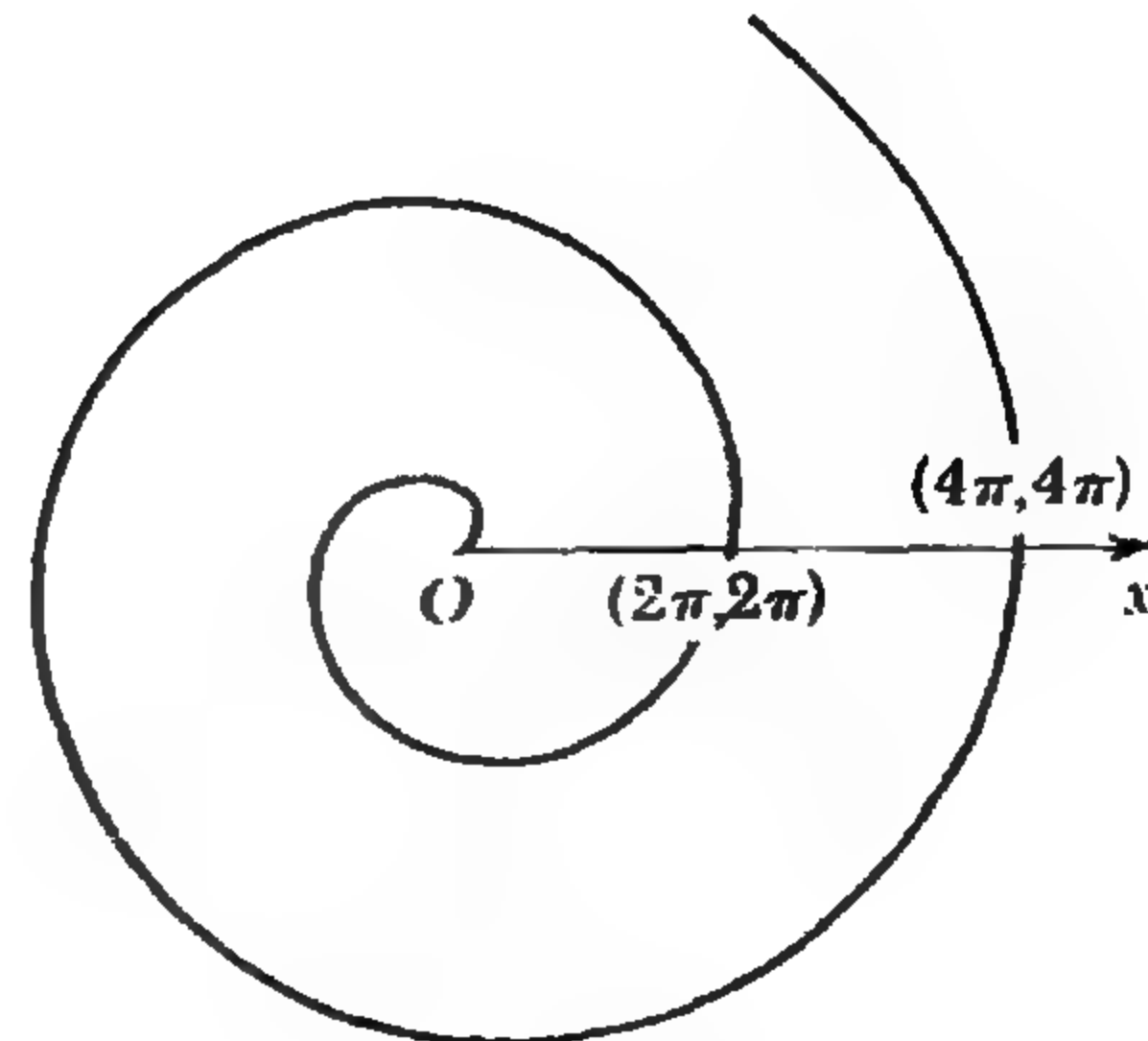
٨ - $r = a \sin 2\theta, a > 0$ - ٨

٩ - $r = a \sin n\theta, a > 0$ ، حيث n عدد صحيح موجب .

١٠ - الشكل البياني لحلزون أرشميدس ، $r = \theta, \theta \geq 0$ ، مخطط في الشكل ٨ - ٢٠ . أوجد مساحة المنطقة المظللة .



شكل ٨ - ٢١



شكل ٨ - ٢٠

حلزون أرشميدس : $r = \theta$

- ١٩ - الشكل البياني للمنحنى الحلزوني $a > 0$, $r = e^{a\theta}$, ومخطط في الشكل ٨ - ٢١ .
أوجد مساحة المنطقة المظللة .
- ٢٠ - أوجد مساحة المنطقة داخل العروة الصغرى لمنحنى الليماسون $r = 1 + 2 \cos \theta$ (شكل ٨ - ١٠) .
- ٢١ - أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالعروة اليمنى لمنحنى الليمنسكيت $r^2 = 4 \cos 2\theta$. لماذا لا يمكننا إيجاد المساحة الكلية للليمنسكيت بالتكامل من صفر الى 2π ؟
- ٢٢ - أوجد مساحة المنطقة بين الدائرتين $r = a$ و $r = b$, $0 < a < b$.
- ٢٣ - أوجد مساحة المنطقة داخل الدائرة $r = 6 \sin \theta$ وخارج الدائرة $r = 3$.
- ٢٤ - أوجد مساحة المنطقة داخل الدائرة $r = a$ وخارج المنحنى القلبي $r = a(1 - \cos \theta)$, $a > 0$.
- ٢٥ - أوجد مساحة المنطقة داخل كل من الدائرتين $r = \sin \theta$ و $r = \cos \theta$.
- ٢٦ - أوجد مساحة المنطقة فوق الخط المستقيم $r = \sqrt{2} \csc \theta$ وتحت الدائرة $r = 2$.
- ٢٧ - أوجد مساحة المنطقة داخل عروة واحدة لمنحنى الليمنسكيت $r^2 = 8 \sin 2\theta$ وخارج الدائرة $r = 2$.
- ٢٨ - أوجد مساحة كل من المناطق الآتية المحدودة بالدائرة $r = 5 \sin \theta$ ومنحنى الليماسون $r = 3 - \sin \theta$ (أ) داخل الدائرة وخارج منحنى الليماسون ، (ب) داخل كل من المنحنيين ، (ج) داخل منحنى الليماسون وخارج الدائرة .
- ٢٩ - أوجد مساحة كل من المناطق الآتية المحدودة بالدائرة $r = -6 \cos \theta$ والمنحنى القلبي $r = 2(1 - \cos \theta)$: (أ) داخل الدائرة وخارج المنحنى القلبي ، (ب) داخل كل من المنحنيين . (ج) داخل المنحنى القلبي وخارج الدائرة .
- ٣٠ - أوجد مساحة المنطقة بين العروة الداخلية والعروة الخارجية لمنحنى الليماسون $r = 1 + 2 \sin \theta$.

٨ - ٤

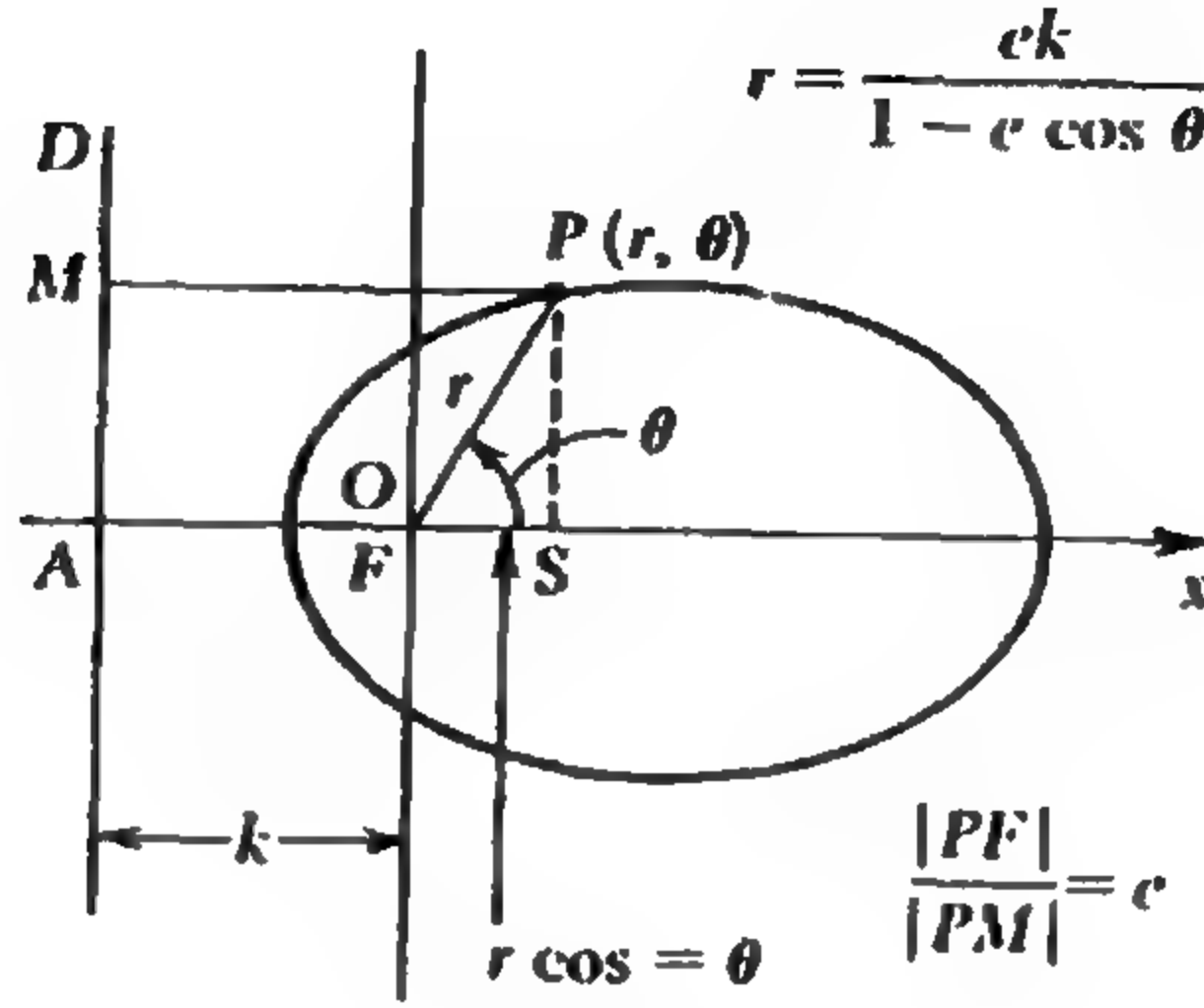
القطوع المخروطية*

مثبت في التذييل أن القطع المكافئ والقطع الناقص (إذا لم يكن دائر .) والقطع الزائد ، لهم الخاصية أن لجميع النقط P على المنحنى ، المسافة $|PF|$ والمسافة $|PM|$ بين البؤرة F والدليل الأقرب D تحققان العلاقة

$$(1) \quad \frac{|PF|}{|PM|} = e$$

• ينبغي على القارئ أن يلم بالمادة عن القطع المكافئ والقطع الناقص والقطع الزائد في البنود من ٧ - ٩ بالتذييل قبل دراسة هذا البند .

حيث e هي الاختلاف المركزي للقطع المخروطي (شكل ٨-٢٢) . القطع المخروطي يكون قطعاً ناقصاً أو قطعاً مكافئاً أو قطعاً زائداً حسب كون e أقل من أو تساوى أو أكبر من الواحد الصحيح . المعادلة القطبية للقطع المخروطي التي تشمل الأنواع الثلاثة جميعاً يمكن اشتقاقها من هذه الخاصية ، وفي الواقع اشتقاقها أسهل من اشتقاق المعادلتين الكارتيزيتين للقطع الناقص والقطع الزائد من تعريفهما المعتاد .



شكل ٨-٢٢

من المناسب أن نسمى محور القطع المكافئ والمحور الواصل بين رأسى القطع الناقص أو رأسى القطع الزائد ، المحور الأساسى للقطع المخروطي . المعادلة تكون أسهل إذا كان القطع المخروطي موضوعاً بحيث تكون البؤرة عند نقطة الأصل ويكون محوره الأساسى على امتداد المحور القطبى أو عمودياً على المحور القطبى . ليكن D هو الدليل الأقرب لهذه البؤرة ولتكن $k > 0$ هي المسافة بين البؤرة والدليل . نفرض أن القطع موضوع كما فى الشكل ٨-٢٢ حيث الدليل D على يسار البؤرة . القطع مصور على أنه قطع ناقص ، لكن يمكن أن يكون أيضاً قطعاً زائداً أو قطعاً مكافئاً . إذا كانت S هي مسقط P على المحور القطبى ، فإن

$$\overline{MP} = \overline{AS} = \overline{AF} + \overline{FS} = k + r \cos \theta$$

من (١) ، يكون

$$(٢) \quad r = e(k + r \cos \theta), \quad r > 0$$

إذا كانت $e \leq 1$ ، كما فى حالة القطع الناقص والقطع المكافئ ، فإن $|PF| \leq |MP|$ ، الذى يعنى أن P تكون دائماً على يمين الدليل وأن MP تكون موجبة . ومن ثم :

$|MP| = \overline{MP} = k + r \cos \theta$. إذا كانت $r > 0$ ، فإن $|PF| = r$ وبالتعويض فى (٢) يكون

$$|PF| = e|MP|$$

بحل هذه المعادلة لـ r ، نحصل على

$$(٣) \quad r = \frac{ek}{1 - e \cos \theta}$$

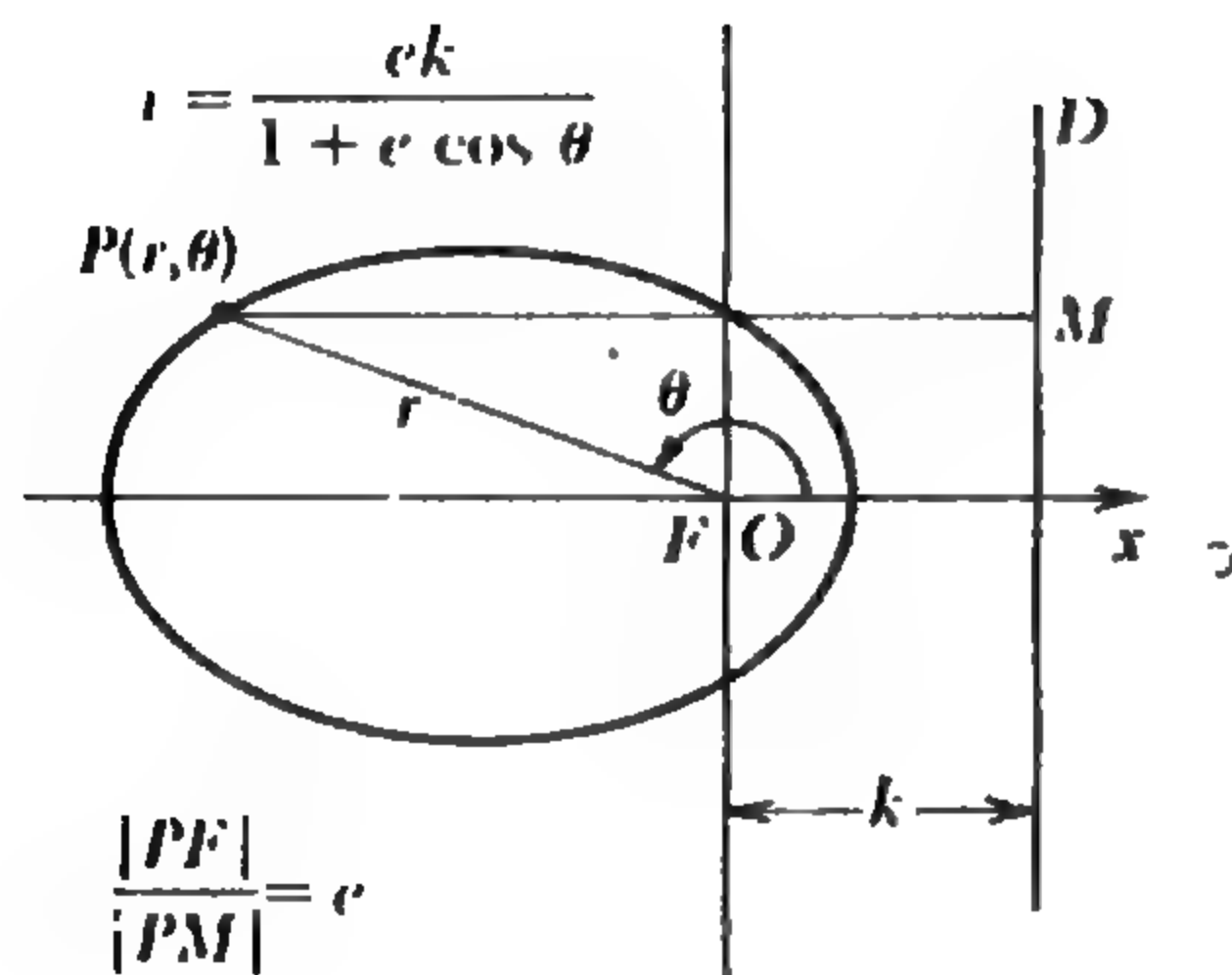
بمتابعة الخطوات السابقة ، يمكننا أن نرى أنه إذا كانت $e \leq 1$ ، فإن أى نقطة تحقق (٣) يتحتم أن يكون لها $r > 0$ وأنها تكون على القطع . ومن ثم (٣) هي معادلة القطع . يمكن اثبات أنه عندما تكون $e > 1$ ، فإن القطع ، الذى هو الآن قطع زائد ، تكون معادلته أيضا (٣) . النقط على الفرع الأيسر للقطع الزائد تناظر $r < 0$.

مثال ١ . أوجد معادلة القطع الناقص بالاحداثيات القطبية إذا كان اختلافه المركزى هو $\frac{2}{3}$ ومحوره الأساسى على المحور القطبى ، ويؤثره عند نقطة الأصل ، ودليله الأقرب يمر بالنقطة : $(5, 180^\circ)$.

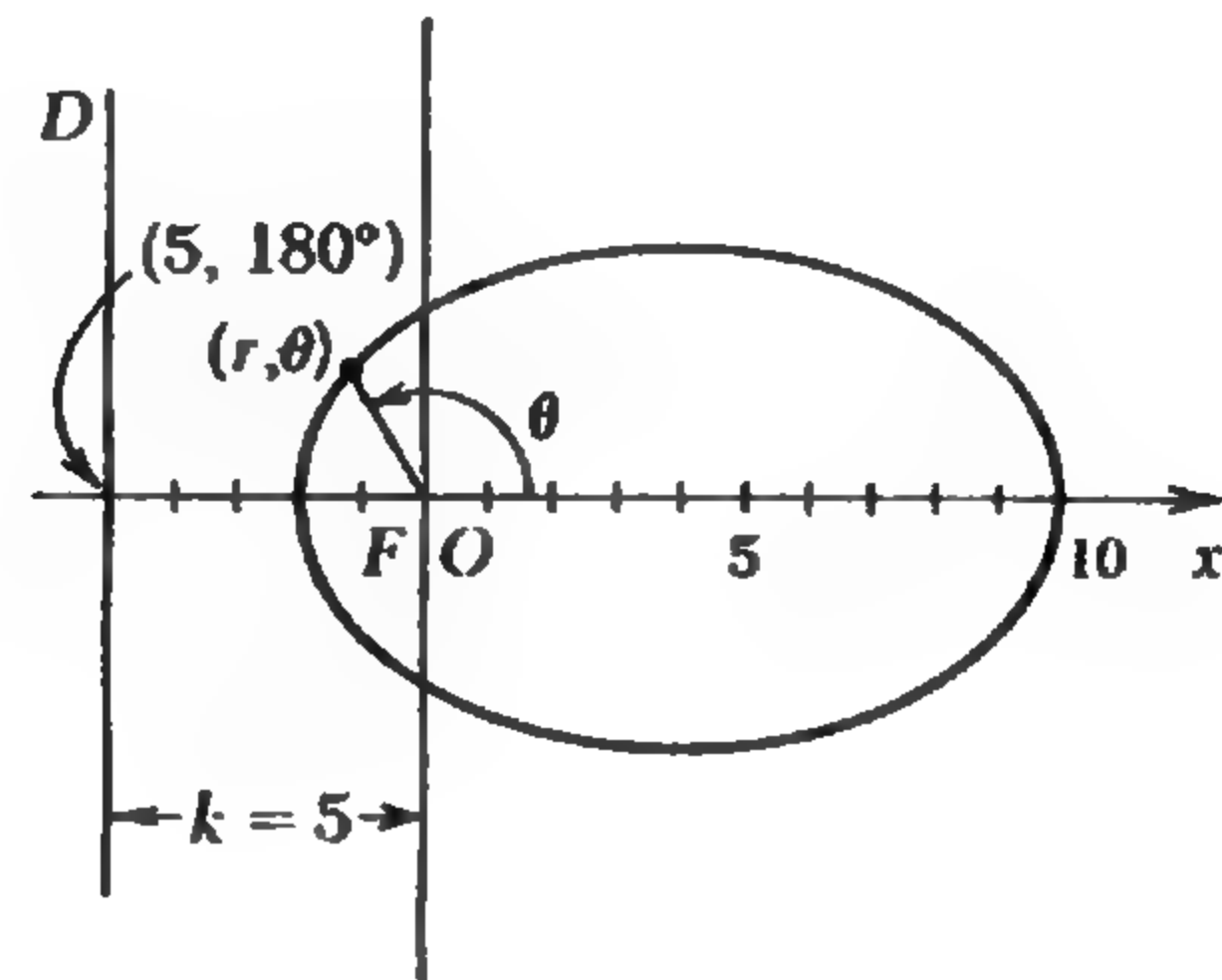
القطع الناقص موضح فى الشكل ٨ - ٢٣ . بأخذ : $e = \frac{2}{3}$ و $k = 5$ فى (٣) ، يكون

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1 - \frac{2}{3} \cos \theta} = \frac{10}{3 - 2 \cos \theta}$$

كمعادلة للقطع الناقص .



شكل ٨ - ٢٤



شكل ٨ - ٢٣

قطع ناقص : $r = 10 / (3 - 2 \cos \theta)$.

إذا استخدمنا البؤرة الأخرى والدليل المناظر ، بحيث كان القطع كما فى الشكل ٨ - ٢٤ حيث الدليل D على يمين البؤرة فإن المعادلة هي

$$(٤) \quad r = \frac{ek}{1 + e \cos \theta}$$

إذا وضع القطع بحيث كانت البؤرة عند نقطة الأصل وكان محوره الأساسى عموديا على محوره القطبى ، فإن المعادلة هي

$$(٥) \quad r = \frac{ek}{1 \pm e \sin \theta}$$

تستخدم الإشارة الموجبة أو السالبة تبعاً لكون الدليل D ، الذى هو أقرب للبؤرة التى عند نقطة الأصل ، أعلى أو أسفل هذه البؤرة .

إذا ضرب بسط ومقام كل من (٣) و (٤) فى ثابت ، موجب فإن المعادلتين الناتجتين تكونان على الصورة .

$$(٦) \quad r = \frac{f}{g \pm h \cos \theta}$$

حيث h و g موجبتان . معادلة القطع الناقص فى مثال ١ حصلنا عليها فى هذه الصورة . بالمثل ، (٥) تصبح

$$(٧) \quad r = \frac{f}{g \pm h \sin \theta}$$

أى معادلة على الصورة (٦) أو (٧) هى معادلة قطع مخروطى حيث البؤرة عند نقطة الأصل والمحور الأساسى على المحور القطبى أو عمودى عليه تبعاً لكون المقام يشتمل على $\cos \theta$ أو $\sin \theta$ لأنه بقسمة بسط ومقام (٦) ، مثلاً ، على g ليصبح الحد الثابت فى المقام هو 1 ، المعادلة تصبح

$$r = \frac{f}{g \pm h \cos \theta} = \frac{f/g}{1 \pm (h/g) \cos \theta}$$

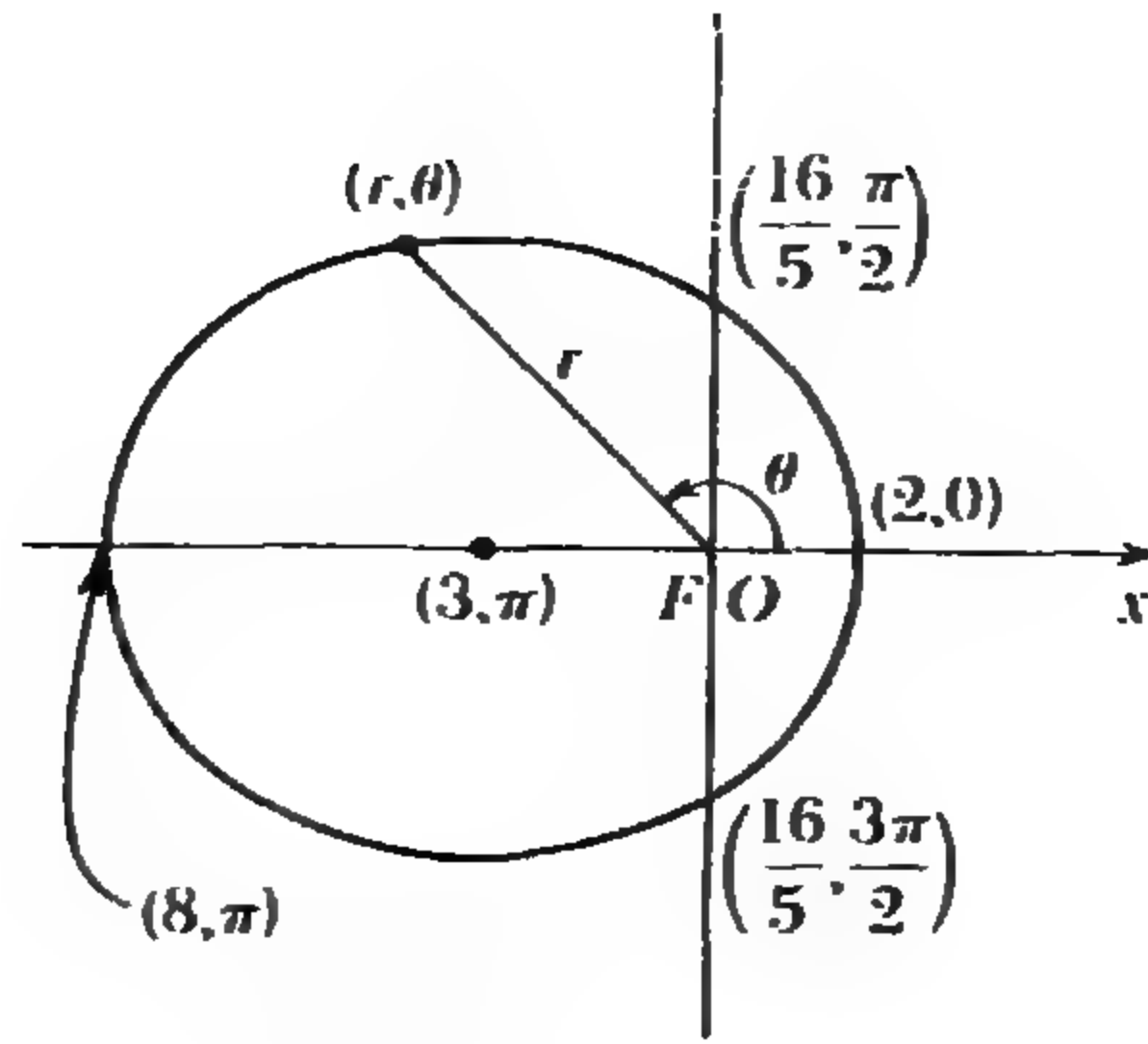
وهذه على الصورة (٣) أو (٤) . أيضاً h/g يجب أن تكون الاختلاف المركزى e ، والقطع المخروطى يكون قطعاً ناقصاً أو قطعاً مكافئاً أو قطعاً زائداً تبعاً لكون h/g أقل من أو تساوى أو أكبر من الواحد الصحيح .

مثال ٢ . عين نوع المنحنى $r = 16 / (5 + 3 \cos \theta)$ ، وخطط المنحنى .

بما أن المعادلة على الصورة (٦) ، فالشكل البيانى هو قطع مخروطى له بؤرة عند نقطة الأصل ومحوره الأساسى على المحور القطبى . يمكن تعيين نوع القطع بقسمة البسط والمقام على 5 ليصبح الحد الثابت فى المقام 1 :

$$r = \frac{\frac{16}{5}}{1 + \frac{3}{5} \cos \theta}$$

هذه المعادلة هى على الصورة (٤) . إذن $e = \frac{3}{5}$ ، والمنحنى هو قطع ناقص . الرأسان هما النقطتان حيث $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ أى $(8, \pi)$ و $(2, 0)$ (شكل ٨ - ٢٥) . المركز هو النقطة $(3, \pi)$ فى منتصف المسافة بينهما . عندما تكون $\theta = \pi/2$ أو $\theta = 3\pi/2$ فإن $r = \frac{16}{5}$ ، وهذا يعطينا نقطتين إضافيتين على المنحنى $(\frac{16}{5}, 3\pi/2)$ و $(\frac{16}{5}, \pi/2)$. هذه النقط الأربع تكفى لتخطيط تقريبي للقطع الناقص . إذا أردنا تخطيطاً أفضل ، فانه يمكننا إيجاد طرفى نصف المحور الأصغر بتعيين c و a ثم تعيين b من العلاقة $b^2 = a^2 - c^2$.

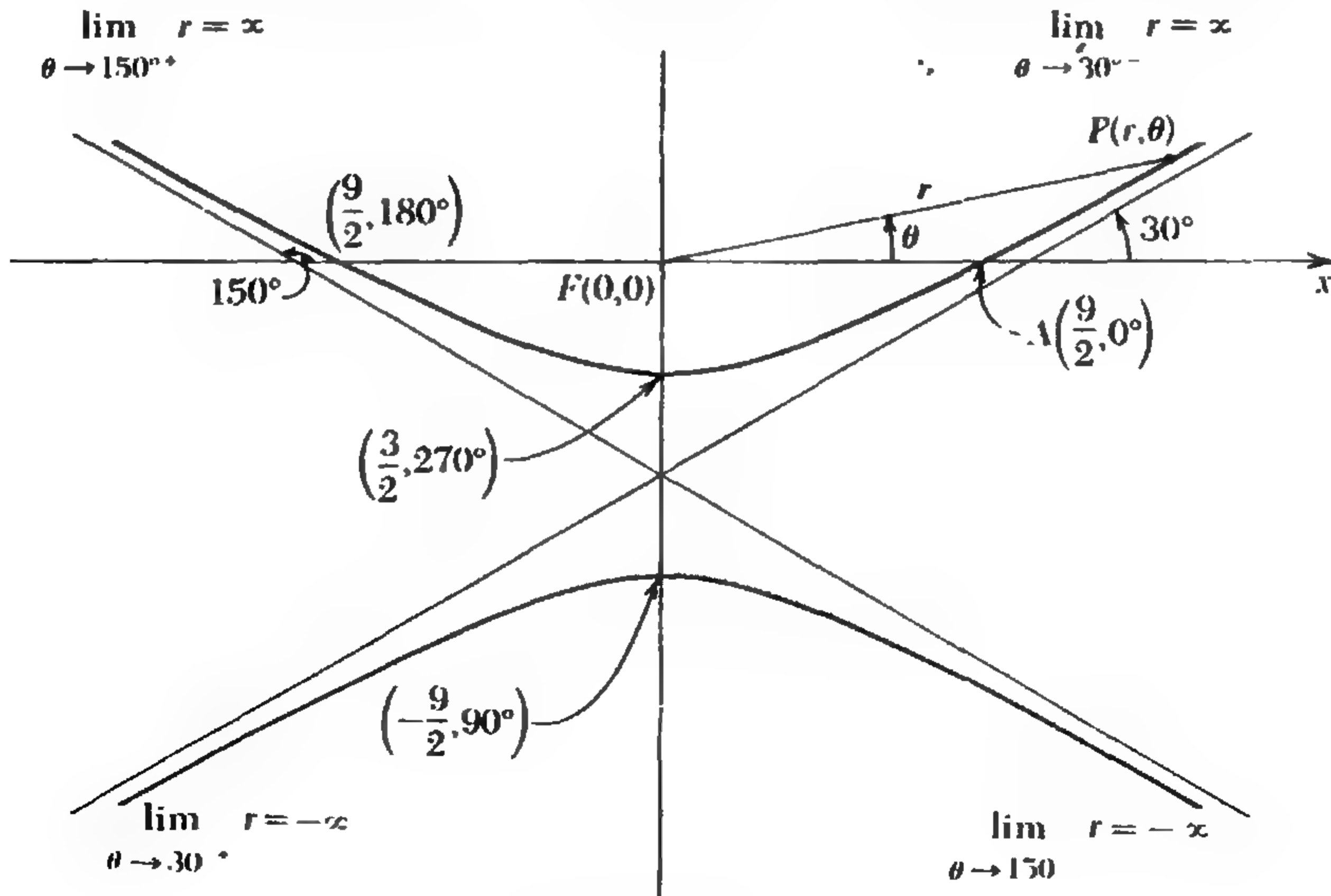


شكل ٨-٢٥
قطع ناقص : $r = 16/(5 + 3 \cos \theta)$

مثال ٣ . عين نوع المنحنى $r = 9/(2 - 4 \sin \theta)$ وخطط المنحنى .
صورة المعادلة توضح أن المنحنى قطع مخروطى له بؤرة عند نقطة الأصل ومحوره الأساسى عمودى على المحور القطبى . بكتابة المعادلة على الصورة

$$r = \frac{\frac{9}{2}}{1 - 2 \sin \theta}$$

بعد ثابت l فى المقام ، نرى أن $e = 2$ وأن المنحنى هو قطع زائد مفتوح لأعلى وأسفل .
الرأسان هما النقطتان حيث $\theta = 90^\circ$ و 270° ومن ثم هما $(\frac{3}{2}, 270^\circ)$ و $(-\frac{9}{2}, 90^\circ)$ (شكل ٨-٢٦) .
مركز القطع الزائد فى منتصف المسافة بينهما . نقطتان توجدان بسهولة هما حيث 180°



شكل ٨-٢٦
قطع زائد : $r = 9/(2 - 4 \sin \theta)$

و $\theta = 0$ وهما $(2, 180^\circ)$ و $A(2, 0^\circ)$. عندما تقترب $\sin \theta$ من $\frac{1}{2}$ ، وهذا يحدث عندما تقترب θ من 150° و 30° ، تصبح r لانهاية موجبة أو سالبة ، وذلك يعتمد على أى جانب للزاوية 30° والزاوية 150° تكون الزاوية θ . هذا يوضح أن الخطين التقريبيين هما الخطان الماران بالمركز ويصنعان الزاويتين 150° و 30° مع الخط القطبي . إذا رسم الخطان التقاربين ووقعت النقط الأربع التى أوجدناها أعلاه ، فالمنحنى يمكن تخطيطه جيدا بمجرد اليد . عندما تتزايد θ من 0 الى 30° تتحرك النقطة P الى اليمين على الفرع العلوى للقطع الزائد من A الى مالا نهاية . عندما تتزايد θ من 30° الى 150° ، تكون r سالبة والنقطة P تعبر الفرع الأدنى للقطع الزائد من اليسار لليمين . عندما تتزايد θ من 150° الى 360° ، تكون r موجبة ثانية وتعبر النقطة P الفرع العلوى من أقصى اليسار الى A ، مكملة التخطيط .

مقدار قوة الجذب بين الأرض والشمس هو GmM/r^2 ، حيث m و M هما كتلتا الأرض والشمس ، r المسافة بينهما ، G ثابت . ولأن هذه القوة متجهة على الخط الواصل بين الشمس والأرض ، فإن معادلة مدار الأرض حول الشمس يمكن اشتقاقها بسهولة أكثر ، إذا نحن استخدمنا الاحداثيات القطبية ، وليس الاحداثيات المتعامدة ، مع أخذ الشمس عند نقطة الأصل . المعادلة التفاضلية التى تحكم الحركة يمكن ايجادها من قانون نيوتن الثانى للحركة $ma = F$ ، حل المعادلة التفاضلية الناتجة يعطى المعادلة القطبية لمدار الأرض . المدار هو قطع ناقص بؤرته عند الشمس . الاختلاف المركزى هو 0.017 تقريبا ، فالمسار يكاد يكون دائرة .

مسائل

- ١ - أوجد معادلة القطع المكافئ بالاحداثيات القطبية حيث المحور الأساسى على المحور القطبى والبؤرة عند نقطة الأصل والدليل يمر بالنقطة $(4, 0^\circ)$.
 - ٢ - أوجد معادلة القطع المكافئ بالاحداثيات القطبية حيث المحور الأساسى عمودى على المحور القطبى والبؤرة عند نقطة الأصل والدليل يمر بالنقطة $(2, 270^\circ)$.
 - ٣ - أوجد معادلة القطع الناقص بالاحداثيات القطبية حيث الاختلاف المركزى $\frac{1}{2}$ والمحور الأساسى على المحور القطبى ، والبؤرة عند نقطة الأصل ، والدليل الأقرب يمر بالنقطة $(6, 180^\circ)$.
 - ٤ - أوجد معادلة القطع الناقص بالاحداثيات القطبية حيث الاختلاف المركزى $\frac{2}{3}$ والمحور الأساسى عمودى على المحور القطبى والبؤرة عند نقطة الأصل والدليل الأقرب يمر بالنقطة $(3, 90^\circ)$.
 - ٥ - أوجد معادلة القطع الزائد بالاحداثيات القطبية حيث الاختلاف المركزى 3 والمحور الأساسى على المحور القطبى والبؤرة عند نقطة الأصل والدليل الأقرب يمر بالنقطة $(3, 180^\circ)$.
 - ٦ - أوجد معادلة القطع الزائد بالاحداثيات القطبية حيث الاختلاف المركزى $\frac{3}{2}$ والمحور الأساسى عمودى على المحور القطبى والبؤرة عند نقطة الأصل والدليل الأقرب يمر بالنقطة $(2, 90^\circ)$.
- عين نوع كل من القطوع المخروطية الآتية وخطط الشكل البيانى . أوجد احداثيات الرأسين والمركز ، إذا وجد ذلك .

$$r = \frac{5}{3 - 2 \cos \theta} \quad - ٩$$

$$r = \frac{7}{2 - 2 \sin \theta} \quad - ٨$$

$$r = \frac{2}{1 + \cos \theta} \quad - ٧$$

$$r = \frac{6}{1 + 2 \cos \theta} \quad - ١٢$$

$$r = \frac{8}{3 - \sin \theta} \quad - ١١$$

$$r = \frac{12}{1 - 3 \sin \theta} \quad - ١٠$$

أوجد a, b, c واحداثيات البؤرتين والمركز للقطع المخروطية الناقصة والزائدة الآتية :

$$r = \frac{4}{2 - \sqrt{2} \sin \theta} \quad - ١٤$$

$$r = \frac{5}{3 + 2 \cos \theta} \quad - ١٣$$

$$r = \frac{6}{4 + 6 \cos \theta} \quad - ١٦$$

$$r = \frac{6}{1 - 2 \sin \theta} \quad - ١٥$$

١٧ - حول المعادلة $r = 16 / (5 + 3 \cos \theta)$ للقطع الناقص في مثال ٢ الى الاحداثيات العمودية وخطط القطع الناقص بنقل المحاور .

١٨ - أوجد معادلة القطع الناقص العام بالاحداثيات القطبية حيث المركز عند نقطة الاصل والمحور الاكبر على المحور السيني .

١٩ - أوجد ، بالاحداثيات الكارتيزيه ، معادلة القطع المكافئ المتجه الى اليمين حيث المحور على المحور السيني والبؤرة عند نقطة الاصل . بتغيير المعادلة الى احداثيات قطبية اثبت أن الصورة القطبية للمعادلة هي $r = 2p / (1 - \cos \theta)$, $p > 0$.

٢٠ - حقق ان المعادلة (٣) ، $r = ek / (1 - e \cos \theta)$ ، هي معادلة قطع مخروطي بتحويل المعادلة الى احداثيات كارتيزيه . (ارشاد : استخدم المعادلة المكافئة $r = e (k + r \cos \theta)$) .

٢١ - المعادلة (٣) تمثل قطع زائد اذا كان $e > 1$. ماهو ميل كل من خطية التقاربين ؟

٢٢ - أوجد زاوية تقاطع القطعين المكافئين $r = 6 / (1 + \sin \theta)$ و $r = 2 / (1 - \sin \theta)$. (ارشاد : انظر المسألة ٥٥ بيند ٨ - ٢) .

٢٣ - قمر تابع في مدار على شكل قطع ناقص حول الارض حيث مركز الارض هو بؤرة . معادلة المدار بالنسبة الى نظام احداثيات قطبية فيه مركز الارض نقطة الاصل هي :

$$r = 96,600 / (22 - \cos \theta)$$

أوجد اكبر وأصغر مسافة للقمر فوق سطح الارض .

٢٤ - قمر تابع في مدار على شكل قطع ناقص حول الارض حيث مركز الارض هو بؤرة . وأعلى نقطة له هي 300 miles فوق سطح الارض ، وأدنى نقطه له ، وهي على الجانب الاخر

للارض ، هي 100 miles فوق سطح الارض . اوجد معادلة المدار بالاحداثيات القطبية ،

بافتراض أن الارض هي كرة نصف قطرها 4000 miles .

الفصل التاسع

المعادلات البارامترية

٩ - ١

المعادلات البارامترية

المعادلات التي على الصورة $y = f(x)$ تصف منحنيات لا تقطع أكثر من مرة واحدة بأي خط رأسي . المنحنيات الأكثر تعقيدا التي تعود تضاعف نفسها يمكن وصفها بمعادلات أعم في x و y ، مثل $3xy = x^3 + y^3$ ، الذي شكله البياني موضح في الشكل ٩ - ١٠ . المنحنيات التي من هذا النوع عادة تكون دراستها أكثر سهوله باستخدام زوج من المعادلات ومتغير ثالث . دع $g(t)$ ، $h(t)$ دالتين للمتغير t وضع

$$(١) \quad x = g(t) \quad \text{و} \quad y = h(t).$$

كل قيمة للمتغير t تعين قيمة لـ x و y يمكن اعتبارها احداثيات نقطه في المستوى xy . فنه جميع النقط $(g(t), h(t))$ عادة تكون منحنى . المعادلتان (١) تسميان المعادلتان البارامتريتان للمنحنى ، والمتغير t يسمى بارامتر .

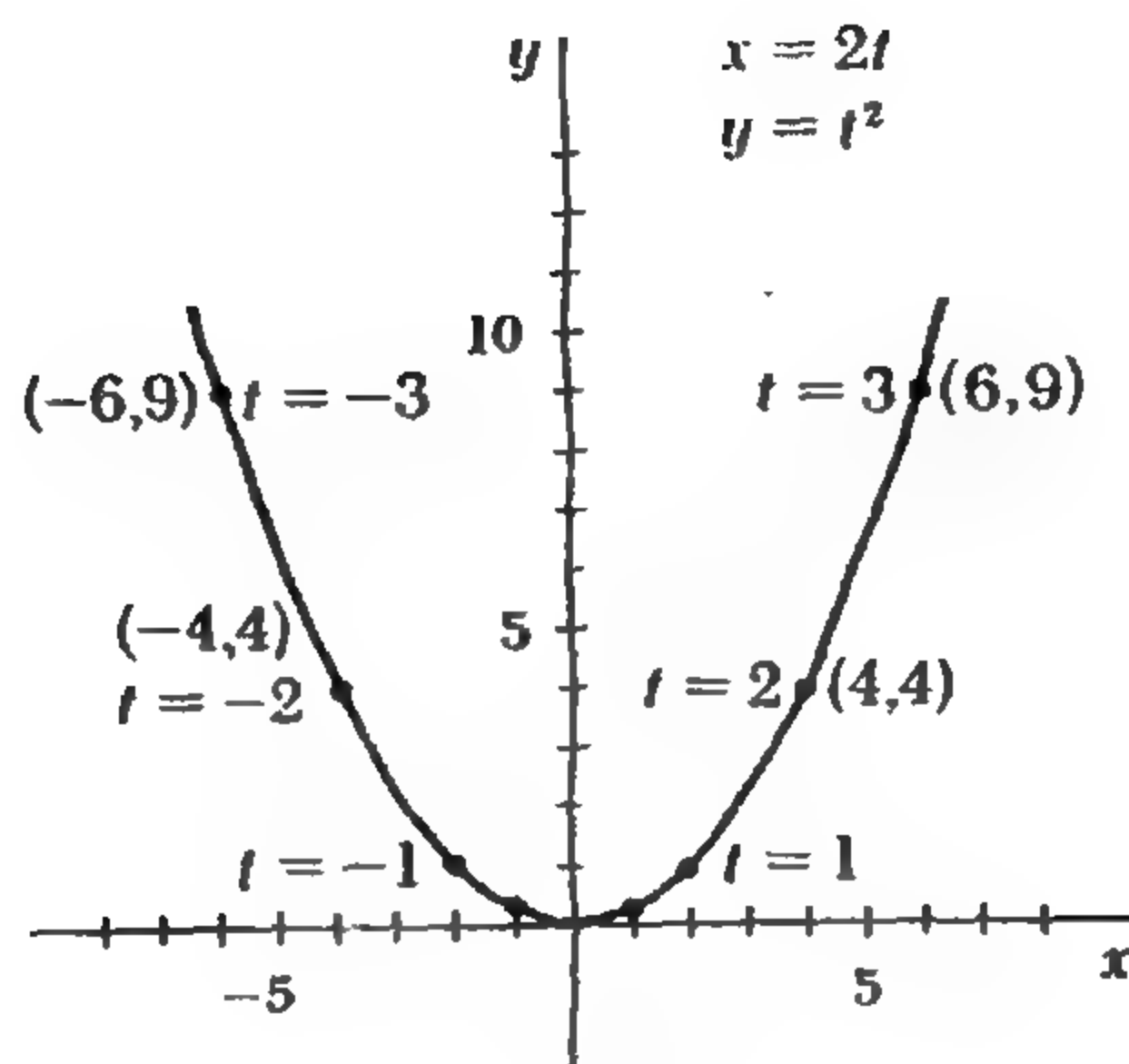
t	(x,y)
-3	(-6,9)
-2	(-4,4)
-1	(-2,1)
$-\frac{1}{2}$	(-1, $\frac{1}{4}$)
0	(0,0)
$\frac{1}{2}$	(1, $\frac{1}{4}$)
1	(2,1)
2	(4,4)
3	(6,9)

مثلا ، المعادلتان $h(t) = t^2$ و $g(t) = 2t$ تعينان المعادلتين البارامتريتين .

$$(٢) \quad x = 2t \quad \text{و} \quad y = t^2$$

عندما $t = 3$ تكون $x = 6$, $y = 9$ ، والنقطة المناظرة هي $(6, 9)$. بعمل جدول للقيم يمكننا تعيين مواقع النقط وتخطيط المنحنى (شكل ٩ - ١) .

إذا أجرينا حل المعادلة الأولى في (٢) للمتغير t وعوضنا هذه القيمة $x/2$ للمتغير t في المعادلة الثانية ، نحصل على $y = x^2 / 4$ كمعادلة للمنحنى في x, y فقط . البارامتر قد حذف ، ونرى أن المنحنى قطع مكافئ . في الواقع كان في إمكاننا تخطيط المنحنى بإجراء ذلك أولاً وتجنب عمل جدول للقيم .



شكل ٩ - ١

مثال ١ . خطط المنحنى التي معادلتاه البارامتريتان هما $x = 4 - 2t$, $y = 5 - t$ نحذف البارامتر بحل المعادلة الثانية لـ t والتعويض في المعادلة الأولى ، بذلك نحصل على

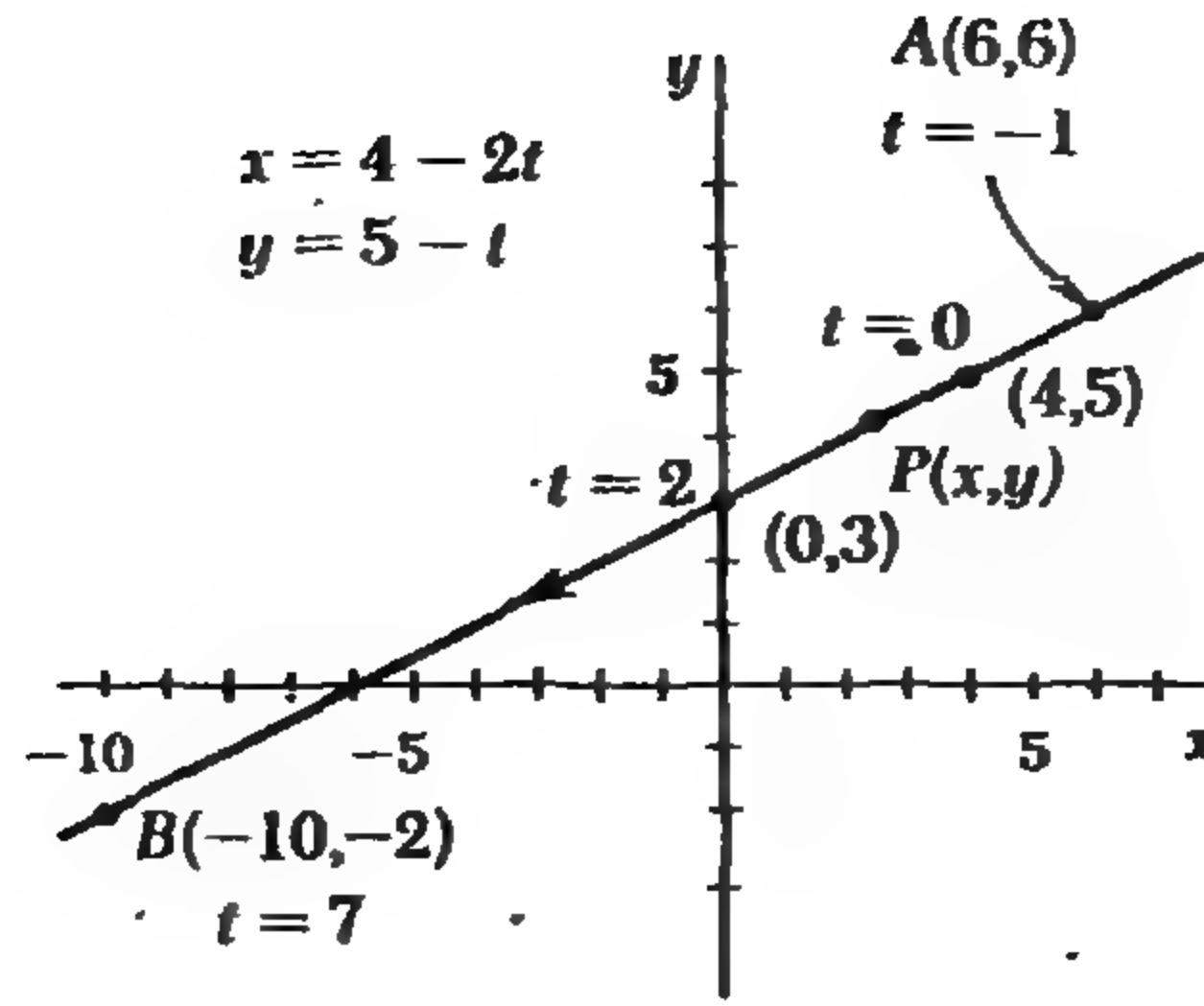
$$t = 5 - y,$$

$$x = 4 - 2(5 - y)$$

$$y = \frac{1}{2}x + 3.$$

المنحنى هو الخط المستقيم في الشكل ٩ - ٢ .

في المثال السابق إذا قيد البارامتر t بالفترة $[-1, 7]$ ، فإن المنحنى يكون فقط القطعة المستقيمة بين النقطتين $A(6, 6)$ و $B(-10, -2)$. لتكن P هي النقطة على الخط المستقيم في مثال ١ المناظرة لقيمة معطاة للمتغير t . عندما تزايد t تتحرك P على الخط من اليمين الى اليسار . فالمعادلتان البارامتريتان توضحان كيف ترسم نقطة الخط المستقيم عندما يتزايد البارامتر . هذا ليس خاصية ذاتية للخط المستقيم بل يعتمد على المعادلتين البارامتريتين . زوج آخر من معادلتين بارامتريتين لنفس الخط المستقيم هو $x = 2 + 2w$, $y = 4 + w$ ، لكن الآن عندما تزايد w ، النقطة P ترسم الخط المستقيم في الاتجاه العكسي .



شكل ٢-٩

متىما تزايد t ، النقطة P ترسم الخط من اليمين الى اليسار .

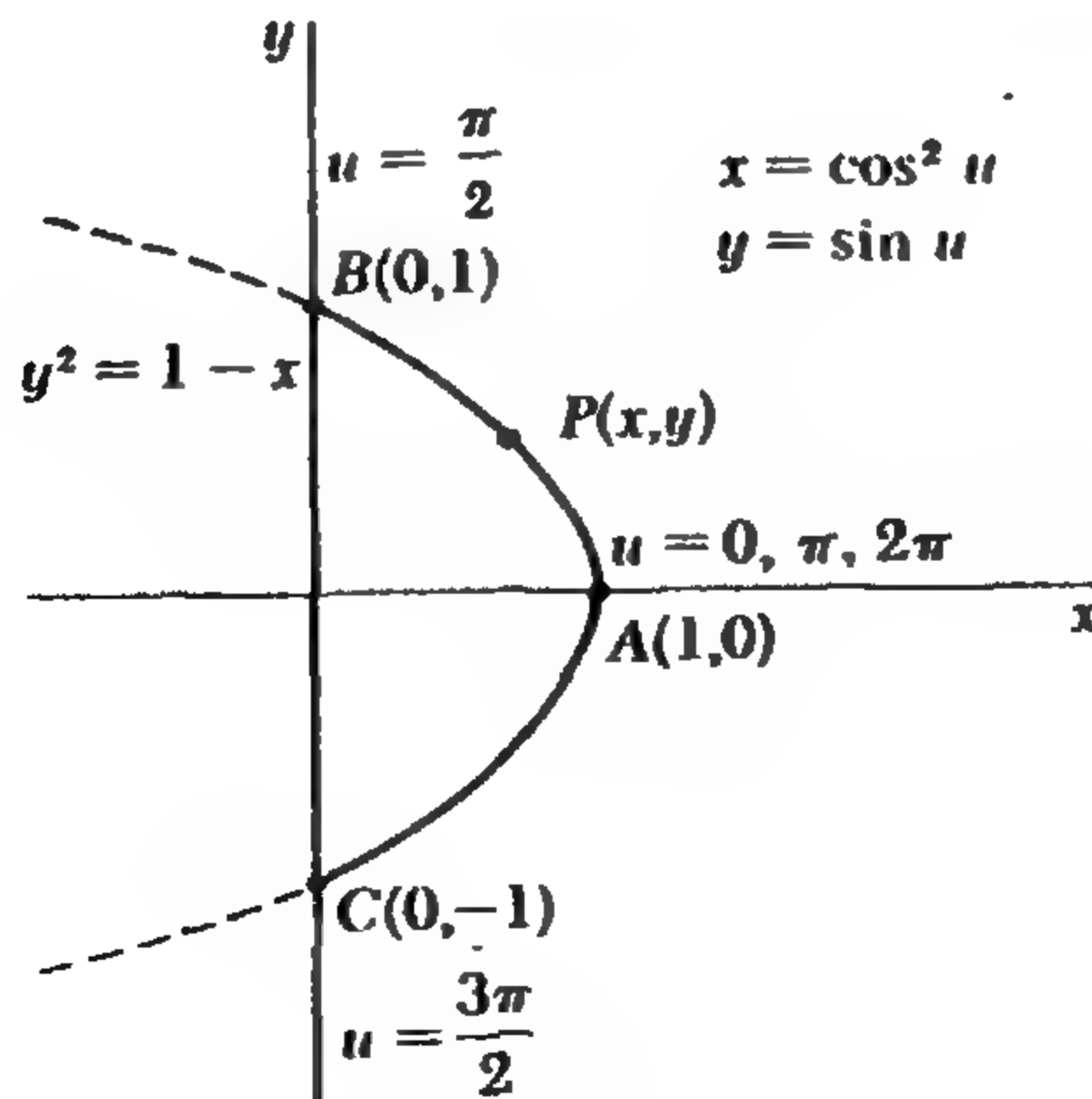
مثال ٢ . ادرس المنحنى الذى معادلته البارامترية هما

$$(٣) \quad x = \cos^2 u, \quad y = \sin u, \quad 0 \leq u \leq 2\pi$$

يمكننا ايجاد المنحنى بسهولة بحذف البارامتر u ، وذلك باضافة المعادلة الاولى الى مربع الثانية ، فنحصل على

$$x + y^2 = \cos^2 u + \sin^2 u = 1$$

أى $y^2 = 1 - x$. هذا هو القطع المكافئ المخطط فى الشكل ٣-٩ . إلا أن المنحنى الموصوف فى (٣) ليس القطع المكافئ بأكمله . بما أن $y = \sin u$ و $x = \cos^2 u$ فإن x و y مقيدتين بـ $-1 \leq y \leq 1$ و $0 \leq x \leq 1$. المنحنى (٣) هو فقط جزء القطع المكافئ على يمين المحور الصادى . عندما $u = 0$ ، النقطة P تكون عند $A(1,0)$. عندما تزايد u من 0 الى $\pi/2$ تتناقص x وتزايد y والنقطة P تتحرك على القطع من A الى $B(0,1)$. عندما تزايد u من $\pi/2$ الى π تزايد x



شكل ٣-٩

وتتناقص y وتتحرك P من B عائدة الى A . عندما تتزايد u من π الى $3\pi/2$ ، تكون y سالبة والنقطة P ترسم النصف الاسفل للقطع المكافئ من A الى $C(0,-1)$. عندما تتزايد u من $3\pi/2$ الى 2π ، النقطة P تتحرك من C عائدة الى A . اذا سمح للبارامتر u أن يتزايد بعد 2π ، فإن النقطة P مجرد أن تكرر الحركة .

هذا المثال يوضح أن المنحنى المعطى بمعادلتين بارامتريتين قد يكون جزء فقط من الشكل البياني للمعادلة في x و y التي نحصل عليها بحذف البارامتر ، وهذا قد يحدث حتى اذا كان البارامتر غير مقيد . عند تخطيط المنحنى يحذف البارامتر ، يجب أن نلاحظ أى قيود متضمنة على x أو y قد تؤدي الى جزء فقط من الشكل البياني للمعادلة غير البارامترية المستخدمة .

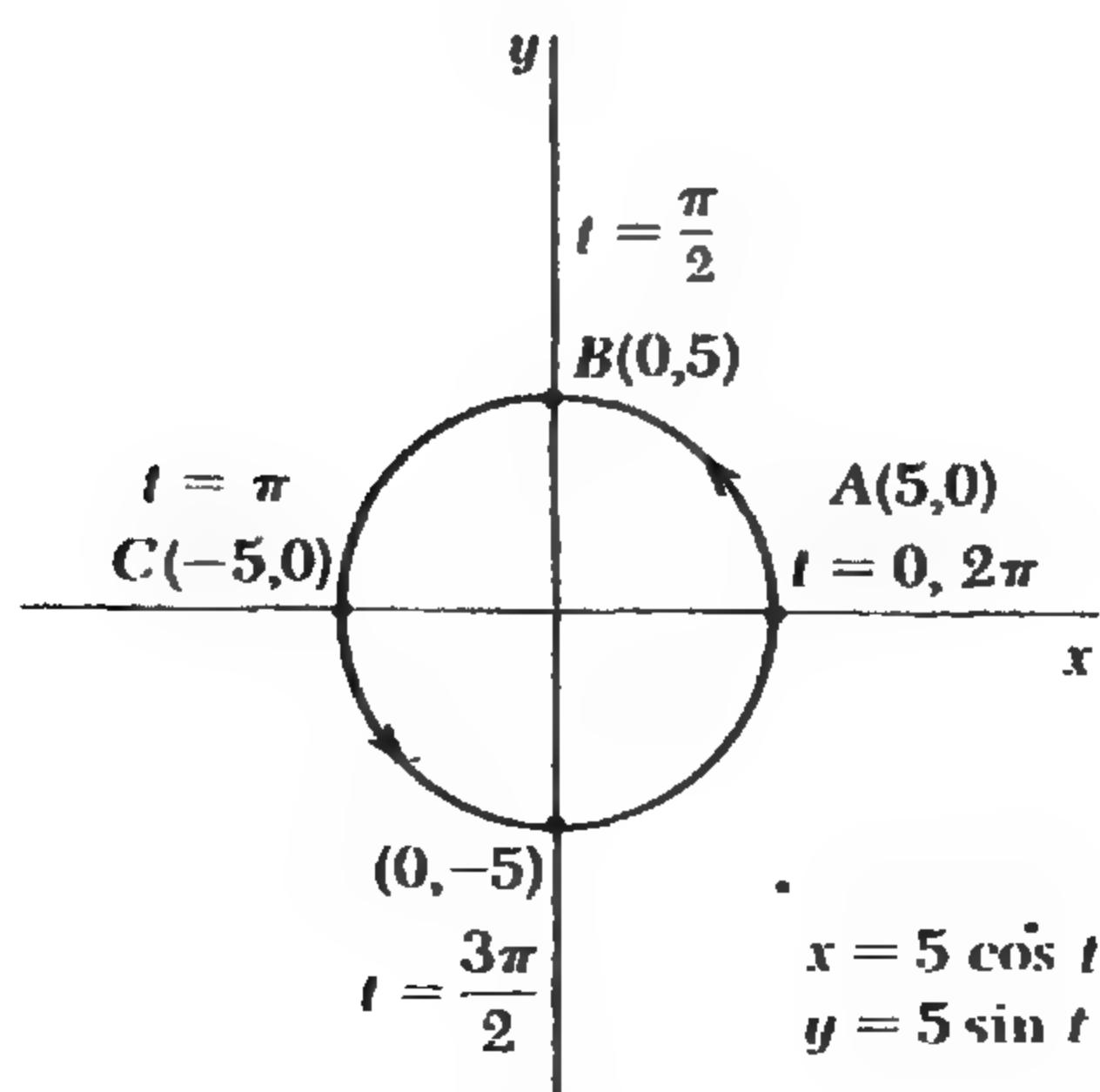
مثال ٣ . الاحداثيات عند الزمن $t \geq 0$ لنقطة تتحرك في المستوى x, y يعطيان بالمعادلتين $x = 5 \cos t$, $y = 5 \sin t$ صف حركة النقطة .

بتربيع وجمع المعادلتين ، نحذف البارامتر t ونحصل على المعادلة في x و y للمسار

$$x^2 + y^2 = 25(\cos^2 t + \sin^2 t) = 25$$

المسار هو دائرة مركزها عند نقطة الاصل ونصف قطرها 5 (شكل ٩ - ٤) . عندما $t = 0$ ، النقطة تكون عند $A(5,0)$. عندما تتزايد t ، النقطة تتحرك حول الدائرة ضد اتجاه عقرب الساعة ، حتى تصل النقطة $B(0,5)$ عندما $t = \pi/2$ والنقطة $C(-5,0)$ عندما $t = \pi$ والنقطة $D(0,-5)$ عندما $t = 3\pi/2$. ثم النقطة A مرة أخرى عندما $t = 2\pi$. الحركة الآن تكرر نفسها عندما تتزايد t بعد 2π . لو كانت معادلتا الحركة هما $x = 5 \cos t$, $y = -5 \sin t$ ، لكانت النقطة تتحرك حول نفس الدائرة لكن في اتجاه عقرب الساعة .

استخدام الزمن كبارامتر في إعطاء إحداثيات نقطة تتحرك في مستوى هو تطبيق هام للمعادلات البارامترية . فى بند ٩ - ٤ نعطى مثالا فيه الزمن بارامتر طبيعي . المعادلات البارامترية لمسار نقطة



شكل ٩ - ٤

تتحرك تعطى معلومات أكثر عن الحركة مما تعطيه المعادلة غير البارامترية . الأخيرة تعطى فقط المنحنى الذى ترسمه النقطة ، بينما الاولى تصف كيف ترسم النقطة المنحنى وتخبر متى تكون عند نقطة معطاة .

من السهل تحقيق أن الخط المستقيم الذى يصل بين النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) له المعادلتان البارامتريتان .

$$(4) \quad x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t$$

وهاتان يمكن كتابتهما على الصورة

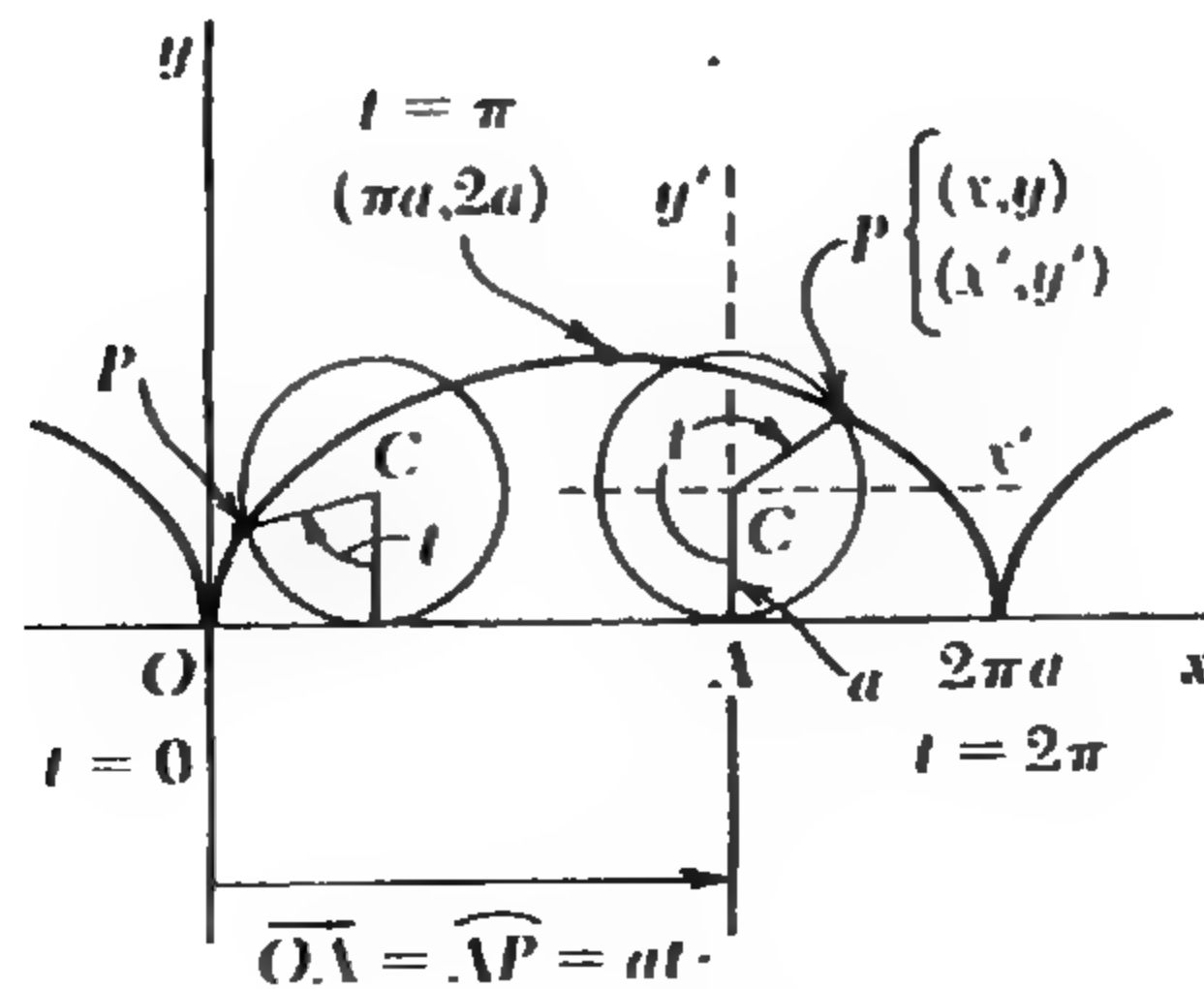
$$(5) \quad x = x_1(1 - t) + x_2t, \quad y = y_1(1 - t) + y_2t$$

نقطة P على الخط المستقيم تكون عند (x_1, y_1) عندما $t = 0$ وعند (x_2, y_2) عندما $t = 1$. قيم t بين $0, 1$ تعطى نقاطا على القطعة المستقيمة بين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) فمثلا ، $t = \frac{1}{2}$ تعطى نقطه المتصف ، $t = \frac{1}{3}$ تعطى نقطة الثلث من (x_1, y_1) الى (x_2, y_2) . الصورة البارامترية (5) حيث t مقيدة بـ $0 \leq t \leq 1$ تستخدم عادة لتمثيل القطعة المستقيمة بين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) .

لبعض المنحنيات الخاصة يكون ايجاد المعادلات فى صورة بارامترية أسهل من إيجادها فى الصورة المعتادة غير البارامترية فى x و y فقط . المثال الآتى كلاسيكى .

مثال 4 . عندما تتدحرج دائرة على خط مستقيم ، فإن أى نقطة ثابتة على الدائرة ترسم منحنى يسمى الدويرى (سيكلويد) . أوجد معادلته .

السيكلويد موضح فى الشكل 9 - 5 مع وضعين للدائرة المنشئة . سنوجد معادلته فى الصورة البارامترية . ليكن المحور السينى هو الخط الذى تتدحرج عليه الدائرة ، واتجاهه فى اتجاه الدائرة



شكل 9 - 5

$$\begin{aligned} x &= a(t - \sin t) : \text{السيكلون} \\ y &= a(1 - \cos t). \end{aligned}$$

التي تتدحرج ، ونفرض أن نقطة الأصل هي إحدى النقط حيث النقطة الثابتة $P(x, y)$ على الدائرة تكون في تماس مع الخط المستقيم . لتكن C هي مركز الدائرة ، a نصف قطرها ، والبارامتر t القياسى الدائرى للزاوية التي دارها نصف القطر CP . المسافة OA تساوى طول القوس الدائرى \widehat{AP} مقيسا في اتجاه عقرب الساعة . (إذا لم يكن هذا واضحا ، دحرج الدائرة للخلف حتى $t = 0$ ، فحينئذ تكون P عند نقطة الأصل) . إذن $\overline{OA} = \widehat{AP} = at$. أدخل محورين جديدين x' و y' موازيين للمحورين x و y ، ونقطة الأصل عند C . بالنسبة لهذين المحورين النقطة P لها الاحداثيان (x', y') . فتنا الاحداثيات ترتبطان بالمعادلتين :

$$(٦) \quad x = \overline{OA} + x' = at + x', \quad y = \overline{AC} + y' = a + y'$$

منظر مكبر للمحورين الجديدين موضح فى الشكل ٦-٩ . من تعريف الدوال المثلثية ، يكون

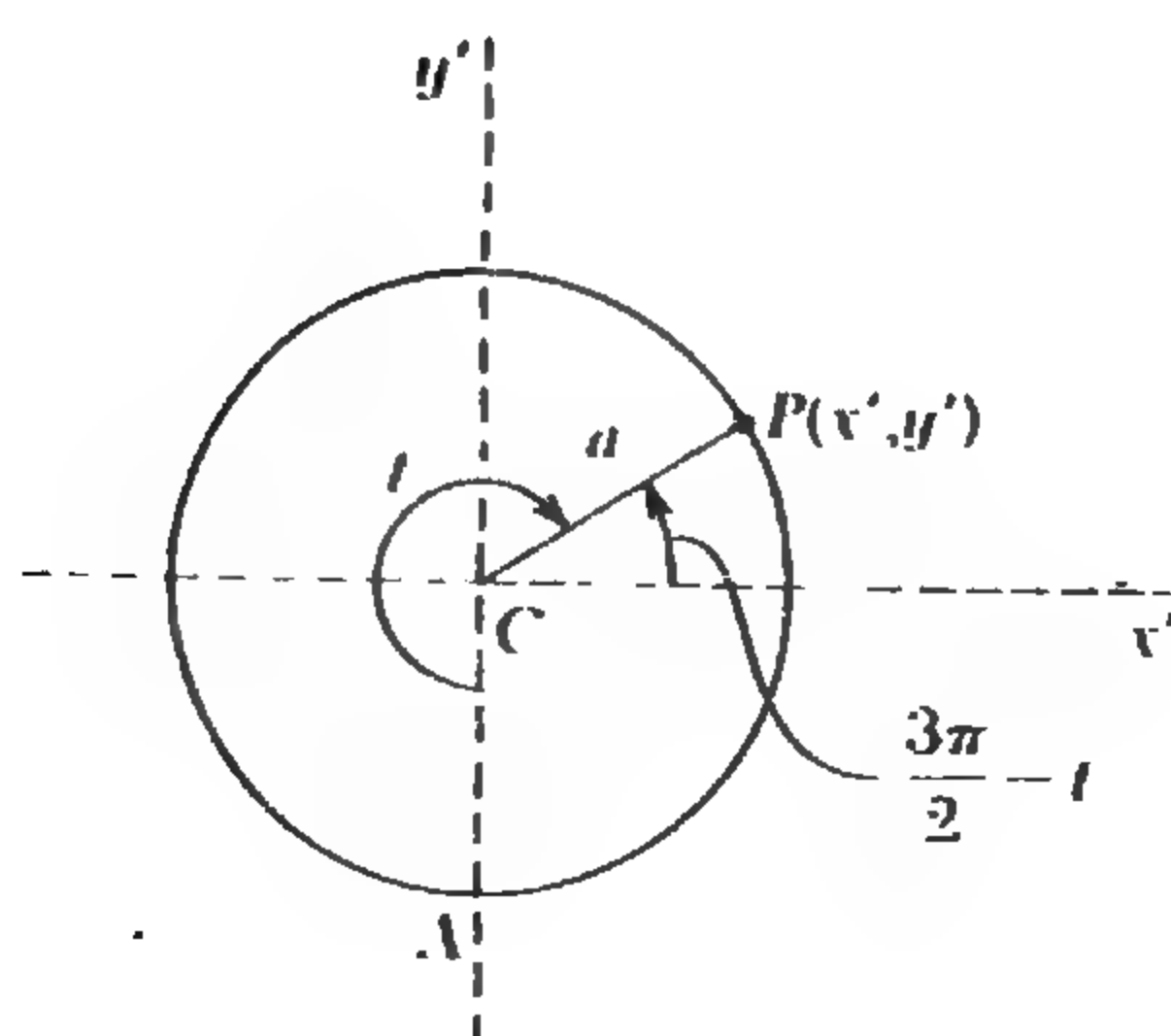
$$x' = a \cos \left(\frac{3\pi}{2} - t \right) = -a \sin t,$$

$$y' = a \sin \left(\frac{3\pi}{2} - t \right) = -a \cos t.$$

بإجراء هذين التعويضين فى (٦) لـ x' و y' ، نحصل على

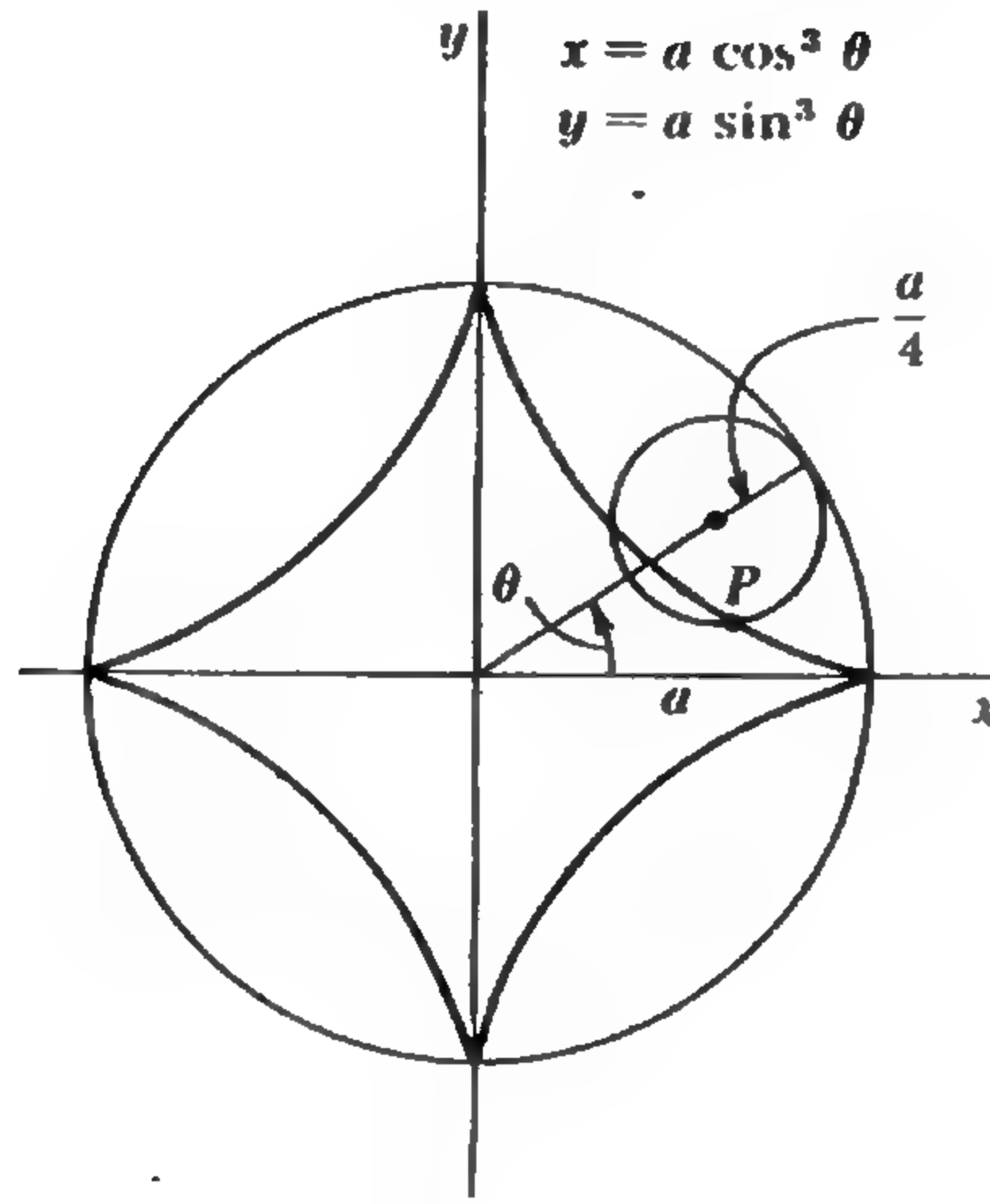
$$(٧) \quad x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

هذان يعطيان الاحداثيات $P(x, y)$ بدلالة t وهما المعادلتان البارامتريتان للمنحنى الدويرى الناشئ من دائرة نصف قطرها a . مع أن البارامتر t يمكن حذفه (انظر المسألة ٣٩) ، إلا أن المعادلة الناتجة فى x و y تكون معقدة ويكون من الأسهل دراسة المنحنى من معادلتيه البارامتريتين . بعد دورة واحدة للدائرة ، $t = 2\pi$ وتكون احداثيات النقطة P هي $(2\pi a, 0)$ ، وذلك مايجب أن يكون لان محيط الدائرة هو $2\pi a$.



شكل ٦-٩

بدلاً من التدحرج على خط مستقيم ، الدائرة في مثال ٤ يمكن أن تتدحرج على دائرة أخرى ثابتة ، من الخارج ، وكلتا الدائرتين في نفس المستوى . المنحني الذي ترسمه نقطة P على دائرة التدحرج يسمى دويرى فوقى (ابيسيكلويد) . هذا المنحني كان معروفاً جيداً عند القدماء . عندما كان يعتقد أن الأرض هي مركز المجموعة الشمسية ، كانت مدارات الكواكب كما ترى من الأرض تبدو أنها دويرات فوقية . إذا كانت الدائرة تتدحرج على الدائرة الثابتة من الداخل ، فالمنحني الناتج يسمى دويرى تحتى (هيوسيكلويد) عندما يكون نصف قطر الدائرة المتدحرجة ربع نصف قطر الدائرة الثابتة ، النقطة P تعود مرة أخرى إلى نقطة الابتداء بعد أن تكون الدائرة قد تدحرجت مرة على الدائرة الثابتة ، والمنحني يسمى دويرى تحتى بأربعة أتياب (شكل ٩ - ٧) .



شكل ٩-٧

هيوسيكلويد بأربعة أتياب

معادلتا البارامترتان هما

$$x = a \cos^3 \theta, \quad y = a \sin^3 \theta$$

حيث a هو نصف قطر الدائرة الثابتة . أعم من ذلك ، بدلاً من دائرتين ، يمكن أن يتدحرج أى منحني على منحني آخر . هذه النظرية تستخدم في تصميم التروس (المسننات) . الاسنان لترسين تتدحرج كل منها على الأخرى ويجب تشكيلها بحيث أنه لا يوجد ميل لها للانزلاق عندما تضغط كل منها على الأخرى .

مسائل

خطط وعين نوع كل من المنحنيات ، إذا كان مألوفاً ، التي لها المعادلات البارامترية الآتية . صف الحركة لنقطة على المنحني عندما يتزايد البارامتر من قيمته الصغرى إلى قيمته الكبرى . البارامتر ، إذا لم يكن مقيداً ، فيكون من المفهوم أنه يأخذ كل القيم التي تجعل العبارات المعرفة لـ x و y لها معنى .

$$x = t^2 - 1, y = t; -1 \leq t \leq 6 \quad - \quad ٣ \quad x = 4, y = 3t \quad - \quad ٢ \quad x = 2t, y = 1 - t \quad - \quad ١$$

$$x = \cos t, y = \sin t; 0 \leq t \leq \pi \quad - \quad ٥ \quad x = u - 1, y = u^2 - 4; 0 \leq u < \infty \quad - \quad ٤$$

$$x = \cos 2t, y = \sin 2t; 0 \leq t \leq 2\pi \quad - \quad ٧ \quad x = -\cos t, y = \sin t; 0 \leq t \leq 2\pi \quad - \quad ٦$$

$$x = p/t^2, y = 2p/t \text{ حيث } p \text{ ثابت موجب} \quad - \quad ٩ \quad x = 2e^t, y = 1 - e^t \quad - \quad ٨$$

$$x = 3 \sin u, y = 2 \cos u \quad - \quad ١١ \quad x = 2s, y = 1/s; s > 0 \quad - \quad ١٠$$

$$x = 3 - 2 \cos r, y = 2 + 4 \sin r \quad - \quad ١٣ \quad x = 2 + 1/t, y = 2 + t \quad - \quad ١٢$$

$$x = \cos 2\alpha, y = \cos \alpha \quad - \quad ١٥ \quad x = t^3, y = t^2 \quad - \quad ١٤$$

$$x = t + 1/t, y = t - 1/t \quad - \quad ١٦ \quad \text{(ارشاد : لحذف البارامتر، اجمع واطرح المعادلتين).}$$

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2} \quad - \quad ١٧ \quad \text{(ارشاد : لحذف البارامتر، اكتب مربعي المعادلتين ثم اجمع)}$$

كل من أزواج المعادلات الآتية يعطى الاحداثيات عند الزمن t لنقطة تتحرك في المستوى xy .
صف الحركة عندما تتزايد t من قيمتها الصغرى الى قيمتها العظمى .

$$x = t^2, y = 1 - t^2; -2 \leq t \leq 2 \quad - \quad ١٩ \quad x = 2 - t, y = 1 + 3t; 0 \leq t \leq 4 \quad - \quad ١٨$$

$$x = \sqrt{t}, y = \sqrt{3-t} \quad - \quad ٢١ \quad x = 2t, y = t^3; -1 \leq t \leq 2 \quad - \quad ٢٠$$

$$x = \sin t, y = \cos^2 t; 0 \leq t \leq 2\pi \quad - \quad ٢٣ \quad x = \cos t, y = 3 \sin t; 0 \leq t \leq \pi \quad - \quad ٢٢$$

٢٤ - اثبت أن كلا من المنحنيات المعطاة معادلتها البارامترية أدناه هو جزء من أو كل نفس القطع المكافئ. وصف ذلك الجزء .

$$x = |u|, y = u^2 \quad (\text{ج}) \quad x = u^2, y = u^4 \quad (\text{ب}) \quad x = u, y = u^2 \quad (\text{أ})$$

$$x = e^u, y = e^{2u}; u \geq 0 \quad (\text{و}) \quad x = e^u, y = e^{2u} \quad (\text{هـ}) \quad x = \sin u, y = \sin^2 u \quad (\text{د})$$

٢٥ - نقطة تتحرك في المستوى xy ، تعطى احداثياتها عند الزمن t بالمعادلتين $x = t^2, y = 2t - 1$ ، ما الزمن الذي تأخذه النقطة لتتحرك من النقطة $(4,0)$ الى النقطة $(4, 3)$ ؟

٢٦ - اثبت أن الخط المستقيم المار بالنقطة (a, b) وميله m معادلته البارامترية هما $x = a + t, y = b + mt$. اوجد المعادلتين البارامتريتين للخط المستقيم الرأسى الذى يمر بالنقطة (a, b) .

٢٧ - اثبت أن المعادلتين البارامتريتين فى (٤) هما المعادلتان للخط المستقيم الواصل بين النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) .

٢٨ - اوجد احداثيات النقطة P على الخط المستقيم الذى يصل بين النقطتين $B(x_2, y_2)$ و $A(x_1, y_1)$ بحيث أن : (أ) النقط تكون فى الترتيب ABP و $|BP| = \frac{1}{3} |AB|$ (ب) النقط تكون فى الترتيب PAB و $|PA| = 2|AB|$.

٢٩ - أوجد المنحنى الذى يرسمه الطرف الأعلى للوتر البؤرى العمودى للقطع المكافئ $y^2 = 4px$ عندما تتغير p (ارشاد : اوجد المعادلتين البارامتريتين للمنحنى) .

٣٠ - أوجد المعادلة فى x و y للدويرى التحتى الذى له أربعة أنياب، $y = a \sin^3 \theta$ و $x = \cos^3 \theta$.

٣١ - اوجد المعادلتين البارامتريتين للقطع المكافئ فى الشكل ٩ - ١ بحيث أنه عندما يتزايد البارامتر، تتحرك النقطة على القطع المكافئ من اليمين الى اليسار .

أوجد المعادلات البارامترية للمنحنيات الآتية :

٣٢ - $3x + 7y = 2$.

٣٣ - الدائرة التى مركزها عند النقطة (h, k) ونصف قطرها r .

٣٤ - المحور السينى .

٣٥ - $y^2 = -x$.

٣٦ - القوس المكافئ $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ (ارشاد : انظر المسألة ٣٠) .

٣٧ - أوجد المعادلتين البارامتريتين $x = g(\theta)$, $y = h(\theta)$ للمنحنى القلى الذى معادلته بالاحداثيات القطبية هي $r = a(1 - \cos \theta)$. (ارشاد : استخدام المعادلات التى تعطى θ و r بدلالة x و y) .

٣٨ - أوجد المعادلتين البارامتريتين $x = g(\theta)$, $y = h(\theta)$ للحلزون الزائدى الذى معادلته القطبية هي $r \theta = a$.

٣٩ - اثبت أن المعادلة فى x و y لمنحنى الدويرى (٧) التى نحصل عليها بحذف t هي

$$x = a \cos^{-1} \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$$

٤٠ - لتكن دائرة نصف قطرها a تتدحرج على خط مستقيم بدون ترحلق ولتكن نقطة P على بعد b من المركز على نصف قطر ثابت بالدائرة المتدحرجة . مثلاً ، النقطة P قد تكون على برمق عجلة عربية أو على شفة عجلة عربية مسكة حديد . المنحنى الذى ترسمه النقطة P يسمى التروشويد ، ومنه السيكلويد حالة خاصة . اذا اختير المحور السينى الخط الذى تتدحرج عليه الدائرة ، والمحور الصادى يمر بأدنى موضع للنقطة P ، اثبت أن المعادلتين البارامتريتين للتروشويد هما .

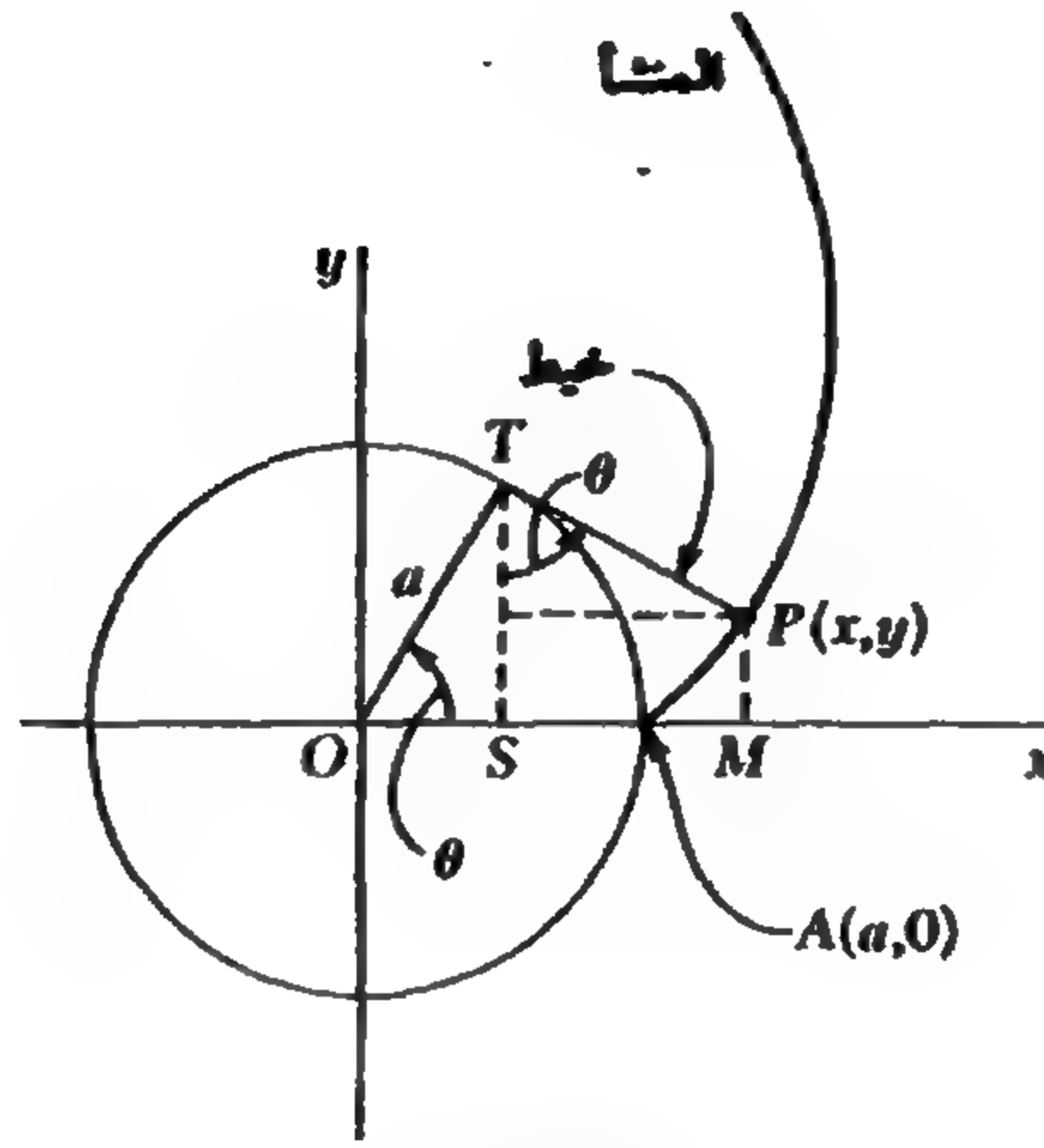
$$x = at - b \sin t, \quad y = a - b \cos t$$

حيث البارامتر t هو نفسه البارامتر للسيكلويد . اعمل تخطيطاً كروكياً للتروشويد فى كل من الحالتين $b > a$ و $b < a$.

٤١ - خيط ملفوف حول دائرة يفك في مستوى الدائرة بينما يظل مشدودا ، نهاية الخيط ترسم منحنى يسمى المنشأ للدائرة (شكل ٩ - ٨) . لتكن الدائرة نصف قطرها a ومركزها عند نقطة الأصل O ولتكن النقطة $P(x, y)$ في نهاية الخيط وضعها الابتدائي عند $A(a, 0)$. جزء الخيط المفكوك يكون مماسا للدائرة عند T . اذا رمز للزاوية AOT بـ θ ، اثبت أن المعادلتين البارامتريتين للمنشأ هما

$$x = a(\cos \theta + \theta \sin \theta), \quad y = a(\sin \theta - \theta \cos \theta)$$

(ارشاد : أوجد طول PT)



شكل ٩ - ٨
المنشأ لدائرة

٩ - ٢

الميل

عادة يكون من المناسب عند اشتغالنا بالمعادلتين البارامتريتين استخدام x و y بدلا من h و g للرمزين الداليين ، ونكتب $y = y(t)$ و $x = x(t)$ بدلا من $y = h(t)$ و $x = g(t)$. فمثلا ، اذا كانت $y = t^3$ و $x = 1 - t^2$ فحيث $y(t) = t^3$ و $x(t) = 1 - t^2$.

ميل منحنى معطى بمعادلتين بارامتريتين يمكن ايجاده مباشرة من المعادلتين . لتكن $y = y(t)$ و $x = x(t)$ المعادلتين البارامتريتين للمنحنى . نفرض أن المنحنى ، أو جزء من المنحنى ، له معادلة غير بارامترية $y = f(x)$. هذا يعنى أن المعادلة

$$y(t) = f(x(t))$$

صحيحة لجميع t في فترة ما . اذا كانت $y(t)$ و $x(t)$, $f(x)$ قابلة للتفاضل ، فباستخدام قاعدة السلسلة يكون

$$y'(t) = f'(x)x'(t)$$

$$(1) \quad f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

هذا يمكن وضعه في الصورة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

من الواضح أن هذا لا يكون صحيحا لاي قيمة t حيث $dx/dt = 0$.

المماس للمنحنى يكون أفقيا لقيم t حيث $dy/dt = 0$ بشرط أن dx/dt تكون موجودة وليست صفرا . بالمثل يمكن اثبات أن المماس يكون رأسيا لقيم t حيث $dx/dt = 0$ بشرط أن dy/dt تكون موجودة ولا تساوي صفرا . نوع التماس عندما تكون كل من dx/dt و dy/dt صفرا يمكن تعيينه بتحليل أكثر عمقا .

مثال ١ . أوجد ميل السيكلويد

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad a > 0$$

(شكل ٩ - ٥) عند النقطة حيث $t = \pi/3$ وأوجد النقطة على القوس الاول حيث المماس يكون افقيا .

لدينا $dy/dt = a \sin t$ و $dx/dt = a(1 - \cos t)$. ميل السيكلويد يعطى بـ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

عندما $t = \pi/3$ يكون $dy/dx = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$. اذا كانت t مقيدة بالفترة $[0, 2\pi]$ ، التي تناظر القوس الاول للسيكلويد ، فانا نرى أن $dx/dt = 0$ عندما $t = 0$ و 2π ، وان $dy/dt = 0$ عندما $t = 0, \pi, 2\pi$. المماس يكون أفقيا عندما $t = \pi$ ، والنقطة المناظرة على السيكلويد هي $(\pi a, 2a)$. الموقف يكون غامضا عندما $t = 0$ أو 2π ، حيث كل من dx/dt و dy/dt تساوي صفرا هناك ، لكن من الممكن اثبات أن المماس يكون رأسيا عند كلتا النقطتين .

مسائل

أوجد معادلة المماس للمنحنيات الآتية عند القيمة المعطاة للبارامتر :

- | | |
|---|--|
| ١ - $x = 2t, y = t^2 - 1; t = 2$ | ٢ - $x = t^2, y = t^3; t = 1$ |
| ٣ - $x = 1/u, y = 2u; u = -1$ | ٤ - $x = 4 \cos \theta, y = 3 \sin \theta; \theta = \pi/4$ |
| ٥ - $x = \cos 2\alpha, y = \sin \alpha; \alpha = \pi/3$ | ٦ - $x = 2e^t, y = 1 - e^t; t = 3$ |

خطط المنحنيات الآتية وأوجد النقط حيث المماسات تكون أفقية أو رأسية :

$$x = t^2 - 2t, y = t + 1 \quad - ٨$$

$$x = 2 + t, y = 1 - 4t \quad - ٧$$

$$x = 3 + 4 \sin \alpha, y = 4 - 3 \cos \alpha \quad - ١٠$$

$$x = b \cos u, y = b \sin u \quad - ٩$$

$$x = t^3, y = t^2 \quad - ١٢$$

$$x = \sin \theta, y = \cos^2 \theta \quad - ١١$$

$$x = \cos 2s, y = \cos s \quad - ١٤$$

$$x = a \sec t, y = b \tan t \quad - ١٣$$

١٥ - اثبت أن ميل التروشويد

$$x = at - b \sin t, \quad y = a - b \cos t$$

حيث $a, b > 0$ ، يكون دائما محدودا اذا كانت $b < a$ (انظر المسألة ٤٠ ، بيند ٩ - ١) .
١٦ - الكاردويد في الشكل ٩ - ٩ له المعادلتان البارامتريتان

$$x = a(\cos \theta - \cos^3 \theta), \quad y = a(\sin \theta - \sin \theta \cos^2 \theta)$$

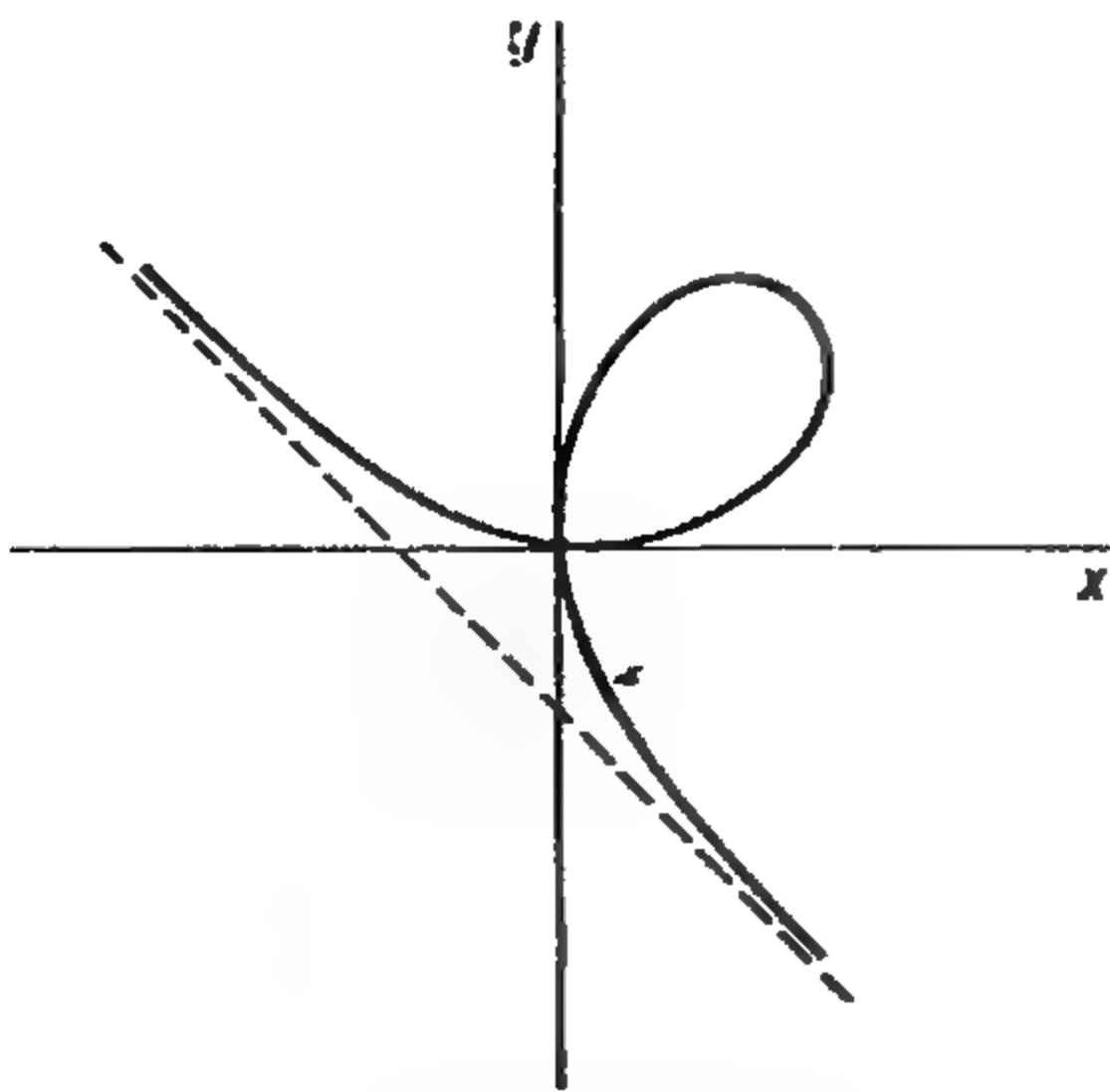
أوجد النقط على الكاردويد حيث المماسات تكون أفقية أو رأسية .
١٧ - طيه ديكارت (شكل ٩ - ١٠) لها المعادلتان البارامتريتان

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

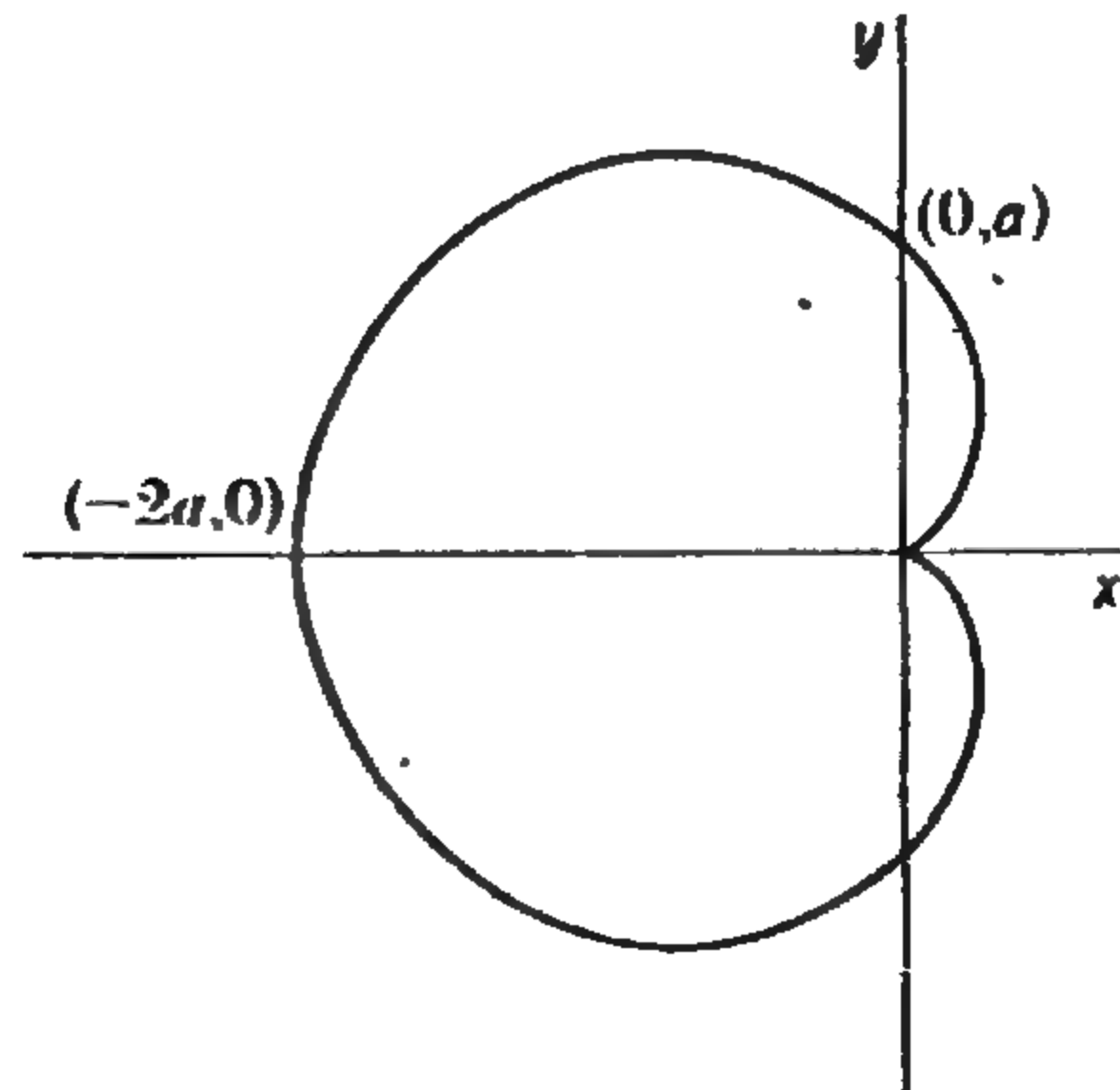
(أ) أوجد النقط التي على المنحنى حيث المماسات تكون أفقية ورأسية .
(ب) ارسم المنحنى عندما تذهب t من $-\infty$ الى ∞

$$x^3 + y^3 = 3xy$$

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}$$



شكل ٩ - ١٠
طيه ديكارت



شكل ٩ - ٩

١٨ - إذا كان منحنى بمعادلتى بارامتريتين $x = x(t)$, $y = y(t)$ له معادلة غير بارامترية $y = f(x)$ ، فاثبت أن

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^3}$$

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} f'(x) = \left(\frac{d}{dt} f'(x) \right) \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{d}{dt} f'(x)}{dx/dt} : \text{ارشاد} \right]$$

استخدم المسألة ١٨ لإيجاد d^2y/dx^2 للمنحنيات الآتية :

$$\begin{array}{lll} x = z^3, y = z^2 & - ٢١ & x = -u^2/2, y = 1 + u \quad | - ٢٠ \\ x = \sin t, y = \sin 2t & | - ٢٣ & x = \cos t, y = \sin t \quad - ٢٢ \end{array}$$

٢٤ - اثبت أن السيكلويد $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$ (شكل ٩ - ٥) يكون مقعرا الى تحت فى الفترة $0 < t < 2\pi$ (ارشاد : استخدم المسألة ١٨) .

٢٥ - اثبت أن المنحنى $x = t^3 - 4t$, $y = 3t^2 + 4t$ ليس له نقطة انقلاب (ارشاد : استخدم المسألة ١٨) .

٢٦ - اثبت أن طول القطعة لآى مماس للهيوسيكلويد ذى الأنياب الأربعة : $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$, $a > 0$ (شكل ٩ - ٧) .

٩ - ٣ . طول القوس

فى هذا البند سنوجد صيغة لطول المنحنى . أولا يجب أن نعرف التعبير . التعريف ينبغى أن يتفق مع أفكارنا البديهية لطول القوس وتكون كافية عمليا لاعطائنا الاجوبة . للخطوط المستقيمة هذا أمر سهل . طول قطعة الخط المستقيم الواصل بين النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) تعرف بالعدد الذى نحصل عليه بصيغه المسافة .

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

تعريف طول المنحنى الذى ليس خطا مستقيما سيعتمد على هذا .
ليكن المنحنى له المعادلتان البارامتريتان

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b$$

حيث $x(t)$ و $y(t)$ متصلتان . يمكن اثبات أن اتصال هاتين الدالتين يضمن أن المنحنى يكون متصلا بالمعنى الهندسى بلا ثقوب ولا فجوات كل t تعين نقطة $P(x(t), y(t))$ على المنحنى .

سنفترض أن المنحنى يرسم مرة واحدة بالنقطة P عندما تذهب t من a إلى b . هذا لم يكن صحيحا بالنسبة إلى القوس المكافئ.

$$x = \cos^2 u, \quad y = \sin u, \quad 0 \leq u \leq 2\pi$$

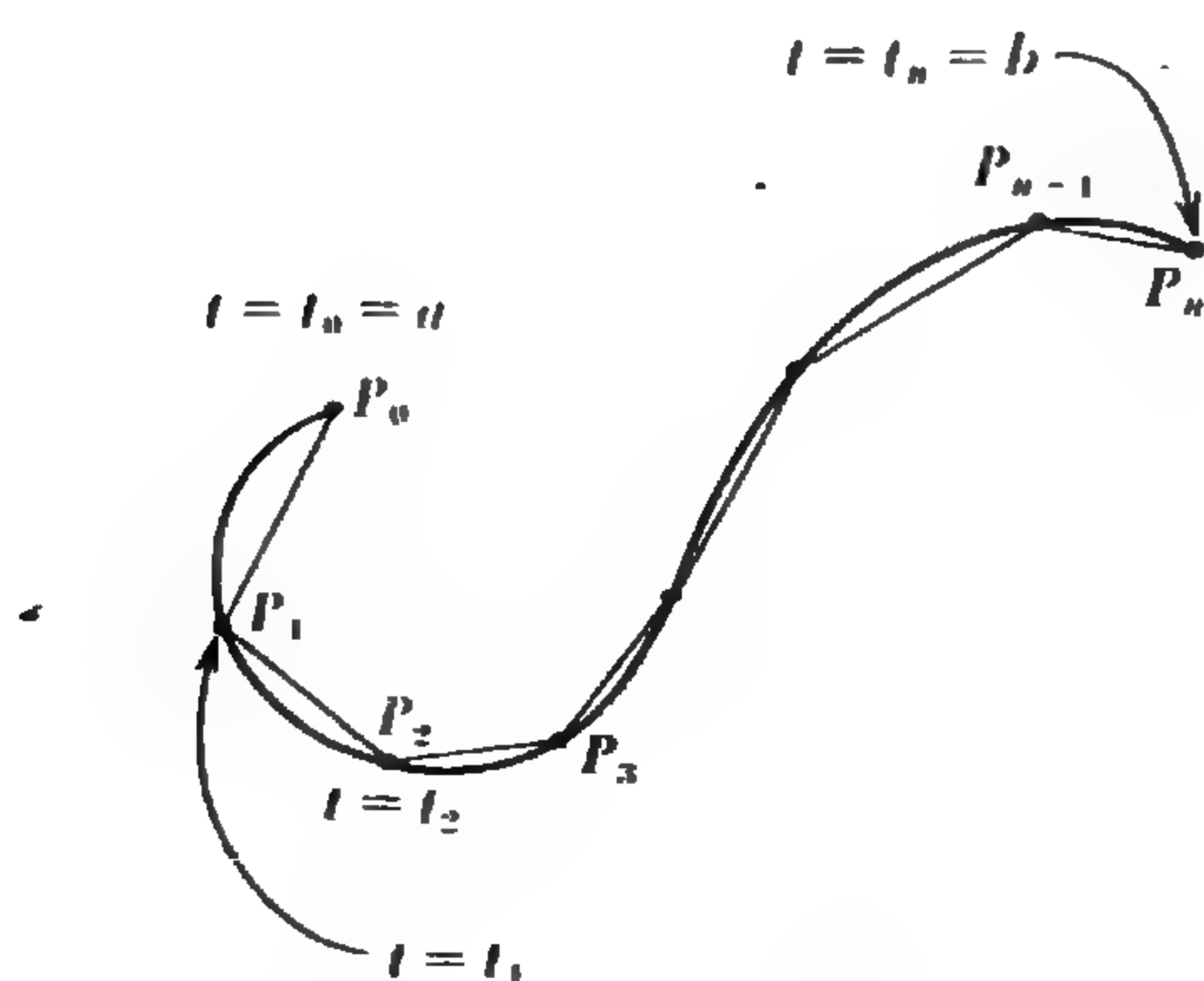
الذي درسناه في مثال ٢ بيند ٩-١ (شكل ٩-٣)، لكنه يكون صحيحا للقوس الجزئي AB العين بـ $0 \leq u \leq \pi/2$. ليكن :

$$p = [a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = b]$$

تجزئ للفترة $[a, b]$. الأعداد المقسمة $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n$ تعين متتابعة من النقاط $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$ على المنحنى (شكل ٩-١١). صل كل نقطة بالنقطة التي تعقبها بقطعة مستقيمة. مثل هذه المتتابعة من القطع المستقيمة تسمى مضلعا مرسوما داخل المنحنى حتى إذا كان المضلع غير مقفل. حاصل جمع أطوال القطع المستقيمة هو

$$(١) \quad L_p = |P_0P_1| + |P_1P_2| + \dots + |P_{n-1}P_n| = \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|$$

إذا كان التجزئ دقيقا، فإن النقاط P_i تكون قريبة كل من الأخرى بسبب اتصال الدالتين $x(t)$ و $y(t)$ وحاصل الجمع L_p يكون تقريبا جيدا لما نعتقد أنه طول المنحنى، ويصبح تقريبا أدق كلما زادت دقة التجزئ. من المعقول أن نعرف طول المنحنى بأنه عدد التجمع لحاصل الجمع (١) لجميع التجزيئات P . ليس كما هو الحال في المساحات حيث التقريب يمكن أن يكون إما أكبر من أو أقل من المساحة، هنا كل تقريب L_p يقطع مستقيمة يجب أن يكون أقل من طول المنحنى. وعليه فعدد التجمع هو أيضا الحد الأعلى الأقل للتقريبات. بدلا من استخدام عدد التجمع، يكون من المناسب أن نعرف طول المنحنى بأنه الحد الأعلى الأقل لفئة الـ L_p لجميع التجزيئات P توجد منحنيات حيث فئة الـ L_p ليس لها حد أعلى أقل، ومثل هذه المنحنيات ليس لها طول. فئة الـ L_p يجب في هذه الحالة أن تكون غير محدودة من أعلى، ويقال أحيانا أن الطول لانهائي.



شكل ٩-١١

٩ - ١ تعريف . ليكن C منحنى معادلته البارامترتان هما .

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b$$

حيث الدالتان $x(t)$ و $y(t)$ متصلتان وبحيث أن النقطة $P(x(t), y(t))$ ترسم المنحنى مرة واحدة عندما تذهب t من a الى b . طول المنحنى هو الحد الأعلى الاقل للاطوال L_p للمضلعات المرسومة داخل المنحنى لجميع التجزيئات P للفترة $[a, b]$. اذا لم يوجد حد أعلى أقل ، فان المنحنى ليس له طول .

التعريف يشرح ماهو المقصود بطول المنحنى . النظرية الآتية تخبرنا كيف نوجده . لكن سنفترض أكثر من أن الدالتين $x(t)$ و $y(t)$ متصلتان ، وهو أن الدالتين لهما مشتقتان متصلتان . جميع المنحنيات الأكثر شيوعا تحقق هذا المطلب .

٩ - ٢ . نظرية ليكن C منحنى معادلته البارامترتان هما

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b$$

حيث $x(t)$ و $y(t)$ لهما مشتقتان متصلتان وبحيث أن النقطة $P(x(t), y(t))$ ترسم المنحنى مرة واحدة عندما تذهب t من a الى b . طول المنحنى بين النقطتين المناظرتين لـ a و b موجود ويعطى بالصيغة

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

بالرموز التفاضلية هذا يكون

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

برهان هذه النظرية صعب جدا لاعطائه هنا ، لكن يمكننا اعطاء استدلال مقبول . النقطة P_i على المنحنى المناظرة للبارامتر t_i احداثياتها هي $(x(t_i), y(t_i))$ (شكل ٩ - ١٢) . واذن طول القطعة المستقيمة $P_{i-1}P_i$ في (١) هو

$$(٢) \quad |P_{i-1}P_i| = \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2}$$

بنظرية القيمة المتوسطة يوجد عدداً u_i و v_i في الفترة الجزئية (t_{i-1}, t_i) بحيث أن

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(u_i) \Delta t_i$$

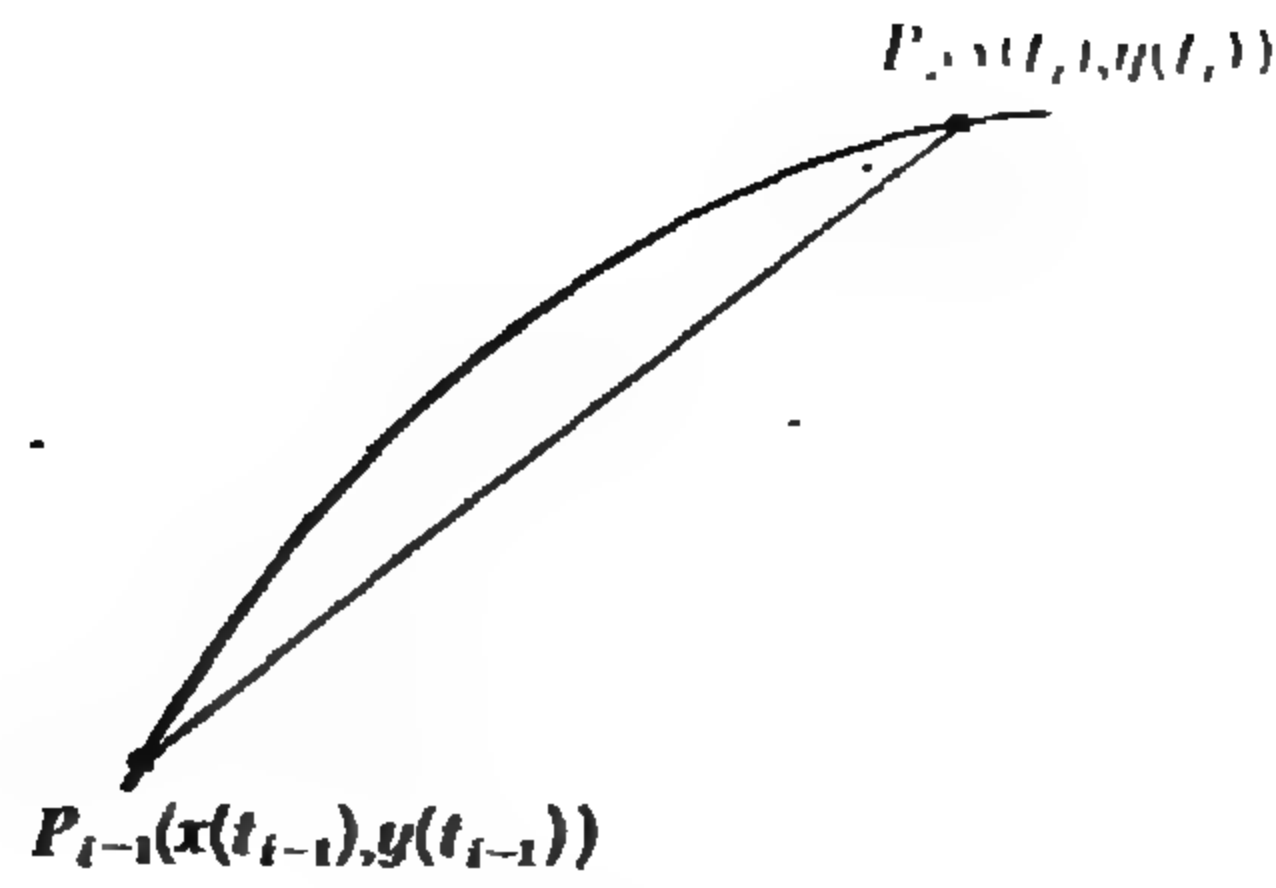
$$y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(v_i) \Delta t_i$$

حيث $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. بتعويض هاتين في (٢) ، يكون

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(v_i)]^2} \Delta t_i$$

وطول المضلع (١) المرسوم داخل المنحنى يمكن التعبير عنه هكذا

$$(٣) \quad L_p = \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(v_i)]^2} \Delta t_i$$



شكل ٩-١٢

إذا كان معيار التجزء صغيراً ، فإن u_i و v_i ، وكلاهما في الفترة الجزئية (t_{i-1}, t_i) ، تكونان قريبتين من بعضهما ، واتصال $x'(t)$ و $y'(t)$ يتضمن أن L_p في (٣) لا تختلف كثيراً عن

$$\bar{L}_p = \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(u_i)]^2} \Delta t_i$$

التي هي (٣) مع استبدال v_i بـ u_i . هذا الأخير هو حاصل جمع ريمان للدالة المتصلة

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

واذن \bar{L}_p يجب أن يكون لها عدد تجمع ، حيث التكامل

$$(٤) \quad \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

هي مجرد اسم آخر له . من المقبول أن L_p ، وهي تكاد تساوي \bar{L}_p للمعايير الصغيرة ، تتجمع حول نفس العدد ، وبما أنه يمكن إثبات أنها أقل منه ، فالعدد هو حداً أعلى الأقل . واذن الطول L للمنحنى يعطى بالتكامل في (٤) .

الحدان a و b يمكن تعيينهما بتخييل نقطة ترسم المنحنى . فهما قيمتا البارامتر t عند بداية ونهاية المنحنى .

مثال ١ . أوجد طول قوس واحد من الدويري $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ حيث $a > 0$ (شكل ٩-٥) .

لدينا

$$x'(t) = a(1 - \cos t), \quad y'(t) = a \sin t$$

ومن ثم

$$\begin{aligned} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} &= a \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} \\ &= a \sqrt{2(1 - \cos t)}. \end{aligned}$$

القوس الأول يرسم عندما تتغير t من 0 إلى 2π . واذن طوله يعطى بالصيغة

$$L = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt$$

هذا التكامل يمكن ايجاده باستخدام المتطابقة $1 - \cos t = 2 \sin^2 (t/2)$. بما أن $\sin (t/2) \geq 0$ لـ $0 \leq t \leq 2\pi$ ، فيكون $\sqrt{\sin^2 (t/2)} = \sin (t/2)$ ويكون

$$L = a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a$$

فالطول ثمانية أمثال نصف قطر الدائرة المنشئة .

أى منحنى معادلته على الصورة $y = f(x)$ له المعادلتان البارامتريتان $x = t$, $y = f(t)$. إذا كانت $f(x)$ لها مشتقة متصلة ، فالنظرية ٩ - ٢ توضح أن طول المنحنى $y = f(x)$ بين $x = a$ و $x = b$ يعطى بالصيغة

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad ٩ - ٣$$

مثال ٢ . أوجد طول المنحنى $y = x^{3/2}$ بين نقطة الاصل والنقطة $(2, \sqrt{8})$.
المنحنى $y = x^{3/2}$ هو النصف العلوى للقطع المكافئ نصف التكميبي $y^2 = x^3$ ، الموضح فى الشكل ٩ - ١٣ . لدينا $dy/dx = f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2}$ ومن الصيغة ٩ - ٣ ، يكون

$$\begin{aligned} L &= \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{2}{3} \left(\frac{4}{9} \right) (1 + \frac{9}{4}x)^{3/2} \Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{27} (4 + 9x)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{1}{27} (22^{3/2} - 8) \approx 3.53. \end{aligned}$$

المنحنى قد يكون له معادلتان قطبيتان بارامتريتان

$$(٥) \quad r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad a \leq t \leq b$$

ويمكننا اعتبار النقطة التى احداثيها القطبيان هما $(r(t), \theta(t))$ أنها ترسم المنحنى عندما تتزايد t من a الى b . التكامل لطول المنحنى الذى معادلته القطبيتان فى (٥) يمكن اشتقاقه من التكامل فى النظرية ٩ - ٢ باستخدام المعادلات التى تربط الاحداثيات القطبية بالاحداثيات الكارتيزية :

$$x(t) = r(t) \cos \theta(t), \quad y(t) = r(t) \sin \theta(t)$$

نفترض أن r و θ لهما مشتقتان متصلتان لـ $a \leq t \leq b$ وأن المنحنى يرسم مرة واحدة عندما تتزايد t من a الى b المشتقتان لهاتين بالنسبة الى t هما

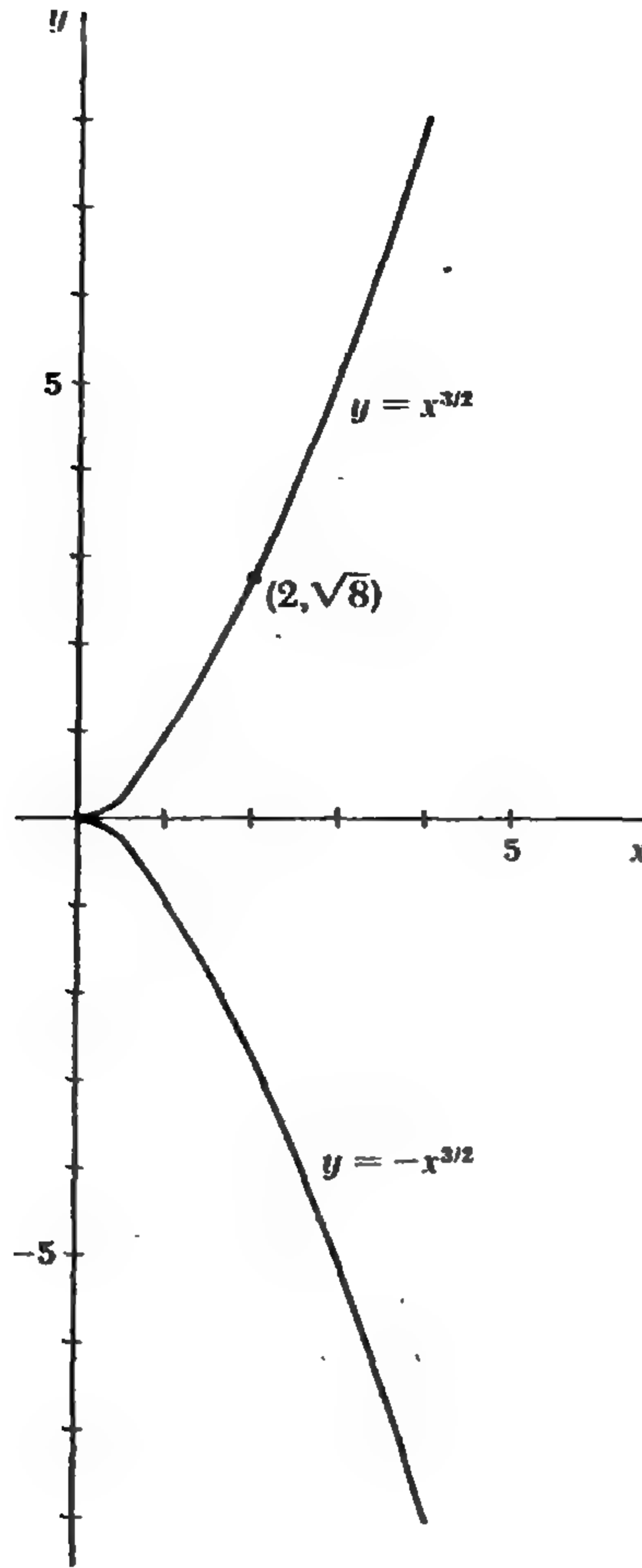
$$x'(t) = -r(t) \sin \theta(t) \theta'(t) + r'(t) \cos \theta(t),$$

$$y'(t) = r(t) \cos \theta(t) \theta'(t) + r'(t) \sin \theta(t).$$

بتربيع طرفى المعادلتين وجمعهما ثم الاختصار ، نحصل على

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = r^2(t) [\theta'(t)]^2 + [r'(t)]^2$$

وبتعويض الطرف الأيمن من هذه المعادلة فى التكامل المذكور فى النظرية ٩ - ٢ نحصل على التعبير



شكل ٩-١٣

قطع مكافئ نصف تكعيبي $y^2 = x^3$.

$$(٧) \quad L = \int_a^b \sqrt{r^2(t) [\theta'(t)]^2 + [r'(t)]^2} dt = \int_a^b \sqrt{r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2} dt$$

الذي يعطى طول المنحنى المعبر عنه بالمعادلتين التطبيقتين البارامتريتين
 $r = r(t), \theta = \theta(t), a \leq t \leq b$

ويمكن تحويل منحنى معطى بالمعادلة القطبية $r = f(\theta)$ إلى الصورة البارامترية بوضع
 $\theta = t, r = f(t)$ وبهذا تصبح المعادلة ٩-٤ بالصورة .

$$L = \int_a^b \sqrt{f^2(\theta) + [f'(\theta)]^2} d\theta = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2} d\theta$$

للدلالة على طول المنحنى $r = f(\theta)$ بين $\theta = a$ و $\theta = b$.

مثال ٣ : أوجد طول القلبي $r = 1 + \sin \theta$.
 يبين شكل ٩ - ١٤ القلبي المذكور ، وباستخدام الصيغة ٩ - ٥ نحصل على

$$L = \int_a^b \sqrt{(1 + \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta} d\theta$$

$$= \int_a^b \sqrt{2 + 2 \sin \theta} d\theta = \sqrt{2} \int_a^b \sqrt{1 + \sin \theta} d\theta.$$

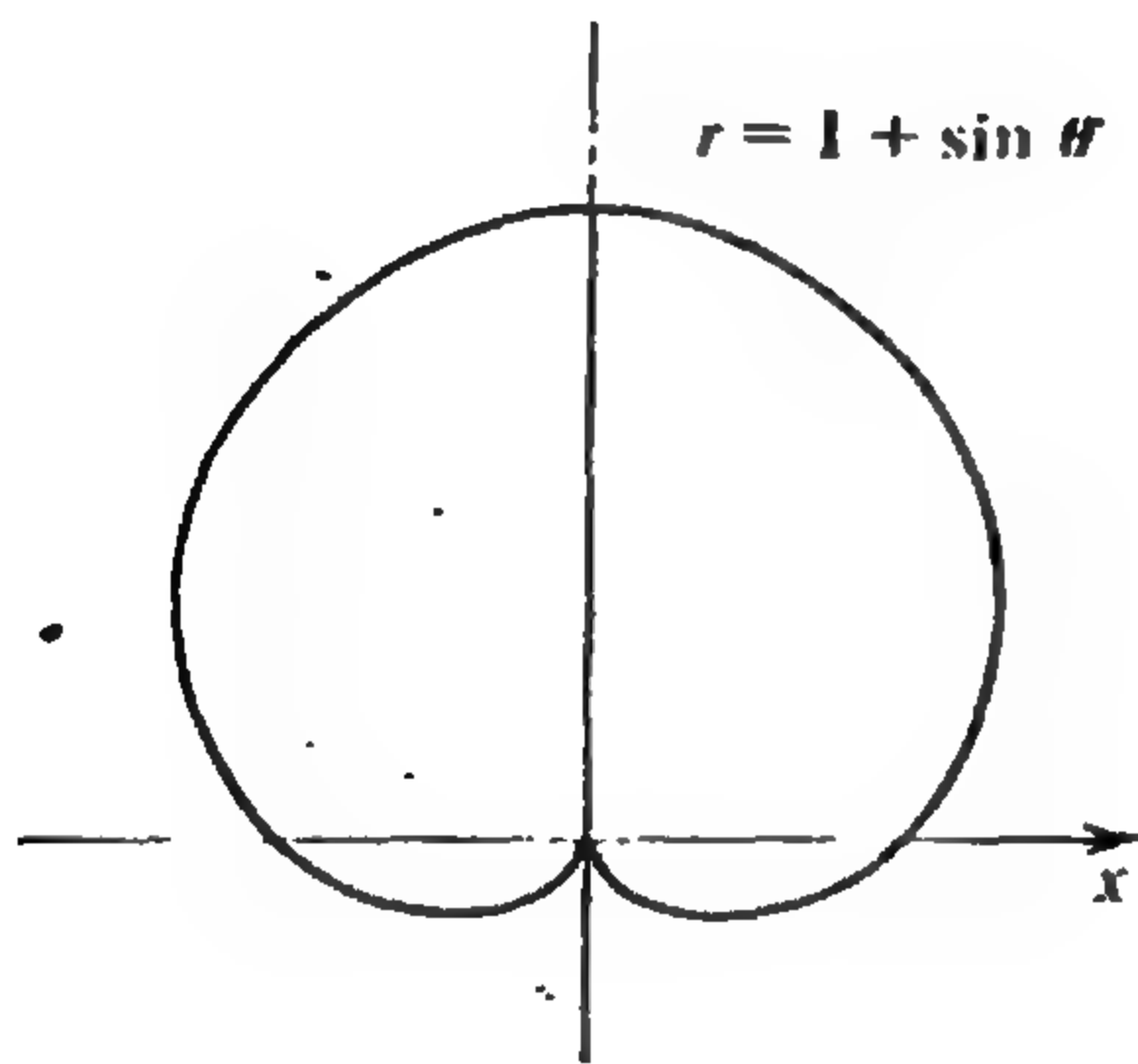
ويرسم القلبي مرة واحدة في كل مرة تتغير فيها θ بمقدار 2π . ويكون أبسط اختيار للحدود ، إن لم يكن أكثرها طبيعية ، بالبدء عند نقطة الأصل حيث $\theta = -\pi/2$ ثم التقدم مرة واحدة حول المنحنى في عكس اتجاه عقارب الساعة لنتهي عند $\theta = 3\pi/2$. وبهذه الحدود يصبح التكامل للحصول على L كما يلي :

$$L = \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{1 + \sin \theta} d\theta$$

ويمكن تقييم هذا التكامل بتحويله إلى الصيغة الكسرية ، فنحصل على

$$L = \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{1 + \sin \theta} \frac{\sqrt{1 - \sin \theta}}{\sqrt{1 - \sin \theta}} d\theta = \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\sqrt{\cos^2 \theta}}{\sqrt{1 - \sin \theta}} d\theta$$

وهنا قد تجد إغراء للكتابة $\sqrt{\cos^2 \theta} = \cos \theta$ ، ولكن يجب الحذر لأنه إذا كانت : $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ فإن $\cos \theta \geq 0$ ويكون $\sqrt{\cos^2 \theta} = \cos \theta$ ، ولكن إذا كانت $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$ فإن $\cos \theta \leq 0$ ويكون $\sqrt{\cos^2 \theta} = -\cos \theta$. لهذا يجب أن يكتب التكامل المذكور في (٦) في صورة مجموع تكاملين ، المعادلة البارامترية



شكل ٩ - ١٤

$$L = \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \sin \theta}} d\theta + \sqrt{2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{-\cos \theta}{\sqrt{1 - \sin \theta}} d\theta.$$

وهناك طريقة أخرى ، وهي إيجاد طول النصف الأيمن من القلبي المعطى بالتكامل الأول من التكاملين المذكورين في (٧) ثم مضاعفة النتائج للحصول على L نظرا للتماثل . باتباع هذا المنهج نحصل على

$$L = 2\sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \sin \theta}} d\theta = -4\sqrt{2}(1 - \sin \theta)^{1/2} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= -4\sqrt{2}(-\sqrt{2}) = 8.$$

ويعطى طول المنحنى $x = x(t)$, $y = y(t)$ فى المدى $t (a, t)$ طبقا للنظرية ٩ - ٢ بالتعبير

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2} du$$

حيث استخدمنا u كمتغير التكامل بدلا من t . فإذا اعتبرنا a ثابت ، فإن الطول يتوقف على t ، كما هو مبين بالتعبير الدالى $s(t)$. وطبقا للنظرية ٥ - ٧ يمكن الحصول على مشتق للدالة s وهو

$$s'(t) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

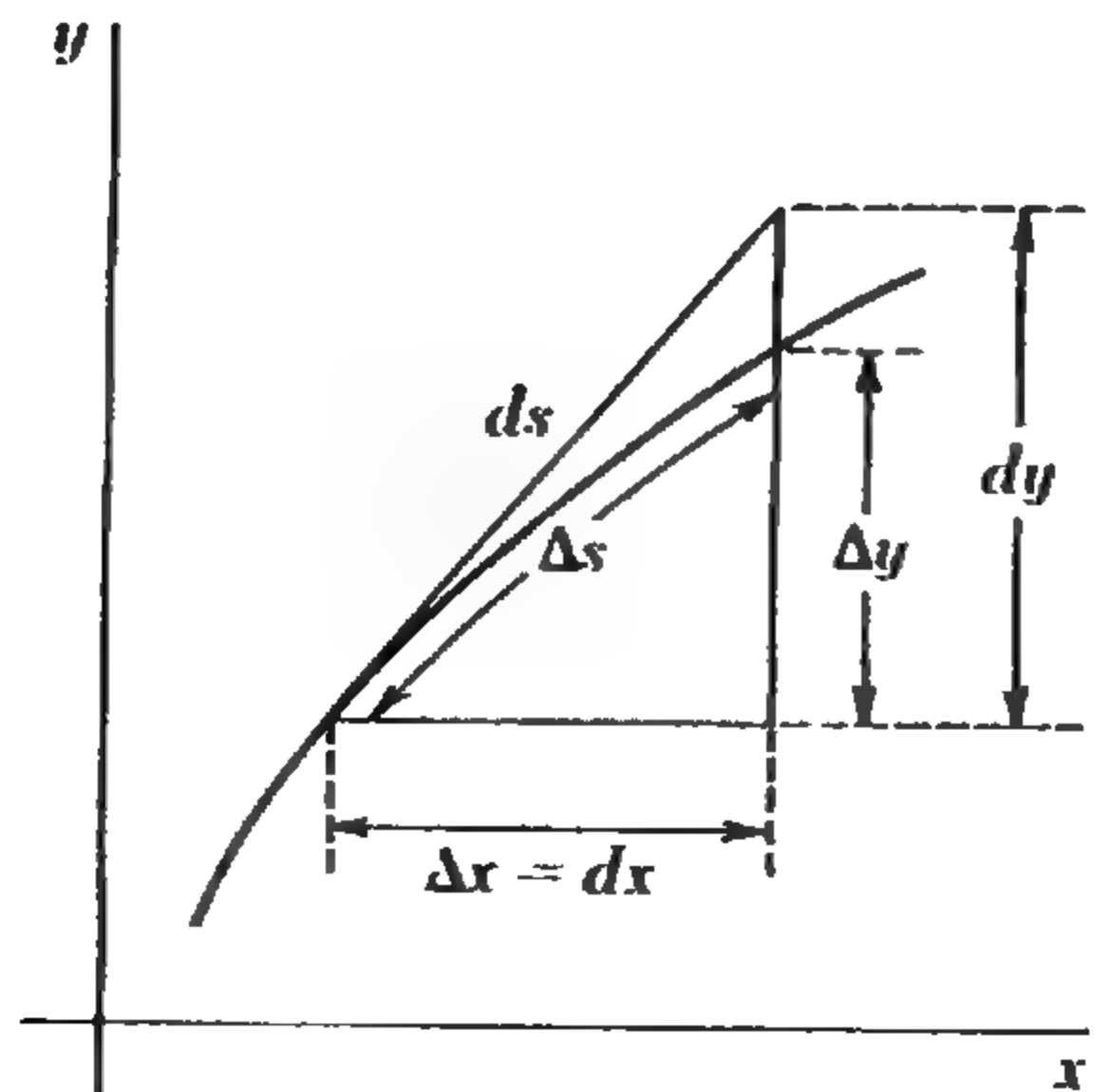
أو بالتعبير التفاضلى

$$(٨) \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

هذا يعطى معدل التغير فى طول القوس s بالنسبة لـ t فإذا عوملت ds , dt , dy , dx على أنها تفاضلات ، فإن المعادلة ، بالضرب فى dt ، تصبح

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

وتبين هذه المعادلة أن التفاضل ds هو طول وتر المثلث قائم الزاوية الذى ضلعا dx , dy موازيان للمحورين (شكل ٩ - ١٥) . هذا الوتر مماس للمنحنى لأن dy/dx هو ميل المنحنى .



شكل ٩ - ١٥

المنحنى الذى معادلته $y = f(x)$ له أيضا معادلتين بارامتريتين $x = t$, $y = f(t)$, وتصبح
(٨) .

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

التي تعطى معدل التغير فى طول القوس s بالنسبة للمتغير x .
وبالمثل ، للمنحنى الذى معادلته بالاحداثيات القطبية $r = f(\theta)$

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \quad (٩) .$$

مسائل

أوجد طول المنحنيات الآتية :

$$x = \cos 2t, y = \sin 2t; 0 \leq t \leq \pi/6 \quad - ١ \quad x = a \sin u, y = a \cos u, a > 0; 0 \leq u \leq 2\pi$$

$$x = \frac{w^2}{4}, y = \frac{w^3}{6}; 1 \leq w \leq 3 \quad - ٣ \quad x = e^t \cos t, y = e^t \sin t; 0 \leq t \leq \pi$$

$$x = \cos^2 t, y = \sin^2 t; 0 \leq t \leq \pi/2 \quad - ٥$$

أوجد ولكن لا تحاول أن تقيم التكامل المحدد الذى يمثل طول كل من المنحنيات الآتية :

$$x = \alpha^3 + 2\alpha, y = \alpha^2 - \alpha + 2; 1 \leq \alpha \leq 4 \quad - ٦$$

$$x = a \cos z, y = b \sin z, a > 0, b > 0; 0 \leq z \leq 2\pi \quad - ٧$$

$$x = \ln \cos t, y = t + 1; 0 \leq t \leq \pi/3 \quad - ٨$$

$$x = w \cos w, y = w \sin w; 0 \leq w \leq \pi/2 \quad - ٩$$

١٠ - الانفوليتو الدائرة التى نصف قطرها a فى شكل ٩ - ٨ المعادلات البارامترية

$$x = a(\cos \theta + \theta \sin \theta), \quad y = a(\sin \theta - \theta \cos \theta)$$

(المسألة ٤١ ، قسم ٩ - ١) . اثبت أن طوله من $\theta = 0$ إلى $\theta = \gamma$ هو $\frac{1}{2} a\gamma^2$.

١١ - المعادلتان البارامتريتان للخط الواصل بين (x_1, y_1) , (x_2, y_2)

$$\text{هما } x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t$$

إثبت أن التكامل فى نظرية ٩ - ٢ يعطى النتيجة الصحيحة للمسافة بين النقطتين .

١٢ - أوجد الطول الكلى للدويرى التحتى ذى الأربع قمم $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$,
حيث $a > 0$ (شكل ٩ - ٧) .

(تحذير : نظرا لأن $\sqrt{u^2}$ ليس دائما u ، إحسب طول قوس الربع الأول) .

١٣ - ارسم تخطيطيا المنحنى $x = t^3$, $y = t^2$ ، وبين أن طوله بين $t = -1$, $t = 2$ هو

$$\frac{1}{27}(40^{3/2} + 13^{3/2} - 16)$$

(تحذير : $t = -\sqrt{t^2}$ لقيم $v < 0$ اقسم القوس الى جزئين واحسب طول كل قسم) .

١٤ - لنقطة تتحرك فى مستوى الاحداثيات الاحداثيين $y = \cos t - 1$, $x = t - \sin t$ فى اللحظة t .
اوجد المسافة التى تتحركها بين $t = 0$, $t = 2\pi/3$.

١٥ - لنقطة تتحرك فى مستوى الإحداثيات الإحداثيين $y = 2t$, $x = t^2 + 1$ عند اللحظة t .
اكتب التكامل الذى يمثل المسافة التى تتحركها بين $t = 1$ و $t = 4$ ولكن لا تحاول حساب قيمته.

أوجد طول كل من المنحنيات الآتية :

$$١٦ - y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}; 1 \leq x \leq 2 \quad ١٧ - y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x; 1 \leq x \leq 5 \quad ١٨ - y = \sqrt{16 - x^2}; 0 \leq x \leq 4$$

اكتب التكامل المحدد الذى يمثل طول كل من المنحنيات التالية ولكن لا تحاول حساب

قيمه :

$$١٩ - y = x^2; 0 \leq x \leq a \quad ٢٠ - y = \sqrt{x}; 1 \leq x \leq 3 \quad ٢١ - y = \ln(1 - x^2); 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$٢٢ - y = \ln \csc x; \pi/6 \leq x \leq \pi/2 \quad ٢٣ - y = \frac{1}{3}\sqrt{9 - x^2}; -3 \leq x \leq 3$$

٢٤ - اوجد بالتكامل محيط الدائرة التى نصف قطرها r .

٢٥ - اكتب التكامل الذى يمثل طول محيط القطع الناقص ولكن لا تحاول حساب قيمته . من المعروف أن هذا التكامل ، الذى يسمى بالتكامل الناقصى ، لا يمكن حساب قيمته بدلالة الدوال المعروفة لنا إلا فى حالة الدائرة . الدوال الناقصية وكذلك دوال أخرى معينة معرفة بها دوال هامة فى الرياضه التطبيقية وقد درست على نطاق واسع .

٢٦ - اثبت أن طول منحنى السلسلة $y = (a/2)(e^{x/a} + e^{-x/a})$ حيث $a > 0$ (مسألة ٧٦ القسم ٧ - ٣) ، من أكثر نقطة انخفاضا ، حيث $x = 0$ ، إلى النقطة التى عندها $x = c$ هو $(e^{ca/a} - e^{-ca/a}) \cdot a/2$.

٢٧ - ارسم تخطيطيا المنحنى $9ay^2 = x(x - 3a)^2$ حيث $a > 0$ ، وبين أن طول الأنشوطه $29\sqrt{3}$.

احسب بالتقريب طول كل من المنحنيات الآتية :

$$٢٨ - y = x^2 \text{ حيث } 0 \leq x \leq 3 \text{ (باستخدام قاعدة سمبسون) .}$$

$$٢٩ - 25y^2 = 4x^5 \text{ حيث } 0 \leq x \leq 2, y \geq 0 \text{ (باستخدام قاعدة شبه المنحرف) .}$$

$$٣٠ - y = \ln x \text{ حيث } 1 \leq x \leq 3 \text{ (باستخدام قاعدة شبه المنحرف) .}$$

٣١ - قوس واحد من منحنى جيب الزاوية .

٣٢ - اوجد طول المنحنى الذى معادلته على شكل $x = g(y)$ كما فى المعادلة 3 - 9 .

اوجد طول كل من المنحنيات التالية (تنويه : انظر المسألة ٣٢) .

$$٣٣ - x = y^3/6 + 1/2y; 1 \leq y \leq 3 \quad ٣٤ - x = \sqrt{36 - y^2}; 0 \leq y \leq 6$$

ارسم تخطيطيا المنحنى المعطى بالمعادلة ذات المحاور القطبية المعطاه واوجد طوله .

$$٣٥ - r = 2 \sin \theta; \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/4 \quad ٣٦ - r = e^\theta; 0 \leq \theta \leq 2$$

$$٣٧ - r = a\theta^2, a > 0; 0 \leq \theta \leq \pi \quad ٣٨ - r = \sin^2(\theta/2); 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$39 - r = \sin^3(\theta/3); 0 \leq \theta \leq \pi \quad (\text{تنويه}) : \sin^2(\theta/3) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\theta/3)]$$

٤٠ - تحقق من أن الصيغة ٩ - ٥ تعطى النتيجة الصحيحة لمحيط الدائرة التي معادلتها بالمحاور القطبية :

$$(أ) \quad r = a \quad \text{حيث } a > 0$$

$$(ب) \quad r = a \cos \theta \quad \text{حيث } a > 0$$

$$٤١ - \text{أوجد طول القلي } r = a(1 + \cos \theta) \quad \text{حيث } a > 0$$

(تنويه : لاحظ الحيلة المستعملة في حساب قيمة التكامل في المثال ٣) .

$$٤٢ - \text{احسب قيمة التكامل في (٦) باختيار أكثر طبيعية للحدود } a = 0 \text{ و } b = 2\pi$$

٤٣ - خطط المنحنى $r = e^{-\theta}; \theta \geq 0$ ، أثبت أنه رغم أن المنحنى يدور عدداً لانهائياً من المرات حول نقطة الاصل ، فإن طوله يقترب من نهاية .

٤٤ - استخدم قاعدة شبه المنحرف لتقريب طول محيط ورقة واحدة من منحنى الورد ذات الورقات الأربع $r = \sin 2\theta$.

٤٥ - إذا كانت المعادلة القطبية لمنحنى هي على الصورة $\theta = g(r)$ ، فأوجد صيغة لطوله مشابهة للصيغة ٩ - ٥ ..

٤٦ - أوجد المعادلة القطبية للمنحنى الذي عند كل نقطة عليه تكون $ds/d\theta = r^2$ بالنقطة $(\sqrt{2}, 0)$.

٤٧ - زورق خفر سواحل يبحث عن مهرب في ضباب كثيف . انقشع الضباب فجأة ، وظهر المهرب على بعد خمسة أميال ، وفورا اختفى . كابتن الزورق يعرف أن المهرب سيتخذ خطاً مستقيماً في السير بأقصى سرعته وهي 20 mph ، لكن لا يعرف الاتجاه الذي سيسلكه المهرب . إذا كانت سرعة الزورق هي 30 mph ، ماهو التكتيك الذي ينبغي على كابتن الزورق ان يتبعه ليكون متأكداً من أنه سيعترض المهرب ؟

٤٨ - اشتق المعادلة (٩)

٤٩ - اتصال مشتقتي $x(t)$ و $y(t)$ استخدم مرتين في الاستدلال المدعم للنظرية ٩ - ٢ .

لقد أشير الى الموضع الأول . أين استخدم للمرة الثانية ، ولماذا هو ضروري ؟

٥٠ - اين يفضل الاستدلال المقبول المدعم للنظرية ٩ - ٢ لان يكون برهاناً ؟

٩ - ٤

الحركة في مستوى

لتكن P نقطة تتحرك في مستوى الاحداثيات واحداثياتها عند الزمن t هما $(x(t), y(t))$ النقطة P ترسم منحنى . المعادلتان البارامتريتان للمنحنى هما

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

حيث الزمن t هو البارامتر . لتكن s هي مسافة P من نقطة ما A على المنحنى ، مقيسة على المنحنى . سنأخذ المسافة موجبة أو سالبة تبعاً لكون t تزايد أو تناقص عندما تتحرك نقطة على

المنحنى من A الى P . اذا أوجدنا المسافة بالتكامل فى النظرية ٩ - ٢ فسيكون لها الاشارة الصحيحة . لقد رأينا فى (٨) بيند ٩ - ٣ أن

$$(١) \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

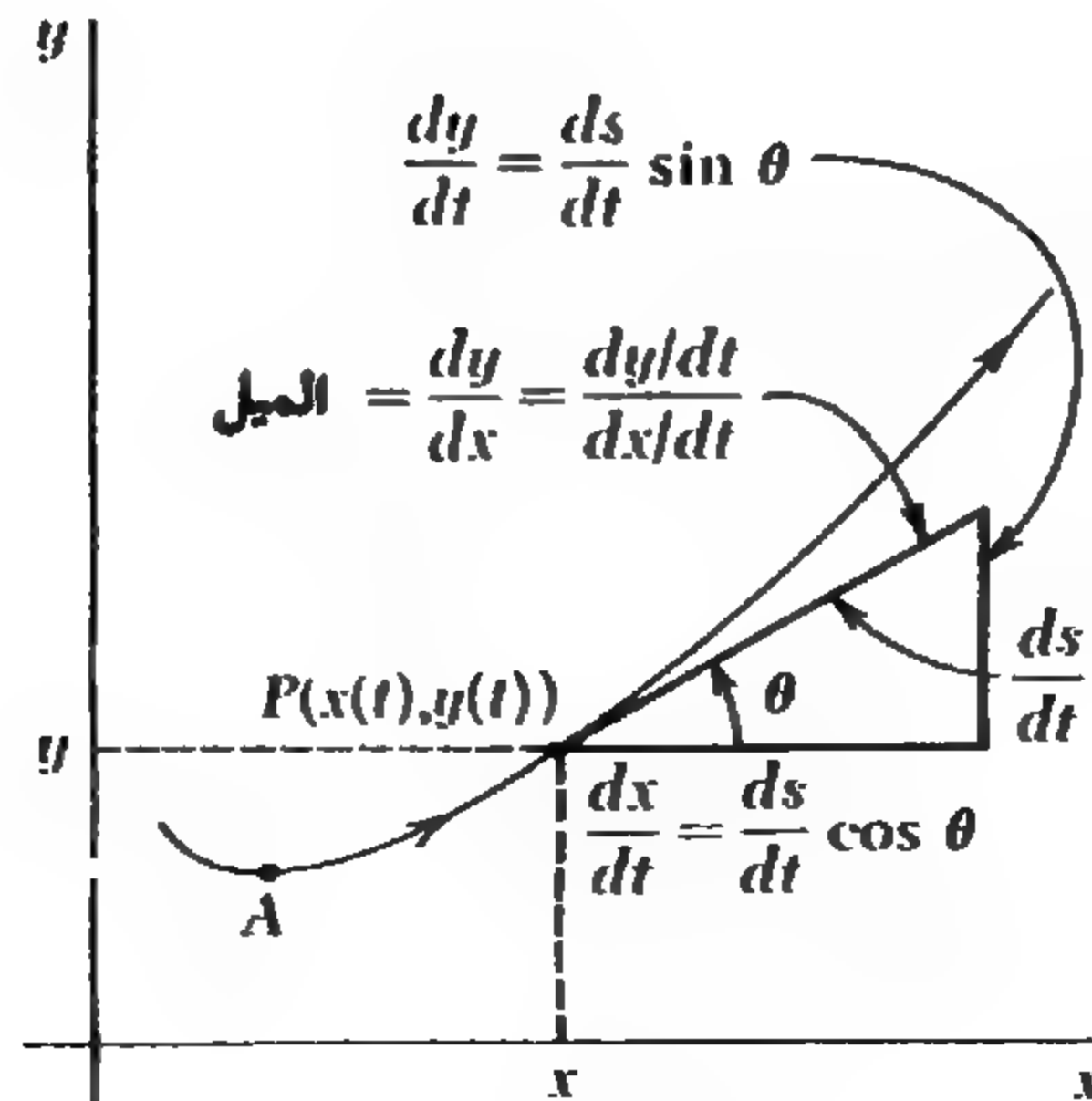
الكمية ds / dt هى معدل تغير المسافة بالنسبة الى الزمن فهى مقدار سرعة النقطة عند الزمن t . سوف لانسميها السرعة لأن السرعة هى متجه لايعطى فقط مقدار السرعة ولكن أيضا اتجاه الحركة عند الزمن t . مسقط النقطة P على المحور السينى له احداثى ومن ثم له سرعة dx / dt . (لأن dx / dt تعطى مقدار السرعة واتجاهها لنقطة تتحرك على المحور السينى فان السرعة هى الكلمة الصحيحة هنا) . هذا يشبه بأن ضوءا بعيدا جدا فى اتجاه المحور الصادى يلقى ظلا للنقطة P على المحور السينى أو على أى خط مواز له . سرعة الظل تعطى بـ dx / dt . بالمثل dy / dt هى سرعة مسقط P على المحور الصادى . المعادلة (١) توضح أن ds / dt هو طول وتر مثلث قائم الزاوية ساقيه يوازيان المحورين وطولاهما dx / dt و dy / dt (شكل ٩ - ١٦) . لأن $\frac{dy/dt}{dx/dt}$

هو الميل dy / dx للمنحنى عند P ، فان الوتر يكون مماسا للمنحنى هناك . لاحظ أن

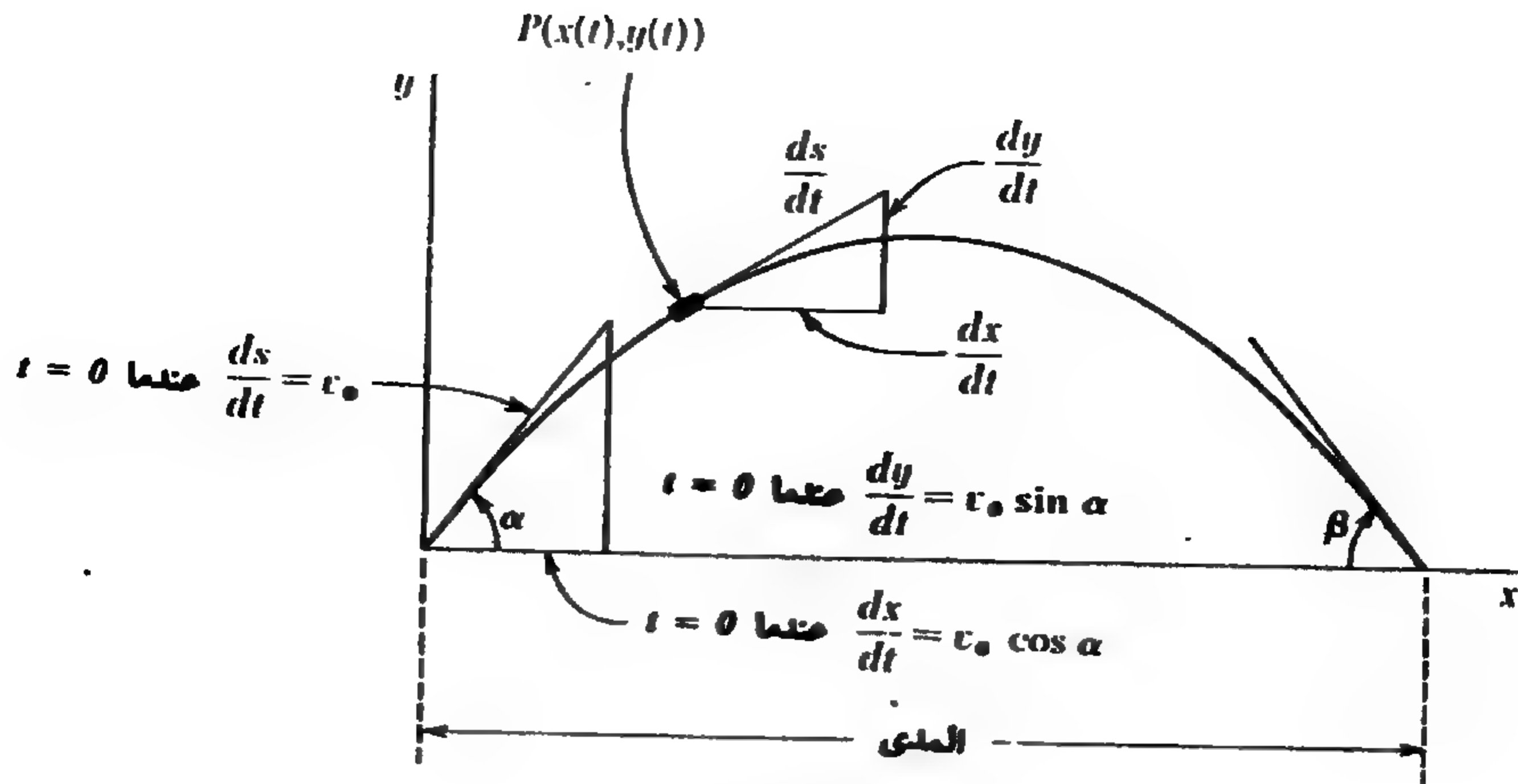
$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} \cos \theta \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt} \sin \theta$$

حيث θ هى الزاوية من الخط الافقى الى المماس .

سنشتق معادلة المسير لقذيفة هذا تطبيق هام للمعادلات التفاضلية ويوضح كيف يكون من الطبيعى أن يعطى موضع نقطة تتحرك فى مستوى بزوج من المعادلات البارامترية حيث الزمن هو البارامتر . ندخل محورى احداثيات حيث المحور السينى يكون افقيا ، والمحور الصادى رأسيا ، ونقطة الاصل عند نقطة الابتداء للقذيفة .



شكل ٩ - ١٦



شكل ٩-١٧
قلبة طائرة

الشكل ٩-١٧ يوضح القذيفة الطائرة P . ليكن $(x(t), y(t))$ احداثياتها عند الزمن t . القوة الرئيسية المؤثرة على القذيفة هي الجاذبية، للتبسيط سنفترض أنها القوة الوحيدة. الفقرة التالية تبرز المعادلتين في (٣)، والقارئ غير الملم بالمتجهات يمكنه أن يحذفها. القذيفة تخضع لقانون نيوتن الثاني للحركة.

$$ma = F$$

(المعادلة (١)، بيند ٤-١١). هذه المعادلة المتجهة تكافئ المعادلتين اللتين نحصل عليهما بمساواة المركبتين x, y للمتجهين على طرفي المعادلة. وهما

$$(٢) \quad ma_x = F_x \quad \text{and} \quad ma_y = F_y$$

حيث a_x و a_y هما المركبتان x و y للعجلة وحيث F_x و F_y هما المركبتان x و y للقوة. قوة الجاذبية تتجه لأسفل ومقدارها mg . وحيث أنها لا تؤثر على الاحداثي x للنقطة P وتعمل على انقاص الاحداثي y ، فإن $F_x = 0$ و $F_y = -mg$. الكميتان a_x و a_y هما العجلتان لمسقطي النقطة P على المحورين x و y وتعطيان بـ d^2x/dt^2 و d^2y/dt^2 . بإجراء هذه التعويضات، المعادلة (٢) تصبح، بعد حذف m ،

$$(٣) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

هاتان هما المعادلتان التفاضليتان اللتان تحكمان حركة القذيفة. بالتكامل نحصل منهما على احداثي P عند أي لحظة.

التكامل الاول لـ (٣) يعطى

$$(٤) \quad \frac{dx}{dt} = c_1 \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dt} = -gt + k_1$$

نحتاج الى شروط حدية لتعيين الثابتين k_1 و c_1 . نفرض أن القذيفة تبدأ بزاوية α مع الافقى (زاوية الارتفاع) بسرعة ابتدائية v_0 . هذا يعنى أن $ds/dt = v_0$ عند $t = 0$. من ذلك ومن الشكل ٩-١٧ ، يكون $dy/dt = v_0 \sin \alpha$ و $dx/dt = v_0 \cos \alpha$ عند $t = 0$. واذن الثابتان فى (٤) هما $k_1 = v_0 \sin \alpha$ و $c_1 = v_0 \cos \alpha$ ، والمعادلة (٤) تصبح

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha$$

التكامل مرة ثانية يعطى

$$x = (v_0 \cos \alpha)t + c_2, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t + k_2$$

الثابتان k_2 و c_2 يجب أن يكونا صفرا لان القذيفة كانت عند نقطة الاصل عند $t = 0$. واذن احداثيا القذيفة عند الزمن t هما

$$(٥) \quad x = (v_0 \cos \alpha)t, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t$$

هاتان معا هما المعادلتان البارامتريتان للمسير .

الاجابة عن كثير من الاسئلة الخاصة بحركة القذيفة يمكن الحصول عليها من هاتين المعادلتين . أولا ، الى أى بعد تذهب القذيفة ؟ المسافة على مستوى الأرض بين المدفع ونقطة التصادم تسمى مدى القذيفة . لايجاد المدى نوجد أولا متى تصطدم القذيفة بالأرض . من (٥) ، $y = 0$ عندما

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \quad \text{أو} \quad t = 0$$

الزمن $t = 0$ يناظر $x = 0, y = 0$. نأخذ القيمة الاخرى للزمن t ، ونعوض بها فى المعادلة الاولى فى (٥) لنوجد المدى

$$\text{المدى} = (v_0 \cos \alpha) \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

لايجاد اقصى ارتفاع تصل اليه القذيفة ومقدار السرعة هناك ، نوجد أولا متى تكون عند أعلى نقطة على مسارها . عند هذه النقطة $dy/dx = 0$. بما أن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-gt + v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha}$$

فان $dy/dx = 0$ عندما $-gt + v_0 \sin \alpha = 0$ ، أى عندما $t = (v_0 \sin \alpha) / g$. عندما

تكون t لها هذه القيمة ، القذيفة تكون عند أعلى نقطة وقيمة y هناك هى

$$\text{أقصى ارتفاع} = -\frac{1}{2}g \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{g^2} + \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{g}$$

$$= \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}$$

مقدار سرعة القذيفة عن أى زمن t يعطى بالصيغة

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (-gt + v_0 \sin \alpha)^2}$$

$$= \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \sin \alpha + g^2 t^2}.$$

عند أعلى نقطة $t = (v_0 \sin \alpha) / g$ ومقدار السرعة هناك يكون

$$\sqrt{v_0^2 - 2v_0^2 \sin^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{v_0^2 - v_0^2 \sin^2 \alpha} = v_0 \cos \alpha$$

لاحظ ان لاجابة هذه الأسئلة عن القذيفة نوجد أولا متى تقع هذه الاحداث . بحذف t يمكن الحصول على المعادلة فى y و x لمسير القذيفة ، والبرهنة على أن المسير هو قطع مكافئ (المسألة ٢٠) . طبعا هذا مع افتراض أنه لا توجد مقاومة للهواء .

مسائل

افترض أن الارض تكون أفقية فى المسائل الآتية .
الاحداثيان عند الزمن t لنقطة تتحرك فى مستوى معطيان أدناه . أوجد مقدار سرعة النقطة واتجاه حركتها (أى ميل المماس للمسير) للقيمة المبغطة لـ t .

١ - $x = 2t, y = t^2 - 2; t = 3$ ٢ - $x = 2t, y = t^3; t = 1$

٣ - $x = t^3, y = t^2; t = 2$ ٤ - $x = b \cos t, y = b \sin t; t = 3\pi/4$

٥ - $x = 2 \sin t, y = 4 \cos t; t = \pi/2$ ٦ - $x = 2 \sin t, y = \cos 2t; t = \pi/3$

٧ - الاحداثيان عند الزمن t لنقطة تتحرك فى مستوى هما $y = t^2 - 2t + 3$ و $x = t - 1$. ما هو أكبر مقدار وأصغر مقدار لسرعة النقطة فى الفترة $0 \leq t \leq 3$ ؟

٨ - الاحداثيان عند الزمن t لنقطة تتحرك فى مستوى هما $y = t^2, x = (t - 1)^2, t \geq 0$. متى يكون مقدار السرعة أصغر مايمكن ؟ عند أى نقطة يكون مقدار السرعة 10 ft / sec ؟

٩ - اثبت أنه مهما كانت سرعة قطار يتحرك الى الامام ، فانه توجد دائما نقطة ما عليه تتحرك الى الخلف (ارشاد : ادرس النقطة الادنى على شفة العجلة وانظر المسألة ٤٠ ، بيند ٩ - ١) .

١٠ - اطلقت قذيفة بسرعة ابتدائية مقدارها 200 ft / sec وبزاوية ارتفاع 30° . أوجد $dx / dt, dy / dt$ ، ومقدار السرعة ، واتجاه القذيفة (أى ميل المماس للمسير) عندما (أ)

$t = 2$ ، (ب) $t = 4$ (خذ $g = 32 \text{ ft / sec / sec}$) .

١١ - ما هو أقصى ارتفاع وماهو زمن الطيران للقذيفة فى المسألة ١٠ ؟

١٢ - أوجد زاويتي ارتفاع مدفع بحيث أنه اذا اطلقت منه قذيفة بسرعة ابتدائية مقدارها 1000 ft / sec فانها تصيب هدفا على بعد $20,000$ على نفس المدفع :

(خذ $g = 32 \text{ ft / sec / sec}$) .

١٣ - أوجد مقدار سرعة قذيفة عند ارتطامها بالارض .

- ١٤ - اوجد اكبر مقدار وأصغر مقدار لسرعة قذيفة وأوجد متى يحدثان .
- ١٥ - اثبت أن القذيفة تصل الى ثلاثة أرباع أقصى ارتفاع لها في نصف الزمن الذي تصل فيه الى أقصى ارتفاع .
- ١٦ - اذا ضوعف مقدار السرعة الابتدائية للقذيفة مع بقاء زاوية الارتفاع دون تغيير فبأي عامل يزيد المدى ؟
- ١٧ - اثبت ان القذيفة تأخذ وقتا لتصل الى أقصى ارتفاع مثل الوقت الذي تأخذه من تلك النقطة الى الأرض .
- ١٨ - لاي زاوية ارتفاع α يكون مدى القذيفة أكبر ما يمكن ؟ اثبت أنه توجد قيمتان للزاوية α تجعلان القذيفة تبلغ أى مدى معطى أقل من المدى الأكبر . ارسم شكلا يوضح كيف يمكن أن يكون هذا .
- ١٩ - اثبت ان الزاوية β في الشكل ٩ - ١٧ التي بها ترتطم القذيفة بالأرض هي نفسها زاوية الارتفاع α .
- ٢٠ - اوجد المعادلة في y و x لمسير القذيفة واثبت أنه قطع مكافئ .
- ٢١ - عند لحظة وصول القذيفة أعلى نقطة لها سقط حجر من نفس النقطة . هل الحجر أم القذيفة سيصل الأرض أولا ؟
- ٢٢ - ولد واقف على قمة برج ارتفاعه 100ft يقذف افقيا حجرا بسرعة مقدارها 20 ft/sec . متى سيرتطم الحجر بالأرض ؟ (خذ $g = 32\text{ ft/sec/sec}$) . اذا كانت الشمس فوق الرأس مباشرة ، فأوجد مقدار سرعة ظل الحجر على الأرض عند أى وقت t . حل نفس المسألة اذا كان الحجر يقذف بسرعة مقدارها 30 ft/sec . ماذا تستنتج من ذلك ، وهل يمكنك اثبات استنتاجك ؟
- ٢٣ - اشتق من معادلتى مسار قذيفة الصيغة $s = \frac{1}{2}gt^2$ للمسافة التي يهبطها جسم ، يبدأ من سكون ، في زمن قدره $t\text{ sec}$.
- ٢٤ - اطلقت قذيفة بسرعة ابتدائية مقدارها 320 ft/sec وبزاوية ارتفاع α ، على جرف رأسي على بعد 960 ft . (خذ $g = 32\text{ ft/sec/sec}$) :
- (أ) اذا كانت $\alpha = 45^\circ$ ، فعلى أى ارتفاع ترتطم القذيفة بالجرف ؟
- (ب) لاي زاوية α سترتطم القذيفة بقاعدة الجرف ؟ (ج) اوجد الزاوية α بحيث أن القذيفة ترتطم بالجرف على أعلى ارتفاع ممكن وأوجد هذا الارتفاع .
- ٢٥ - اذا كان في حركة القذيفة التي درسناها في الكتاب توجد بالاضافة الى قوة الجاذبية قوة ثابتة مقدارها mc تؤثر أفقيا ضد القذيفة ، فان المعادلتين التفاضليتين اللتين تحكمان الحركة ، المناظرتين لـ (٣) ، هما $d^2y/dt^2 = -g$ و $d^2x/dt^2 = -c$ مثل هذه القوة قد تنشأ بسبب الريح المعاكسة ، ولو أن هذا من الصعب تخيله مع عدم وجود مقاومة للهواء أيضا . أوجد احداثي القذيفة عند الزمن t اذا كان مقدار السرعة الابتدائية هو v_0 وزاوية الارتفاع هي α .

٢٦ - يريد رجل أن يقذف كرة خلال طوق رأسى ، مركزة على ارتفاع 16 ft فوق يديه ، بحيث أن الكرة تتحرك أفقيا عقب مرورها خلال الطوق . وهو يقذف الكرة بسرعة مقدارها 40 ft / sec . ماهو البعد الافقى عن الطوق ، الذى يجب أن يقف عنده ليقذف الكرة ؟ (خذ $g = 32 \text{ ft / sec / sec}$) .

٢٧ - حل المسألة ٢٦ بفرض أن الرجل راكب فى عربة تتحرك أفقيا بسرعة ثابتة مقدارها 30 ft / sec فى اتجاه الطوق .

٢٨ - مدفع له القدرة على قذف القذيفة بسرعة ابتدائية مقدارها 1000 ft / sec على خندق للعدو وعلى جانب تل . العدو على بعد أفقى $10,000 \text{ ft}$ ، وعلى ارتفاع 300 ft عن المدفع . ماذا ينبغى أن تكون زاوية ارتفاع المدفع ؟ (خذ $g = 32 \text{ ft / sec / sec}$) .

الاحداثيات $(x(t), y(t))$ لنقطة تتحرك فى مستوى تحقق المعدلات التفاضلية والشروط الحدية الآتية . أوجد $x(t)$ و $y(t)$ وصف حركة النقطة .

$$dx/dt = t, dy/dt = 1; x(0) = 1, y(0) = 0 \quad - ٢٩$$

$$dx/dt = -\sin t, dy/dt = \cos t; x(0) = 1, y(0) = 0 \quad - ٣٠$$

$$dx/dt = x, dy/dt = x^2; x = 2 \text{ and } y = 3 \text{ when } t = 0 \quad - ٣١$$

$$d^2x/dt^2 = 0, d^2y/dt^2 = 0; x(0) = 0, y(0) = 2, x'(0) = -1, y'(0) = \frac{1}{2} \quad - ٣٢$$

$$d^2x/dt^2 = 2t, d^2y/dt^2 = 4; x(0) = y(0) = 0, x'(0) = -4, y'(0) = 0 \quad - ٣٣$$

أوجد طول المسير من $t = 0$ الى $t = 9$.

الفصل العاشر

طرق التكامل

١٠ - ١

الطرق البسيطة للتكامل

في هذا الفصل سندرس طرق ايجاد التكاملات لأنواع هامة متعددة من الدوال . دعنا أولا نستعرض الطرق التي عرفناها الى الآن . أكثر التكاملات شيوعا هو التكامل الذي على الصورة :

$$\int g^n(x) g'(x) dx = \frac{g^{n+1}(x)}{n+1} + C, \text{ فان } n \neq -1$$

وكمثال على ذلك

$$\int (x^2 + 1)^{1/2} 2x dx = \frac{(x^2 + 1)^{3/2}}{3/2} + C$$

الحالة المستثناة $n = -1$ تعطى بما يأتي

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + C$$

وكمثال على ذلك

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln |x^2 + 1| + C$$

ينبغي أن يكون القارئ متيقظا لامكانية التعبير عن الدالة المكاملة في صورة أخرى . يمكن التعبير عن كسر كحاصل جمع كسرين أو أكثر . مثال ذلك ،

$$\int \frac{x+1}{x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \ln |x| - \frac{1}{x} + C$$

قوى ذات الحدين ، مثل $(3x^2 + 5)^3$ ، كثيرا ما ينبغي فكها ، لكن ليس دائما . قد ينبغي ازاحة مقام الى البسط مع تغيير اشارة الأس أو العكس بالعكس . مثلا

$$\int \frac{3}{e^x} dx = \int 3e^{-x} dx = -3e^{-x} + C$$

ربما دالة مثلثية يكون من الأفضل التعبير عنها بدلالة دوال مثلثية أخرى . مثلا

$$\int \frac{d\theta}{\csc \theta} = \int \sin \theta d\theta = -\cos \theta + C$$

اجراء تغيير لمتغير لتبسيط الدالة المكاملة هو وسيلة نافعة أخرى .

مثال ١ . أوجد $\int \frac{4x}{3x+2} dx$. يمكن تبسيط المقام بوضع $u = 3x + 2$. فيكون $du = 3dx$ ، والتكامل يصبح

$$\begin{aligned} \int \frac{4x}{3x+2} dx &= \frac{4}{3} \int \frac{u-2}{u} \frac{du}{3} = \frac{4}{9} \int \left(1 - \frac{2}{u}\right) du \\ &= \frac{4}{9} (u - 2 \ln |u|) + C = \frac{4}{9} (3x + 2 - 2 \ln |3x + 2|) + C \end{aligned}$$

أخيرا ، هذه الوسائل لا ينبغي استخدامها بمعزل . كثيرا ما يجب استخدامها معا أو على التعاقب لأجراء التكامل .

لقد سبق أن أوجدنا التكامل $\int dx/(x^2 - a^2)$, $a \neq 0$. التكامل أجرى كما يلي :

$$(1) \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + (x/a)^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

التكامل $\int dx / (x^2 - a^2)$, $a \neq 0$ يختلف تماما ، ويمكن ايجاده بكتابة الكسر كحاصل جمع كسرين أبسط منه :

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{-1}{x+a} + \frac{1}{x-a} \right)$$

ويكون

$$\begin{aligned} (2) \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{2a} \left(\int \frac{-1}{x+a} dx + \int \frac{1}{x-a} dx \right) \\ &= \frac{1}{2a} (-\ln |x+a| + \ln |x-a|) + C \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C. \end{aligned}$$

مثال ٢ . أوجد $\int \frac{dx}{5x^2 - 7}$

إذا أخذنا العدد 5 عاملا مشتركا من المقام ، فانه يمكن استخدام (٢) حيث $a = \sqrt{\frac{7}{5}}$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5x^2 - 7} &= \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{7}{5}} = \frac{1}{5} \frac{1}{2\sqrt{\frac{7}{5}}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{\frac{7}{5}}}{x + \sqrt{\frac{7}{5}}} \right| + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{35}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}x - \sqrt{7}}{\sqrt{5}x + \sqrt{7}} \right| + C. \end{aligned}$$

وأیضا ، يمكننا وضع التكامل فى الصورة (٢) بأجراء تغيير للمتغير ، $u = \sqrt{5}x$. هذا يعطى

$$\int \frac{dx}{5x^2-7} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{du}{u^2-7} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{u-\sqrt{7}}{u+\sqrt{7}} \right| + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{35}} \ln \left| \frac{5x-\sqrt{7}}{5x+\sqrt{7}} \right| + C.$$

تكامل على الصورة $\int dx / (ax^2 + bx + c)$ يمكن اختزاله الى $\int dx / (x^2 \pm a^2)$ باكمال المربع في المقام واجراء تغيير للمتغير. المثال الاتي يوضح الطريقة .

مثال ٣ . أوجد $\int \frac{dx}{3x^2 - 8x + 7}$

خذ 3 عاملا مشتركا من المقام ، حتى يصبح معامل x^2 و 1 ثم اكمل المربع :

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 8x + 7} = \int \frac{dx}{3(x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{7}{3})}$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9}) - \frac{16}{9} + \frac{7}{3}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x - \frac{4}{3})^2 + \frac{5}{9}}$$

اذا وضعنا $u = x - \frac{4}{3}$ ، فان التكامل الاخير يكون على الصورة (١) ، ويكون

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 8x + 7} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u^2 + \frac{5}{9}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{9}}} \tan^{-1} \frac{u}{\sqrt{\frac{5}{9}}} \right) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \frac{3u}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \frac{3x-4}{\sqrt{5}} + C.$$

مثال ٤ . أوجد $\int \frac{2x+5}{31+4x-4x^2} dx$

نبدأ باكمال المربع في المقام :

$$\int \frac{2x+5}{31+4x-4x^2} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{2x+5}{x^2-x-\frac{31}{4}} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{2x+5}{(x-\frac{1}{2})^2-8} dx$$

نضع الآن $u = x - \frac{1}{2}$ فنحصل على

$$\int \frac{2x+5}{31+4x-4x^2} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{2u+6}{u^2-8} du$$

$$= -\frac{1}{4} \left(\int \frac{2u}{u^2-8} du + \int \frac{6}{u^2-8} du \right).$$

التكامل الأول من التكاملين الأخيرين على الصورة $\int g'(u) / g(u) du$ ، والتكامل الثاني على الصورة (٢) ومن ثم

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+5}{31+4x-4x^2} dx &= -\frac{1}{4} \left(\ln |u^2-8| + \frac{3}{\sqrt{8}} \ln \left| \frac{u-\sqrt{8}}{u+\sqrt{8}} \right| \right) + C \\
&= -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{4x^2-4x-31}{4} \right| \\
&\quad - \frac{3}{4\sqrt{8}} \ln \left| \frac{2x-1-2\sqrt{8}}{2x-1+2\sqrt{8}} \right| + C. \\
&= -\frac{1}{4} \ln |4x^2-4x-31| + \frac{1}{4} \ln 4 \\
&\quad - \frac{3}{4\sqrt{8}} \ln \left| \frac{2x-1-2\sqrt{8}}{2x-1+2\sqrt{8}} \right| + C. \\
&= -\frac{1}{4} \ln |4x^2-4x-31| \\
&\quad - \frac{3}{4\sqrt{8}} \ln \left| \frac{2x-1-2\sqrt{8}}{2x-1+2\sqrt{8}} \right| + C'.
\end{aligned}$$

حيث $C' = \frac{1}{4} \ln 4 + C$ فهو ثابت اختياري آخر . كثيرا ما تستخدم حيلة جمع الحدود الثابتة لتعطى صورة أبسط لمعكوس تفاضلي ، وعندما تحتوي هذه الحدود على لوغاريتم فان الحيلة يمكنها أحيانا اعطاء مظهر مختلف تماما للجواب .

مسائل

أوجد التكاملات الآتية :

$\int \frac{d\theta}{\sec \theta}$	- ٣	$\int \frac{x^2+a}{x^3} dx$	- ٢	$\int \frac{x^3+x^2+1}{x} dx$	- ١
$\int \tan z dz$	- ٦	$\int \frac{e^t+2}{e^t} dt$	- ٥	$\int \frac{\sec \theta}{\cot \theta} d\theta$	- ٤
$\int \frac{x}{4x+5} dx$	- ٩	$\int \frac{3x-4}{x-4} dx$	- ٨	$\int \frac{2y}{y+1} dy$	- ٧
$\int 3x\sqrt{7-x} dx$	- ١٢	$\int \frac{u}{(3u-1)^3} du$	- ١١	$\int \frac{x^2+2}{x+3} dx$	- ١٠
$\int \frac{1+v}{(2+v)^2} dv$	- ١٥	$\int \frac{e^t}{e^t+2} dt$	- ١٤	$\int y(2y+5)^{1/2} dy$	- ١٣
$\int \frac{dy}{5+4y^2}$	- ١٨	$\int \frac{dx}{x^2-9}$	- ١٧	$\int \left(\frac{1+v}{2+v} \right)^2 dv$	- ١٦
$\int \frac{u}{b^2x^2-c^2} dx, bc \neq 0$	- ٢١	$\int \frac{dx}{3-5x^2}$	- ٢٠	$\int \frac{dx}{2x^2+5}$	- ١٩
$\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$	- ٢٤	$\int \frac{3\theta-1}{9-\theta^2} d\theta$	- ٢٣	$\int \frac{4z+1}{z^2+1} dz$	- ٢٢
$\int e^{2x} \sin e^{2x} dx$	- ٢٧	$\int \frac{\sin 3x}{\sqrt{5-\cos 3x}} dx$	- ٢٦	$\int e^{\sin z} \cos z dz$	- ٢٥

$$\begin{array}{lll}
\int \frac{\cos u}{4 - \sin^2 u} du & - ٣٠ & \int \frac{\sec^2 u}{(1 + \tan u)^2} du & - ٣١ & \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx & - ٣٨ \\
\int \frac{5dv}{v^2 + 2v + 5} & - ٣٣ & \int \frac{dx}{x^2 - 8x + 15} & - ٣٢ & \int \frac{y}{y^4 + c^4} dy, c \neq 0 & - ٣١ \\
\int \frac{2dx}{x^2 - 8x + 25} & - ٣٦ & \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 8} & - ٣٥ & \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 9} & - ٣٤ \\
\int \frac{6dz}{5 - 4z - z^2} & - ٣٩ & \int \frac{dx}{4 - 2x - x^2} & - ٣٨ & \int \frac{dy}{4y^2 + 4y + 2} & - ٣٧ \\
\int \frac{7}{6x^2 + 6x} dx & - ٤٢ & \int \frac{8x}{4x^2 - 12x + 5} dx & - ٤١ & \int \frac{t+3}{t^2 + 2t} dt & - ٤٠ \\
\int \frac{2y+3}{y-3y^2-\frac{1}{6}} dy & - ٤٥ & \int \frac{5x+2}{x^2-2x+5} dx & - ٤٤ & \int \frac{2-3u}{9u^2+6u-1} du & - ٤٣ \\
& & & & \int \frac{s+1}{4s^2+16s+52} ds & - ٤٦
\end{array}$$

٢ - ١٠

التكامل بالتجزئ

قاعدة مشتقة حاصل ضرب هي

$$D[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

هذا يعني أن $f(x)g(x)$ معكوس تفاضلي للطرف الأيمن ، واذن

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x) dx + \int g(x)f'(x) dx$$

وهذا ، باعادة ترتيبه ، يصبح

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx \quad ١ - ١٠$$

إذا وضعنا $u = f(x)$ و $v = g(x)$ فإن $du = f'(x) dx$ و $dv = g'(x) dx$ ، والصيغة ١ - ١٠ يمكن كتابتها بإيجاز هكذا

$$\int u dv = uv - \int v du \quad ٢ - ١٠$$

الصيغة ١ - ١٠ أو الصيغة ٢ - ١٠ المكافئة لها ، والتي تكون صحيحة لجميع g و f اللتين لهما مشتقتان متصلتان ، هي الأساس لطريقة التكامل بالتجزئ الأمثلة الآتية توضح كيفية استخدامها . مثال ١ . أوجد $\int x \cos x dx$ إذا وضعنا

$$g'(x) = \cos x, \quad \text{و} \quad f(x) = x$$

فان $\int f(x) g'(x) dx$ ، الطرف الأيسر من الصيغة ١٠ - ١ ، غير التكامل المطلوب . من هاتين

$$f(x) = \sin x \quad \text{و} \quad f'(x) = 1$$

والصيغة ١٠ - ١ تصبح

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

ينبغي على القارئ أن يراجع هذه النتيجة بأجراء التفاضل .
أحيانا يتحتم أن نستخدم التكامل بالتجزىء أكثر من مرة لايجاد التكامل .

مثال ٢ . أوجد $\int x^2 e^x dx$.

من المعتاد عند اجراء التكامل بالتجزىء ، استخدام رموز الصيغة ١٠ - ٢ . يجب اختيار dv و u بحيث أن $udv = x^2 e^x dx$ ضع

$$u = x^2 \quad dv = e^x dx$$

$$du = 2x dx, \quad v = e^x$$

فيكون

وبتعويض هذه القيم فى الصيغة ١٠ - ٢ يكون

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \quad (١)$$

التكامل الاخير ليس واضحا لكن ، لكونه يشبه وأبسط من التكامل الأول ، يوصى أننا نحاول ايجاده بتكامل آخر بالتجزىء . وفقا لذلك ، ضع

$$u_1 = x \quad dv_1 = e^x dx$$

$$du_1 = dx, \quad v_1 = e^x$$

فيكون

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x$$

وبالتالى يكون

بتعويض ذلك فى (١) ، يكون

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C = (x^2 - 2x + 2) e^x + C$$

ينبغي على القارئ أن يراجع هذا الجواب بأجراء التفاضل .
عند اجراء التكامل بالتجزىء توجد طرق كثيرة لاختيار dv و u . احتمالات أخرى فى المثال الاخير هى :

$$u = 1, dv = x^2 e^x dx \quad (ب) \quad u = x, dv = x e^x dx \quad (أ)$$

$$u = e^x, dv = x^2 dx \quad (د) \quad u = x e^x, dv = x dx \quad (ج)$$

لكل من هذه ، $udv = x^2 e^x$ ، لكن ليست جميعها عملية . الاختيار ينبغي أن يكون بحيث أن dv يمكن تكاملها بسهولة لنحصل على v ، والتكامل الثانى فى الصيغة ١٠ - ٢ ينبغي أن يكون أسهل

من التكامل الأول . فى (ج) ، (د) فقط يمكننا إيجاد v من dv بسهولة . دعنا نحاول إيجاد $e^x x^2$ باستخدام (د) . لدينا

$$u = e^x, \quad dv = x^2 dx$$

$$du = e^x dx, \quad v = \frac{1}{3}x^3$$

والصيغة ١٠ - ٢ تصبح

$$\int x^2 e^x dx = \frac{1}{3}x^3 e^x - \int \frac{1}{3}x^3 e^x dx$$

رغم أن هذا صحيح ، لكن التكامل الأخير يبدو أن إيجاده أصعب من إيجاد التكامل الأصلي . وإذا واجهنا هذا الموقف ، ينبغي أننا نعود ونحاول اختيار آخر لـ dv و u . عادة لانحتاج محاولة احتمالات شاذة مثل $dv = (1/x) e^x dx$ و $u = x^x$ فى المثال السابق . عندما تحتوى الدالة المكاملة على دالة مترسلة ، يمكننا عادة تجنب اختيار ضعيف لـ dv و u بأخذ الجزء المترسل من الدالة المكاملة ، بشرط أنه يمكن تكامله بسهولة .

الصيغة للتكامل بالتجزئ لتكامل معين هى ، من الصيغة ١٠ - ١ ،

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = \left[f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx \right]_a^b$$

$$= f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) dx.$$

مثال ٣ . أوجد $\int_0^2 \tan^{-1} x dx$

سنحاول التكامل بالتجزئ . الاختيار المناسب الوحيد لـ dv و u هو

$$u = \tan^{-1} x, \quad dv = dx.$$

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x.$$

ويكون

$$\int_0^2 \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x dx}{1+x^2}$$

وبالتالى يكون

$$= x \tan^{-1} x \Big|_0^2 - \frac{1}{2} \ln (1+x^2) \Big|_0^2$$

$$= 2 \tan^{-1} 2 - \frac{1}{2} \ln 5 \approx 1.41.$$

مثال ٤ . أوجد $\int e^x \sin x dx$.

يمكننا أن نضع $dv = \sin x dx$, $dv = e^x dx$. بما أنه لا توجد أفضلية للاختيار بينهما ، دعنا نختار الأول :

$$u = \sin x, \quad dv = e^x dx$$

$$du = \cos x dx, \quad v = e^x$$

فيكون

وبالتالى يكون

$$(٢) \quad \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

التكامل الثانى لا يبدو أنه أسهل من الأول . الاختيار الآخر لـ dv يؤدي الى تعبير مماثل ، ويبدو أننا وصلنا الى طريق مسدود فى محاولتنا لايجاد التكامل بطريقة التكامل بالتجزىء . لكن دعنا نستمر لايجاد التكامل الثانى فى (٢) بالتجزىء . نضع

$$u_1 = \cos x, \quad dv_1 = e^x \, dx$$

فيكون

$$du_1 = -\sin x \, dx, \quad v_1 = e^x$$

وبالتالى يكون

$$(٣) \quad \int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx$$

يبدو أننا ندور فى حلقة ، لكن دعنا نستمر . بتعويض (٣) فى (٢) ، يكون لدينا

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

بنقل التكامل الثانى الى الطرف الأيسر من المعادلة ، نحصل على

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x$$

ويكون

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C$$

لقد كاملنا مرتين ، مرة لايجاد v ومرة أخرى لايجاد v_1 .

التكامل بالتجزىء طريقة قوية لكن ليس بلسما . فعاليتيه محدودة الى حد كبير بتكاملات الدوال المسترسلة ، سواء كانت بمفردها أو كانت مضروبة فى قوى x . الامثلة والمسائل التى فى هذا البند ، مع أنها ليست شاملة الا أنها تعطى فكرة جيدة عن أنواع الدوال التى تكاملاتها يمكن ايجادها بالتكامل بالتجزىء .

مسائل

أوجد التكاملات الآتية :

$$\int \sin^{-1} 3y \, dy \quad - \quad ٣ \quad \int \ln x \, dx \quad - \quad ٢ \quad \int x \sin ax \, dx, a \neq 0 \quad - \quad ١$$

$$\int t^3 / \sqrt{1+t^2} \, dt \quad - \quad ٦ \quad \int x / \sqrt{1+4x} \, dx \quad - \quad ٥ \quad \int x \sec^{-1} x \, dx \quad - \quad ٤$$

$$\int_2^e \frac{\ln x}{x} \, dx \quad - \quad ٩ \quad \int \sqrt{x} \ln x \, dx \quad - \quad ٨ \quad \int_1^2 x \ln x \, dx \quad - \quad ٧$$

$$\int_{-1}^1 x a^x \, dx \quad - \quad ١٢ \quad \int_0^1 (e - e^x) y \, dy \quad - \quad ١١ \quad \int x^r \ln x \, dx, r \text{ const} \quad - \quad ١٠$$

$$\int \sec^{-1} (1/w) \, dw \quad - \quad ١٥ \quad \int x \sin (7x+1) \, dx \quad - \quad ١٤ \quad \int (1-z) \ln z \, dz \quad - \quad ١٣$$

$$\int_0^{\pi/4} (3x + x^2) \cos x \, dx \quad - \quad ١٨ \quad \int z^2 e^{-z} \, dz \quad - \quad ١٧ \quad \int \sec^{-1} \sqrt{\theta} \, d\theta \quad - \quad ١٦$$

$$\int_0^{\infty} t \sec^2 \frac{t}{2} dt - ٢١ \quad \int (\ln x)^2 dx - ٢٠ \quad \int_{-1}^1 (x + x^3) e^x dx - ١٩$$

$$\int x \sin x^2 dx - ٢٤ \quad \int (\sin^{-1} x)^2 dx - ٢٣ \quad \int e^{at} \cos bt dt, a^2 + b^2 \neq 0 - ٢٢$$

$$\int z \tan^{-1} z dz - ٢٦ \quad \int \sin (\ln t) dt - ٢٥$$

٢٧ - باجراء تغيير للمتغير أوجد $\int \tan^{-1} (x/a) dx$ من التكامل

$$\int \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2)$$

الذى أوجدناه فى مثال ٣ .

٢٨ - أوجد مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = x e^{-x}$ بين 0 و 3 .

٢٩ - أوجد مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = \sin^{-1} x$ بين 0 و 1 .

٣٠ - اذا دارت المنطقة فى المسألة ٢٨ حول المحور السينى فأوجد حجم الجسم الناتج .

٣١ - أوجد مساحة المنطقة تحت القوس الاول على يمين المحور الصادى للمنحنى $b > 0$

$$y = e^{-x} \cos bx \text{ و}$$

٣٢ - أوجد صيغة تعبر عن $\int x^n e^x dx$ بدلالة $\int x^{n-1} e^x dx$. استخدم هذا التعبير لايجاد

$$\int x^4 e^x dx \text{ . هل يمكنك ايجاد صيغة للتكامل } \int x^n e^x dx \text{ ، حيث } n \text{ عدد صحيح موجب ،}$$

لاحتوى على تكامل ؟

٣٣ - اوجد صيغة تعبر عن $\int x^n \sin x dx$ بدلالة $\int x^{n-2} \sin x dx$. استخدم هذا التعبير لايجاد

$$\int x^5 \sin x dx \text{ و } \int x^6 \sin x dx .$$

٣٤ - علق على الاستدلال الاتى . أوجد التكامل $\int dx/x$ بالتجزىء ، بوضع $dv = dx$ و $u = 1/x$.

فيكون $v = x$ و $du = -dx/x^2$ ، وبالتالي يكون

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{x} x - \int -\frac{dx}{x} = 1 + \int \frac{dx}{x}$$

$$\text{واذن } 0 = 1 .$$

٣٥ - عند ايجاد v من dv توجد امكانيات كثيرة لـ v لان $v + c$ هو أيضا معكوس تفاضلى

لـ dv لاي ثابت c . فمثلا ، فى مثال ٣ لدينا

$$u = \tan^{-1} x, \quad dv = dx,$$

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x + c,$$

$$\int \tan^{-1} x dx = (x + c) \tan^{-1} x - \int \frac{x+c}{1+x^2} dx$$

اثبت أن نفس النتيجة نحصل عليها لـ $\int \tan^{-1} x dx$ لجميع c وأن هذا يكون صحيحا لاي تكامل

$\int u dv$ نوجده بالتجزىء .

بالرجوع الى مسألة ٣٥ ، أوجد التكاملين الآتين باستخدام $v + c$ بدلا من v واختيار الثابت c

بحيث يبسط العمل :

$$\int x \tan^{-1} x \, dx = 37$$

$$\int_0^1 \ln(y^2 - 1) \, dy = 36$$

٣٨ - حل المعادلة التفاضلية $y' = x + y$ (ارشاد : المتغيران غير قابلين للفصل . اكتب المعادلة في الصورة $y' - y = x$ ، اضرب طرفي هذه المعادلة في e^{-x} ، ولاحظ ان الطرف الايسر الناتج هو مشتقة) .

٣ - ١٠

التكاملات المثلثية

التكاملات المحتوية على دوال مثلثية يمكن أن تكون صعبة . في هذا البند ندرس بعض الوسائل التي يمكن بها ايجادها . المتطابقات المثلثية

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x,$$

$$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

تلعب دورا هاما في هذه التكاملات .

نتذكر أن $\sec x$, $\tan x$ و $\sec^2 x$ هي مشتقات $\sec x$, $\tan x$ و $\sin x$ على الترتيب . عندما تكون هذه العوامل موجودة أو يمكن ادخالها ، قد يكون من الممكن التعبير عن التكامل في الصورة $\int g'(x) g(x) \, dx$.

مثال ١ . أوجد $\int \sec^4 2x \tan 2x \, dx$

لأن $\sec 2x \tan 2x$ هي مشتقة $\sec 2x$ ماعدا لعامل ثابت ، نشطر العامل $\sec 2x \tan 2x$ ونوجد التكامل بسهولة :

$$\int \sec^4 2x \tan 2x \, dx = \int \sec^3 2x (\sec 2x \tan 2x) \, dx = \frac{1}{4} \sec^4 2x + C$$

مثال ٢ . أوجد $\int \tan^3 x \, dx$

لدينا

$$\begin{aligned} \int \tan^3 x \, dx &= \int \tan x \tan^2 x \, dx = \int \tan x (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \int \tan x \sec^2 x \, dx - \int \tan x \, dx. \end{aligned}$$

التكامل الاول هو $\frac{1}{2} \tan^2 x$. التكامل الثاني يمكن ايجاده بكتابة $\tan x$ على الصورة $\sin x / \cos x$ وملاحظة أن البسط هو اساسا مشتقة المقام . واذن

$$\int \tan^3 x \, dx = \frac{1}{2} \tan^2 x - \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C$$

مثال ٣ . أوجد $\int \sec x \, dx$.

ايجاد هذا التكامل يعتمد على فكرة :

$$\begin{aligned}\int \sec x \, dx &= \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} \, dx \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\tan x + \sec x} = \ln |\tan x + \sec x| + C.\end{aligned}$$

توجد صيغة لـ $\int \sin^n x \, dx$ ، لكن مربكة للدرجة أنه من الأفضل استخدام ما يسمى بصيغة الاختزال . لاشتقاقها ، نستخدم تكاملا بالتجزىء . ضع

$$u = \sin^{n-1} x, \quad dv = \sin x \, dx$$

$$du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \, dx, \quad v = -\cos x \quad \text{فيكون}$$

وبالتالى يكون

$$\begin{aligned}\int \sin^n x \, dx &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx \\ &\quad - (n-1) \int \sin^n x \, dx.\end{aligned}$$

بنقل التكامل الاخير الى الطرف الايسر للمعادلة ، نحصل على

$$n \int \sin^n x \, dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx$$

واذن

$$(1) \quad \int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$$

هذا يعبر عن $\int \sin^n x \, dx$ بدلالة التكامل الأبسط $\int \sin^{n-2} x \, dx$. عندما تكون n عددا صحيحا موجبا ، يمكن تطبيق (١) تكراريا حتى يكون التكامل الاخير اما

$$\int \sin^0 x \, dx = \int dx = x \quad \text{أو} \quad \int \sin x \, dx = -\cos x$$

الصيغة مثل (١) التى تعبر عن تكامل بدلالة تكامل أبسط منه ، من نفس النوع ، تسمى صيغة اختزال . صيغ الاختزال لتكاملات قوى الدوال المثلثية الاخرى معطاة فى التذييل أ .

مثال ٤ . أوجد $\int \sin^4 3x \, dx$.

الصيغة (١) لايمكن استخدامها مباشرة لان الدالة المكاملة هنا مختلفة ، لكن باجراء تغيير المتغير $u = 3x$ ، يمكن تكيف التكامل حتى يمكن استخدام (١) حيث $n = 4$:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 u \, du &= -\frac{1}{2} \sin u \cos u + \frac{1}{2} u \\ (2) \quad &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \sin^3 u \cos u + \frac{1}{2} \int \sin^2 u \, du \right)\end{aligned}$$

نستخدم (١) مرة ثانية ، حيث $n = 2$ ، لايجاد التكامل الاخير ونحصل على

$$\int \sin^2 u \, du = -\frac{1}{2} \sin u \cos u + \frac{1}{2}u$$

بتعويض ذلك في (٢) واستبدال u بـ $3x$ ، يكون لدينا

$$\begin{aligned} \int \sin^4 3x \, dx &= -\frac{1}{12} \sin^3 3x \cos 3x + \frac{1}{4}[-\frac{1}{2} \sin 3x \cos 3x + \frac{1}{2}(3x)] + C \\ &= -\frac{1}{12} \sin^3 3x \cos 3x - \frac{1}{8} \sin 3x \cos 3x + \frac{3x}{8} + C. \end{aligned}$$

رغم أن (١) عملية تماما لايجاد $\int \sin^n x \, dx$ لأي عدد صحيح موجب n ، إلا أنه عندما تكون n فردية وموجبة قد يفضل القارئ الطريقة الموضحة في المثال الآتي . وهي لا تشمل على صيغة ، وتكون أبسط عندما تكون n عددا فرديا صغيرا .

مثال ٥ . أوجد $\int \sin^5 x \, dx$.

لدينا

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \, dx &= \int \sin^4 x \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \, dx \\ &= \int (1 - 2 \cos^2 x + \cos^4 x) \sin x \, dx \\ &= \int \sin x \, dx - 2 \int \cos^2 x \sin x \, dx + \int \cos^4 x \sin x \, dx \\ &= -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C. \end{aligned}$$

الفكرة في هذا المثال هي كتابة الدالة المكاملة كحاصل جمع لقوى $\cos x$ مضروبة في $\sin x$ ، التي هي مشتقة $\cos x$ ماعدا لعامل ثابت . طريقة مماثلة توجد لـ $\int \cos^n x \, dx$ و $\int \sin^n x \, dx$ لأي عدد صحيح فردى موجب n . الطريقة لاتصلح اذا كانت n عددا صحيحا زوجيا . على القارئ أن يجرب $\int \sin^4 x \, dx$ ليرى أين توجد الصعوبة .

التكاملات التي على الصورة $\int \cos mx \cos nx \, dx$ يمكن ايجادها باستخدام المتطابقة المثلثية

$$(٣) \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)]$$

التي يمكن تحقيقها بسهولة بفك التعبير بالطرف الايمن .

مثال ٦ . أوجد $\int \cos 2x \cos 5x \, dx$

باستخدام (٣) للتعبير عن حاصل الضرب كحاصل جمع ، لدينا

$$\begin{aligned} \int \cos 2x \cos 5x \, dx &= \frac{1}{2} \int [\cos 7x + \cos (-3x)] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int (\cos 7x + \cos 3x) \, dx \\ &= \frac{1}{14} \sin 7x + \frac{1}{6} \sin 3x + C. \end{aligned}$$

صينغ مماثلة لـ (٣) (انظر الأوراق الاخيرة) تمكنا من ايجاد $\int \sin mx \cos 4nx \, dx$ و $\int \sin mx \sin nx \, dx$.

يوجد جدول مختصر للتكاملات في التذييل أ . توجد جداول اشمل ، مثل :
 “Tables of integrals” لـ Dwight, 4th ed., Macmillan, New York, 1961 الذي به قائمة
 بأكثر من 1000 تكامل غير معين ومعين . توجد مجموعة أصغر ، لكن وافية ، من التكاملات في
 “Standard Mathematical Tables” , The chemical Rubber company , Cleveland.
 هذه تحتوي أيضا على جداول اللوغاريتمات ، والجداول المثلثية ، وجداول عددية أخرى ، وهي
 مرجع ممتاز للرياضي .

لا يمكن لجدول مهما كان كبيرا ان يحتوي على كل تكامل يحتمل أن نقابله . بصفة عامة يلزمنا
 بعض التصرف ، غالبا مالا يكون أكثر من تغيير بسيط للمتغير أو استخدام متطابقة مثلثية . فمثلا ،
 $\int \cos^2(x/2) dx$ غير مدون التذييل أ ، لكن اذا وضعنا $u = x/2$ ، فالتكامل يصبح $2 \int \cos^2 u du$ ،
 وهذا مدون رقم (٦٠) . بالمثل $\int \sqrt{3-5x^2} dx$ يوجد بوضع $u = \sqrt{5} x$ واستخدام رقم ٢٠ حيث
 $a = \sqrt{3}$. صورة أخرى للتكامل $\int du / \cos u$ هي $\int \sec u du$ التي هي رقم ٥٧ . عند ايجاد
 تكامل من جدول يجب ملاحظة أي قيود منصوص عنها أو تفهم ضمنا . فمثلا ، رقم ١٤ (أ) في
 التذييل أ له اعداد تخيلية اذا كانت $b < 0$. ومن ثم يكون صحيحا فقط اذا كانت $b > 0$. عندما
 تكون $b < 0$ يجب أن يستخدم ١٤ (ب) . من الواضح أن ، رقم ٧٨ (أ) لا يكون صحيحا اذا كانت
 $m = -n$.

مثال ٧ . باستخدام جدول للتكاملات ، أوجد $\int \sec^3 x \tan^2 x dx$ التكامل غير مدون في التذييل
 أ ، لكن بكتابة الدالة المكاملة كقوى لـ $\sec x$ يمكن استخدام رقم ٧٥ : —
 $\int \sec^3 x \tan^2 x dx = \int \sec^3 x (\sec^2 x - 1) dx$

$$\begin{aligned} &= \int \sec^5 x dx - \int \sec^3 x dx \\ &= \frac{1}{4} \sec^2 x \tan x + \frac{3}{4} \int \sec^3 x dx - \int \sec^3 x dx \\ &= \frac{1}{4} \sec^2 x \tan x - \frac{1}{4} \sec x \tan x \\ &\quad - \frac{1}{4} \ln |\sec x + \tan x| + C, \end{aligned}$$

حيث $\int \sec^3 x dx$ — أوجدناه من رقم ٦٩ .

مسائل

استخدم جدولا للتكاملات فقط عند الإشارة الى ذلك .
 أوجد التكاملات الآتية :

$$\begin{array}{lll} ١. \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 x dx & ٢. \int_{1/2}^1 \csc^2 \frac{\pi t}{2} dt & ٣. \int \cos^5 u \sin u du \\ ٤. \int \sec^2 w \tan^2 w dw & ٥. \int \csc^2 z \cot z dz & ٦. \int \sin x e^{\cos x} dx \\ ٧. \int \frac{b dt}{\cos^2 at}, a \neq 0 & ٨. \int \frac{dx}{\sin x} & ٩. \int \frac{\sin \sqrt{y}}{\sqrt{y}} dy \end{array}$$

$$\begin{aligned}
& \int \cos^6 2x \, dx \quad - ١٢ \quad \int \sin^7 \frac{x}{2} \, dx \quad - ١١ \quad \int \cos^3 x \, dx \quad - ١٠ \\
& \int (\tan u + \cot u) \, du \quad - ١٥ \quad \int \frac{\csc^2 5s}{1 + \cot 5s} \, ds \quad - ١٤ \quad \int \frac{1 + \sin \alpha}{\alpha - \cos \alpha} \, d\alpha \quad - ١٣ \\
& \int \left(\tan 3v - 2 \cot \frac{v}{3} \right) \, dv \quad - ١٨ \quad \int \sin 7x \sin 3x \, dx \quad - ١٧ \quad \int \sin x \cos 3x \, dx \quad - ١٦ \\
& \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx \quad - ٢١ \quad \int \cos^3 x \sin^2 x \, dx \quad - ٢٠ \quad \int (\sec x - 1)^2 \, dx \quad - ١٩ \\
& \int \tan^3 x \, dx \quad - ٢٤ \quad \int \frac{\csc^2 2\phi}{\sqrt{2} \cot 2\phi + 4} \, d\phi \quad - ٢٣ \quad \int \frac{\cos^3 x}{\sin x} \, dx \quad - ٢٢ \\
& \int \tan^3 \frac{\theta}{2} \sec^4 \frac{\theta}{2} \, d\theta \quad - ٢٧ \quad \int \tan^6 z \sec^4 z \, dz \quad - ٢٦ \quad \int \cot^4 3x \, dx \quad - ٢٥ \\
& \int (\tan 4z - 1)^2 \, dz \quad - ٣٠ \quad \int_0^{\pi/4} \tan y \sec y \, dy \quad - ٢٩ \quad \int (1 + \cos z)^3 \, dz \quad - ٢٨
\end{aligned}$$

$$(1 - \sin x \text{ : ارشاد : اضرب البسط والمقام في } 1 - \sin x) \int \frac{dx}{1 + \sin x} \quad - ٣١$$

$$\int (\tan 3\alpha - \cot 3\alpha)^2 \, d\alpha \quad - ٣٤ \quad \int \frac{du}{\sin u \cos u} \quad - ٣٣ \quad \int \frac{dt}{1 - \cos t} \quad - ٣٢$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx \quad - ٣٦ \quad (\text{ارشاد : كامل بالتجزى}) \int \sec^3 y \, dy \quad - ٣٥$$

$$(\text{ارشاد : ازل الجذر من البسط}) \int \sqrt{1 + \sin \theta} \, d\theta \quad - ٣٨ \quad \int \tan^3 \theta \sec^{3/2} \theta \, d\theta \quad - ٣٧$$

$$\int \frac{\sin^4 t}{\cos^6 t} \, dt \quad - ٤١ \quad \int \sin^4 \frac{x}{3} \cos^4 \frac{x}{3} \, dx \quad - ٤٠ \quad \int \cos^2 x \sin^6 x \, dx \quad - ٣٩$$

$$\int (\sin 2w + 2 \cos w)^2 \, dw \quad - ٤٣ \quad \int (\sin 3\alpha - \sin 2\alpha)^2 \, d\alpha \quad - ٤٢$$

$$٤٤ - \text{ باستخدام جدول للتكاملات ، أوجد } \int \sin^n x \, dx \text{ و } \int \cos^n x \, dx \text{ حيث } n = 1, 2, \dots, 6$$

$$٤٥ - \text{ أثبت أن لأي عدد صحيح موجب } n \text{ ، يكون } \int_0^{\pi/n} \sin nx \cos nx \, dx = 0$$

$$٤٦ - \text{ أثبت أن } \int_0^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi/2 \text{ إذا كانت } n \text{ عددا صحيحا موجبا .}$$

$$٤٧ - \text{ أوجد طول المنحنى الذى معادلته البارامترتان هما}$$

$$x = \ln \cos t, \quad y = t + 1; \quad 0 \leq t \leq \pi/3$$

$$٤٨ - \text{ أوجد طول المنحنى الذى معادلته بالاحداثيات القطبية هي } r = a \sec^2 (\theta/2), \quad a > 0,$$

$$\text{ و } 0 \leq \theta \leq \pi/2 \text{ (يمكن استخدام جدول للتكاملات) .}$$

$$٤٩ - \text{ أوجد طول القوس فى الربع الاول للقطع المكافئ ، الذى معادلته بالاحداثيات القطبية هي}$$

$$r = 2 / (1 + \cos \theta) \text{ (يمكن استخدام جدول للتكاملات) .}$$

$$٥٠ - \text{ التكامل } \int \tan x \sec^2 x \, dx \text{ يمكن ايجاده بطريقتين :}$$

* يمكن استخدام جدول للتكاملات .

$$\int \tan x \sec^2 x \, dx = \int \tan x (\sec^2 x) \, dx = \frac{1}{2} \tan^2 x,$$

$$\int \tan x \sec^2 x \, dx = \int \sec x (\tan x \sec x) \, dx = \frac{1}{2} \sec^2 x.$$

وفق بين الجوابين .

عندما تكون n عددا صحيحا زوجيا موجبا ، طريقة بديلة لصيغ الاختزال لـ $\int \sin^n x \, dx$ ،
و $\int \cos^n x \, dx$ هي باستخدام المتطابقين

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \quad \text{و} \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

لاختزال الأس . باستخدام هاتين مرة أو أكثر أوجد التكاملات الآتية :

$$\begin{array}{lll} \int \sin^2 x \, dx & - ٥١ & \int \cos^4 x \, dx & - ٥٢ \\ \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx & - ٥٤ & \int \cos^4 2x \sin^4 2x \, dx & - ٥٥ \\ \int \sin^6 \frac{x}{2} \, dx & - ٥٣ & \end{array}$$

اثبت صيغ الاختزال الآتية بأجراء التفاضل . اشتق الصيغة اذا أمكنك ذلك .

$$\int x^n \sin^{-1} x \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \sin^{-1} x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \quad - ٥٦$$

$$\int x^n e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx \quad - ٥٧$$

$$\int (\ln x)^n \, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \, dx \quad - ٥٨$$

$$\int x^m (\ln x)^n \, dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} (\ln x)^n - \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln x)^{n-1} \, dx \quad - ٥٩$$

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx \quad - ٦٠$$

$$\int \tan^n x \, dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \, dx \quad - ٦١$$

$$\int \sec^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx \quad - ٦٢$$

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{1}{m+n} \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx \quad - ٦٣$$

٦٤ - اثبت الصيغة (٣) والصيغ المماثلة في الأوراق الأخيرة لـ $\sin \alpha \sin \beta$ و $\sin \alpha \cos \beta$.
أوجد التكاملات الآتية . لأي m و n تكون الصيغة صحيحة ؟ أوجد التكامل للقيم المشتهة لـ
 m و n .

$$\int \sin mx \cos nx \, dx \quad - ٦٧ \quad \int \cos mx \cos nx \, dx \quad - ٦٦ \quad \int \sin mx \sin nx \, dx \quad - ٦٥$$

استخدم جدولا للتكاملات الآتية :

$$\begin{array}{lll} \int \frac{dx}{x\sqrt{3x+2}} & - ٧٠ & \int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} & - ٦٩ \\ \int \sin^2 4\theta \, d\theta & - ٦٨ & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\int \frac{1}{x\sqrt{2-3x^2}} dx & - ٧٣ & \int \frac{du}{u^2(3+u)} & - ٧٢ & \int \frac{\sqrt{x+6}}{2x} dx & - ٧١ \\
\int \frac{v^2}{\sqrt{16v^2-9}} dv & - ٧٦ & \int \frac{dx}{(1-4x^2)^{3/2}} & - ٧٥ & \int (7-3r^2)^{3/2} dr & - ٧٤ \\
\int \frac{y dy}{y^2+2y+3} & - ٧٩ & \int e^t \sin \frac{t}{2} dt & - ٧٨ & \int \alpha \sin \frac{\alpha}{3} d\alpha & - ٧٧ \\
\int \sec^3 2\theta d\theta & - ٨٢ & \int \sqrt{2x^2+x+1} dx & - ٨١ & \int \frac{x dx}{\sqrt{3x^2+2x-5}} & - ٨٠ \\
\int \cos^3 3y dy & - ٨٥ & \int \frac{dt}{\cos^4 t} & - ٨٤ & \int \cot^4 \frac{x}{2} dx & - ٨٣ \\
\int x dx & - ٨٨ & \int \tan^{-3} x dx & - ٨٧ & \int \tan^3 x dx & - ٨٦ \\
\int \ln x dx & - ٩١ & \int \sin^4 x \cos^6 x dx & - ٩٠ & \int (\ln 3z)^4 dz & - ٨٩
\end{array}$$

١٠ - ٤

تكاملات تشتمل على $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ و $\sqrt{x^2 - a^2}$.
كثيرا ما تحدث تكاملات تشتمل على $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ أو $\sqrt{x^2 - a^2}$ قد واجهنا من قبل
البيسطة منها ،
مثل

$$\int x \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{3}(a^2 + x^2)^{3/2} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C, \quad a > 0$$

الغرض الرئيسى فى ايجاد تكاملات أكثر تعقيدا تشتمل على هذه الجذور هو حذف الجذر باجراء
تغيير للمتغير . هذا يجرى بوضع $x = a \sec \theta$, $x = a \sin \theta$, $x = a \tan \theta$ باختيار التغير الذى
بالارتباط مع احدى المتطابقات

$$1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta, \quad 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta.$$

$$\sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$$

يجعل التعبير تحت الجذر مربعا كاملا . الامثلة التالية توضح الطريقة فى الحالات الثلاث .

$$\text{مثال ١ . أوجد } \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx, a > 0$$

إذا وضعنا $x = a \sin \theta$ ، حيث $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ ، مدى القيم الرئيسية له قوس الجيب
(arc sine) ، التكامل يصبح

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = \int \frac{\sqrt{a^2(1 - \sin^2 \theta)}}{a^2 \sin^2 \theta} a \cos \theta d\theta$$

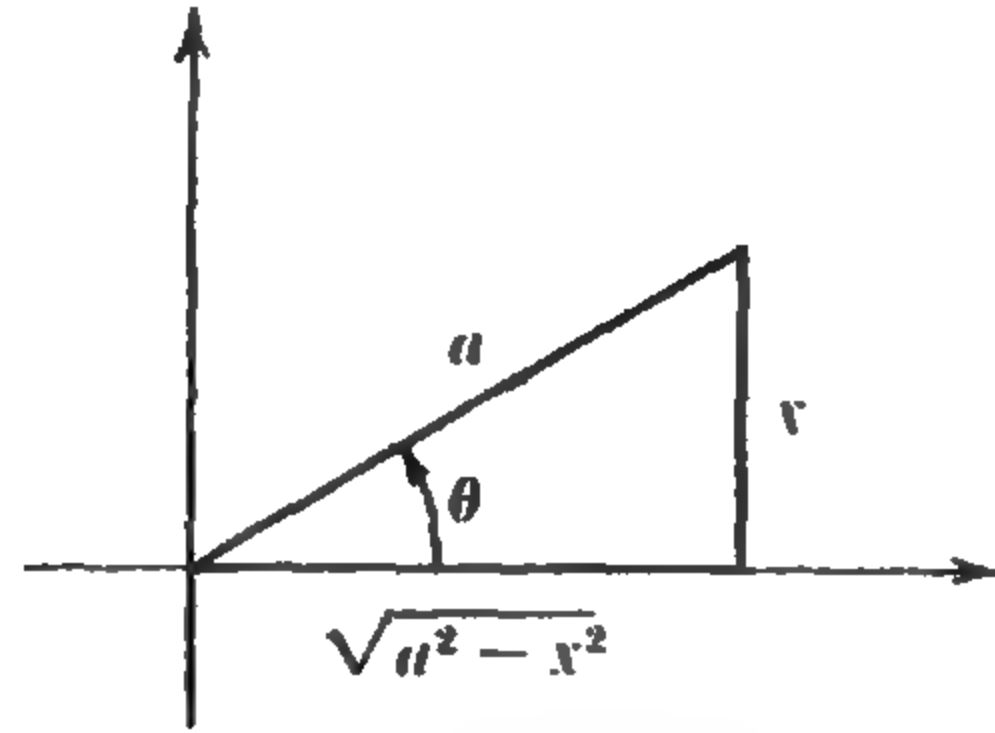
$$= \int \frac{\sqrt{\cos^2 \theta}}{\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta.$$

بما أن $\cos \theta \geq 0$ لـ $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ فإن $\sqrt{\cos^2 \theta} = \cos \theta$ والتكامل يصبح

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = \int \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = \int \cot^2 \theta d\theta$$

$$(1) \quad = \int (\csc^2 \theta - 1) d\theta = -\cot \theta - \theta + C.$$

لاحظ كيف حذف التعويض $x = a \sin \theta$ الجذر. يجب الآن التعبير عن الجواب بدلالة x بما أن $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ و $\sin \theta = x/a$ فإنه يوجد مثلث قائم مثل المثلث بالشكل ١٠-١ أو انعكاسه في المحور السيني الذي ساقه الرأسية x ووتره a .



شكل ١٠-١
إذا كانت $\sin \theta = x/a$ فإن $\cot \theta = \sqrt{a^2 - x^2}/x$.

الساق الأخرى يجب أن تكون $\sqrt{a^2 - x^2}$ ، ومن ثم $\cot \theta = \sqrt{a^2 - x^2}/x$. المعادلة (١) تصبح، بإجراء هذه التعويضات،

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

مثال ٢. أوجد $\int \sqrt{2 + 3x^2} dx$

نبدأ بوضع $u = \sqrt{3}x$ ، والتكامل يصبح

$$\int \sqrt{2 + 3x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \sqrt{2 + u^2} du$$

الآن نجرى تغييراً ثانياً للمتغير ونحذف الجذر بوضع $u = \sqrt{2} \tan \theta$ حيث $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ ، مدى القيم الرئيسية لقوس الظل (arctangent). لدينا

$$\int \sqrt{2+3x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \sqrt{2(1+\tan^2 \theta)} \sqrt{2} \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \sqrt{\sec^2 \theta} \sec^2 \theta d\theta.$$

لان $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, $\sqrt{\sec^2 \theta} = \sec \theta$ والتكامل يصبح

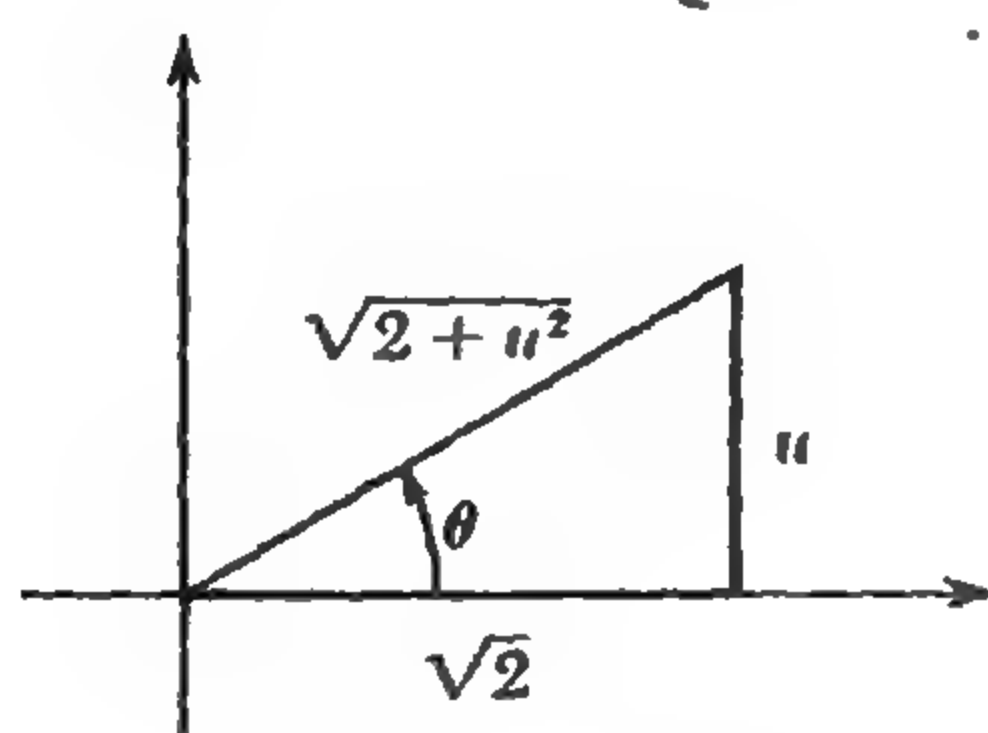
$$\int \sqrt{2+3x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \sec^3 \theta d\theta$$

التكامل الأخير يمكن ايجاده بالتجزىء. وهو رقم ٦٩ بالتذيل أ ويكون

$$(٢) \quad \int \sqrt{2+3x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} (\tan \theta \sec \theta + \ln |\tan \theta + \sec \theta|) + C$$

يجب الآن التعبير عن الجوانب بدلالة x بما أن $\tan \theta = u/\sqrt{2}$ و $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ فالمثلث فى الشكل ١٠ - ٢ يوضح أن

$$\sec \theta = \frac{\sqrt{2+u^2}}{\sqrt{2}}$$



شكل ١٠ - ٢

لنا كان $\tan \theta = u/\sqrt{2}$

فإن $\sec \theta = \sqrt{2+u^2}/\sqrt{2}$

بتعويض هذه القيم فى (٢)، يكون لدينا

$$\int \sqrt{2+3x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{u\sqrt{2+u^2}}{2} + \ln \left| \frac{u + \sqrt{2+u^2}}{\sqrt{2}} \right| \right) + C$$

الذى يصبح باستبدال u بالقيمة $\sqrt{3}x$

$$\int \sqrt{2+3x^2} dx = \frac{x\sqrt{2+3x^2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x + \sqrt{2+3x^2}}{\sqrt{2}} \right| + C$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{2+3x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln |\sqrt{3}x + \sqrt{2+3x^2}|$$

$$- \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \sqrt{2} + C$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{2+3x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln |\sqrt{3}x + \sqrt{2+3x^2}| + C'$$

حيث

$$C' = -(1/\sqrt{3}) \ln \sqrt{2} + C$$

مثال ٣ . أوجد $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - a^2}}$, $a > 0$

هذه المرة نحذف الجذر بوضع $t = a \sec \theta$ ، حيث $0 \leq \theta < \pi/2$ أو $\pi \leq \theta < 3\pi/2$ ، مدى القيم الرئيسية لقوس القاطع (arcsecant). التكامل يصبح

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - a^2}} = \int \frac{a \sec \theta \tan \theta}{a \sqrt{\tan^2 \theta}} d\theta$$

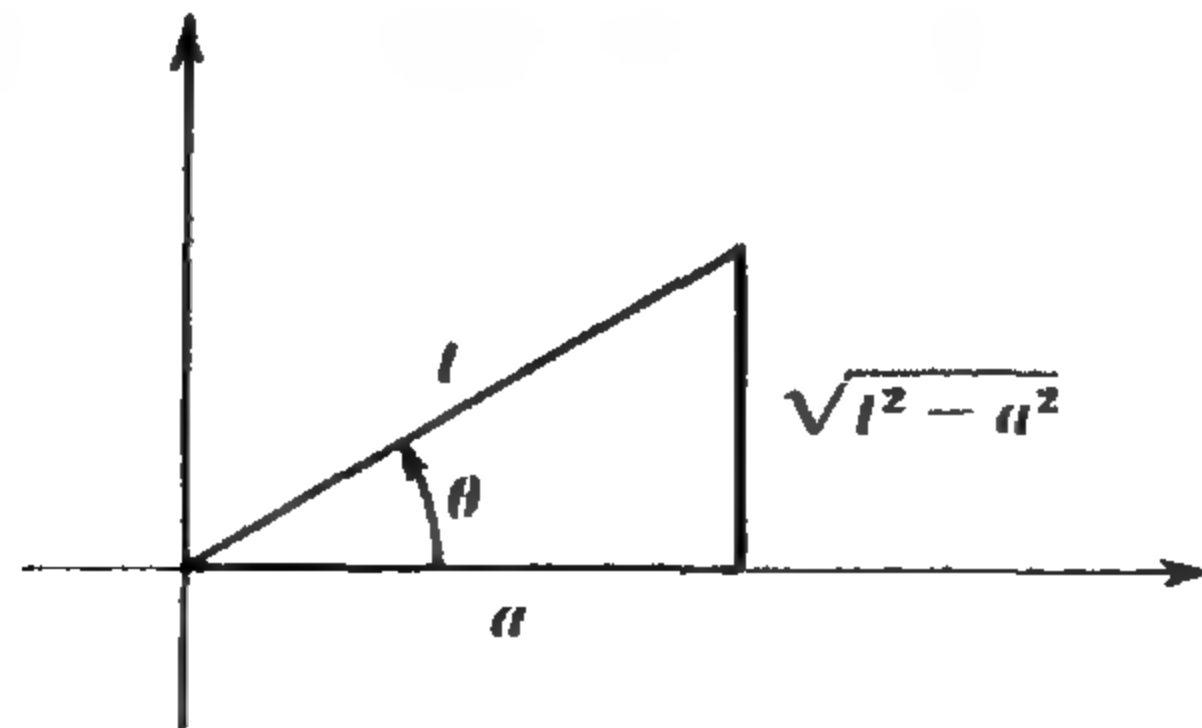
لقيم θ في أي من الفترتين، $\sqrt{\tan^2 \theta} = \tan \theta$ ومن ثم

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - a^2}} = \int \sec \theta d\theta = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C$$

من مثال ٣، ببند ٣-١٠. ولأن $\sec \theta = t/a$ فإن $\tan \theta = \sqrt{t^2 - a^2}/a$ (شكل ٣-١٠)، ويكون

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - a^2}} &= \ln \left| \frac{t}{a} + \frac{\sqrt{t^2 - a^2}}{a} \right| + C \\ &= \ln |t + \sqrt{t^2 - a^2}| + C' \end{aligned}$$

يمكن اعطاء قواعد للتعويض الصحيح لايجاد تكامل يحتوى على $\sqrt{a^2 \pm x^2}$ أو $\sqrt{x^2 - a^2}$. لكن من الأسهل أن نتذكر أننا نعوض عن x بـ $a \tan \theta$ ، $a \sin \theta$ أو $a \sec \theta$ ، الدوال الثلاث التي دوال قوسها معرفة، مختارين التعويض الذي يؤدي الى مربع كامل تحت الجذر.



شكل ٣-١٠

إذا كان $\sec \theta = t/a$

فإن

$$\tan \theta = \sqrt{t^2 - a^2}/a$$

التكاملات التي تشتمل على $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ يمكن اختزالها الى احدى الصور السابقة باكمال المربع .

مثال ٤ . أوجد $\int \frac{2x+1}{\sqrt{6x-3x^2}} dx$

أولا نكمل المربع :

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{\sqrt{6x-3x^2}} dx &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{2x+1}{\sqrt{-(x^2-2x)}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{2x+1}{\sqrt{-(x^2-2x+1)-1}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{2x+1}{\sqrt{-(x-1)^2-1}} dx. \end{aligned}$$

بوضع $u = x - 1$ ، التكامل يصبح

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{\sqrt{6x-3x^2}} dx &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{2u+3}{\sqrt{-(u^2-1)}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \left(\frac{2u}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{3}{\sqrt{1-u^2}} \right) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (-2\sqrt{1-u^2} + 3 \sin^{-1} u) + C \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{2x-x^2} + \sqrt{3} \sin^{-1} (x-1) + C. \end{aligned}$$

مسائل

أوجد التكاملات الآتية . جميع الثوابت الحرفية موجبة . أهمل أى انفصال للدالة المكاملة عند نهاية فترة التكامل . يمكن استخدام جدول للتكاملات لايجاد التكامل الذى ينتج من التعويض المثلثى .

$\int \frac{dt}{\sqrt{1-9t^2}} - ٣$	$\int \frac{dx}{\sqrt{49-x^2}} - ٢$	$\int \frac{x}{\sqrt{10-x^2}} dx - ١$
$\int_0^2 \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}} dx - ٦$	$\int \frac{dz}{\sqrt{3-7z^2}} - ٥$	$\int_{-4/3}^{2/3} \frac{dy}{\sqrt{16-9y^2}} - ٤$
$\int \sqrt{c^2-x^2} dx - ٩$	$\int \frac{dt}{t\sqrt{a^2-t^2}} - ٨$	$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} - ٧$
$\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2+u^2}} - ١٢$	$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} - ١١$	$\int x\sqrt{4x^2-25} dx - ١٠$

$\int \frac{x dx}{\sqrt{9x^2 - 4}} - ١٥$	$\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2} dx - ١٤$	$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{b^2 + u^2}} - ١٣$
$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta^2 + a^2}} - ١٨$	$\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2 - 4}} - ١٧$	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9x^2 - 4}} - ١٦$
$\int \frac{x dx}{6 + x^2} - ٢١$	$\int \frac{dx}{5 + x^2} - ٢٠$	$\int_0^c \sqrt{c^2 + x^2} dx - ١٩$
$\int_0^a \frac{y^2}{\sqrt{a^2 - y^2}} dy - ٢٤$	$\int \frac{dx}{a^2 + (x + b)^2} - ٢٣$	$\int \frac{du}{\sqrt{4 - (u + 2)^2}} - ٢٢$
$\int_2^4 \sqrt{4x^2 - 9} dx - ٢٧$	$\int \sqrt{x^2 - 5} dx - ٢٦$	$\int \frac{dx}{16x^2 - 1} - ٢٥$
$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx - ٣٠$	$\int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^2} dx - ٢٩$	$\int x^2 \sqrt{c^2 - x^2} dx - ٢٨$
$\int y^2 \sqrt{y^2 + a^2} dy - ٣٣$	$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - b^2}} dx - ٣٢$	$\int_{a\sqrt{3/2}}^a \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{z^2} dz - ٣١$
$\int_4^5 \frac{dx}{(x^2 - 9)^{3/2}} - ٣٦$	$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} - ٣٥$	$\int \frac{\sqrt{36 - t^2}}{t} dt - ٣٤$
$\int \frac{3e^y}{\sqrt{1 - e^{2y}}} dy - ٣٩$	$\int \frac{dv}{(v^2 + 16)^2} - ٣٨$	$\int \frac{dt}{(t^2 - 9)^2} - ٣٧$

كل من التكاملات الآتية قد أوجدناه من قبل . أوجدته ثانية باستخدام تعويض مثلثي .

$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}, a \neq 0 - ٤٢$	$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} - ٤١$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, a > 0 - ٤٠$
--	---	--

أوجد التكاملات الآتية . يمكن استخدام جدول للتكاملات لايجاد التكامل الذي يتبع من التعويض المثلثي .

$\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}} - ٤٥$	$\int \frac{2dx}{\sqrt{x^2 - 8x + 25}} - ٤٤$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 8}} - ٤٣$
$\int \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx - ٤٨$	$\int \frac{2dy}{\sqrt{-4y^2 + 20y + 24}} - ٤٧$	$\int \frac{3dz}{\sqrt{z^2 - 4z + 13}} - ٤٦$
$\int \sqrt{3 - 2y - y^2} dy - ٥١$	$\int \sqrt{4x^2 - 4x + 26} dx - ٥٠$	$\int \sqrt{2z - z^2} dz - ٤٩$
$\int \frac{3x - 2}{\sqrt{16 - x^2}} dx - ٥٤$	$\int \frac{x + 5}{\sqrt{x^2 + 4}} dx - ٥٣$	$\int \frac{2t + 5}{5 + 2t + t^2} dt - ٥٢$
$\int \frac{3u - 1}{\sqrt{4u^2 - 4u + 5}} du - ٥٧$	$\int \frac{2(x - 2)}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} dx - ٥٦$	$\int \frac{y dy}{\sqrt{y^2 + 4y + 5}} - ٥٥$
$\int \frac{8z - 5}{\sqrt{-4z^2 + 12z - 5}} dz - ٦٠$	$\int \frac{x + 6}{\sqrt{4x - x^2}} dx - ٥٩$	$\int \frac{w dw}{\sqrt{9 + 8w - w^2}} - ٥٨$
	$\int \frac{y dy}{(y^2 - 4y - 5)^2} - ٦٢$	$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^2} - ٦١$

أوجد الـمـلـات الآتية بدون استخدام جدول للتكاملات :

$$63 - \int x \sin^{-1} x \, dx \quad 64 - \int \sec^{-1} x \, dx \quad 65 - \int \frac{\sin^{-1} x}{x^2} \, dx$$

أوجد طول المنحنيات الآتية

$$66 - y = x^2; 0 \leq x \leq a \quad 67 - x = u \cos u, y = u \sin u; 0 \leq u \leq \pi/2$$

68 - قوس القطع المكافئ $y = 3x - x^2$ فوق المحور السيني 69 - $y = \ln x; 1 \leq x \leq 2$
أوجد طولى المنحنيين الآتين المعطيين بالاحداثيات القطبية :

$$70 - r = a\theta; 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 71 - r = 1/\theta; \pi/2 \leq \theta \leq \pi$$

72 - (أ) إذا كانت $v = ds/dt$ فثبت أن $dv/ds = v \, dv/dt = d^2s/dt^2$ (ب) باستخدام (أ) حل
المعادلة التفاضلية التى تحكم الحركة التوافقية البسيطة

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -ks, \quad k > 0$$

(المعادلة (3) ، بيند 6 - 4) . احصل على الحل المعطى فى (4) ، بيند 6 - 4 .

١٠ - ٥

تكامـل الدوال الكسرية

نتذكر أن الدالة الكسرية هى دالة معرفة بخارج قسمة $f(x)/g(x)$ لكثيرتى حدود معاملتهما حقيقية ، مثلاً

$$\frac{x^2 + 3x + 1}{5x^3 - 4x^2 + x - 2}$$

فى هذا البند سنتعلم كيف نوجد تكامل دالة كسرية . أولاً يجب اثبات تمهيدية .

١٠ - ٣ تمهيدية . لتكن $h(x)$ و $g(x)$ و $f(x)$ كثيرات حدود . إذا كان

$$(1) \quad \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{g(x)}{h(x)}$$

لجميع قيم x ما عدا تلك التى تجعل $h(x) = 0$ ، فإن $f(x) = g(x)$ لجميع قيم x .

البرهان . واضح تماماً أن النتيجة تكون صحيحة لـ x ليست جذراً لـ $h(x)$ إذا يمكن ضرب طرفى (١) فى العدد غير الصفري $h(x)$ لنحصل على

$$(2) \quad f(x) = g(x)$$

لتكن r أى جذر لـ $h(x)$. (٢) تكون صحيحة لجميع x القريبة قريباً كافياً من ، لكن لا تساوى ، r وهذا يتضمن أن

$$\lim_{x \rightarrow r} f(x) = \lim_{x \rightarrow r} g(x)$$

ومن ثم $f(r) = g(r)$ لأن f و g متصلتان اذن $f(x) = g(x)$ لجميع x .

في الجبر الأولى تعلمنا كيف نعبر عن حاصل جمع كسور ككسر واحد بإيجاد مقام مشترك .
فمثلاً

$$(٣) \quad \frac{3}{x-1} + \frac{5}{x-4} = \frac{3(x-4) + 5(x-1)}{(x-1)(x-4)} = \frac{8x-17}{(x-1)(x-4)}$$

نفرض أننا نريد إيجاد

$$\int \frac{8x-17}{(x-1)(x-4)} dx$$

ولا نعلم المعادلة (٣) . إذا أمكننا عكس العملية والتعبير عن الكسر $\frac{8x-17}{(x-1)(x-4)}$ كحاصل الجمع $\frac{3}{x-1} + \frac{5}{x-4}$ لأمكننا إيجاد التكامل بسهولة . لاجراء ذلك ، نحاول إيجاد الثابتين A و B بحيث أن

$$\frac{8x-17}{(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4}$$

إذا كان يوجد مثل هذين العددين A و B فإن

$$\frac{8x-17}{(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4) + B(x-1)}{(x-1)(x-4)}$$

لجميع $x \neq 1, 4$. واذن بالتمهيدية ، يكون

$$8x-17 = A(x-4) + B(x-1)$$

لجميع x . بما أن هذه المعادلة صحيحة لجميع x ، فهي صحيحة عند $x = 4$ ، التي تعطى $15 = B(3)$ ومنها $B = 5$. بتعويض $x = 1$ ، يكون لدينا $-9 = A(-3)$ ومنها $A = 3$. بعد أن عبرنا عن الدالة المكاملة كحاصل جمع كسرين يمكن تكاملهما ، يمكننا إيجاد

$$\text{التكامل} \quad \int \frac{8x-17}{(x-1)(x-4)} dx:$$

$$\begin{aligned} \int \frac{8x-17}{(x-1)(x-4)} dx &= \int \frac{3}{x-1} dx + \int \frac{5}{x-4} dx \\ &= 3 \ln |x-1| + 5 \ln |x-4| + C. \end{aligned}$$

الكسران $3/(x-1)$ و $5/(x-4)$ بسميان الكسرين الجزئيين للكسر : $(8x-17)/[(x-1)(x-4)]$. الطريقة التي أوجدنا بها قيمتي A و B تسمى طريقة المعاملات غير المعينة ، A و B هما المعاملان غير المعينين .

نعود الآن الى المسألة الأعم لإيجاد التكامل لأي دالة كسرية $f(x)/g(x)$. سنحاول أن نعبر عن الكسر كحاصل جمع كسور أبسط يمكن أن تكامل . شرطان لازمان للنجاح . الأول هو أن الكسر يجب أن يكون كسراً بالمعنى الصحيح ، أي أن درجة البسط يجب أن تكون أقل من درجة المقام ،

والثاني هو أننا يجب أن نستطيع تحليل المقام كحاصل ضرب عوامل خطية وعوامل من الدرجة الثانية لا تقبل التحليل ومعاملاتها جميعاً حقيقية [نقصد معامل من الدرجة الثانية معاملاته حقيقية ولا يقبل التحليل أنه لا يمكن تحليله كحاصل ضرب عاملين من الدرجة الأولى بمعاملاتهما حقيقية . كثيرة الحدود $x^2 + x + 1$ لا تقبل التحليل $x^2 + 2x - 2$ ليست كذلك لأن

$$x^2 + 2x - 2 = (x + 1 + \sqrt{3})(x + 1 - \sqrt{3})$$

من الممكن اثبات أن مثل هذه العوامل التي من الدرجة الأولى والثانية تكون دائماً موجودة ، لكن من الناحية العملية قد يكون إيجادها صعباً أو مستحيلاً . الشرط الأول لا يمثل صعوبة حقيقية . إذا كانت درجة البسط أكبر من أو تساوى درجة المقام فإنه يمكننا بإجراء قسمة مطولة ، التعبير عن الكسر ككثيرة حدود مضافاً إليها كسر درجة بسطه أقل من درجة المقام . فمثلاً

$$\frac{x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 7}{x^3 - 2x + 4} = x^2 + 2x + 3 + \frac{2x^2 - 5}{x^3 - 2x + 4}$$

وبالتالى التكامل فى هذه الحالة يمكن اختزاله الى تكامل لكثيرة حدود مضافاً اليه تكامل لكسر بالمعنى الصحيح واذن نحتاج فقط لدراسة مسألة إيجاد $\int [f(x)/g(x)] dx$ ، حيث درجة $f(x)$ أقل من درجة $g(x)$.

نفرض أن المقام $g(x)$ قد حللناه الى حاصل ضرب عوامل خطية وعوامل من الدرجة الثانية لا تقبل التحليل ومعاملات جميعها حقيقية . جمع عوامل $g(x)$ المتشابهة وعبر عن حاصل ضربها كقوة ، لتصبح $g(x)$ على الصورة .

$$(4) \quad g(x) = (a_1x + b_1)^{r_1}(a_2x + b_2)^{r_2} \cdots (a_px + b_p)^{r_p} \times \\ (c_1x^2 + h_1x + k_1)^{s_1}(c_2x^2 + h_2x + k_2)^{s_2} \cdots (c_lx^2 + h_lx + k_l)^{s_l}$$

حيث لا يوجد عاملان فى الأقواس متشابهان وحيث كل عامل من الدرجة الثانية لا يقبل التحليل . فمثلاً ، اذا كان تحليل $g(x)$ هو

$$g(x) = (x - 3)(5x^2 + 3x + 1)(2x + 5) \times \\ (x - 3)(5x^2 + 3x + 1)(5x^2 + 3x + 1)$$

فانه بعد تجميع العوامل المتشابهة ، يكون

$$g(x) = (x - 3)^2(2x + 5)(5x^2 + 3x + 1)^3$$

الكسر $f(x)/g(x)$ يعبر عنه الآن كحاصل جمع كسور على الصورة

$$\frac{Cx + D}{(cx^2 + hx + k)^m} \quad \text{و} \quad \frac{A}{(ax + b)^n}$$

كما يلي . هذه تسمى الكسور الجزئية لـ $f(x) / g(x)$ ويمكن اجراء تكاملها . الكسور الجزئية تكون مجموعات ، كل مجموعة تناظر واحداً من العوامل التي في الأقواس في (٤) . العامل الخطي $a_1x + b_1$ في (٤) ، يناظره حاصل الجمع ، أى المجموعة ،

$$\frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \dots + \frac{A_{r_1}}{(a_1x + b_1)^{r_1}}$$

حيث A_1, A_2, \dots, A_{r_1} ثوابت ستعين فيما بعد . لاحظ أن عدد الحدود في حاصل الجمع هذا يساوى الاس على $a_1x + b_1$ في (٤) . مناظراً للعامل الخطي $a_2x + b_2$ ، كون حاصل آخر

$$\frac{B_1}{a_2x + b_2} + \frac{B_2}{(a_2x + b_2)^2} + \dots + \frac{B_{r_2}}{(a_2x + b_2)^{r_2}}$$

حيث B_1, B_2, \dots, B_{r_2} ثوابت . كون حواصل جمع مماثلة لكل من العوامل الخطية المختلفة لـ $g(x)$ والتي عددها p . مناظراً للعامل من الدرجة الثانية الذى لا يقبل التحليل $c_1x^2 + h_1x + k_1$ في (٤) ، كون حاصل الجمع ، أو المجموعة

$$\frac{C_1x + D_1}{c_1x^2 + h_1x + k_1} + \frac{C_2x + D_2}{(c_1x^2 + h_1x + k_1)^2} + \dots + \frac{C_{s_1}x + D_{s_1}}{(c_1x^2 + h_1x + k_1)^{s_1}}$$

حيث $C_1, D_1, C_2, D_2, \dots, C_{s_1}, D_{s_1}$ ثوابت . مناظراً للعامل من الدرجة الثانية الذى لا يقبل التحليل $c_2x^2 + h_2x + k_2$ ، كون حاصل جمع آخر

$$\frac{E_1x + F_1}{c_2x^2 + h_2x + k_2} + \frac{E_2x + F_2}{(c_2x^2 + h_2x + k_2)^2} + \dots + \frac{E_{s_2}x + F_{s_2}}{(c_2x^2 + h_2x + k_2)^{s_2}}$$

كون حواصل جمع مماثلة لكل من العوامل من الدرجة الثانية التى لا تقبل التحليل لـ $g(x)$ والتي عددها t . الآن نضع $f(x) / g(x)$ تساوى حاصل جمع هذه المجموعات تنشأ عن العوامل الخطية والعوامل من الدرجة الثانية . فمثلاً ، اذا كانت

$$(٥) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^5 + 7x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 10x + 1}{(x-3)^2(2x+5)(5x^2+3x+1)^3}$$

فان $s_1 = 3$ و $r_2 = 1$ و $r_1 = 2$. يناظر العامل الخطي $x - 3$ حاصل الجمع

$$\frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{(x-3)^2}$$

يناضر العامل الخطي $2x + 5$ الحد الوحيد

$$(٦) \quad \frac{B_1}{2x+5}$$

يناضر العامل من الدرجة الثانية الذى لا يقبل التحليل $5x^2 + 3x + 1$ ، حاصل الجمع

$$(٧) \quad \frac{C_1x + D_1}{5x^2 + 3x + 1} + \frac{C_2x + D_2}{(5x^2 + 3x + 1)^2} + \frac{C_3x + D_3}{(5x^2 + 3x + 1)^3}$$

الآن نضع $f(x) / g(x)$ يساوى حاصل جمع (٥) و (٦) و (٧) ، أى أن

$$(٨) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{(x-3)^2} + \frac{B_1}{2x+5} + \frac{C_1x+D_1}{5x^2+3x+1} \\ + \frac{C_2x+D_2}{(5x^2+3x+1)^2} + \frac{C_3x+D_3}{(5x^2+3x+1)^3}$$

كمثال آخر ، اذا كانت

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5x}{(4x-1)^4}$$

فان $r_1 = 4$ ونضع

$$(٩) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{4x-1} + \frac{A_2}{(4x-1)^2} + \frac{A_3}{(4x-1)^3} + \frac{A_4}{(4x-1)^4}$$

فى الأمثلة القادمة سنرى كيف نعين الثوابت ، D_i و C_i و B_i و A_i فى (٨) و (٩) بحيث أن هذه المعادلات تكون صحيحة . يمكن إثبات أن فى التعبير عن أى دالة كسرية بالمعنى الصحيح كحاصل جمع كسور جزئية هذه الثوابت تكون وحيدة .

$$\text{مثال ١ . أوجد } \int \frac{6x^3 - 11x^2 + 5x - 4}{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x} dx$$

نلاحظ أن الدالة المكاملة هى كسر بالمعنى الصحيح ونشرع فى تحليل المقام الى حاصل ضرب عوامل خطية وعوامل من الدرجة الثانية لا تقبل التحليل :

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x = x(x-2)(x^2+1)$$

الآن نكتب الدالة المكاملة كحاصل جمع كسور جزئية . وفقاً لدراستنا أعلاه ، يمكن التعبير عنها فى الصورة

$$(١٠) \quad \frac{6x^3 - 11x^2 + 5x - 4}{x(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

لثوابت ما D و C و B و A . نوجد الثوابت بطريقة المعاملات غير المعينة . بجمع الكسور على اليمين ، يكون لدينا

$$\frac{6x^3 - 11x^2 + 5x - 4}{x(x-2)(x^2+1)}$$

$$= \frac{A(x-2)(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Cx+D)x(x-2)}{x(x-2)(x^2+1)}$$

لجميع $x \neq 0, 2$. واذن

$$(١١) \quad 6x^3 - 11x^2 + 5x - 4 = A(x-2)(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Cx+D)x(x-2)$$

لجميع x ، بالتمهيدية ١٠-٣ . اذا عوضنا $x=1$ فى هذه المعادلة ، نرى أن D و C و B و A يجب أن تكون أعداداً بحيث أن

$$(١٢) \quad -4 = -2A + 2B - C - D$$

بالمثل ، بتعويض $x = -1$ ، يكون

$$(13) \quad -26 = -6A - 2B - 3C + 3D$$

غرضنا هو الحصول بهذه الكيفية على أربع معادلات يمكن حلها آنياً لإيجاد A و B و C و D .
يمكننا تعويض أى أعداد نريدها لـ x فى (١١) . بوجه خاص ، معادلتان بسيطتان نحصل عليهما
بتعويض $x = 0$ و $x = 2$:

$$10 = 10B, \quad -4 = -2A$$

من هاتين المعادلتين الأخيرتين ، $A = 2$ و $B = 1$ ، والمعادلتان (١٢) و (١٣) تختزلان الى

$$C + D = 2, \quad C - D = 4$$

بحل هاتين المعادلتين آنياً ، نجد أن $D = -1$ و $C = 3$. لقد أوجدنا D و C و B و A ، والتكامل
(١٠) هو

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^3 - 11x^2 + 5x - 4}{x(x-2)(x^2+1)} dx &= \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{3x-1}{x^2+1} dx \\ &= 2 \ln |x| + \ln |x-2| \\ &\quad + 3 \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= 2 \ln |x| + \ln |x-2| \\ &\quad + \frac{3}{2} \ln |x^2+1| - \tan^{-1} x + C' \\ &= \ln |x^2(x-2)(x^2+1)^{3/2}| - \tan^{-1} x + C'. \end{aligned}$$

مثال ٢ . أوجد $\int \frac{9x^4 + 48x^3 + 37x^2 - 20x + 3}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2} dx$

درجة البسط للدالة المكاملة ليست أقل من درجة المقام . باجراء عملية قسمة مطولة يمكننا كتابة
الدالة المكاملة ككثيرة حدود مضافاً إليها كسر بالمعنى الصحيح

$$\frac{9x^4 + 48x^3 + 37x^2 - 20x + 3}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2} = x + 4 + \frac{22x - 5}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2}$$

ومن ثم

$$(14) \quad \int \frac{9x^4 + 48x^3 + 37x^2 - 20x + 3}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2} dx = \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{22x - 5}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2} dx.$$

المقام فى التكامل الأخير يتحلل الى

$$9x^3 + 12x^2 - 11x + 2 = (x+2)(3x-1)^2$$

لاحظ أن $3x - 1$ عامل مكرر . الدالة المكاملة في التكامل الأخير يمكن التعبير عنها كحاصل جمع كسور جزئية على الصورة

$$(15) \quad \frac{22x - 5}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2} = \frac{22x - 5}{(x + 2)(3x - 1)^2}$$

$$= \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{3x - 1} + \frac{C}{(3x - 1)^2}$$

لايجاد C و B و A ، نجمع الكسور على اليمين

$$(16) \quad \frac{22x - 5}{(x + 2)(3x - 1)^2} = \frac{A(3x - 1)^2 + B(x + 2)(3x - 1) + C(x + 2)}{(x + 2)(3x - 1)^2}$$

واذن

$$22x - 5 = A(3x - 1)^2 + B(x + 2)(3x - 1) + C(x + 2)$$

لجميع x . سنحتاج الى ثلاث معادلات لكي نوجد C و B و A . وبتعويض $x = 0$ و $x = -2$ و $x = \frac{1}{3}$ ، نحصل على

$$\frac{7}{3} = \frac{7}{3}C, \quad -49 = 49A, \quad -5 = A - 2B + 2C$$

ومنها $B = 3$ و $A = -1$ و $C = 1$ ، ويكون من (15)

$$\int \frac{22x - 5}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2} dx = \int \frac{-1}{x + 2} dx + \int \frac{3}{3x - 1} dx + \int \frac{1}{(3x - 1)^2} dx$$

$$= -\ln |x + 2| + \ln |3x - 1| - \frac{1}{3(3x - 1)} + C'$$

$$= \ln \left| \frac{3x - 1}{x + 2} \right| - \frac{1}{3(3x - 1)} + C'$$

بتعويض ذلك عن التكامل بالطرف الأيمن من المعادلة (14) يكون

$$\int \frac{9x^4 + 48x^3 + 37x^2 - 20x + 3}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{3x - 1}{x + 2} \right| - \frac{1}{3(3x - 1)} + C'$$

عند إضافة الكسور الجزئية ، كما في الخطوة (16) ، يجب التأكد أن المقام المشترك هو نفسه مقام الكسر بالطرف الأيسر . والا لا يمكننا أن ندعى أن بسطى الكسرين متساويان . فمثلا ، اذا كتبنا

$$\frac{x^2 - 2}{x^2(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x + 1}$$

فصحيح أن

$$\frac{x^2 - 2}{x^2(x + 1)} = \frac{Ax^2(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx^3}{x^3(x + 1)}$$

لكن $x^2 - 2$ لا تساوى بسط الكسر على اليمين . هذه الصعوبة يمكن تجنبها باستخدام المقام المشترك البسيط للكسور الجزئية .

إذا أمكن إيجاد عوامل المقام ، فتكامل أى دالة كسرية بالمعنى الصحيح يمكن التعبير عنه بطريقة الكسور الجزئية كحاصل جمع تكاملات على الصورة

$$\int \frac{Cx + D}{(cx^2 + hx + k)^m} dx \quad \text{و} \quad \int \frac{A}{(ax + b)^n} dx$$

حيث m و n عددان صحيحان موجبان وحيث $cx^2 + hx + k$ لا تقبل التحليل . التكامل الأول يمكن إيجاده بسهولة ، لقد أجرينا تكاملات كثيرة مثله . باكمال المربع على $cx^2 + hx + k$ واجراء تغيير للمتغير ، يمكن وضع التكامل الثانى على الصورة

$$\begin{aligned} \int \frac{Cx + D}{(cx^2 + hx + k)^m} dx &= \int \frac{a'u + b'}{(u^2 + q)^m} du \\ &= a' \int \frac{u}{(u^2 + q)^m} du + b' \int \frac{du}{(u^2 + q)^m} \end{aligned}$$

حيث $q > 0$ لأن $cx^2 + hx + k$ لا تقبل التحليل . التكامل الأول على اليمين سهل . لايجاد التكامل الثانى ، نجرى التعويض $u = \sqrt{q} \tan \theta$. فيكون

$$\int \frac{du}{(u^2 + q)^m} = \int \frac{\sqrt{q} \sec^2 \theta}{q^m \sec^{2m} \theta} d\theta = q^{1/2-m} \int \cos^{2m-2} \theta d\theta$$

التكامل الأخير يمكن ايجاده بصيغة الاختزال رقم ٧٢ فى التذييل (أ) . واذن التكامل لدالة كسرية يمكن ايجاده عندما يمكن ايجاد عوامل المقام .

مسائل

أوجد التكاملات الآتية بدون استخدام جدول للتكاملات :

$$1 - \int \frac{dx}{x(x+1)} \quad - \quad 2 \int \frac{x-1}{x(x+1)} dx \quad - \quad 3 \int \frac{x^2}{x(x+1)} dx$$

$$4 - \int \frac{dx}{x^2-9} \quad - \quad 5 \int \frac{x}{x^2-9} dx \quad - \quad 6 \int \frac{dx}{x^2-5}$$

$$7 - \int \frac{t+1}{t^2-t} dt \quad - \quad 8 \int \frac{x dx}{x^2+4x-5} \quad - \quad 9 \int \frac{x^3+1}{x^2-4x+3} dx$$

$$10 - \int \frac{12u^2+23u+2}{3-7u-6u^2} du \quad - \quad 11 \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}, a \neq b \quad - \quad 12 \int \frac{z-1}{(z+1)(2z-1)z} dz$$

$$13 - \int \frac{y^2+2}{y^3+y^2-2y} dy \quad - \quad 14 \int_1^3 \frac{y^3+3y^2+2y^3-y^2+4}{y^3+3y^2+2y} dy \quad - \quad 15 \int \frac{x-4}{x^3+x^2} dx$$

$$\begin{array}{lll}
\int \frac{3t+1}{4t^2-4t+1} dt & - ١٨ & \int \frac{z^2}{1+z^2} dz & - ١٧ & \int \frac{dx}{x(x+1)^2} & - ١٦ \\
\int \frac{dx}{x^2+4x-3} & - ٢١ & \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} & - ٢٠ & \int \frac{dx}{x(x^2+x+2)} & - ١٩ \\
\int \frac{x^4+5}{(x+1)(x^2+1)} dx & - ٢٤ & \int_1^{1/3} \frac{5x^2+7}{x^4+x^2} dx & - ٢٣ & \int \frac{dz}{z^3+z^2+z} & - ٢٢ \\
\int_0^1 \frac{2u}{(u^2+1)(u+1)^2} du & - ٢٧ & \int \frac{3\theta^2-1}{(\theta+2)^3} d\theta & - ٢٦ & \int \frac{dx}{1-x^4} & - ٢٥ \\
\int \frac{4}{y^4-1} dy & - ٣٠ & \int \frac{4x^3+13x^2+14x+3}{(x+1)^4} dx & - ٢٩ & \int \frac{z^3+1}{(4z^2-1)^2} dz & - ٢٨ \\
\int \frac{z^3+1}{(4z^2+1)^2} dz & - ٣٣ & \int \frac{x^3}{(x^2+7)^2} dx & - ٣٢ & \int \frac{t^4}{(t^2+1)^2} dt & - ٣١ \\
\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} & - ٣٥ & \int \frac{2x^3+x^2-2x+7}{x^4+8x^2+16} dx & & & - ٣٤ \\
\int_0^1 \frac{2u^2+u+3}{u^3+u^2+u+1} du & - ٣٧ & \int \frac{2x^5+2x^4+16x^3+16x^2+31x+32}{(x^2+4)^4} dx & & & - ٣٦ \\
\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)^2}, a \neq b & - ٤٠ & \int \frac{dx}{x^4+1} & - ٣٩ & \int \frac{x^3-1}{x^3+1} dx & - ٣٨ \\
\int \frac{x dx}{(x-a)^2(x-b)^2}, a \neq b & - ٤٢ & \int \frac{dx}{(x-a)^2(x-b)^2}, a \neq b & & & - ٤١
\end{array}$$

٤٣ - فى البند ١٠-١ أوجدنا $\int dx / (x^2 - a^2), a^2 \neq 0$ ، بكتابة

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{-1}{x+a} + \frac{1}{x-a} \right)$$

وضح كيف فى امكاننا الحصول على هذا التحليل للكسر $1/(x^2 - a^2)$ كحاصل جمع كسور جزئية .

٤٤ - أوجد طول المنحنى $y = \ln(1 - x^2), 0 \leq x \leq 1/2$.

٤٥ - فى تفاعل كيميائى معين ، جزئ من مادة يتحد مع جزئ من مادة أخرى ليكونا جزئ من مادة ثالثة . اذا كانت الكميتان الابتدائيتان للمادتين الأولى والثانية هما a و b ، فان الكمية x من المادة الثالثة التى تكون قد تكونت بعد t min تحقق المعادلة التفاضلية :

$dx/dt = k(a-x)(b-x)$ حيث k ثابت موجب . أوجد كمية المادة الثالثة بعد t min اذا كان فى الابتداء $x = 0$.

أوجد التكاملات الآتية بدون استخدام جدول للتكاملات :

$$\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx - ٤٩ \quad \int \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx - ٤٨ \quad \int x^2 \tan^{-1} \frac{x}{2} dx - ٤٧ \quad \int x \tan^{-1} x dx - ٤٦$$

التكامل بتعويضات متنوعة

عدد صغير نسبياً من التكاملات التي تحتوى على جذور يمكن ايجادها بدلالة دوال مألوفة لنا . طريقة تكون أحياناً حجة هي اجراء تعويض يحذف الجذور . لقد أوضحنا كيف نحوى ذلك للتكاملات التي تحتوى على $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ ، ونعطى هنا بعض الأمثلة الأخرى .

مثال ١ . أوجد $\int \frac{dx}{x - x^{4/3}}$

القوة الكسرية يمكن حذفها باجراء التعويض $x = u^3$ ، لأن التكامل عندئذ يصبح

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x - x^{4/3}} &= \int \frac{3u^2 du}{u^3 - u^4} = 3 \int \frac{du}{u(1 - u)} \\ &= 3 \int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1 - u} \right) du = 3(\ln |u| - \ln |1 - u|) + C \\ &= 3 \ln \left| \frac{u}{1 - u} \right| + C = 3 \ln \left| \frac{x^{1/3}}{1 - x^{1/3}} \right| + C. \end{aligned}$$

مثال ٢ . أوجد $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}(4 + \sqrt[3]{x+1})}$

كلا الجذرين يمكن حذفهما بوضع $u^6 = x + 1$. اذ يكون

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}(4 + \sqrt[3]{x+1})} &= \int \frac{6u^5 du}{u^3(4 + u^2)} = 6 \int \frac{u^2}{4 + u^2} du \\ &= 6 \int \left(1 - \frac{4}{4 + u^2} \right) du = 6 \left(u - 2 \tan^{-1} \frac{u}{2} \right) + C \\ &= 6 \left[(x+1)^{1/6} - 2 \tan^{-1} \frac{(x+1)^{1/6}}{2} \right] + C. \end{aligned}$$

التعويض $x = 1/u$ كثيراً ما يكون ناجحاً

مثال ٣ . أوجد $\int \frac{(x - x^3)^{1/3}}{x^4} dx$

نجرى التعويض $x = 1/u$ فنحصل على

$$\begin{aligned} \int \frac{(x - x^3)^{1/3}}{x^4} dx &= \int \frac{(1/u - 1/u^3)^{1/3}}{1/u^4} \left(-\frac{1}{u^2} \right) du = - \int u(u^2 - 1)^{1/3} du \\ &= -\frac{3}{8}(u^2 - 1)^{4/3} + C = -\frac{3}{8} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right)^{4/3} + C. \end{aligned}$$

التعويضات المستخدمة أعلاه لا تغطي بحال من الأحوال جميع الاحتمالات . قواعد قليلة يمكن اعطاؤها ، وعادة الخبرة هي المرشد الوحيد . كثيراً ما يجب اجراء سلسلة من التعويضات . وقد نحاول تعويضات متنوعة الى أن نحصل على تعويض يجعل التكامل أبسط . ثم نبحث عن تعويض آخر يجعله أبسط . أى تكامل يمكن اختزاله الى إحدى الصور التى سبق دراستها يمكن ، بالطبع ، ايجاده . أخيراً ، نشير الى أن تكاملات كثيرة من الصعب معالجتها ولا يمكن ايجادها بدلالة الدوال العادية . أحد هذه التكاملات هو $\int (\sin x) / x \, dx$.

مسائل

أوجد التكاملات الآتية :

$$1 - \int_0^9 \frac{du}{1 + \sqrt{u}} \quad 2 - \int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} dx \quad 3 - \int \frac{\sqrt{z+1} + 2}{\sqrt{z+1} - 2} dz$$

$$4 - \int \frac{t}{(a + bt)^{3/2}} dt, b \neq 0 \quad 5 - \int \frac{y}{(3y + 2)^{2/3}} dy \quad 6 - \int_0^1 \frac{z^2}{1 + z} dz$$

$$7 - \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \quad 8 - \int \sqrt{\frac{a+y}{b+y}} dy, a \neq b \quad 9 - \int_1^3 \frac{x \, dx}{\sqrt{2+6x}}$$

$$10 - \int \tan^{-1} \sqrt{u} \, du \quad 11 - \int \frac{t+1}{t\sqrt{t+2}} dt \quad 12 - \int \frac{dz}{z^{1/2} - z^{1/3}}$$

$$13 - \int \frac{x^{3/2} + x^{1/3}}{2x^{1/4}} dx \quad 14 - \int \frac{ds}{s - s^{2/3}} \quad 15 - \int e^{\sqrt{x}} dx$$

$$16 - \int \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{x} dx \quad 17 - \int \frac{\sqrt{9x^{2/3} + 4}}{x^{1/3}} dx \quad 18 - \int_0^3 \frac{dv}{\sqrt{3v}(4 + \sqrt[3]{3v})}$$

$$19 - \int \frac{dw}{w + 2\sqrt{w} + 2} \quad 20 - \int \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 3x - 4} dx$$

$$21 - \int \frac{dx}{x\sqrt{2+x+x^2}} \quad (\text{ارشاد : ضع } x = \frac{1}{u})$$

$$22 - \int \frac{dy}{y\sqrt{3y^2 - 2y - 1}} \quad (\text{ارشاد : ضع } y = \frac{1}{u})$$

$$23 - \int \frac{dz}{z\sqrt{5z - 6 - z^2}} \quad (\text{ارشاد : ضع } z = \frac{1}{u})$$

$$24 - \int \frac{du}{u^2\sqrt{1+2u+4u^2}} \quad (\text{ارشاد : ضع } u = \frac{1}{z})$$

$$25 - \int \frac{dx}{5 + 3 \cos x} \quad (\text{ارشاد : أثبت أنه إذا كانت } t = \tan \frac{x}{2}, \text{ فإن } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2})$$

$$26 - \int \frac{dx}{5 \sin x + 4} \quad (\text{ارشاد : أثبت أنه إذا كانت } t = \tan \frac{x}{2}, \text{ فإن } \sin x = \frac{2t}{1+t^2})$$

٢٧ - أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = 4x + \sqrt{2x+1}$, $y = x - \sqrt{2x+1}$ و $x=10$ و $x=4$.

٢٨ - أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المساحة تحت المنحنى $y = x + \sqrt{x-1}$ بين 5 و 2، حول المحور السيني.

٢٩ - أوجد طول المنحنى $y = e^x$, $0 \leq x \leq 2$.

مسائل متنوعة :

لاختبار مقدار ما استوعبه القارئ من الطرق التي درست في هذا الفصل وما قبله ، نقدم مجموعة متنوعة من التكمالات .

أوجد التكمالات الآتية بدون استخدام جدرل للتكمالات . جميع الثوابت الحرفية موجبة

$$\int \frac{\cos x}{8 + 11 \sin x} dx \quad - \quad ٣ \quad \int \frac{x}{\sqrt{1-3x^2}} dx \quad - \quad ٢ \quad \int \sin (a + bx) dx \quad - \quad ١$$

$$\int \frac{dv}{\sin^2 2v} \quad - \quad ٦ \quad \int \sec 2\theta \tan 2\theta d\theta \quad - \quad ٥ \quad \int \frac{\sin 3y}{2 + \cos 3y} dy \quad - \quad ٤$$

$$\int \tan \frac{t}{5} dt \quad - \quad ٩ \quad \int x^2 \sec^2 x^3 dx \quad - \quad ٨ \quad \int_0^\pi \alpha \cos \frac{\alpha}{3} d\alpha \quad - \quad ٧$$

$$\int \frac{2-3y}{3+2y-y^2} dy \quad - \quad ١٢ \quad \int \frac{du}{u^2-u} \quad - \quad ١١ \quad \int (\cot \theta - 1)^2 d\theta \quad - \quad ١٠$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad - \quad ١٥ \quad \int \frac{\sin \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}} d\theta \quad - \quad ١٤ \quad \int v \cot^2 v dv \quad - \quad ١٣$$

$$\int \frac{dz}{z \ln 3z} \quad - \quad ١٨ \quad \int \frac{dw}{\sin (w/2)} \quad - \quad ١٧ \quad \int \frac{x^{2/3}}{x+1} dx \quad - \quad ١٦$$

$$\int \frac{b-2x}{b^2-x^2} dx \quad - \quad ٢١ \quad \int \frac{du}{\sin^3 \frac{1}{2}u} \quad - \quad ٢٠ \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}} \quad - \quad ١٩$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx \quad - \quad ٢٤ \quad \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{2u+u^2}} \quad - \quad ٢٣ \quad \int \frac{3z^2-2z-3}{z^3-z^2} dz \quad - \quad ٢٢$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} dx \quad - \quad ٢٧ \quad \int \frac{dx}{x^4+x^2} \quad - \quad ٢٦ \quad \int \frac{\sqrt{6+4 \tan x}}{\cos^2 x} dx \quad - \quad ٢٥$$

$$\int \frac{dt}{(t^2-1)^2} \quad - \quad ٣٠ \quad \int \frac{dx}{1+\cos x} \quad - \quad ٢٩ \quad \int \frac{dx}{x \ln x^2} \quad - \quad ٢٨$$

$$\int \frac{u^3+3u}{(u^2+1)^2} du \quad - \quad ٣٣ \quad \int \frac{5e^x dx}{e^x+e^{-x}} \quad - \quad ٣٢ \quad \int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} \quad - \quad ٣١$$

$$\int \frac{\sqrt{1+\alpha} + \sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1+\alpha} - \sqrt{1-\alpha}} d\alpha \quad - \quad ٣٦ \quad \int \frac{dz}{\sqrt{2+9z+9z^2}} \quad - \quad ٣٥ \quad \int_0^2 \frac{y^2 dy}{(4y^2+9)^{3/2}} \quad - \quad ٣٤$$

$\int e^{-\cos t} \sin t \, dt$	- ३९	$\int x e^x \cos x \, dx$	- ३८	$\int \frac{dy}{1-4e^y}$	- ३७
$\int \frac{x}{x^4-a^4} \, dx$	- १७	$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$	- ११	$\int \frac{6x+13}{6x^2-7x-3} \, dx$	- १०
$\int \frac{x^5}{b^6-x^6} \, dx$	- १०	$\int e^{-\theta} \cos^2 \theta \, d\theta$	- ११	$\int \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y^4} \, dy$	- १३
$\int \frac{x^5}{(1-x)^4} \, dx$	- १८	$\int \sqrt{\frac{x}{3+2x}} \, dx$	- १७	$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$	- १६
$\int \frac{(e^u-e^{-u})^2}{e^u} \, du$	- ०१	$\int \frac{y^5+a^5}{y^3+a^3} \, dy$	- ००	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-1}}$	- १९
$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^6+1}}$	- ०१	$\int \frac{\sin t - \cos t}{1 + \sin t + \cos t} \, dt$	- ०३	$\int (b^2+r^2) \ln(b^2+r^2) \, dr$	- ०२
$\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$	- ०७	$\int \frac{du}{u+\sqrt{u^2+c^2}}$	- ०६	$\int t \sqrt{\frac{2+t^2}{3+t^2}} \, dt$	- ००

الفصل الحادى عشر

تطبيقات التكامل من المعين

١.١١

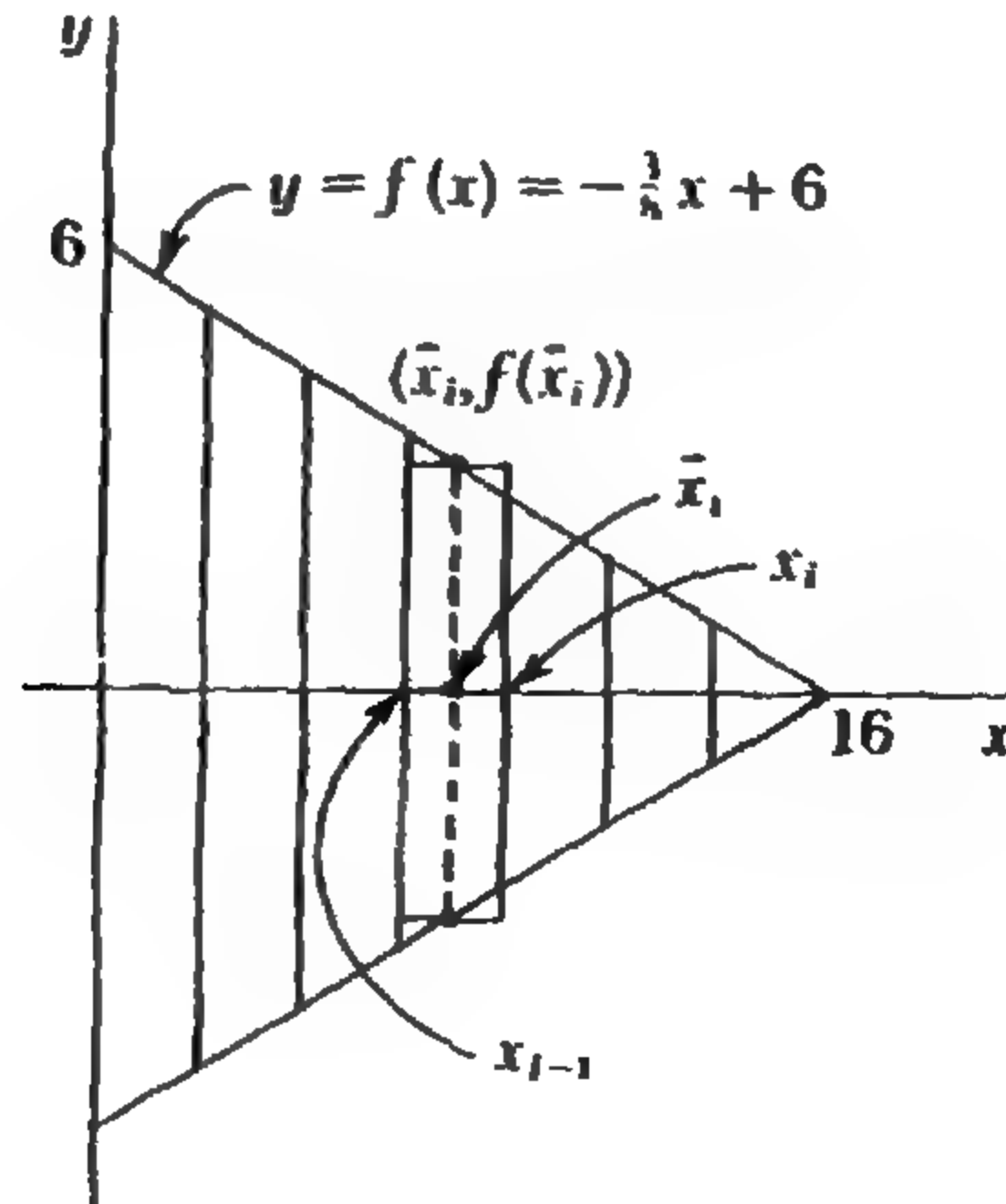
كتلة جسم

الآن وقد أصبح فى امكاننا اجراء تكامل العديد من الدوال ندرس تطبيقات أخرى للتكامل المعين .

كثافة المادة عند نقطة ، بتعبير دارج ، هى كتلة منطقة صغيرة تحتوى النقطة مقسومة على حجم المنطقة . وبلغة أدق ، هى نهاية خارج القسمة هذا عندما يقترب أكبر بعد للمنطقة من الصفر . الكثافة عادة يشار اليها بأنها كتلة وحدة الحجم . فى هذا الفصل سيرمز للكثافة بالرمز ρ . وهى قد تكون ثابتة أو تتغير من نقطة لأخرى . المادة المتجانسة هى التى كثافتها تكون ثابتة . حيثئذ تكون كتلة المادة المتجانسة ρV ، حيث V هو حجم المادة . اذا لم تكن الكثافة ثابتة ، فان ρV لا تعطى الكتلة . سنوضح كيف يمكن ايجاد كتلة مادة غير متجانسة باستخدام التكامل .

مثال ١ . لوحة على شكل مثلث متساوى الساقين سمكها 1 وطول قاعدتها 12 وارتفاعها 16 . كثافتها عند أى نقطة تساوى $1/3$ بعد النقطة عن القاعدة . أوجد كتلة اللوحة .

ادخل نظاماً للاحداثيات كما هو موضح فى الشكل ١.١١ - ١ وقسم المثلث الى شرائط ضيقة



شكل ١.١١

بخطوط عمودية على المحور x . سنقرب الى كتلة كل شريط . الشروط تعين تجزئاً للفترة $[0, 16]$ على المحور x ،

$$[0 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = 16]$$

اختر نقطة \bar{x}_i في الفترة الجزئية رقم i ، وكون المستطيل المبين في الشكل . داخل الشريط الكثافة لا تتغير كثيراً ، وعند أى نقطة هي بالتقريب \bar{x}_i .
كتلة اللوحة المستطيلة ، التي تقرب كتلة الشريط رقم i ، هي بالتقريب حاصل ضرب الكثافة عند \bar{x}_i ومساحة المستطيل والسمك الذي هو I ، أى هي

$$(\frac{1}{3}\bar{x}_i)2f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

حيث $y = f(x)$ هي معادلة الضلع الأعلى للمثلث . حاصل الجمع

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{3}\bar{x}_i f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

هو تقريب لكتلة اللوحة المثلثية . هذا هو حاصل جمع ريمان للدالة $f(x)$. باستخدام تجزئ دقيق دقة كافية ، الكتلة W للوحة يمكن التقريب اليها الى أى درجة نريدها من الدقة بحواصل جمع على الصورة (١) . وبالتالي فان الكتلة تعطى بالضبط بنهاية حواصل الجمع هذه ،

$$W = \lim_{w \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{3}\bar{x}_i f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

حيث w هي معيار التجزئ . هذه النهاية هي التكامل المعين

$$W = \int_0^{16} \frac{1}{3}xf(x) dx$$

لايجاد تعبير صريح للدالة $f(x)$ ، نحتاج الى معادلة الضلع الأعلى للمثلث . هذه المعادلة هي

$$y - 6 = -\frac{1}{4}(x - 0)$$

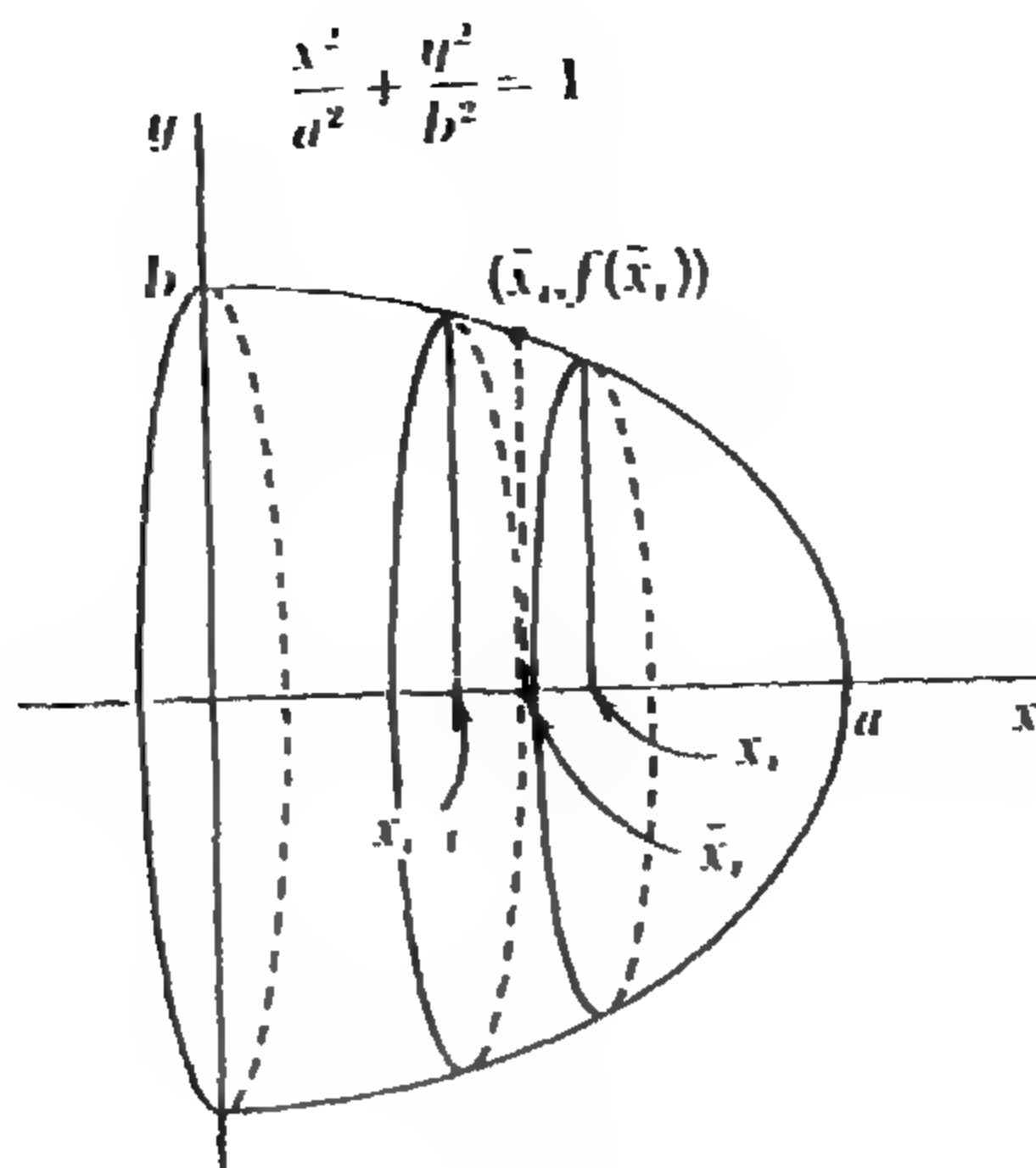
$$y = f(x) = -\frac{1}{4}x + 6.$$

$$W = \int_0^{16} \frac{1}{3}x(-\frac{1}{4}x + 6) dx = \left[-\frac{x^3}{12} + 2x^2\right]_0^{16} = \frac{512}{3}$$

اذن

مثال ٢ . النصف الأيمن للقطع الناقص $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ يدور حول المحور x ، منشئاً جسماً دورانياً . كثافة الجسم عند أى نقطة تتناسب مع مربع بعد النقطة عن المستوى العمودى على المحور x عند نقطة الأصل . أوجد كتلة الجسم .

نقسم الجسم الى أقراص بمستويات عمودية على المحور x . الأقراص تعين تجزئاً للفترة $[0, a]$. القرص (رقم i) موضح في الشكل ١١ - ٢ . الكثافة في القرص رقم i تتغير ، لكن قليلاً ، وتكون بالتقريب $k\bar{x}_i^2$ ، حيث x_i أى نقطة في الفترة الجزئية رقم i وحيث k ثابت التناسب .



شكل ١١-٢

لتكن $f(\bar{x}_i)$ نصف قطر المقطع الدائري عند \bar{x}_i . عندئذ يكون حجم القرص بالتقريب هو :
 $\pi f^2(\bar{x}_i) \Delta \bar{x}_i$ ، وكتلته بالتقريب هي $k\pi \bar{x}_i^2 f^2(\bar{x}_i) \Delta \bar{x}_i$ ، نهاية حاصل جمع كتل الأقراص هي
 التكامل $W = k\pi \int_0^a x^2 f^2(x) dx$ وهي كتلة الجسم .

بما أن

$$f(x) = y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

من معادلة القطع الناقص ، فإن

$$W = k\pi \int_0^a x^2 \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx = \frac{k\pi b^2}{a^2} \left[a^2 \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^a = \frac{2}{15} k\pi a^3 b^2$$

مسائل

- ١ - قضيب AB طوله 12 in ومقطعه دائرة مساحتها 1 in². كثافة القضيب عند أى نقطة تساوى ضعف بعد النقطة عن الطرف A . أوجد كتلة القضيب .
- ٢ - لوحة على شكل نصف قطع ناقص $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, x \geq 0$ وكثافتها عند أى نقطة تتناسب مع بعد النقطة عن المحور y . أوجد كتلة اللوحة .
- ٣ - أوجد كتلة قطعة القطع المكافئ المقطوعة بالوتر البؤرى العمودى إذا كانت (أ) الكثافة عند أى نقطة تساوى بعد النقطة عن محور القطع ، (ب) الكثافة عند أى نقطة تساوى بعد النقطة عن الوتر البؤرى العمودى .
- ٤ - أوجد كتلة نصف الكرة التى كثافتها عند أى نقطة تتناسب مع بعد النقطة عن القاعدة .
- ٥ - مخروط دائرى قام نصف قطره 3 وارتفاعه 8 . كثافته عند أى نقة تساوى مربع البعد عن الرأس لمسقط النقطة على محور المخروط . أوجد كتلة المخروط .

- ٦ - هرم منتظم قاعدته مربعة طول ضلعها a ، وارتفاع الهرم h . كثافته عند نقطة على ارتفاع z وحده من القاعدة هي $h - \frac{3}{2}$. أوجد كتلة الهرم .
- ٧ - أوجد كتلة الكرة التي كثافتها عند أى نقطة تتناسب مع الجذر التربيعى لبعدها عن المركز (ارشاد : حجم القشرة الكروية الرفيعة التي نصف قطرها الداخلى r ونصف قطرها الخارجى $r + h$ هو بالتقريب $4 \pi r^2 h$) .
- ٨ - الكثافة عند أى نقطة على لوحة دائرية سمكها 3 in ونصف قطرها 10 in تتناسب مع مربع بعد النقطة عن المحيط . أوجد كتلة اللوحة .
- ٩ - أوجد كتلة سلك نصف دائرى كثافته عند أى نقطة تساوى ضعف بعدها عن قطر نصف الدائرة . (ارشاد : استخدام الاحداثيات القطبية أو المعادلات البارامترية لنصف الدائرة وقرب الى كتلة جزء صغير من السلك . أنظر النظرية ٩-٢ بيند ٩-٣) .
- ١٠ - سلك على شكل النصف العلوى لقوس القطع المكافئ $y^2 = 4x$ ، أحد طرفيه عند نقطة الأصل والطرف الآخر عند النقطة (4, 4) . كثافته عند أى نقطة تتناسب مع بعد النقطة عن المحور x . أوجد كتلة السلك (أنظر الارشاد فى المسألة ٩) .

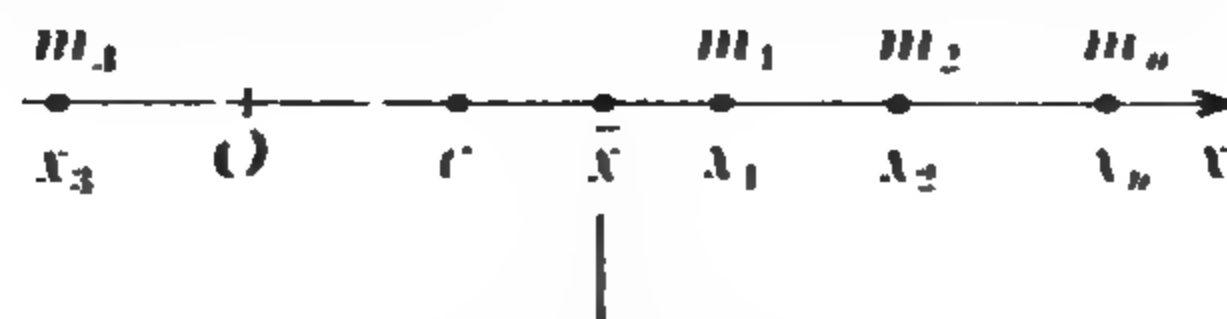
١١-٢

مركز الكتلة لمجموعة محدودة

لتكن c نقطة على خط للاحداثيات (شكل ١١-٣) . ثقل كتلته m_1 موضوع عند النقطة x_1 بسبب قوة دوران ، أو عزم دوران حول c هذه القوة لا تعتمد فقط على الكتلة ولكن أيضاً على بعد الثقل عن c ، نفس الثقل يسبب قوة أكبر كلما زاد بعده عن c . مقياس مفيد لهذه القوة هو حاصل ضرب m_1 والمسافة الموجهة من c الى x_1 ، أى $m_1(x_1 - c)$. هذا يسمى عزم m_1 حول c . اذا وضع ثقل ثان كتلته m_2 عند x_2 فهو يسهم بقوة دوران ، أو عزم ، يساوى $m_2(x_2 - c)$. قوة الدوران الناشئة عن الثقلين هي حاصل الجمع

$$m_1(x_1 - c) + m_2(x_2 - c)$$

بوجه عام ، اذا وضع n من الأثقال كتلتها m_1, m_2, \dots, m_n عند النقط x_1, x_2, \dots, x_n (شكل ١١-٣) ، فان عزم المجموعة (قوة الدوران الكلية) حول c يرمز له بالرمز M_c ويعرف بأنه حاصل



المجموعة تتزن هنا

شكل ١١-٣

جمع عزوم الأثقال ،

$$(1) \quad M_c = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - c) = m_1(x_1 - c) + m_2(x_2 - c) + \dots + m_n(x_n - c)$$

الأثقال على يسار c لها عزوم سالبة وتميل الى احباط تلك التي على يمين c . عزم المجموعة حول نقطة الأصل هو

$$(2) \quad M_0 = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

إذا كان خط الاحداثيات مسنداً عند c ، فانه سيميل الى اليمين أو الى اليسار على حسب كون حاصل جمع عزوم الأثقال التي على يمين c أو التي على يسار c الأكبر في القيمة المطلقة . موضع النقطة c حيث الخط يتزن يجب أن يكون حيث حاصل جمع العزوم يساوى صفراً . هذه النقطة تسمى مركز الكتلة أو مركز الثقل للمجموعة لايجاءها ، يجب اختيار النقطة c في (١) بحيث أن $M_c = 0$. من المعتاد أن نرمز لهذه القيمة لـ c بالرمز \bar{x} ومن ثم نبحت عن \bar{x} بحيث أن

$$\sum_{i=1}^n m_i(x_i - \bar{x}) = 0$$

لكن من (١) و (٢) ،

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i(x_i - \bar{x}) &= \sum_{i=1}^n (m_i x_i - m_i \bar{x}) \\ &= \sum_{i=1}^n m_i x_i - \bar{x} \sum_{i=1}^n m_i = M_0 - \bar{x} W \end{aligned}$$

حيث $W = \sum_{i=1}^n m_i$ هو حاصل جمع كتل الأثقال .

اذن

$$(3) \quad \bar{x} = \frac{M_0}{W}$$

هذا يثبت النظرية الآتية :

١١-١ نظرية . مركز الكتلة لمجموعة أثقال على خط الاحداثيات هو عزم المجموعة حول نقطة الأصل مقسوماً على كتلة المجموعة .

مثال ١ . وضعت أثقال على خط الاحداثيات كما يلي : 5 lb عند 2 ، 2 lb عند 6 ، 7 lb عند 3 ، 6 lb عند 4 — . أوجد عزم المجموعة حول النقطة 3 ومركز كتلة المجموعة .

من (١) ، يكون

$$\begin{aligned} M_3 &= 5(2 - 3) + 2(6 - 3) + 7(3 - 3) + 6(-4 - 3) \\ &= -5 + 6 + 0 - 42 = -41 \end{aligned}$$

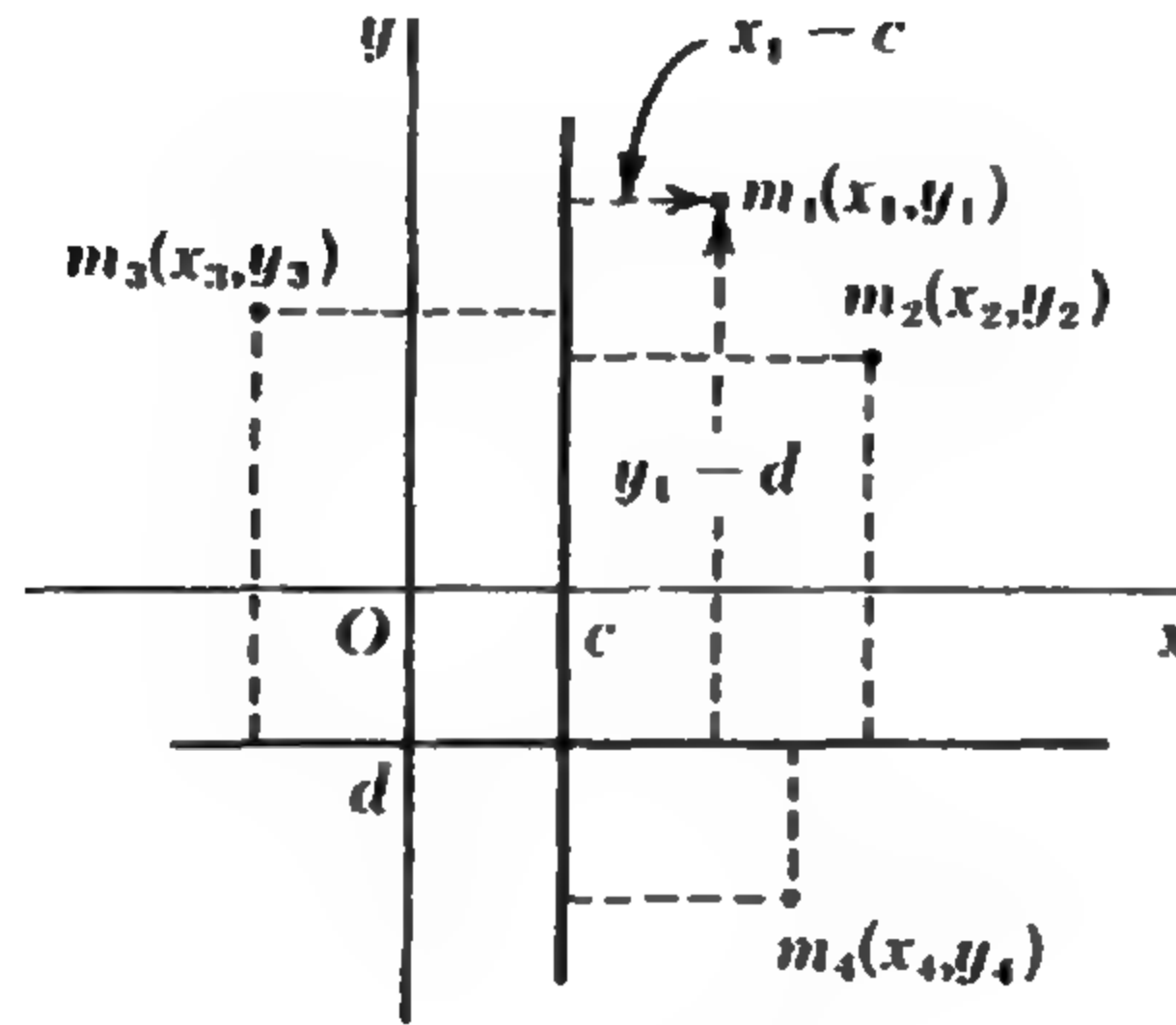
لايجاد مركز الكتلة ، نحتاج ، وفقاً لـ (٣) ، الى العزم حول نقطة الأصل والى حاصل جمع الكتل . بما أن

$$M_0 = 5(2) + 2(6) + 7(3) + 6(-4) = 19$$

$$W = 5 + 2 + 7 + 6 = 20$$

$$\bar{x} = M_0/W = \frac{19}{20}$$

اذا وضع ثقل كتلته m_i عند النقطة (x_i, y_i) فى مستوى الاحداثيات ، فان قوة الدوران الناشئة عنه أو عزمه ، حول الخط المستقيم $x = c$ يعرف بأنه $m_i(x_i - c)$ (شكل ١١ - ٤) ، وهو حاصل



شكل ١١ - ٤

ضرب الكتلة فى المسافة الموجهة للثقل من الخط . العزم حول الخط المستقيم $x = c$ لمجموعة أثقال كتلتها m_1, m_2, \dots, m_n حيث كل m_i تكون عند النقطة (x_i, y_i) يعرف بأنه حاصل جمع العزوم ،

$$(٤) \quad M_{x=c} = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - c)$$

العزم حول المحور y ، يرمز له بـ M_y ونحصل عليه بوضع $c = 0$ ، فهو

$$(٥) \quad M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

بما أن (٤) هى نفسها (١) ، فالخط المستقيم $x = x$ الموازى للمحور y والذى حوله حاصل جمع العزوم يساوى صفراً يعطى بـ (٣) ، أو بما أن M_y الآن تناظر M_0 ، فان

$$(٦) \quad \bar{x} = \frac{M_y}{W}$$

حيث $W = \sum_{i=1}^n m_i$ هى حاصل جمع كتل الأثقال . اذا كان مستوى الاحداثيات أفقياً ووضع حد سكين تحته على هذا الخط ، فان المجموعة ستزن على السكين ، طريقة أخرى لنرى ذلك هى أن نتصور أن الأثقال اسقطت على المحور x . تحريكها موازية للمحور y لا يؤثر على اتزان المستوى . لكن من (٣) \bar{x} هى نقطة الاتزان عندما تكون الأثقال على المحور x . بالمثل ، يمكننا

دراسة العزم حول خط مستقيم $y = d$ مواز للمحور x (شكل ١١ - ٤) . عزم المجموعة حول هذا الخط هو

$$M_{y=d} = \sum_{i=1}^n m_i (y_i - d)$$

والعزم حول المحور x ، ويرمز له بالرمز M_x هو

$$(٧) \quad M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

مجموع العزم سيكون صفراً حول الخط المستقيم $y = \bar{y}$ ، حيث

$$(٨) \quad \bar{y} = \frac{M_x}{W}$$

إذا وضع حرف سكين تحت هذا الخط ، فالمجموعة ستزن فوقه . النقطة (\bar{x}, \bar{y}) حيث خط الاتزان يتقاطعان يجب أن تكون بحيث أن المجموعة سوف تزن على سن قلم رصاص موضوع تحته . هذه النقطة تسمى مركز كتلة أو مركز ثقل المجموعة .

مثال ٢ . وضعت أثقال على مستوى الاحداثيات كما يلي : 4 lb عند (1, 2) ، 3 lb عند (5, -3) ، 1 lb عند (-6, 0) ، 10 lb عند (-2, 1) . أوجد مركز كتلة المجموعة

$$W = \sum_{i=1}^4 m_i = 4 + 3 + 1 + 10 = 18$$

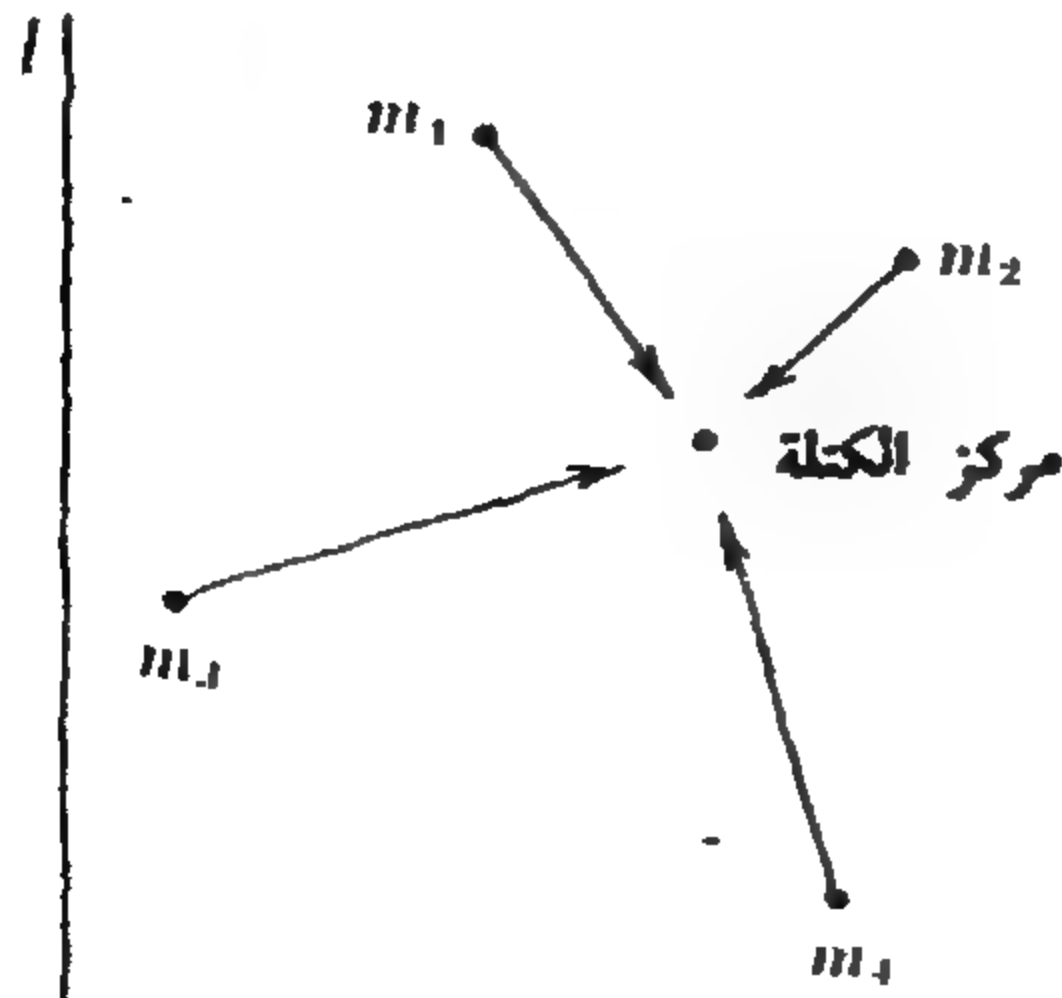
لدينا

$$M_y = \sum_{i=1}^4 m_i x_i = 4(1) + 3(5) + 1(-6) + 10(-2) = -7 \quad \text{من (٥) ، (٧) يكون}$$

$$M_x = \sum_{i=1}^4 m_i y_i = 4(2) + 3(-3) + 1(0) + 10(1) = 9$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{W} = -\frac{7}{18}, \quad \text{و} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{W} = \frac{1}{2} \quad \text{واذن}$$

من المعادلة (٦) ، $M_y = W\bar{x}$. هذا ينص على أن عزم المجموعة حول المحور y هو كتلة المجموعة مضروبة في بعد مركز الكتلة عن المحور y . أو من جهة نظر أخرى ، العزم لا يتغير إذا كانت كتلة المجموعة مركزة عند مركز الكتلة هذا هو مصدر المصطلح مركز الكتلة .



شكل ١١ - ٥

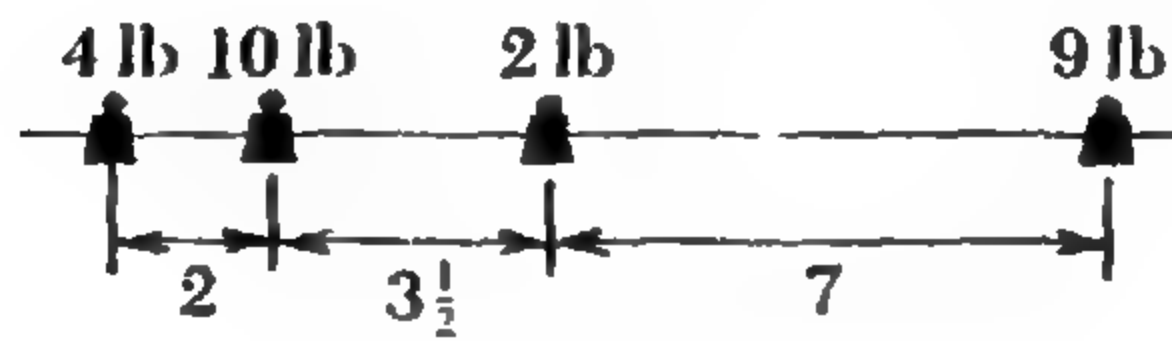
عزم المجموعة حول l لا يتغير إذا نقلت جميع الأثقال إلى مركز الكتلة .

إذا أخذنا أى خط فى المستوى ، فانه بدوران المحورين وانتقالهما الى أن ينطبق المحور لا على الخط فهذا لا يؤثر على موضع مركز الكتلة بالنسبة للأثقال . ومن ثم لدينا النتيجة الأعم الآتية (شكل ١١ - ٥) .

١١ - ٢ نظرية العزم حول خط مستقيم لمجموعة تشتمل على عدد محدود من الأثقال فى مستوى ، لا يتغير اذا نقلت جميع الأثقال الى مركز كتلة المجموعة .
ينتج من هذه النظرية ان كل خط فى المستوى يكون عزم المجموعة حوله يساوى صفراً يجب أن يمر بمركز كتلة المجموعة .

مسائل

- ١ - وضعت أثقال على خط الاحداثيات كما يلى : 2 lb عند 2 - ، 6 lb عند $\frac{3}{2}$ - ، 1 lb عند 1 ، أوجد عزم المجموعة حول 2 وأوجد أيضاً مركز الكتلة .
- ٢ - وضعت أثقال على خط الاحداثيات كما يلى : 1 lb عند 3 ، 10 lb عند 1 - ، 1 lb عند $\frac{3}{2}$ ، 5 lb عند 6 . أوجد عزم المجموعة حول 2 - وأوجد أيضاً مركز الكتلة .
- ٣ - وضعت أثقال على خط الاحداثيات كما يلى : 10 lb عند 3 ، 15 lb عند 1 - ، 6 lb عند 4 ، 8 lb عند 3 - ، 10 lb عند 2 . أوجد عزم المجموعة حول 0 وأوجد أيضاً مركز الكتلة .
- ٤ - وضعت أثقال على خط الاحداثيات كما يلى : 2 kg عند $\frac{3}{2}$ kg - 3 ، 1 - عند 3 kg ، 1 lb عند $\frac{1}{2}$ ، 7 kg عند 2 ، 1 kg عند 5 . أوجد عزم المجموعة حول 3 - وأوجد أيضاً مركز الكتلة .
- ٥ - أوجد مركز كتلة المجموعة التى فى الشكل ١١ - ٦ .



شكل ١١ - ٦

- ٦ - وضعت أثقال على خط الاحداثيات كما يلى : 7 lb عند 5 - ، 2 lb عند 3 ، 9 lb عند 2 .
(أ) أين يوضع ثقل مقداره 3 lb ليكون مركز كتلة المجموعة عند 1 ؟ ، (ب) ما هو الثقل الذى يجب وضعه عند 4 ليكون مركز كتلة المجموعة عند 1 ؟
- ٧ - طفلان كتلتاهما 60 lb و 40 يريدان استعمال مرجيحة طولها 12 ft . (أ) اذا كانت نقطة الارتكاز فى منتصف المرجيحة ويجلس الطفل الأصغر عند أحد طرفيها ، أين يجلس الأكبر لتزن المرجيحة ؟ (ب) اذا كانت نقطة الارتكاز قابلة للحركة ، فأين توضع لتزن المرجيحة بطفل عند كل طرف ؟

- ٨ - وضعت أثقال في مستوى الاحداثيات كما يلي : 2 lb عند (3, 3) ، 6 lb عند (3, -3) ، 4 lb عند (-3, 3) ، 3 lb عند (-3, -3) . أوجد مركز كتلة المجموعة .
- ٩ - وضعت أثقال في مستوى الاحداثيات كما يلي : 3 lb عند (2, 3) ، 1 lb عند (5, -1) ، 4 lb عند (-2, -2) ، 1 lb عند (1, 1) . أوجد مركز كتلة المجموعة .
- ١٠ - وضعت أثقال متساوية على مستوى الاحداثيات عند النقط (a, c) و (0, b) و (0, 0) أوجد مركز كتلة المجموعة .
- ١١ - وضعت أثقال على مستوى الاحداثيات كما يلي : 2 lb عند (0, 4) ، 5 lb عند (-3, -3) ، 8 lb عند (0, -1) ، 11 lb عند (6, 4) ، 4 lb عند (1, -2) . أوجد مركز كتلة المجموعة .
- ١٢ - وضعت أثقال على مستوى الاحداثيات كما يلي : 2 kg عند (2, 6) ، 4 kg عند (2, 4) ، 7 kg عند (2, 1) ، 3 kg عند (2, -2) (أ) أين يوضع ثقل مقداره 10 kg ليكون مركز كتلة المجموعة عند نقطة الأصل ؟ (ب) ما هما الثقلان اللذان يجب وضعهما عند (-4, -6) و (-4, 1) ليكون مركز كتلة المجموعة عند نقطة الأصل ؟
- ١٣ - أثبت أن فئة جميع النقط P في المستوى حيث مجموع مربعات المسافات بين P ونقط معطاة عددها n تكون دائرة مركزها هو مركز كتلة مجموعة أثقال متساوية الكتلة ، موضوع واحد منها عند كل من النقط الـ n .

١١-٣

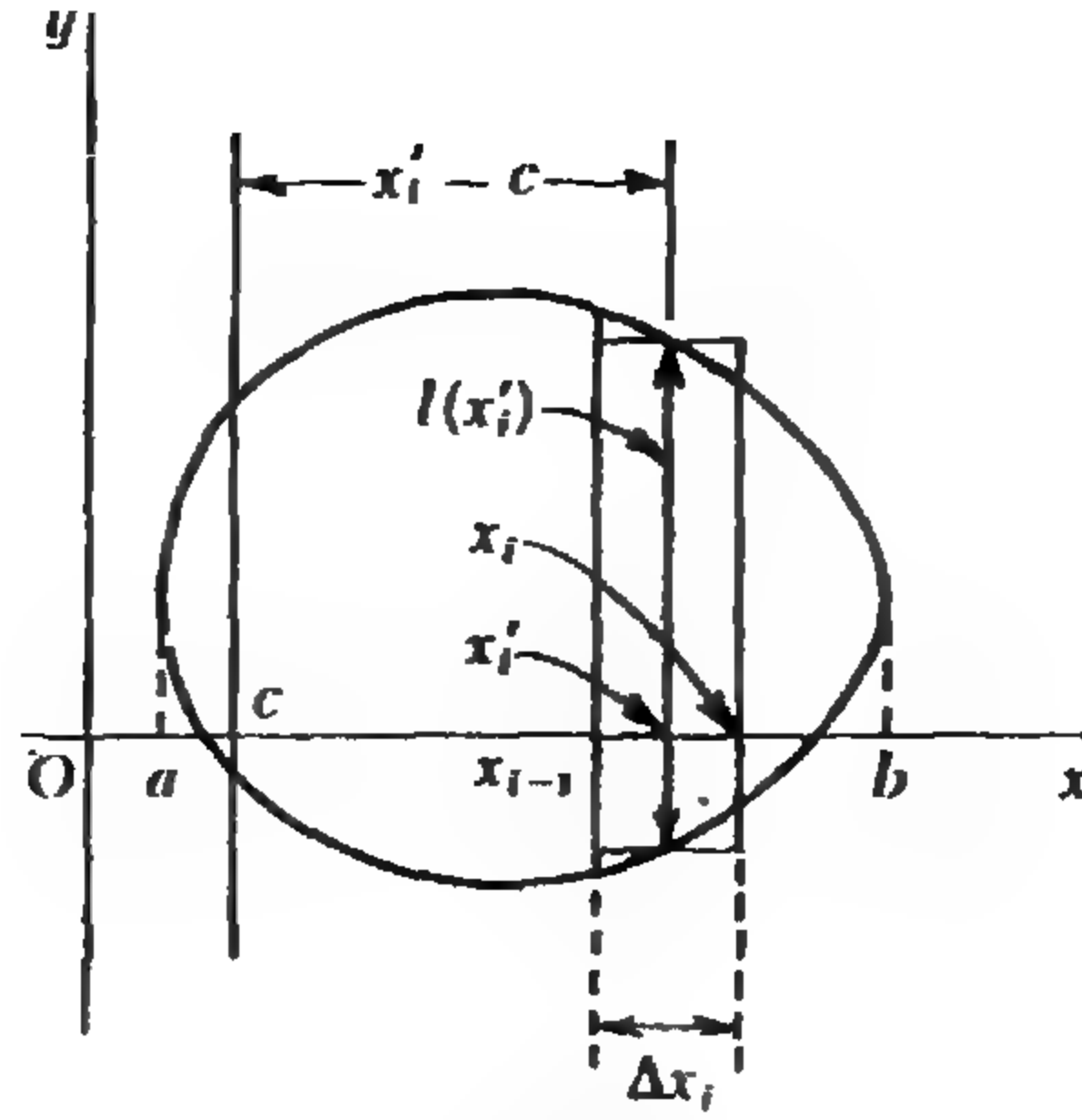
مركز كتلة منطقة مستوية

الدراسات الفيزيائية تشير الى أن أى منطقة مستوية يكون لها نقطة إتران . سنوضح كيف يمكن استخدام التكامل لإيجادها . من المناسب أن نعتبر أن أى منطقة مستوية لها كتلة ومن ثم كثافة (كتلة وحدة المساحة) عند كل نقطة حتى اذا كانت ليس لها سمك . ليكون هذا مستساغاً فيزيائياً ، يمكننا تصور المنطقة كصفحة رقيقة .

دراستنا ستكون موازية لدراسة عزم ومركز كتلة مجموعة محدودة . ندرس أولاً مسألة إيجاد عزم منطقة في مستوى الاحداثيات ، حول الخط المستقيم $x = c$. عزم منطقة متغيرة الكثافة يمكن إيجاده بطرق تكامل متقدمة عن الطرق المتاحة لنا الآن . سنعالج فقط الحالة الخاصة والهامة لمنطقة متجانسة . أى أن ، كثافة المنطقة ثابتة . كتلة المنطقة هي حينئذ حاصل ضرب الكثافة في المساحة . لتكن $a < b$ و a, b ، هما احداثيا طرفي مسقط المنطقة على المحور x (شكل ١١-٧) ، ولتكن $l(x)$ ترمز الى عرض المنطقة مقيساً على خط عمودى على المحور x عند النقطة x . نقسم المنطقة الى شرائط ضيقة بخطوط عمودية على المحور x . هذه الخطوط تعين تجزئاً

$$[a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b]$$

للفترة $[a, b]$. فقط الشريط الذى رقمه i موضح فى الشكل . نختار نقطة \bar{x}_i فى الفترة الجزئية رقم i



شكل ٧-١١

ونكون المستطيل الموضح في الشكل . مساحة الشريط تقرب بمساحة المستطيل أي $l(x'_i) \Delta x_i$ وكتلته بـ $\rho l(x'_i) \Delta x_i$ حيث ρ هي الكثافة . عزم الشريط رقم i حول المستقيم $x = c$ يعطى بالتقريب بحاصل ضرب كتلة المستطيل والمسافة الموجهة لـ x'_i من المستقيم $x = c$ ، أي

$$\rho l(x'_i)(x'_i - c) \Delta x_i$$

هذا التقريب يعتمد على اختيار x'_i ، لكن لشريط ضيق لا يختلف كثيراً . حاصل الجمع لهذه العزوم

$$(١) \quad \sum_{i=1}^n \rho l(x'_i)(x'_i - c) \Delta x_i$$

هو تقريب للعزم $M_{x=c}$ للمنطقة حول الخط . حاصل الجمع هذا هو حاصل جمع ريمان للدالة $\rho l(x)(x - c)$. سندرس فقط المناطق حيث الدالة l متصلة . وحيث جميع الخطوط العمودية على المحور x بين a و b تقطع حدود المنطقة فيما لا يزيد عن نقطتين .

باستخدام تجزئة دقيقة كافية يمكننا التقريب الى العزم ، الى أى درجة نريدها من الدقة ، بحواصل جمع على الصورة (١) وبالتالي فالعزم يعطى بالضبط بنهايتها ، التى هى التكامل المعين

$$(٢) \quad M_{x=c} = \int_a^b \rho l(x)(x - c) dx$$

العزم M_y حول المحور y هو الحالة الخاصة $c = 0$:

$$(٣) \quad M_y = \int_a^b \rho l(x)x dx$$

فى كلا (٢) و (٣) هذا التكامل هما الاحداثيان x الأيسر والأيمن لأقصى وضعين للخط $l(x)$. العرض $l(x)$ يجب ألا يكون سالباً لجميع قيم x فى الفترة $[a, b]$.

ينبغي علينا أن نشير الى أنه بالرغم من أنه يبدو لنا أننا قد أثبتنا (٢) ، لكن فى الواقع لم نثبت شيئاً لأن عزم منطقة حول مستقيم لم يعرف . عملنا يوضح أن (٢) تعريف معقول للعزم وستتخذ وجهة النظر هذه .

للمناطق الموضوعة أفقياً ، العزم يقيس التأثير الدوراني للمنطقة حول الخط المستقيم ، $x =$.
 اذا كان العزم موجباً ، فالمنطقة تميل الى الدوران الى أسفل على ايمين واذا كان سالباً فالمنطقة
 تميل الى الدوران الى أسفل على اليسار . قيمة c حيث العزم يساوى صفراً يرمز لها بالرمز \bar{x} .
 لايجادها ، نبحث عن \bar{x} حيث

$$\int_a^b \rho l(x) (x - \bar{x}) dx = 0$$

اذا كانت W و A هما مساحة وكتلة المنطقة ، فحيث يكون

$$A = \int_a^b l(x) dx$$

$$W = \rho A \quad \text{و}$$

$$\int_a^b \rho l(x) (x - \bar{x}) dx = \int_a^b \rho l(x) x dx - \bar{x} \rho \int_a^b l(x) dx$$

$$= M_y - \bar{x} \rho A = M_y - \bar{x} W.$$

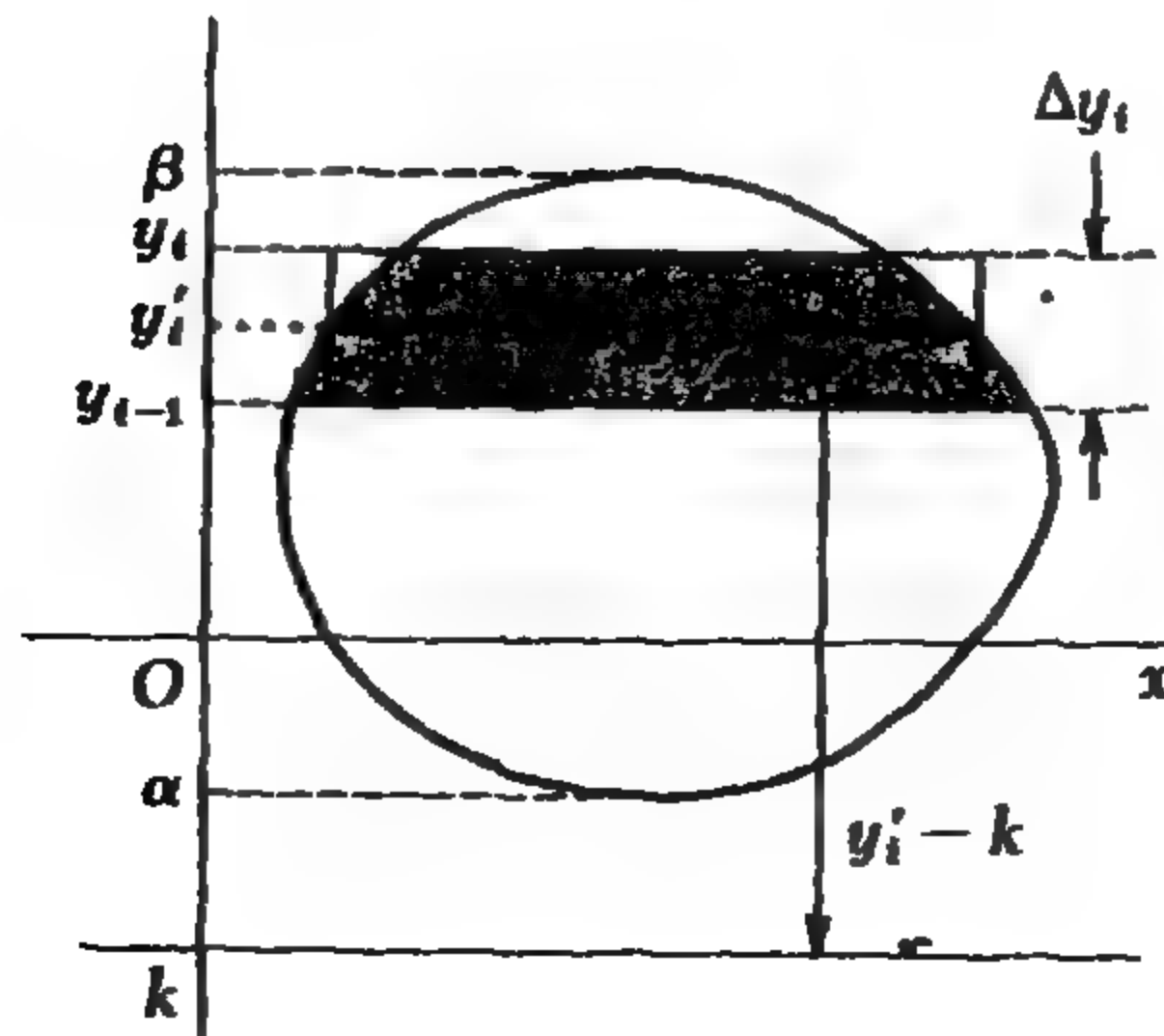
؛ $\bar{x} = M_y / W$. بما أن العزم يساوى صفراً حول الخط المستقيم $x = \bar{x}$ ، فالمنطقة ستزن على
 حد سكين موضوع تحت المنطقة على هذا الخط .

بتقسيم المنطقة الى شرائط عمودية على المحور y (شكل ١١ - ٨) نحصل على تعبير مشابه
 لـ (٢) للعزم حول الخط $y = k$ الموازي لمحور x :

$$M_{y=k} = \int_a^b \rho l(y) (y - k) dy$$

حيث $l(y)$ هو عرض المنطقة على الخط العمودي على المحور y عند النقطة y ، وحيث $\alpha < \beta$ و
 و α الاعدائيان y لأقصى وضعين لهذا الخط . العزم M_x حول المحور x هو الحالة الخاصة
 : $k = 0$

$$M_x = \int_a^b \rho l(y) y dy \quad (٤)$$



شكل ١١ - ٨

العزم يكون صفراً حول الخط $y = \bar{y}$ ، حيث $\bar{y} = M_x/W$. المنطقة مستزن على حد سكين موضوع تحت المنطقة على هذا الخط .

نقطة التقاطع (\bar{x}, \bar{y}) لخطى الاتزان هي النقطة حيث اذا وضعت المنطقة على سن قلم ، فانها مستزن . نقطة الاتزان هذه تسمى مركز الكتلة أو المركز المتوسط للمجموعة . التعبير « المركز المتوسط » عادة يحتفظ به للمناطق المتجانسة مثل التي ندرسها . واذا كانت المنطقة لها كثافة متغيرة ، فان (\bar{x}, \bar{y}) تسمى مركز الكتلة .

١١-٣ نظرية . الاحداثيان (\bar{x}, \bar{y}) للمركز المتوسط لمنطقة مستوية متجانسة يعطيان بالصيغتين

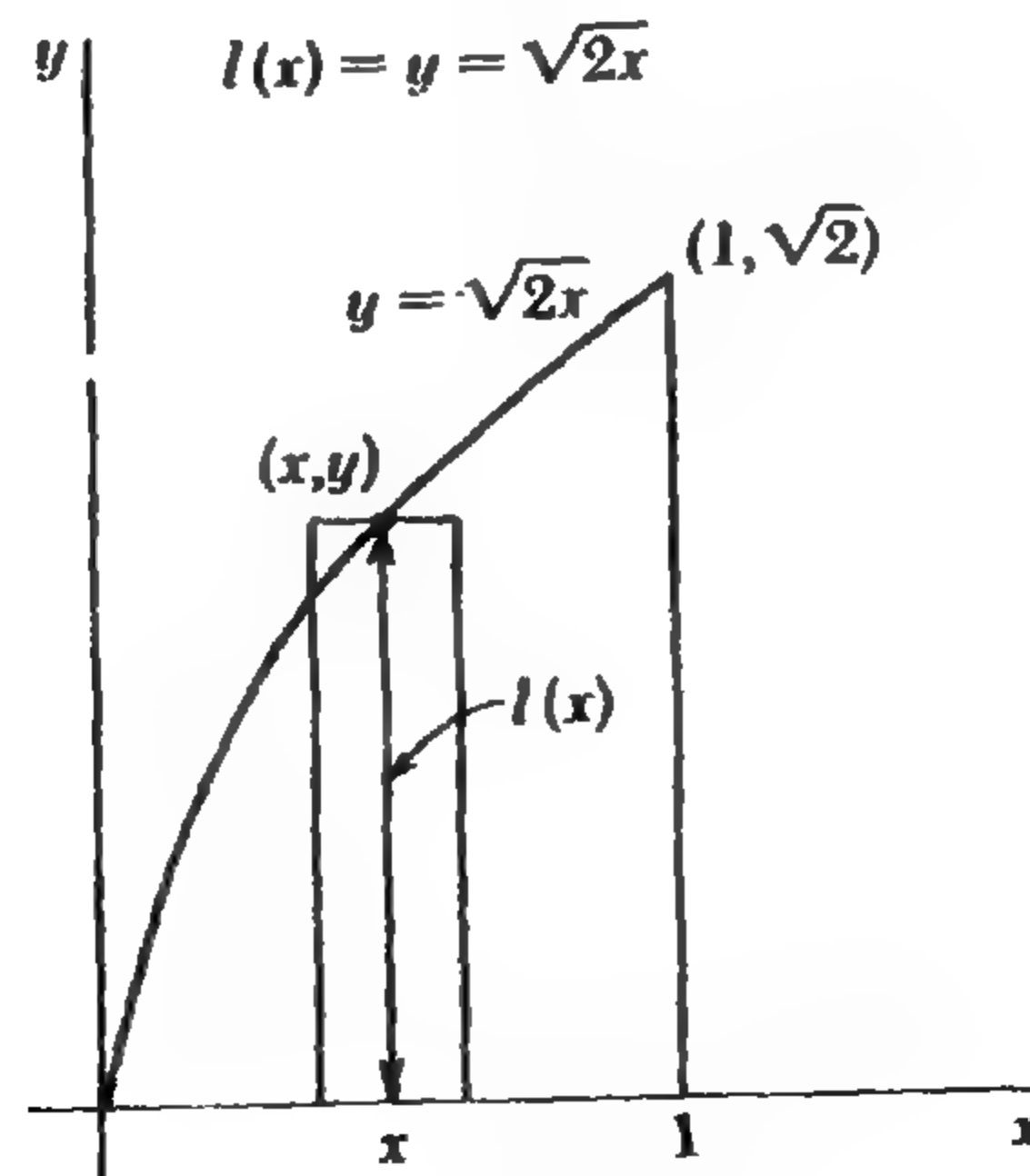
$$\bar{x} = \frac{M_y}{W} \text{ و } \bar{y} = \frac{M_x}{W}$$

حيث M_x و M_y هما عزما المنطقة حول المحورين x و y و W هي كتلتها .

مثال ١ أوجد المركز المتوسط للمنطقة المحدودة بقوس القطع المكافئ الذي معادلته $y = \sqrt{2x}$ ومحور السينات والخط المستقيم $x = 1$.

المنطقة موضحة في الشكل ١١-٩ . يجب أن نوجد W و M_y و M_x . لايجاد M_y ، نستخدم (٣) حيث $l(x) = y = \sqrt{2x}$. هذا التكامل هما الاحداثيان x الأيسر والأيمن لأقصى وضعين للخط المستقيم $l(x)$ أي ١ و ٠ . واذن

$$M_y = \int_a^b \rho l(x) x dx = \int_0^1 \rho \sqrt{2x} x dx = \rho \sqrt{2} \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rho$$



شكل ١١-٩

مساحة المنطقة تعطى بـ

$$\text{المساحة} = \int_0^1 l(x) dx = \int_0^1 \sqrt{2x} dx = \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

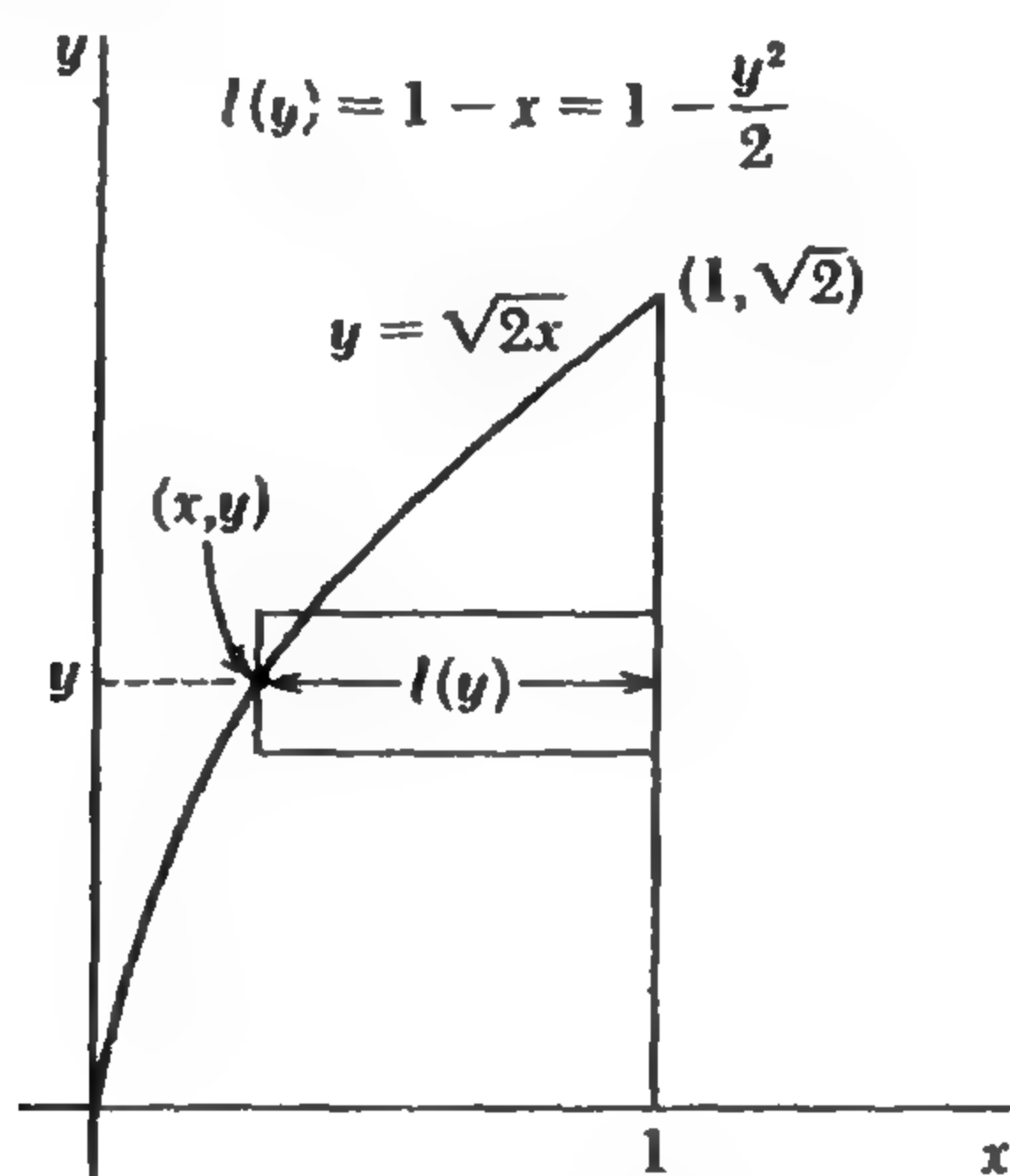
واذن الكتلة هي $W = \rho(2\sqrt{2})/3$ ويكون $\bar{x} = M_y/W = \frac{3}{8}$ لايجاد M_x ، نستخدم شرائط موازية للمحور x (شكل ١١ - ١٠) ، ويكون لدينا

$$l(y) = 1 - x = 1 - \frac{y^2}{2}$$

حدا التكامل هما $\sqrt{2}$ و 0 ، الاحداثيان y لأقصى وضعين للمستقيم $l(y)$. واذن

$$M_x = \int_0^{\sqrt{2}} \rho l(y) y dy = \int_0^{\sqrt{2}} \rho \left(1 - \frac{y^2}{2}\right) y dy = \rho \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{6}\rho$$

$$\bar{y} = M_x/W = 3/4 \sqrt{2} \quad \text{و}$$



شكل ١١ - ١٠

مثال ٢ . أوجد المركز المتوسط لمنطقة على شكل نصف دائرة :
نضع نصف الدائرة كما هو موضح في الشكل ١١ - ١١ . معادلتها تكون $x^2 + y^2 = r^2$ ، حيث r هي نصف القطر . لايجاد M_y ، لدينا

$$l(x) = 2y = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

حدا التكامل هما الاحداثيان x الأيسر والأيمن لأقصى وضعين للخط المستقيم $l(x)$ ، أي r و 0 .
واذن

$$\begin{aligned} M_y &= \int_0^r \rho l(x) x dx = \rho \int_0^r 2x \sqrt{r^2 - x^2} dx \\ &= \rho \left[-\frac{2}{3} (r^2 - x^2)^{3/2} \right]_0^r = \frac{2}{3} r^3 \rho \end{aligned}$$

المساحة كما نعلمها هي $\frac{1}{2}\pi r^2$. ومن ثم $W = \frac{1}{2}\pi r^2 \rho$ ، ويكون

$$\bar{x} = \frac{M_y}{W} = \frac{\frac{2}{3}r^3\rho}{\frac{1}{2}\pi r^2\rho} = \frac{4r}{3\pi}$$

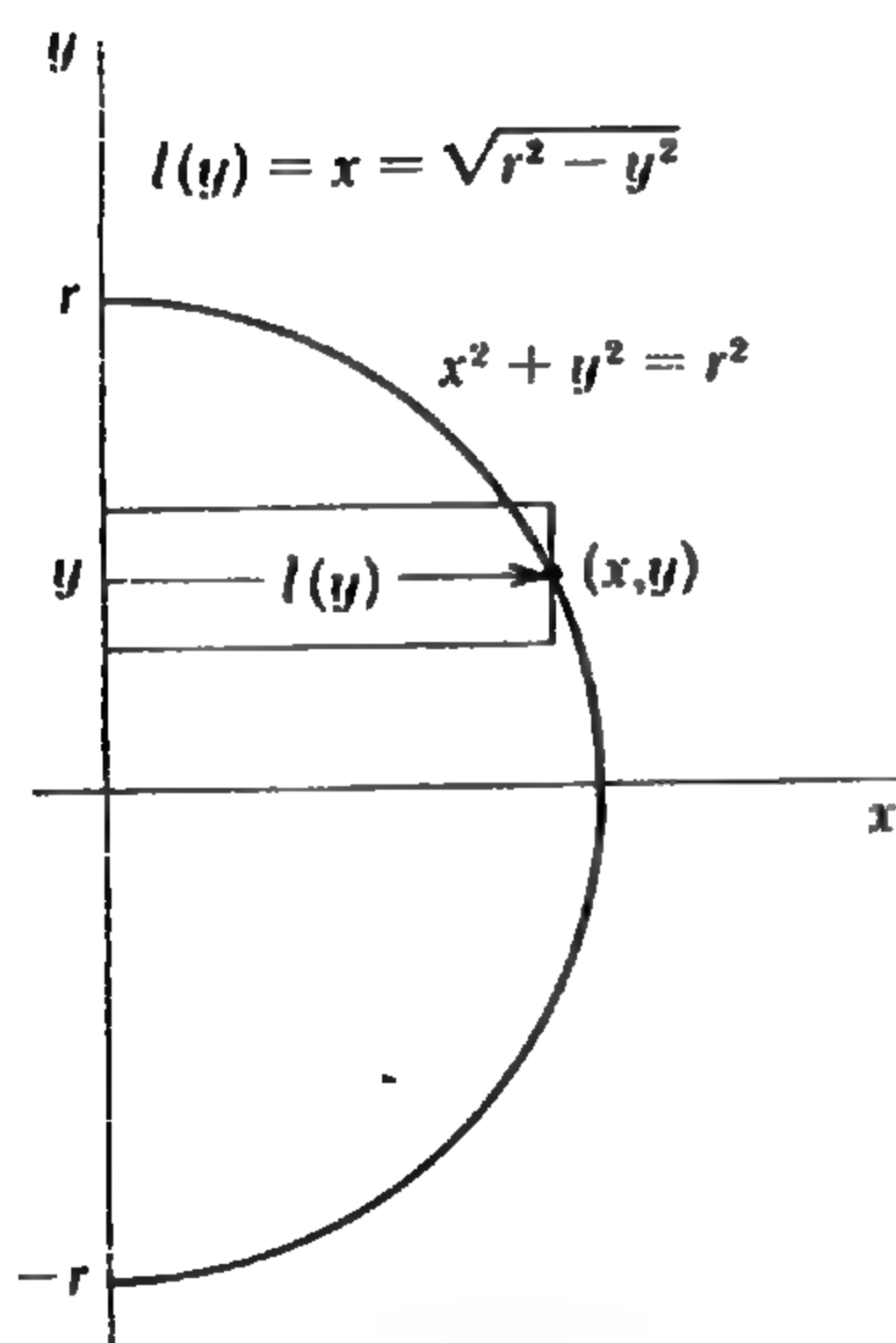
لايجاد M_x ، لدينا (شكل ١١-١٢)

$$l(y) = x = \sqrt{r^2 - y^2}$$

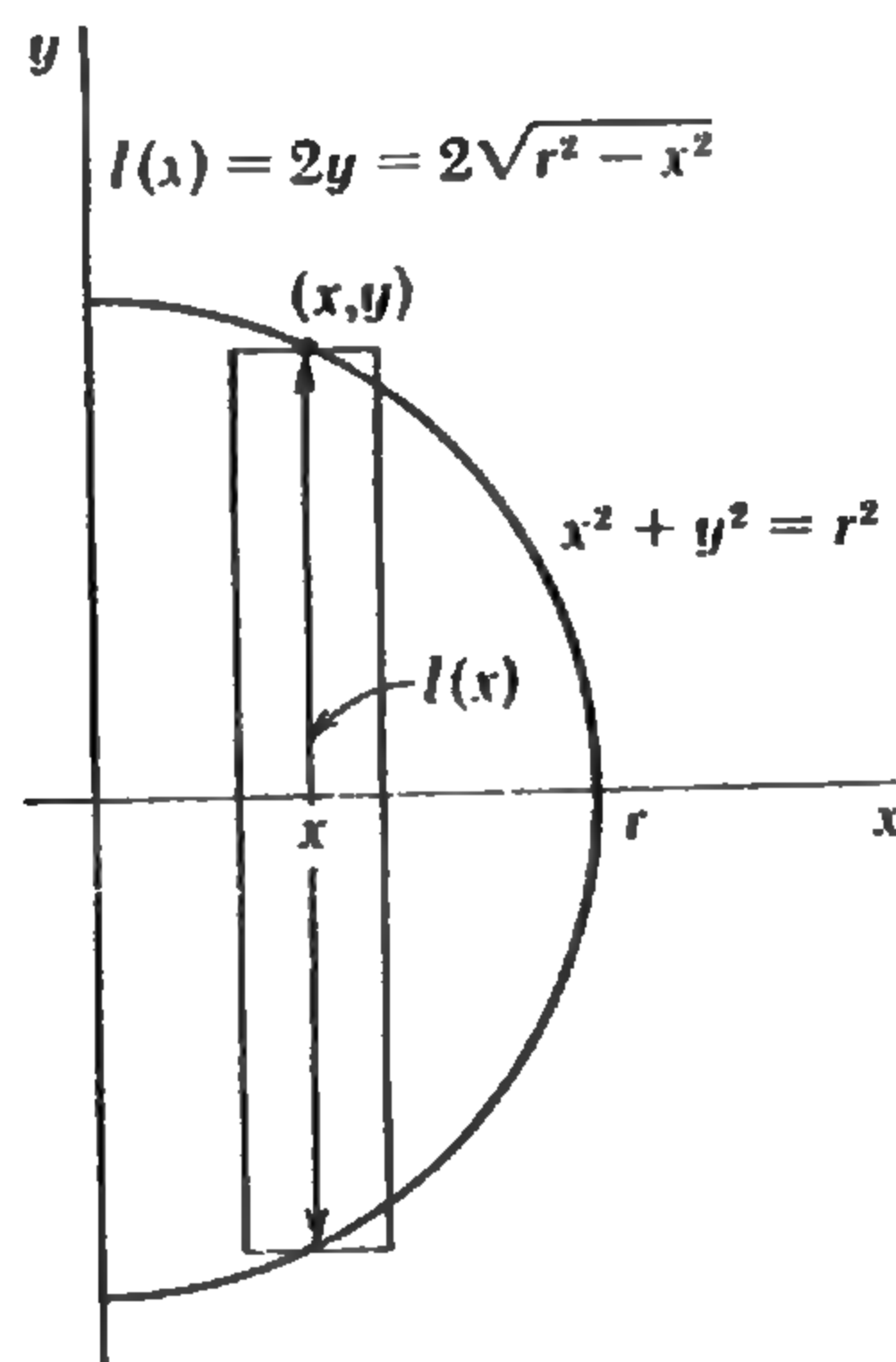
حدا التكامل هما r و $-r$ ، الاحداثيان y لأقصى وضعين للخط المستقيم $l(y)$. اذن

$$M_x = \int_{-r}^r \rho l(y) y dy = \int_{-r}^r \rho y \sqrt{r^2 - y^2} dy = -\frac{\rho}{3} (r^2 - y^2)^{3/2} \Big|_{-r}^r = 0$$

وبالتالى $\bar{y} = M_x / W = 0$ وهذا ما نتوقعه بسبب تماثل المنطقة .



شكل ١٢-١١



شكل ١١-١١

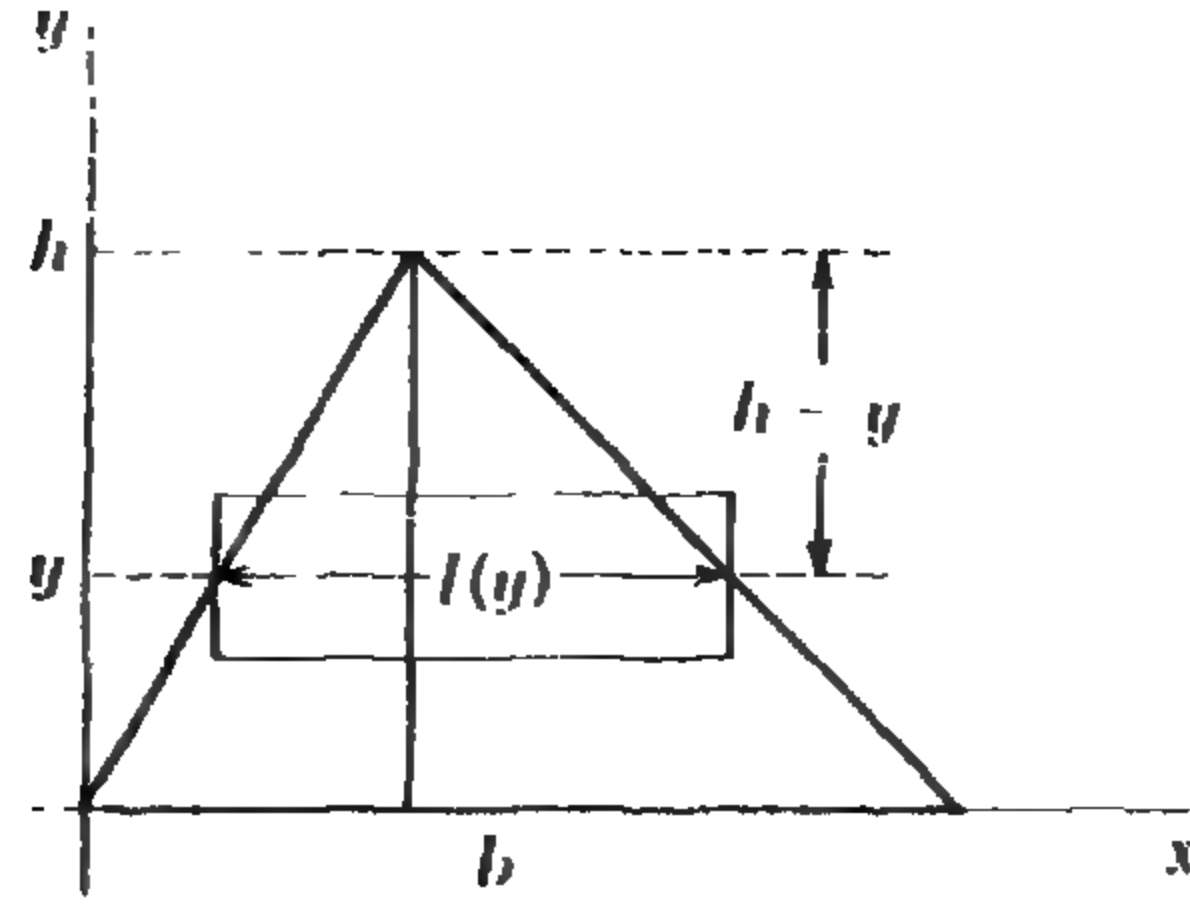
مثال ٣ . أثبت أن المركز المتوسط لمثلث هو نقطة تقاطع المستقيمتان المتوسطتان .

نضع المثلث كما هو موضح في الشكل ١١-١٣ وليكن b طول القاعدة و h الارتفاع . فيكون

$$M_x = \int_0^h \rho l(y) y dy$$

لايجاد $l(y)$ ، لدينا من المثلثين المتشابهين

$$\frac{l(y)}{b} = \frac{h-y}{h}$$



شكل ١١-١٣

ومن ثم $l(y) = \frac{b}{h} (h - y)$

اذن $M_x = \rho \frac{b}{h} \int_0^h (h - y)y dy = \rho \frac{b}{h} \left[\frac{h}{2} y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^h = \frac{1}{6} \rho b h^2$

بما أن $W = \frac{1}{2} \rho b h$ ، $\bar{y} = M_x / W = \frac{1}{3} h$. اذن المركز المتوسط يقع على الخط الموازي للقاعدة وفى $\frac{1}{3}$ المسافة من القاعدة الى الرأس المقابل . بوضع المثلث بحيث أن أحد أضلاعه الأخرى يكون القاعدة نحصل على نتيجة مماثلة . واذن المركز المتوسط يقع عند تقاطع هذين الخطين ، والخط المناظر الموازي للضلع الثالث يجب أن يمر بهذه النقطة لأن المركز المتوسط يقع عليه أيضاً . بما أن المستقيمات المتوسطة للمثلث أيضاً تتقابل فى نقطة فى ثلث المسافة من كل قاعدة الى الرأس المقابل ، اذن المركز المتوسط يجب أن يكون نقطة تقاطع المستقيمات المتوسطة .

مسائل

أوجد المركز المتوسط لكل من المناطق المحدودة بالمنحنيات أدناه :

١ - $y^2 = x, x = 0, y = 2$ ٢ - $y = x^3, y = 0, x = 2$

٣ - $y = x^4, x = 0, y = 8$ ٤ - $y = \ln x, y = 0, x = e$

٥ - $y = e^x, x = 0, y = 2$ ٦ - $y^2 = c^2 - cx, x = 0$

٧ - $x^2 - y^2 = 1, x = 4$ ٨ - $y = x^2, x = y^2$

٩ - $y = \frac{4}{x}, x + y = 5$ ١٠ - $y = 2x^3, y = 2x$ (الربع الأول)

١١ - $y = 4x - x^2, y = 2x$ ١٢ - $y^2 = x, y = \frac{1}{2}(x - 3)$

١٣ - أوجد المركز المتوسط لمنطقة محدودة بربع دائرة ونصف قطريها .

١٤ - أوجد المركز المتوسط لمنطقة محدودة بربع قطع ناقص ونصف محوريه الأكبر والأصغر .

١٥ - أوجد المركز المتوسط للمنطقة تحت النصف الأيسر للقوس الأول على يمين المحور y

للمنحنى $y = \sin x$.

١٦ - أوجد المركز المتوسط للمنطقة تحت المنحنى

$$y = 4 - x^2, x \leq 0 \quad \text{و} \quad y = 4 - x, x \geq 0$$

١٧ - أوجد المركز المتوسط للمنطقة المحدودة بالمحور y والخط المستقيم $y = 8$ والمنحنى

$$y^2 = x^3 \quad \text{و} \quad 0 \leq y \leq 8$$

١١ - ٤

مركز كتلة منطقة مستوية (تابع)

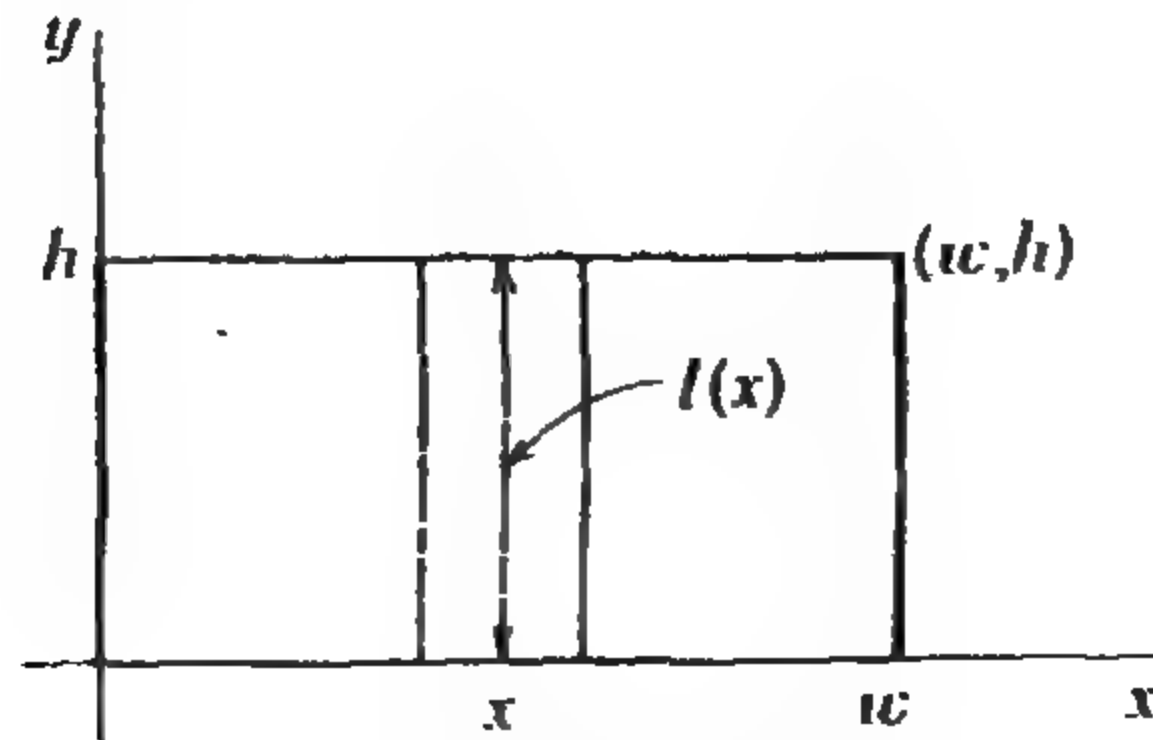
نثبت الحقيقة المعقولة فيزيائياً أن المركز المتوسط للمستطيل يكون عند مركزه . لتكن h و w هما طولاً ضلعى المستطيل ونضعه كما هو موضح فى الشكل ١١ - ١٤ . بما أن $l(x) = h$ فيكون

$$M_y = \int_a^b \rho l(x) x \, dx = \int_0^w \rho h x \, dx = \rho h \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^w = \frac{\rho h w^2}{2}$$

الكتلة هي الكثافة مضروبة فى المساحة . واذن $W = \rho wh$ ويكون $\bar{x} = M_y/W = w/2$. رغم أن الاحداثى y للمركز المتوسط يمكن ايجاده بإيجاد M_x ، لكن من الأسهل أن نلاحظ أن بتدوير المستطيل الى الجهة الأخرى وتكرار العمل فاننا فقط نستبدل h و w . اذن $\bar{y} = h/2$.

إذا كانت المنطقة لها خط تماثل ، فان مركزها المتوسط يجب أن يقع على هذا الخط . لاننا اذا قسمنا المنطقة الى شرائط ضيقة عمودية على الخط ، فان المركز المتوسط للمستطيل المقرب يقع على خط التماثل وبالتالي فعزم المستطيل حول الخط يساوى صفراً . بناء على ذلك ، فان حاصل جمع العزوم وبالتالي نهاية حاصل الجمع التى هي عزم المنطقة ، يساوى صفراً . هذه الحقيقة كانت تمكننا من الاستنتاج مباشرة أن الاحداثى y للمركز المتوسط لنصف الدائرة فى مثال ٢ بالبند السابق هو صفر .

بما أن $\bar{x} = M_y/W$ لاي منطقة ، فان $M_y = W\bar{x}$ ويمكننا أن نستنتج ، تما فى المجموعات المحدودة ، أن عزم منطقة حول المحور y يساوى عزم ثقل كتلته تساوى كتلة المنطقة موضوع عند مركز الكتلة .



شكل ١١ - ١٤

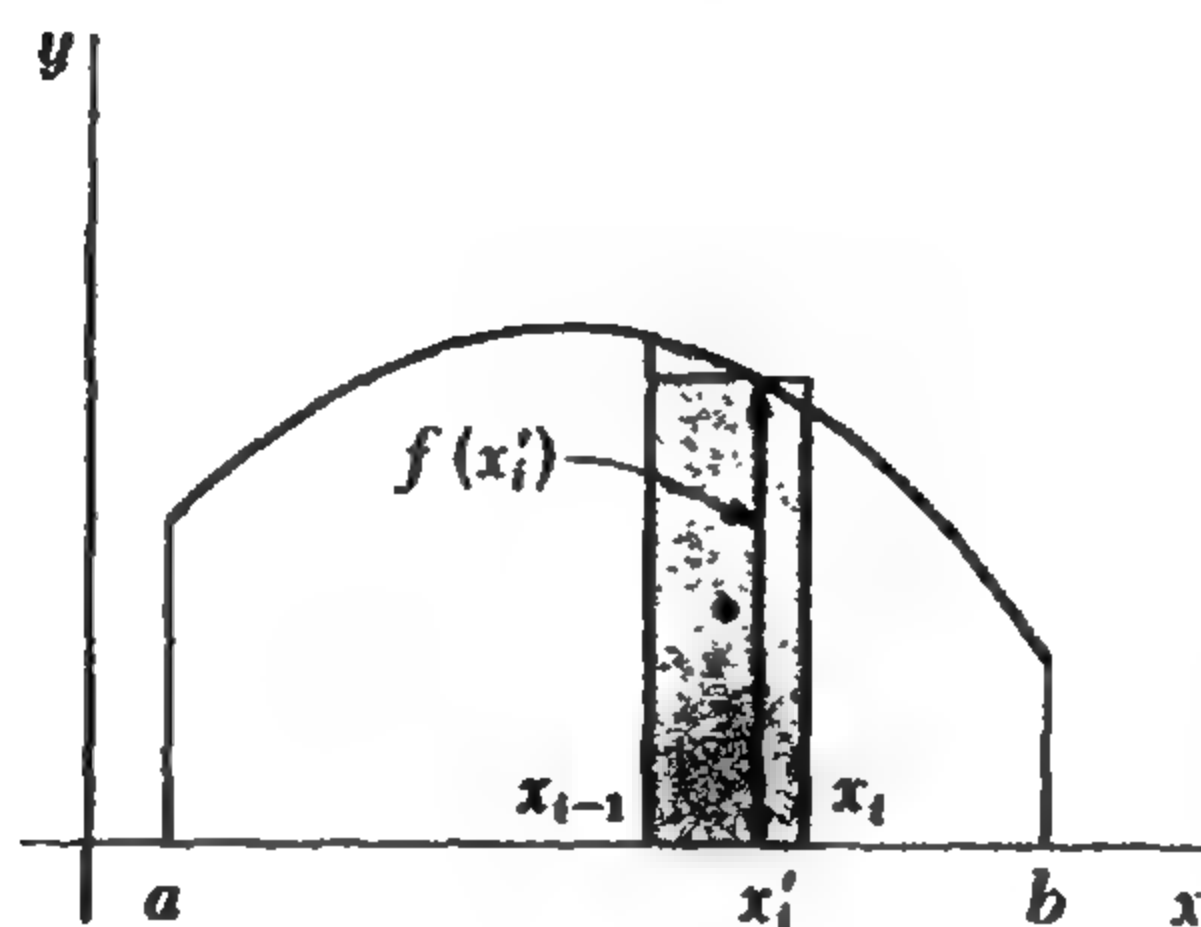
إذا اعطينا أي مستقيم في المستوى ، فإنه يمكننا تدوير المحورين ونقلهما بحيث ينطبق المحور y على الخط ، ويكون لدينا نظير للنظرية ١١-٢ .

١١-٤ نظرية عزم منطقة مستوية حول خط ، لا يتغير إذا ركزنا كتلة المنطقة عند مركز الكتلة .

هذه الخاصية يمكن استخدامها لاشتقاق بديل ، وأحيانا صيغة أكثر ملاءمة عن تلك في (٤) بيند ١١-٣ ، للعزم حول المحور x لمنطقة مستوية متجانسة تحت منحنى بين a و b .

كما في حالة العزم حول الخط $y=c$ ، نقسم المنطقة إلى شرائط ضيقة عمودية على المحور x وندرس المستطيلات المقربة (شكل ١١-١٥) المركز المتوسط للمستطيل الذي رقمه i هو مركزه ، الارتفاع y له هو $\frac{1}{2}f(x_i)$. عزم المستطيل حول المحور x هو نفسه كما لو كانت كتلة $\rho f(x_i)\Delta x_i$ مركزة عند مركزه و فهو إذن

$$\rho f(x_i') \Delta x_i \frac{1}{2}f(x_i') = \frac{1}{2}\rho f^2(x_i') \Delta x_i$$



شكل ١١-١٥

عزم المستطيل حول المحور x مساوي عزم ثقل له نفس الكتلة ، عند المركز المتوسط .

عزم المنطقة يقرب بحاصل جمع هاته . واذن

$$(1) \quad M_x = \frac{1}{2} \int_a^b \rho f^2(x) dx$$

نوضح ذلك بأن نوجد بهذه الصيغة العزم حول المحور x للمنطقة في مثال بيند ١١-٣ المحدودة بقوس القطع المكافئ $y = \sqrt{2x}$ والمحور x والخط $x = 1$ (شكل ١١-٩) . لدينا : $y = f(x) = \sqrt{2x}$ ، ومن (١) يكون

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b \rho f^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \rho 2x dx = \rho \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2} \rho$$

مثال ١ . أوجد المركز المتوسط للمنطقة الموضحة في الشكل ١١-١٦ .

المنطقة تتكون من مستطيلين . ضعها على مستوى الاحداثيات كما هو موضح في الشكل . عزم المنطقة حول كل محور يساوى حاصل جمع العزمين حول كل محور للمستطيلين المكونين للمنطقة . كل مستطيل يمكن استبداله بثقل ، كتلته تساوى كتلة المستطيل ، عند مركزه المتوسط دون تأثير على عزمه . واذن عزمنا المنطقة هما

$$M_x = (72\rho)3 + (16\rho)4 = 280\rho$$

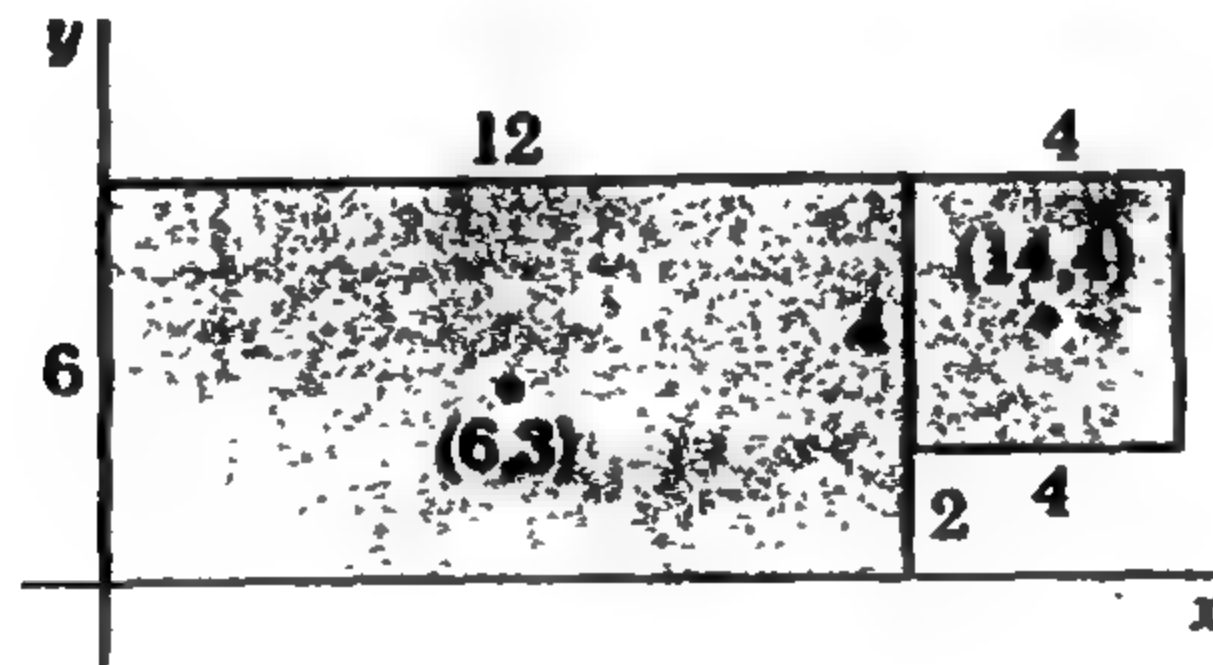
$$M_y = (72\rho)6 + (16\rho)14 = 656\rho.$$

لأن

$$W = 72\rho + 16\rho = 88\rho, \bar{x} = M_y/W = \frac{32}{11} \text{ and } \bar{y} = M_x/W = \frac{25}{11}$$

توجد نظرية هامة تربط حجم جسم دوراني بالمركز المتوسط للمساحة المنشئة .

١١-٥ نظرية بابيس Pappus. اذا دارت منطقة مستوية واقعة على جانب واحد لمستقيم فى مستويها ، حول المستقيم ، فان حجم الجسم الناشئ يساوى حاصل ضرب مساحة المنطقة فى المسافة المرسومة بالمركز المتوسط .

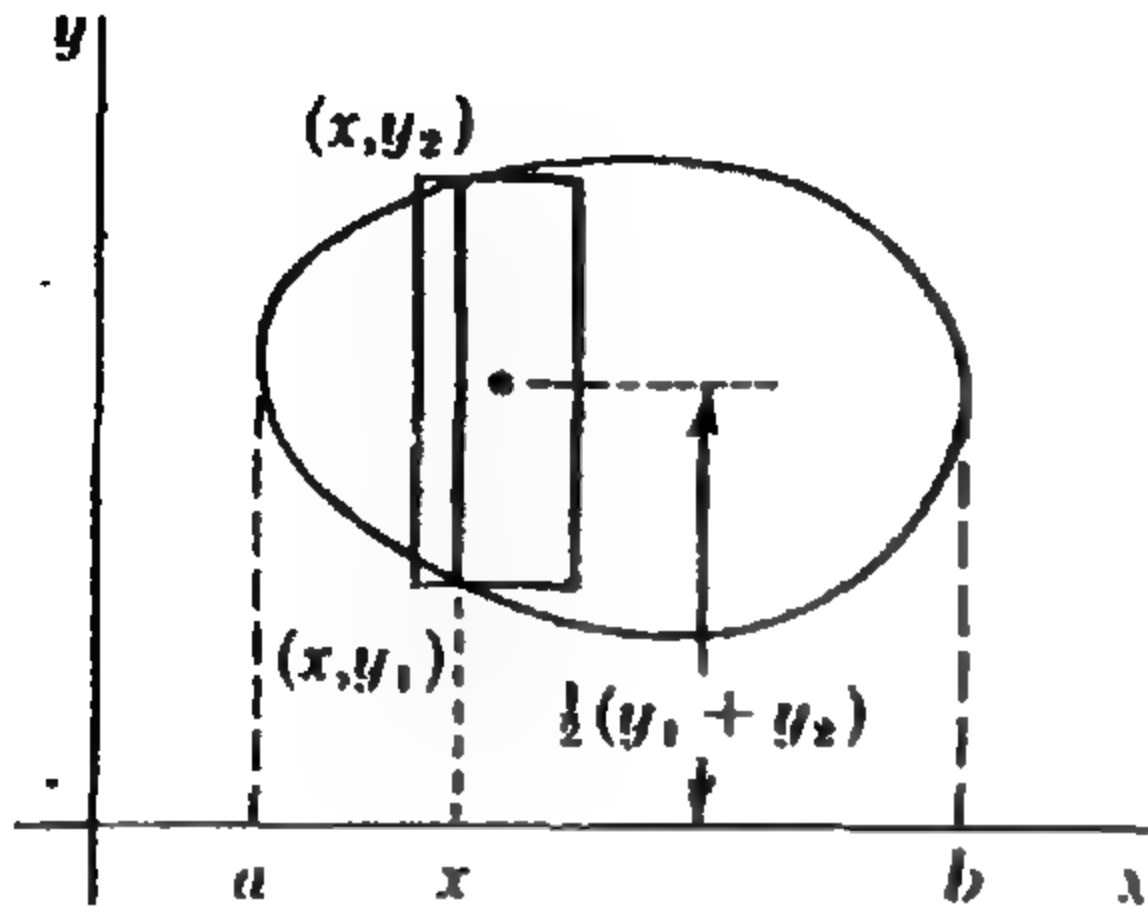


شكل ١١-١٦

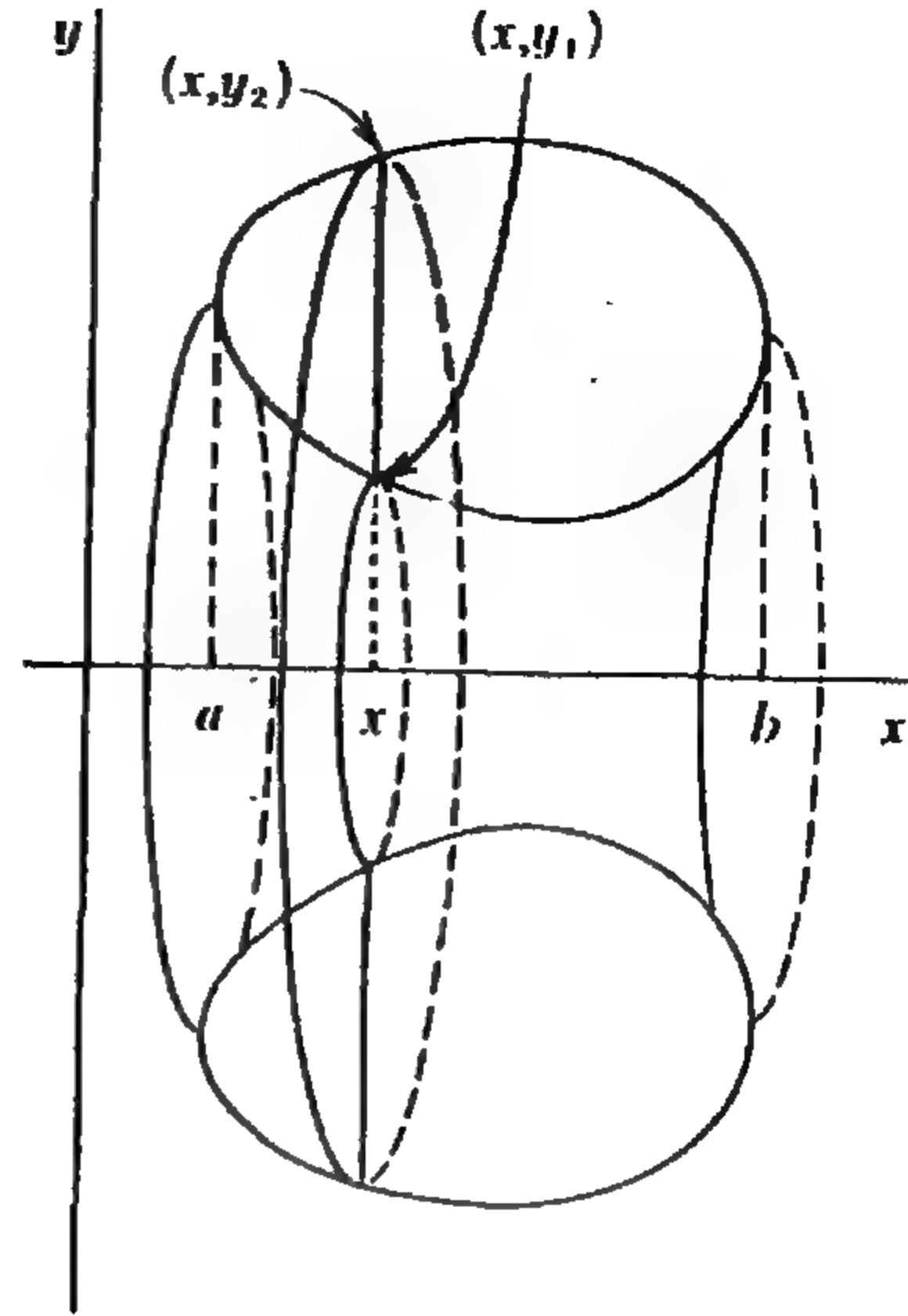
البرهان . ضع المنطقة بحيث أن الخط المستقيم يكون على المحور x (شكل ١١-١٧) . المستوى العمودى على المحور x عند النقطة x ، يقطع الجسم فى منطقة على هيئة حلقة . اذا كانت y_1 و y_2 هما نصف قطرى الدائرة الداخلة والدائرة الخارجة ، فحجم الجسم هو

$$(٢) \quad V = \int_a^b (\pi y_2^2 - \pi y_1^2) dx = \frac{2\pi}{\rho} \int_a^b \rho (y_2 - y_1) \frac{y_2 + y_1}{2} dx$$

المنطقة المنشئة موضحة فى الشكل ١١-١٨ . الآن $y_2 - y_1$ هو طول المستطيل ، $(y_2 + y_1)/2$ هو الاحداثى y لمتصفه . حاصل ضربيهما فى عرض المستطيل والكثافة هو عزم المستطيل حول المحور x ، ومن ثم التكامل الثانى فى (٢) هو العزم M_x للمنطقة حول المحور x .



شكل ١١-١٨



شكل ١١-١٧

اذن $V = (2\pi / \rho) M_x$ ، لكن $M_x = \bar{y}W = \bar{y}\rho A$ ، حيث A هي مساحة المنطقة . اذن : $V = 2\pi yA$ ، والنظرية قد برهنت .

مسائل

أوجد المركز المتوسط للمنطقة المحدودة بالمنحنيات الآتية :

- ١ - $y = 6x - x^2, y = 0$ - الربع الأول $y = x^3 - 3x, y = 0$
- ٣ - المنطقة الأكبر $y = 9 - x^2, x = -2, y = 0$ - $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1$
- ٥ - $y = e^x + e^{-x}, y = 0, x = -1, x = 1$ - $y = \frac{\ln x}{x}, y = 0, x = e$
- ٧ - $y = 4x - x^2, y = x$ - $y = x^2 + 2x - 3, y = -x^2 + 2x + 5$
- ٩ - $x^2 - y^2 = 1, y = 0, y = 3$ - $y = x^2 - 2x - 3, y = 2x + 2, y = -3x + 2$

- ١١ - أوجد المركز المتوسط للمنطقة تحت القوس المركزي للمنحنى $y = \cos x$.
- ١٢ - أوجد المركز المتوسط لقطعة القطع المكافئ المقطوعة بوتره البؤرى العمودى .
- ١٣ - أوجد المركز المتوسط للمنطقة تحت المنحنى $y = 1/(1 + x^2)$.
- ١٤ - أوجد المركز المتوسط لقطاع دائرى زاويته المركزية θ ونصف قطره r . القطاع الذى زاويته المركزية صغيرة هو تقريب لمثلث . لمثل هذه القطاعات ، هل اجابتك تقرب الى المركز المتوسط للمثلث (أنظر مثال ٣ - بيند ١١ - ٣) ؟

١٥ - أثبت أن كل خط في المستوى ، يكون العزم حوله لمنطقة في المستوى صفراً ، يمر بمركز كتلة المنطقة .

أوجد المركز المتوسط لكل من المناطق المحدودة بالمنحنيات القطبية أدناه . (ارشاد : قسم المنطقة الى قطاعات ضيقة ، كما عند إيجاد المساحات . كل قطاع يقرب الى مثلث مركزه المتوسط في $\frac{2}{3}$ المسافة من نقطة الأصل الى المنحنى)

$$r = e^{\theta}, \theta = 0, \theta = \pi/2 \quad (0 \leq r \leq e^{\pi/2}) \quad - ١٦ \quad r = \theta, \theta = \pi/2 \quad (0 \leq r \leq \pi/2) \quad - ١٧$$

$$\bar{r} = a(1 + \cos \theta) \quad - ١٨ \quad r = \sin \theta, r = \cos \theta \quad - ١٩ \quad r = \cos 2\theta \quad - ٢٠ \quad (العروة اليمنى)$$

٢١ - التورس هو الجسم الكعكي الناشئ من دوران دائرة حول خط في مستواها خارج الدائرة . أثبت بنظرية بابس أن حجم التورس هو $2\pi^2 a^2 b$ ، حيث a هي نصف قطر الدائرة المنشئة ، b هي المسافة بين الخط ومركز الدائرة .

٢٢ - مربع ضلعاه يوازيان المحورين ، ومثل كل منهما l ، ومركزه عند النقطة $(4, 0)$. أوجد بنظرية بابس حجم الجسم الناشئ من دورانه حول المحور y .

٢٣ - أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة في المسألة ٢٢ حول الخط المستقيم $y = x$.

٢٤ - أوجد حجم المخروط الدائري القائم بنظرية بابس .

٢٥ - المنطقة المحدودة بالقطع المكافئ $y^2 = 4px$ ووتره البؤري العمودي دارت حول الوتر البؤري العمودي . أوجد بنظرية بابس حجم الجسم الناشئ هكذا .

٢٦ - أوجد المركز المتوسط لمنطقة على هيئة نصف دائرة بنظرية بابس وحقق النتيجة في مثال ٢ بيند ١١-٣ .

٢٧ - أوجد بنظرية بابس المركز المتوسط للمنطقة في الربع الأول المحدودة بالقطع الناقص $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ومحوري الاحداثيات .

أوجد المركز المتوسط للمنطقة الموضحة في الأشكال الآتية :

٣٠ - شكل ١١-٢١

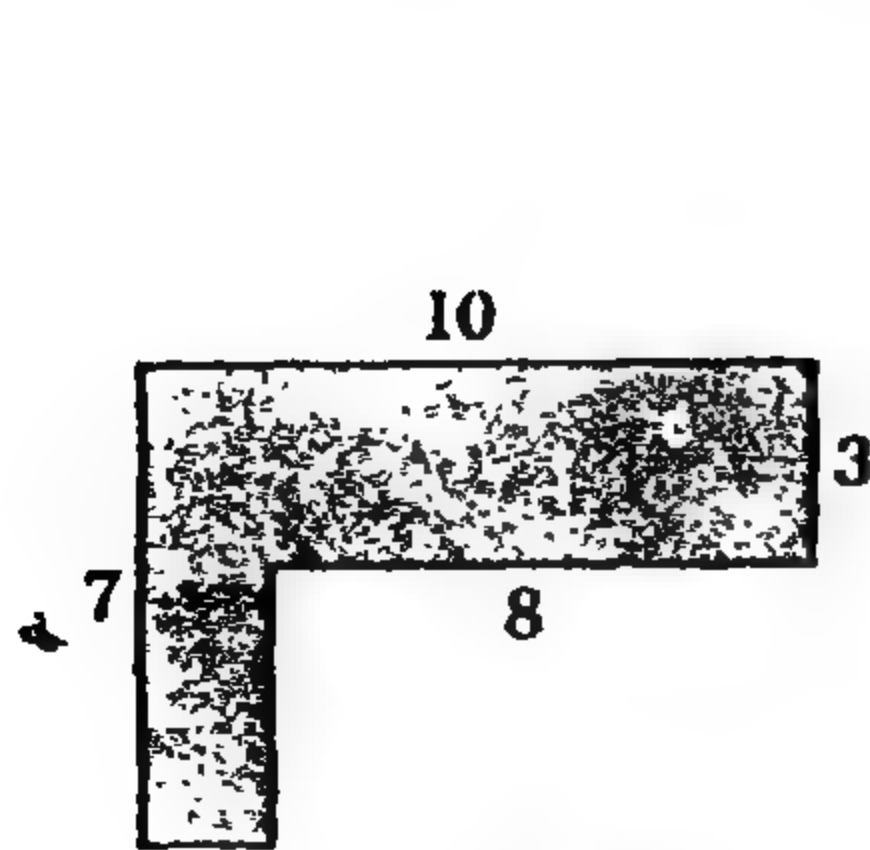
٢٩ - شكل ١١-٢٠

٢٨ - شكل ١١-١٩

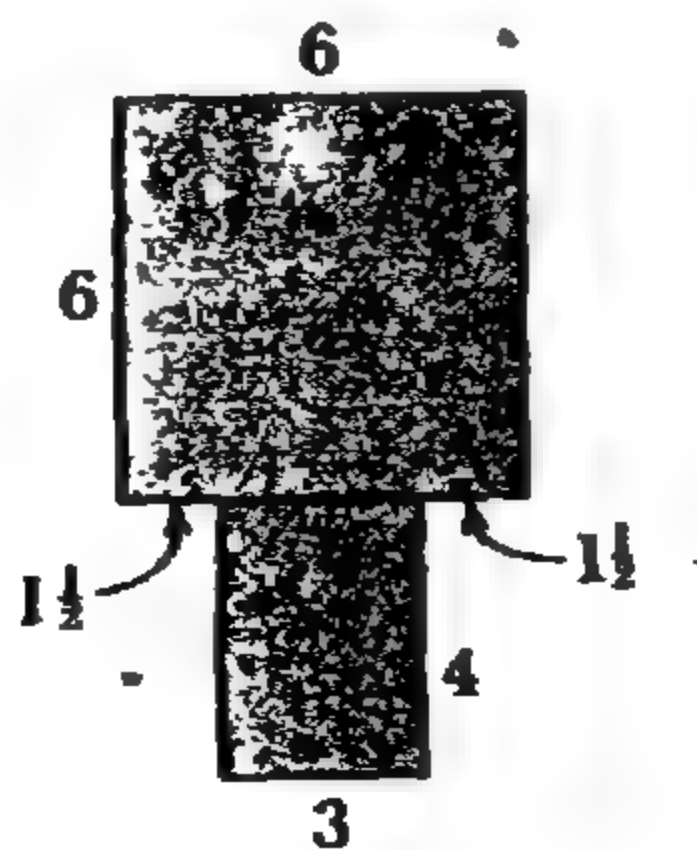
٣٣ - شكل ١١-٢٤

٣٢ - شكل ١١-٢٣

٣١ - شكل ١١-٢٢



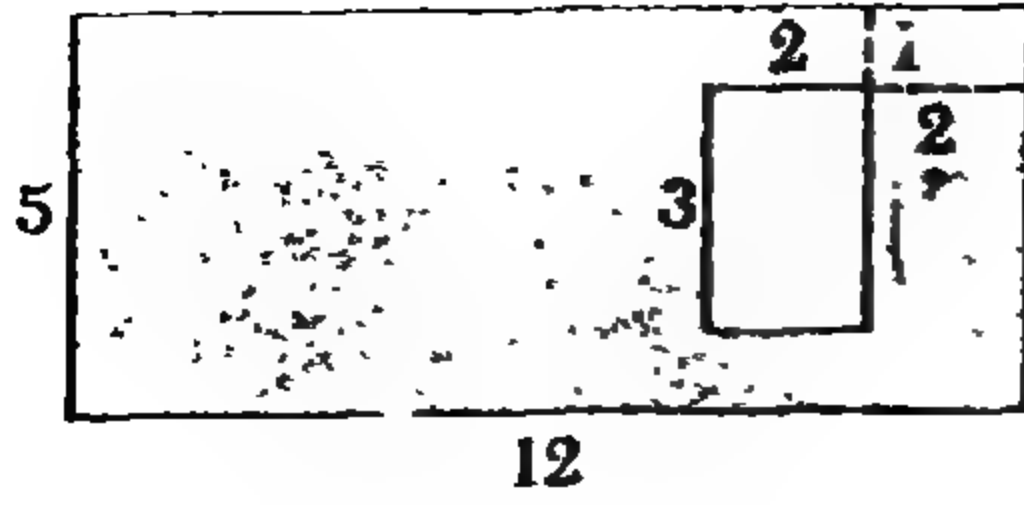
شكل ١١-٢١



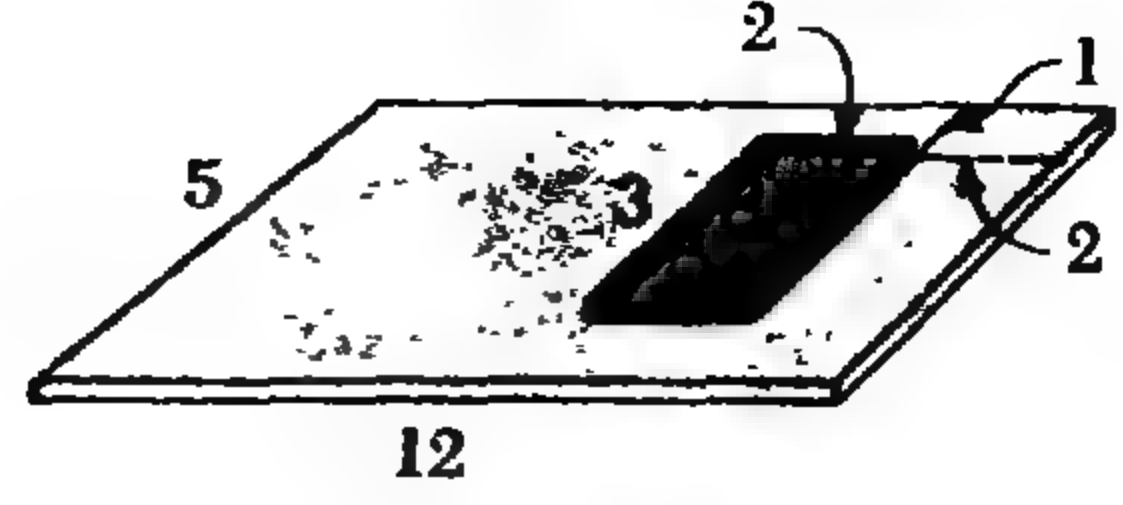
شكل ١١-٢٠



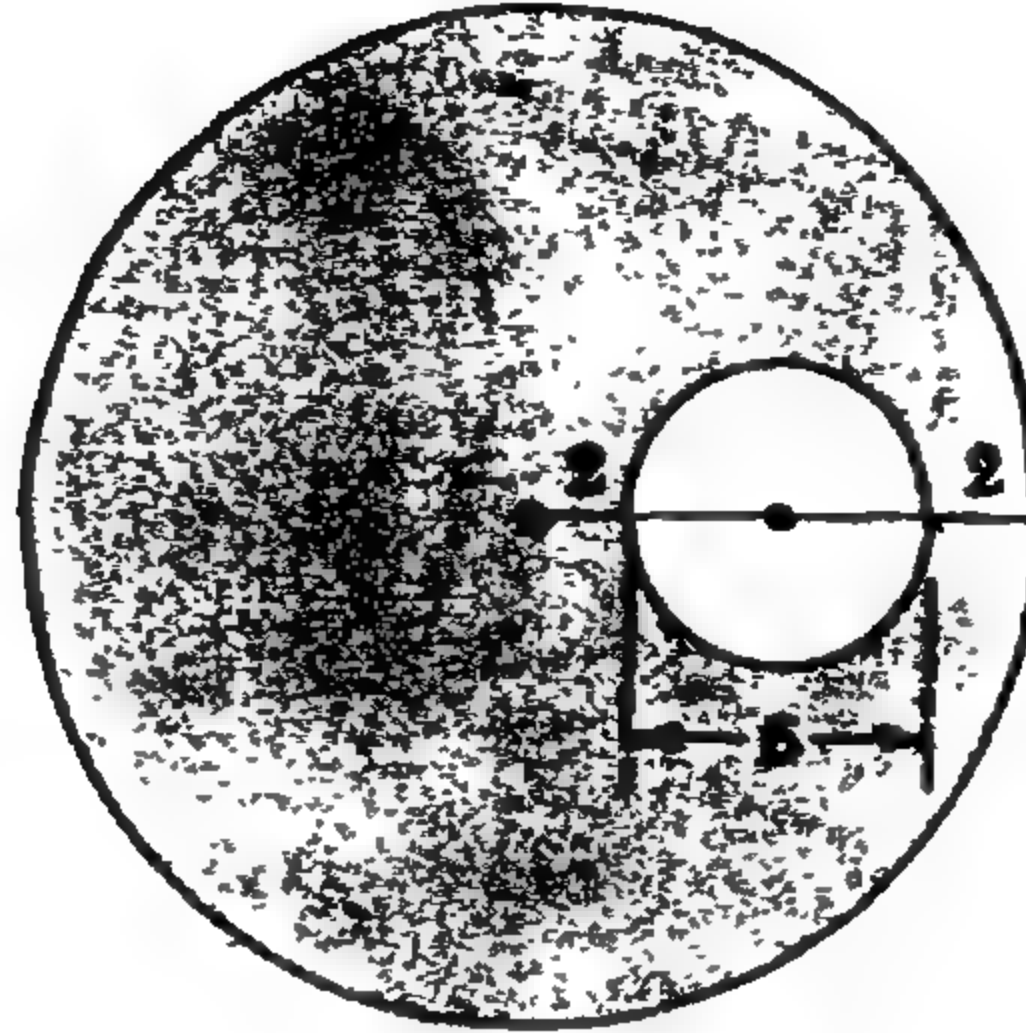
شكل ١١-١٩



شكل ١١-٢٣



شكل ١١-٢٢



شكل ١١-٢٤

٣٤ - أوجد المركز المتوسط لنصف حلقة محدودة بدائرتين متحدتي المركز . بجعل الدائرة الداخلية تقترب من الدائرة الخارجية ، أثبت أن المركز المتوسط لسلك على شكل نصف دائرة يقطع على خط التماثل على بعد $2r/\pi$ من المركز .

٣٥ - أوجد مركز كتلة منطقة على هيئة نصف دائرة وكثافتها عند أي نقطة تساوي بعد النقطة عن القطر الحدى . (ارشاد : ρ ليست ثابتة في (٢) و (٣) بيند ١١-٣ . أيضاً $W \neq \rho A$. اذا وضعت المنطقة كما في الشكل ١١-١١ ، أثبت أن ، بالرغم من ذلك ، $\bar{x} = M_y/W$.

٣٦ - أوجد مركز الكتلة لمثلث متساوي الساقين كثافته عند أي نقطة تساوي الجذر التربيعي لبعده النقطة عن القاعدة (أنظر الارشاد في المسألة ٣٥) .

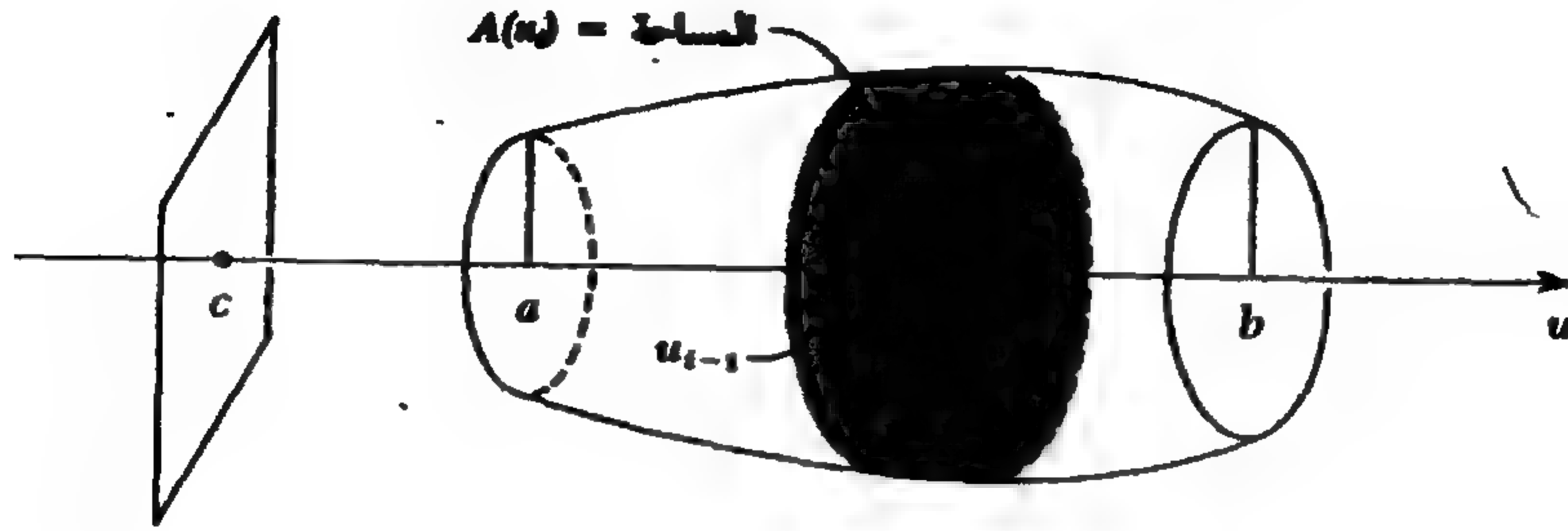
٣٧ - الكثافة عند أي نقطة على قطعة القطع المكافئ $y^2 = 24x$ المقطوعة بالخط المستقيم $x = 6$ تتناسب مع مربع بعد النقطة عن الخط المستقيم . أوجد مركز كتلة القطعة (أنظر الارشاد في المسألة ٣٥) .

١١-٥

المركز المتوسط لجسم دوراني

عزم ثقل في ثلاثة أبعاد يؤخذ بالنسبة الى مستوى وليس بالنسبة الى خط مستقيم ويعرف بأنه حاصل ضرب كتلة الثقل في المسافة العمودية من المستوى الى الثقل . العزم لمجموعة من الأثقال هو حاصل جمع عزوم هذه الأثقال كل على حده .

من الصعب جداً إيجاد المركز المتوسط لجسم إلا في أبسط حالة ، وهي حالة الجسم الدوراني المنتظم الكثافة ، والتي سندرسها الآن . لأن الجسم الدوراني متماثل حول محوره ، فإن مركزه المتوسط يقع على المحور . لإيجاد موضع المركز المتوسط على المحور ، ندخل خط إحداثيات u ، يسمى المحور u ، يمتد على محور الجسم (شكل ١١ - ٢٥) . نوجد أولاً عزم الجسم حول مستوى عمودي على المحور u عند النقطة c .



شكل ١١ - ٢٥
حجم الشريحة هو بالتقريب Δu_i ، $A(u')$.

نقسم الجسم الى شرائح رقيقة بمستويات عمودية على المحور u . لتكن u'_i أى نقطة فى الفترة $[u_{i-1}, u_i]$ المعينة بالشريحة التى رقمها i . اذا كانت $A(u)$ ترمز الى مساحة المقطع الناتج بالمستوى العمودى على المحور u عند النقطة u وكانت ρ هى كثافة المنطقة ، فان كتلة الشريحة رقم i هى بالتقريب Δu_i . $\rho A(u'_i)$ عزم الشريحة حول المستوى عند c يعطى بالتقريب بحاصل ضرب كتلة الشريحة فى المسافة الموجهة من c الى u'_i ، أى

$$\rho A(u'_i)(u'_i - c) \Delta u_i$$

نهاية حاصل جمع هاته هى

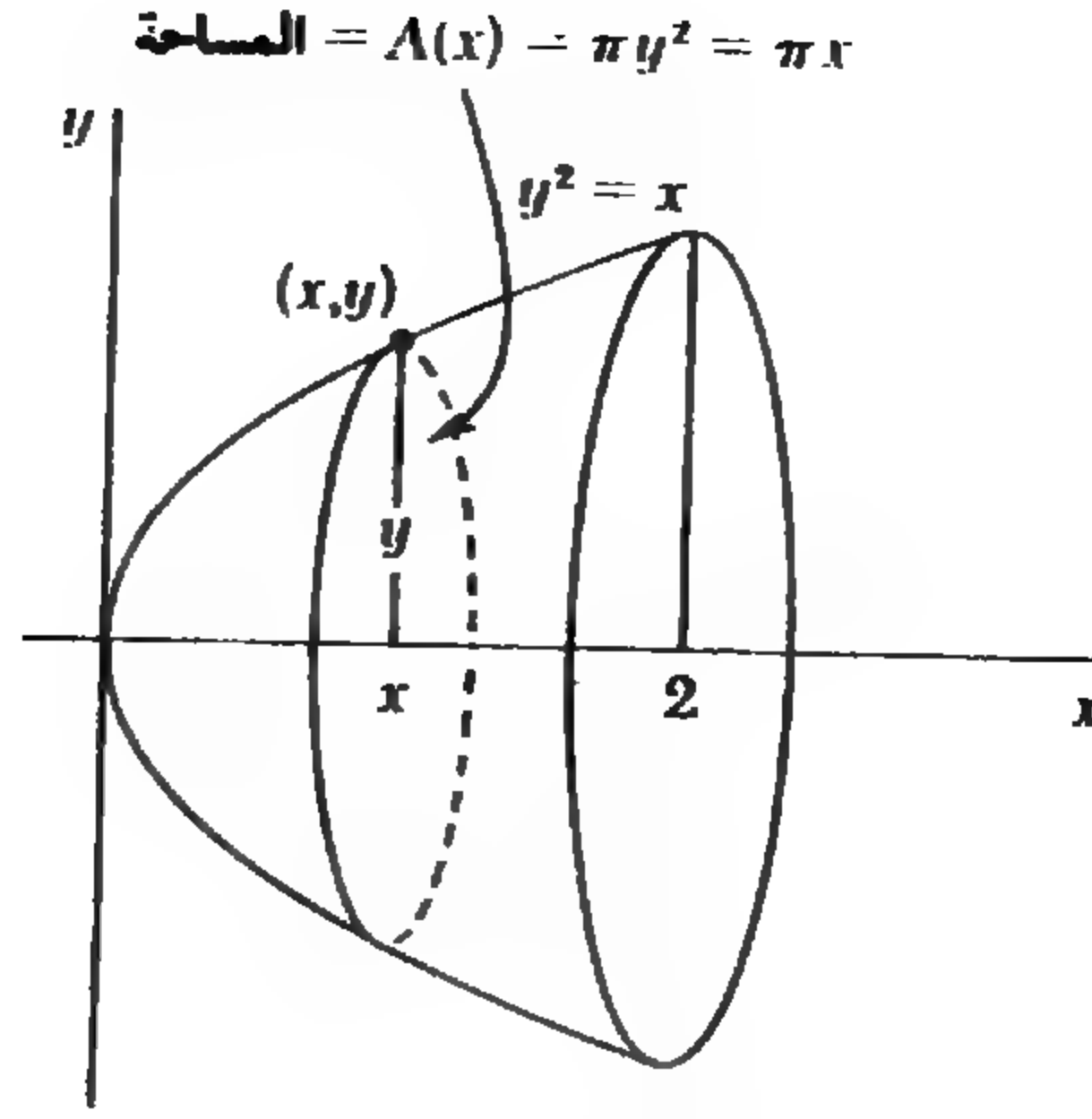
$$(١) \quad M_c = \int_a^b \rho A(u)(u - c) du$$

وهى عزم الجسم حول المستوى عند c ، حيث $a < b$ و a و b هما الاحداثيان u لأقصى وضعين على اليسار وعلى اليمين لمستوى الشريحة . العزم M_0 حول المستوى الذى يمر بنقطة الأصل ويتعامد مع المحور u هو

$$(٢) \quad M_0 = \int_a^b \rho A(u)u du$$

اذا كانت V و W هما حجم وكتلة المنطقة ، فان $W = \rho V$ و $V = \int_a^b A(u) du$ ومن المعادلة (١) يكون

$$M_c = \int_a^b \rho A(u)u du - c\rho \int_a^b A(u) du = M_0 - c\rho V = M_0 - cW$$



شكل ١١-٢٦

اذن العزم يكون صفراً حول المستوى الذي يمر بالنقطة \bar{u} ، حيث $\bar{u} = M_0 / W$. هذا هو الاحداثى u للمركز المتوسط للجسم .

مثال ١ . أوجد المركز المتوسط للجسم الدوراني الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالقطع المكافئ $y^2 = x$ والخط المستقيم $x = 2$ ، حول المحور x .

ندع المحور x هو المحور u ونوجد W و M_0 . التكامل (٢) للعزم M_0 يصبح

$$(٣) \quad M_0 = \int_a^b \rho A(x) x \, dx$$

لتكن (x, y) نقطة على القطع المكافئ المنشئ (شكل ١١-٢٦) . مساحة المقطع عند النقطة x على المحور x هي $A(x) = \pi y^2$. بما أن $y^2 = x$ ، فهذه المساحة يمكن التعبير عنها بدلالة x ، $A(x) = \pi x$. هذا التكامل فى (٣) هنا الاحداثيان x لأقصى وضعين على اليسار وعلى اليمين للمستوى القاطع ، وهما ٠ و ٢ . اذن

$$M_0 = \int_a^b \rho A(x) x \, dx = \int_0^2 \rho \pi x^2 \, dx = \frac{8\rho\pi}{3}$$

حجم الجسم هو

$$V = \int_0^2 A(x) \, dx = \int_0^2 \pi x \, dx = 2\pi$$

وبالتالى $W = 2\pi \rho$ ، ويكون $\bar{x} = M_0 / W = \frac{4}{3}$.

مسائل :

أوجد المركز المتوسط للجسم الناتج من الدوران حول المحور x للمناطق المحدودة بالمنحنيات

أدناه :

- ١ - $y = \frac{4}{x}, y = 0, x = 2, x = 4$ - ٢ $x^2 - y^2 = a^2, x = 2a, a > 0$
- ٣ - $y = e^x, y = 0, x = 0, x = b > 0$ - ٤ $y = 2\sqrt{x}, y = 0, x + 2y = 5$
- ٥ - $y = \ln x, y = 0, x = e$ - ٦ $y = e^x + e^{-x}, y = 0, x = 0, x = 1$
- ٧ - $y = x^2, x = 0, y = 4$ (في الربع الأول) - ٨ $y = x + 1/x, y = \frac{1}{2}$

أوجد المركز المتوسط للجسم الناتج من الدوران حول المحور y للمناطق المحدودة بالمنحنيات أدناه :

- ٩ - $y = x^2 + 1, y = 10$ - ١٠ $y = x^3, x = 0, y = 4$
- ١١ - $y^2 = 4px, x = 0, y = c > 0$ - ١٢ $x^2 - y^2 = 1, y = 0, y = 2$
- ١٣ - $y = e^x, y = 0, x = -1, x = 0$ - ١٤ $y = \ln x, y = 0, x = e$
- ١٥ - $y = x^2, y = 0, y = -2x + 8$ (في الربع الأول)

- ١٦ - أوجد المركز المتوسط لنصف كرة .
- ١٧ - أوجد المركز المتوسط لمحروط دائري قام نصف قطره r وارتفاعه h .
- ١٨ - أوجد المركز المتوسط للجسم الناتج من دوران النصف الأيمن للقطع الناقص $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ حول المحور x .
- ١٩ - إذا دارت المنطقة تحت القوس المركزي وعلى يمين المحور y للمنحنى $y = \cos x$ حول المحور x فأوجد المركز المتوسط للجسم الناتج .
- ٢٠ - إذا دارت المنطقة في الربع الأول المحدودة بالقطع المكافئ $y = x^2$ والمحور y والخط المستقيم $y = a, a > 0$ حول الخط المستقيم $y = a$ فأوجد المركز المتوسط للجسم الناتج .
- ٢١ - إذا دارت المنطقة في الربع الأول المحدودة بالقطع الزائد $y = 1/x$ والخطين $y = 2$ و $x = 2$ حول الخط $x = 2$ فأوجد المركز المتوسط للجسم الناتج .
- ٢٢ - جسم على هيئة مكعب ، طول ضلعه a ، يعلوه نصف كرة قاعدتها لأسفل وقطرها a أوجد المركز المتوسط للجسم .
- ٢٣ - لعبة على هيئة نصف كرة نصف قطرها 2 يعلوها مخروط نصف قطره 2 وارتفاعه 4 . لكي تستقر اللعبة عندما تهتز على قاعدتها ، مركز الكتلة لها يجب أن يقع أسفل مركز الكرة التي نصف الكرة جزء منها . إذا كانت كثافة المخروط 1 ، فماذا يجب أن تكون كثافة نصف الكرة للاستقرار ؟

٢٤ - هرم ارتفاعه h وقاعدته مربعة وطول ضلعها a . رأسه فوق مركز القاعدة . أوجد المركز المتوسط للهرم .

٢٥ - أوجد مركز الكتلة لنصف كرة كثافتها عند أي نقطة ضعف بعد النقطة عن القاعدة . (ارشاد : ρ ليست ثابتة في (١) ، (٢) . أيضاً $W \neq \rho V$. أثبت أن ، بالرغم من ذلك ،

$$\bar{u} = M_0/W$$

٢٦ - مخروط دائري قائم نصف قطره 4 وارتفاعه 8 . كثافته عند أى نقطة تتناسب مع مربع بعد النقطة عن القاعدة . أوجد مركز كتلة المخروط (أنظر الارشاد فى المسألة ٢٥) .

٦-١١

الشغل

إذا أثرت قوة ثابتة مقدارها F على جسم فحركته مسافة d على خط مستقيم ، فإن المقدار E للشغل المبذول على الجسم ، بالقوة ، يعرف بأنه

$$(١) \quad E = Fd$$

فمثلاً ، إذا رفع ثقل مقداره 20 lb مسافة 15 ft ، فإن مقدار القوة التى يجب أن تؤثر على الثقل لكى تغلب على الجاذبية هو 20 lb ، والشغل المبذول هو

$$E = 20(15) = 300 \text{ ft-lb}$$

إذا كانت وحدة المسافة هى القدم ووحدة القوة هى الباوند ، فإن وحدة الشغل هى قدم - باوند . الشغل أيضاً يمكن قياسه بالقدم - طن ، جرام - سنتيمتر وما يشبه ذلك .



إذا كانت القوة المؤثرة على الجسم غير ثابتة خلال المسافة d ، فإن (١) لا تعطى الشغل المبذول ويجب استخدام طرق متقدمة . ليكن الخط المستقيم الذى يتحرك عليه الجسم هو خط الاحداثيات x ولنفرض أن تحت تأثير القوة يتحرك الجسم من a الى b ، حيث $a < b$. لتكن $F(x)$ مقدار القوة عندما يكون الجسم عند النقطة x (شكل ١١ - ٢٧) . سندرس فقط الحالة التى تكون فيها القوة $F(x)$ موجهة على الخط ومتصلة : ليكن

$$[a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b]$$

تجزئياً للفترة $[a, b]$. إذا كان معيار التجزئـة صغيراً ، فإن القوة تتغير لكن قليلاً خلال كل فترة جزئية ، وفى الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ التى هى رقم i ، مقدارها بالتقريب هو $F(\bar{x}_i)$ حيث \bar{x}_i أى نقطة فى الفترة الجزئية . تقرب الى الشغل المبذول على الجسم فى الحركة من x_{i-1} الى x_i هو ، بالمعادلة (١) ، $F(\bar{x}_i) \Delta x_i$ ، والشغل الكلى المبذول فى حركة الجسم من a الى b هو بالتقريب حاصل الجمع

$$(٢) \quad \sum_{i=1}^n F(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

هذا هو حاصل جمع ريمان للدالة $F(x)$. باستخدام تجزئـة دقيقـة كافية يمكن التقريب الى الشغل الى أى درجة نريدها من الدقة بحواصل جمع على الصورة (٢) ، وتبعاً لذلك يعطى الشغل بالضبط بنهاية حواصل الجمع هذه

$$E = \lim_{w \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

حيث w هي معيار التجزئ. هذه النهاية هو التكامل المعين

$$E = \int_a^b F(x) dx$$

هذا التكامل يعطى أيضاً تعريفاً مقبولا للشغل المبذول دون القيد $a < b$ بفرض أن نجعل $F(x)$ مقدار القوة بإشارتها. نقصد بذلك المقدار نفسه اذا كانت القوة متجهة في الاتجاه الموجب لخط الاحداثيات وسالب المقدار اذا كان القوة متجهة في الاتجاه السالب.

١١ - ٦ تعريف. لتكن $F(x)$ مقدار القوة، بإشارتها، التي تؤثر على جسم عند النقطة x على خط الاحداثيات لتسبب حركته على الخط، ولنفرض أن القوة متجهة على الخط. كمية الشغل المبذول E على الجسم، بواسطة القوة، في تحريكه من a الى b هي

$$E = \int_a^b F(x) dx$$

مثال ١. زنبرك طوله الطبيعي، أى طوله غير المشدود، 12 in ، أوجد الشغل المبذول لاستطالته 3 in .

مقدار القوة المطلوبة ليظل الزنبرك في حالة شد أو ضغط، بقانون هوك (Hooke)، يتناسب مع المسافة التي يستطيلها أو يتضاغطها الزنبرك. ندخل خط الاحداثيات x على محور الزنبرك، وحيث نقطة الأصل عند الطرف غير المثبت للزنبرك عندما يكون في حالته الطبيعية. اذا كانت $F(x)$ مقدار القوة بإشارتها المطلوبة لاستطالة الزنبرك أو تضاعفه مسافة x ، فإن بقانون هوك

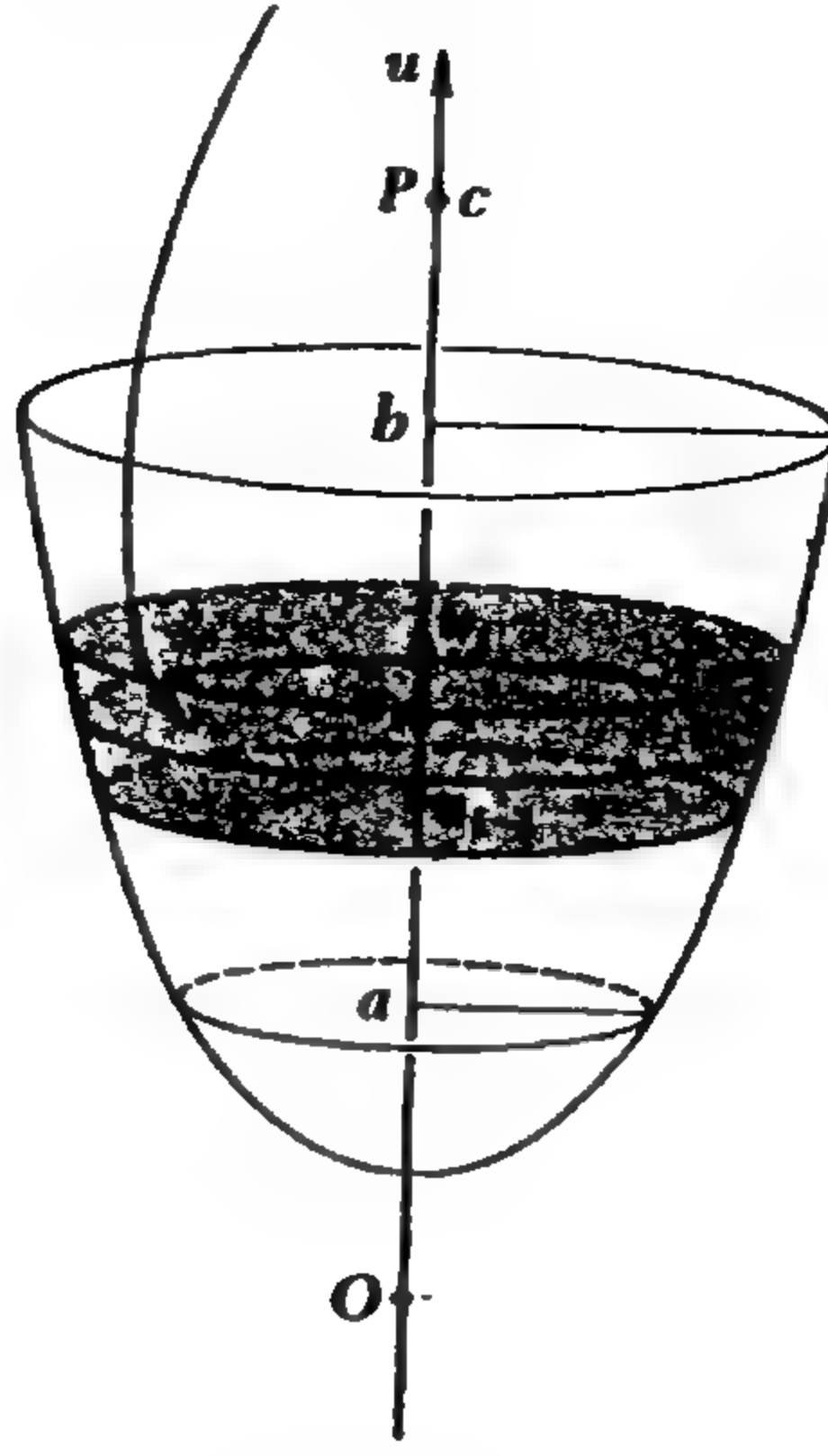
$$(٣) \quad F(x) = kx$$

الثابت الموجب k يعتمد على الصلابة والطول الطبيعي للزنبرك ولتعيينه نحتاج معلومات إضافية. نفرض أننا نحتاج الى قوة مقدارها 20 lb ليظل الزنبرك مشدوداً الى مسافة 6 in . عندئذ يكون $20 = k6$ ومنها $k = \frac{10}{3}$ ، (٣) تصبح لهذا الزنبرك الخاص $F(x) = \frac{10}{3}x$. الشغل المبذول لاستطالة الزنبرك 3 in هو، من التعريف ١١ - ٦،

$$E = \int_0^3 \frac{10}{3}x dx = \frac{5}{3}x^2 \Big|_0^3 = 15 \text{ in.-lb}$$

مسألة شائعة هي إيجاد الشغل المبذول لضخ كل أو جزء من سائل في وعاء لنقطة ما فوق أو على نفس ارتفاع المستوى الأصلي للسائل. رغم أن مقدار القوة المطلوبة يكون ثابتاً، لأنه وزن السائل، فإن السائل قرب قمة الوعاء يرفع مسافة أقصر عن السائل قرب القاعدة، وعلى ذلك لا يمكن استخدام (١). يمكننا، مع ذلك، إيجاد الشغل المبذول بتقسيم السائل الى شرائح رقيقة أفقية. كل نقطة لاي شريحة واحدة تتحرك بالتقريب نفس المسافة والشغل المطلوب لرفع كل شريحة يمكن التقريب اليه. حاصل جمع كميات الشغل المبذولة، كل على حدة، هو تقريب للشغل الكلى.

المساحة $A(\bar{u}_i) =$



شكل ١١-٢٨

سنشرح العملية بتفصيل أكثر . ندخل خط احداثيات u عمودى على سطح السائل ومنتجه الى أعلى (شكل ١١ - ٢٨) . نقطة الأصل يمكن أن تكون عند أى نقطة مناسبة . لتكن $a < b$ و a و b هما الاحداثيان u لمستوى السائل عند نهاية وبدء عملية الضخ لتكن σ هى وزن وحدة الحجم للسائل . مثلاً للماء ، σ هى بالتقريب 62.5 lb/ cu. ft . نقسم السائل الى شرائح أفقية رقيقة بمستويات عمودية على المحور u . هذه تعين تجزئاً

$$[a = u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n = b]$$

للفترة $[a, b]$. لتكن \bar{u}_i أى نقطة فى الفترة الجزئية رقم i أى $[u_{i-1}, u_i]$. اذا كانت $A(u)$ ترمز الى مساحة مقطع السائل بمستوى عمودى على المحور u عند النقطة u ، فان حجم الشريحة رقم i هو بالتقريب $A(\bar{u}_i) \Delta u_i$ مقدار القوة اللازمة لرفع هذه الشريحة هو وزنها ، وهذا بالتقريب هو $\sigma A(\bar{u}_i) \Delta u_i$. الشغل اللازم لرفع الشريحة رقم i للنقطة P التى احداثياتها c هو ، من (١) بالتقريب حاصل ضرب هذا العدد فى المسافة التقريبية $c - \bar{u}_i$ التى ترفعها الشريحة ،

$$(c - \bar{u}_i) \sigma A(\bar{u}_i) \Delta u_i$$

حاصل جمع هاته ، يكون

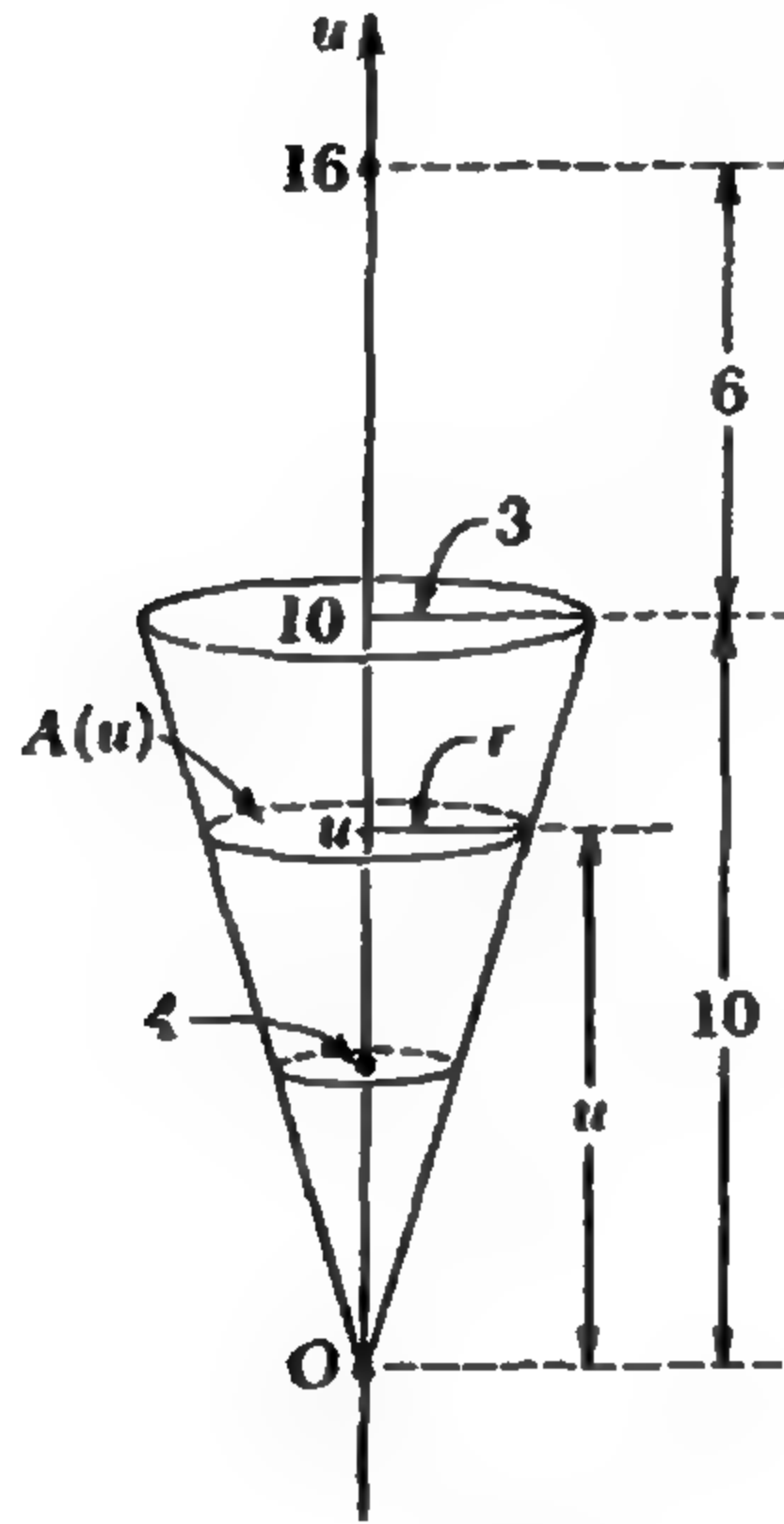
$$(٤) \quad \sum_{i=1}^n (c - \bar{u}_i) \sigma A(\bar{u}_i) \Delta u_i$$

هو تقريب للشغل الكلى المبذول لرفع كل الشرائح للنقطة P . كلما زادت دقة التجزىء ، كلما كان التقريب أفضل . نهاية حاصل الجمع هى بالضبط الشغل المبذول . أى أن

$$\begin{aligned}
 E &= \lim_{w \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (c - \bar{u}_i) \sigma A(\bar{u}_i) \Delta u_i \\
 (5) \quad &= \int_a^b (c - u) \sigma A(u) du
 \end{aligned}$$

حيث w هي معيار التجزىء .

مثال ٢ . مخروط دائري قائم ارتفاعه 10 ft وقطر قاعدته 6 ft موضوع كما فى الشكل ١١ - ٢٩ ، وهو مملوء بالماء . يضخ الماء منه الى الخارج الى نقطة على ارتفاع 6 ft أعلى القمة الى أن يصبح عمق الماء المتبقى 4 ft . أوجد الشغل المبذول .



شكل ١١ - ٢٩

ليكن المحور u هو محور المخروط مع أخذ نقطة الأصل عند رأس المخروط . احداثى c فى (٥) هو 16 . حدا التكامل هما الاحداثيان ، لمستوى سطح الماء عند نهاية وبدء عملية الضخ ، وبالتالي هما $b = 10$ و $a = 4$ اذن من (٥) الشغل المبذول هو

$$E = \int_4^{10} (16 - u) \sigma A(u) du$$

اذا كانت r هي نصف قطر الشريحة عند النقطة u ، فان $A(u) = \pi r^2$. لايجاد r بدلالة u ، لدينا من تشابه المثلثات $r/3 = u/10$. اذن

$$A(u) = \pi r^2 = \pi \left(\frac{3}{10}u\right)^2 \quad \text{ويكون}$$

$$\begin{aligned}
 E &= \int_4^{10} (16 - u) \sigma \frac{9\pi}{100} u^2 du = \frac{9\pi\sigma}{100} \int_4^{10} (16u^2 - u^3) du \\
 &= \frac{9\pi\sigma}{100} \left[\frac{16}{3} u^3 - \frac{u^4}{4} \right]_4^{10} = \frac{5751\pi\sigma}{25} \approx 45,168 \text{ ft-lb.}
 \end{aligned}$$

مسائل :

- ١ - الطول الطبيعي لزنبك معين هو 16 in. اذا كانت القوة 8 lb ستضغط الزنبك الى طول 12 in ، فما مقدار القوة اللازمة لضغط الزنبك الى طول 9 in ؟ أوجد الشغل المبذول لضغطه من الطول 12 in الى الطول 9 in .
- ٢ - مقدار قوة جذب الأرض لجسم كتلته m عند أى نقطة داخلها وعلى بعد r من المركز هو mgr/R ، حيث R هي نصف قطر الأرض وحيث g هي عجلة الجاذبية الأرضية عند سطح الأرض . هذا هو وزن الجسم عند هذه النقطة . أوجد الشغل المبذول لرفع جسم من مسافة a تحت سطح الأرض الى السطح .
- ٣ - دلو ماء يزن 24 lb يرفع رأسياً بمعدل 30 ft/ min . وزن الدلو نفسه يهمل . أوجد الشغل المبذول لرفع الدلو 60 ft .
- ٤ - حل المسألة ٣ بفرض أن الماء يتسرب من الدلو بمعدل ثابت مقداره 2 lb/ min .
- ٥ - كتلة وزنها c lb يراد رفعها لقمة مبنى ارتفاعه h ft بحبل مربوط بونش على قمة المبنى . اذا كان الحبل وزنه b lb/ ft ، أوجد الشغل المبذول .
- ٦ - الكترونان يتنافران كل منهما من الآخر بقوة تتناسب عكسياً مع مربع المسافة بينهما . أوجد الشغل المبذول في حركة الكترون من نقطة 2 units من الكترون ثابت الى نقطة i unit بعيداً عن الخط الواصل بينهما .
- ٧ - الكترونان يتنافران كل منهما من الآخر بقوة تتناسب عكسياً مع مربع المسافة بينهما . الكترونان يظلان ثابتين على خط الاحداثيات عند النقطتين 6 و -6 . أوجد الشغل المبذول لتحرك الكترون ثالث على الخط (أ) من النقطة -2 الى النقطة 3 ، (ب) من 10 الى 7 .
- ٨ - اسطوانة طولها h ومقطعها مساحتها A ثابتة ، والاسطوانة مقفلة عند طرف واحد . صمام يضغط غازاً في الاسطوانة . ليكن p الضغط (القوة لوحدة المساحة) على الصمام ، الناتج عن الغاز . اذا كان محور الاسطوانة هو المحور x ، متجهاً نحو الطرف المقفل ، فاثبت أن الشغل المبذول لتحريك الصمام من نقطة x_1 الى نقطة x_2 هو $E = A \int_{x_1}^{x_2} p dx$.
- ٩ - بالرجوع الى المسألة ٨ ، أوجد E اذا كانت العلاقة بين الضغط والحجم v للغاز هي $pv = c$ حيث c ثابت ما .
- ١٠ - بالرجوع الى المسألة ٨ ، أوجد E اذا كانت العلاقة بين الضغط والحجم v للغاز هي $pv^{1.4} = c$ حيث c ثابت ما .
- ١١ - صهريج ارتفاعه 6 ft وقاعدته مربعة طول ضلعها 6 ft مملوء بالماء . أوجد الشغل المبذول لضخ نصف كمية الماء فوق قمة الصهريج .
- ١٢ - حل المسألة ١١ اذا كان الماء يضخ خلال أنبوبة فتحتها على بعد 5 ft فوق قمة الصهريج .
- ١٣ - صهريج أسطوانى نصف قطره r وارتفاعه h . أوجد الشغل المبذول لضخ الماء فوق قمة

- الصهريج اذا كان (أ) الصهريج ملىء وكل الماء يضخ للخارج ، (ب) الصهريج ملىء بالماء ونصف الماء يضخ للخارج ، (ج) الصهريج ملىء للنصف وكل الماء يضخ للخارج .
- ١٤ - صهريج مياه مخروطى الشكل ، موضوع كما هو موضح فى الشكل ١١ - ٢٩ ، نصف قطره 2 ft وارتفاعه 6 ft . اذا كان الصهريج مملوءاً لنصفه ، أوجد الشغل المبذول لضخ الماء لقمة الصهريج .
- ١٥ - وعاء على هيئة نصف كرة نصف قطرها ٢ ft ، ملىء بالماء . أوجد الشغل المبذول لضخ الماء فوق قمة الوعاء .
- ١٦ - صهريج معين عمقه 8 ft وهو سطح دورانى ناتج من دوران القطع المكافئ $y = \frac{1}{2}x^2$ حول محوره . اذا كان الصهريج ملىء بالماء ، فأوجد الشغل المبذول لضخ الماء الى النقطة 10 ft فوق قمة الصهريج .
- ١٧ - صهريج أسطوانى أفقى قطره 4 ft وطوله 10 ft ملىء بزيث ثقله 60 lb/cu ft . يفرغ الصهريج بمضخة موضوعة على ارتفاع أربعة أقدام فوق قمة الصهريج . أوجد الشغل المبذول لتفريغ الصهريج .
- ١٨ - صهريج تخزين على هيئة نصف كرة نصف قطرها 12 ft ، تعلوها أسطوانة لها نفس نصف القطر وارتفاعه 8 ft . اذا كان الصهريج مليئاً بالسائل لغاية 2 ft من القمة ، فأوجد الشغل المبذول لضخ السائل فوق قمة الصهريج .

٧-١١

ضغط السائل

اذا كانت منطقة مستوية أفقية مساحتها A تحت سطح سائل بـ h units ، فان وزن عمود السائل فوق المنطقة يبذل قوة عليها (شكل ١١ - ٣٠) . الوزن هو الحجم Ah للعمود مضروباً فى الوزن σ لكل وحدة حجم للسائل ، وهذا الوزن $Ah\sigma$ يعرف بأنه القوة F على المنطقة ، $F = Ah\sigma$. للماء ، σ تكون بالتقريب 62.5 lb/cu ft . القوة على وحدة المساحة تسمى ضغط السائل على عمق h اذا كانت p ترمز الى الضغط فان

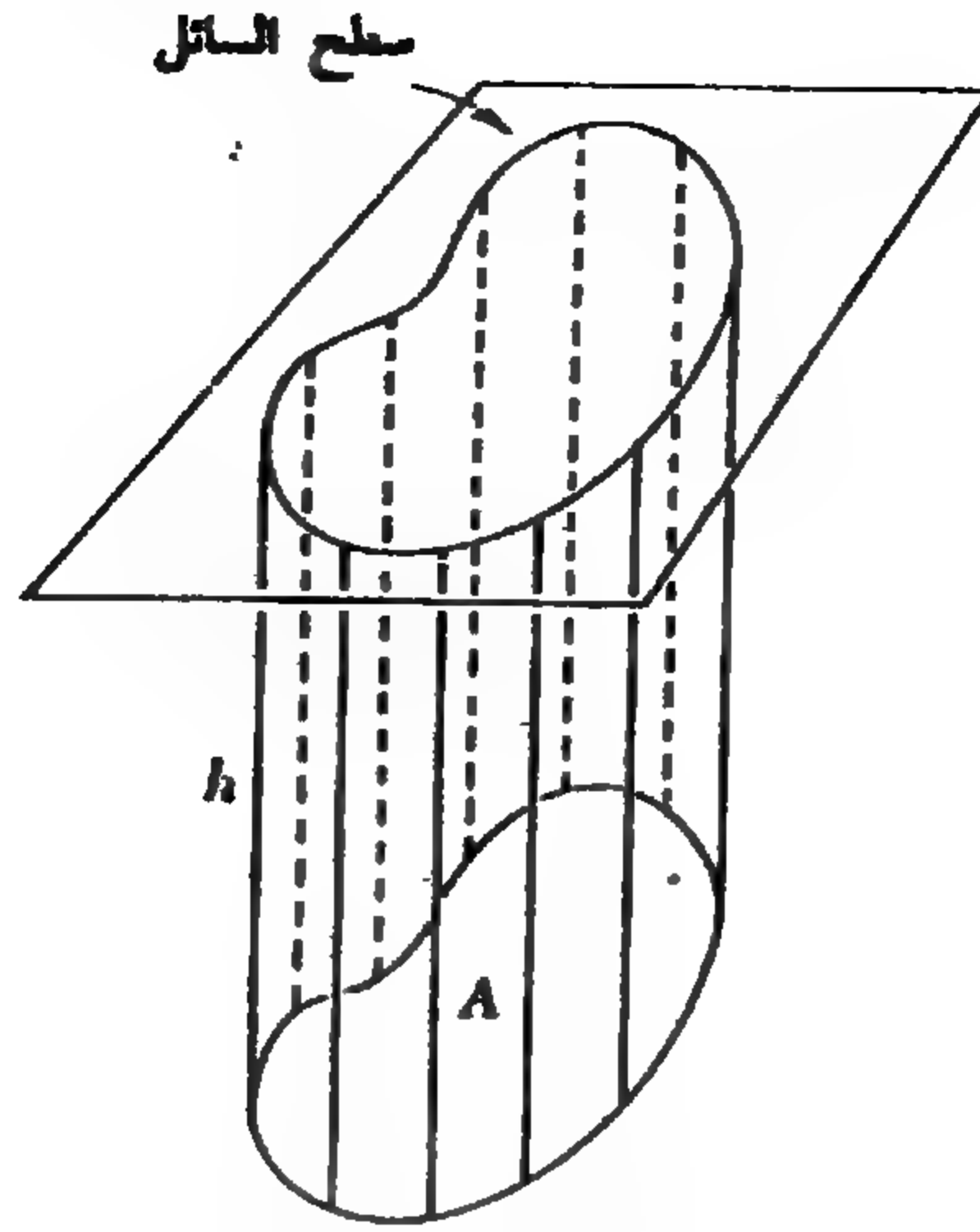
$$p = \frac{F}{A} = \sigma h$$

والقوة على منطقة أفقية مساحتها A هي

(١)

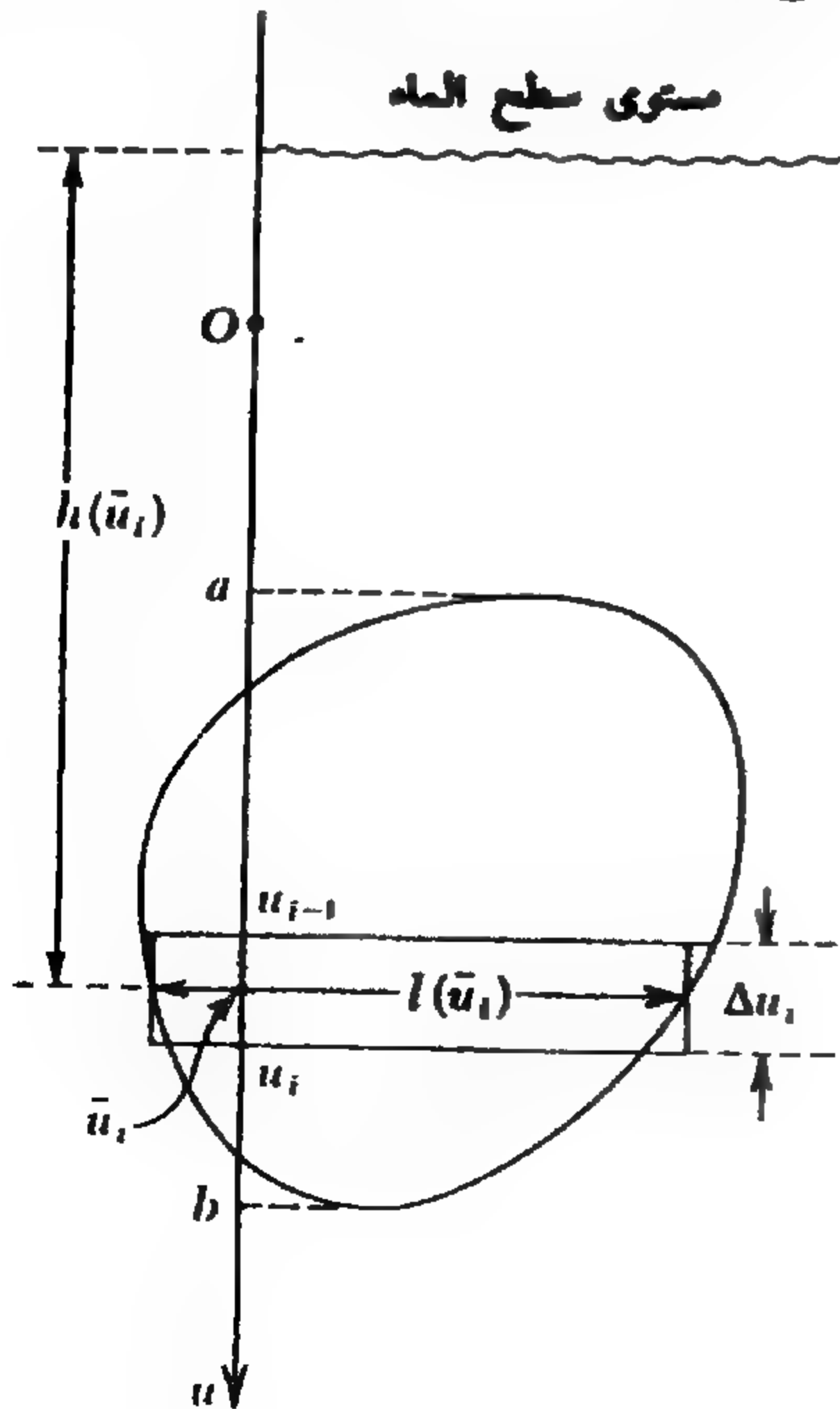
$$F = pA$$

من أساسيات الفيزياء ، ان عند كل نقطة ، الضغط لا يكون متجهاً فقط لأسفل ، بل بقوة متساوية فى جميع الاتجاهات .



شكل ١١-٣٠

ندرس الآن منطقة مستوية رأسية ، مثل تلك التي في الشكل ١١-٣١ . الصيغة (١) لا يمكن استخدامها لحساب القوة عليها . إذ أن الضغط ، ليس حتى بالتقريب ثابت على المنطقة ، بل يتغير بشدة بين القمة والقاعدة . لكن يمكننا التقريب إلى القوة بتقسيم المنطقة إلى شرائط أفقية ضيقة . الضغط يتغير بكمية صغيرة داخل أي شريط ، وتقريب جيد للقوة على الشريط يعطى بحاصل ضرب مساحة الشريط والضغط عند نقطة ما عليه . حاصل جمع القوى على هذه الشرائط سيقرب إلى القوة على المنطقة .



شكل ١١-٣١

الضغط على المستطيل هو بالتقريب $h(\bar{u})$. القوة بالتقريب هي الضغط عند \bar{u} مضروباً في مساحة المستطيل .

سنصف ذلك بتفصيل أكثر . ندخل محور احداثيات رأسى u فى مستوى المنطقة . من الممكن أن يكون متجهاً لأعلى أو لأسفل ، ونقطة الأصل يمكن أن تكون عند أى نقطة مناسبة . فى الشكل المحور متجه لأسفل . العرض الأفقى للمنطقة عند النقطة التى احداثيتها هو u سيرمز له بالرمز الدالى $l(u)$ والعمق هناك سيرمز له بالرمز $h(u)$. لتكن $a < b$ و a و b هما الاحداثيان u للنقطتين القصوين لمسقط المنطقة على المحور u . ليكن

$$[a = u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n = b]$$

تجزئاً للفترة $[a, b]$. الخطوط المارة بنقط التجزى وعمودية على المحور u تقسم المنطقة الى شرائط أفقية . لتكن u_i نقطة فى الفترة الجزئية $[u_{i-1}, u_i]$ ، وكالمعتاد ، كما هو موضح فى الشكل ، نرسم مستطيلاً يقرب الى الشريط . طول المستطيل رقم i هو $l(\bar{u}_i)$ ومساحته هى $A = l(\bar{u}_i) \Delta u_i$ ، والضغط على عمق $h(\bar{u}_i)$ هو $p = \sigma h(\bar{u}_i)$. اذا كان الشريط ضيقاً ، فان القوة عليه تكون بالتقريب مساوية للقوة على المستطيل ، وهذه بدورها تساوى بالتقريب pA أى بالتقريب تساوى

$$\sigma h(\bar{u}_i) l(\bar{u}_i) \Delta u_i$$

القوة على المنطقة تكون بالتقريب مساوية لحاصل جمع هاته ،

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n \sigma h(\bar{u}_i) l(\bar{u}_i) \Delta u_i$$

هذا هو حاصل جمع ريمان للدالة $\sigma h(u) l(u)$. سنفترض أن h و l دالتان متصلتان . نهاية حاصل الجمع (٢) عندما تضيق الشرائط هى بالضبط القوة على المنطقة . أى أن

$$F = \lim_{w \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sigma h(\bar{u}_i) l(\bar{u}_i) \Delta u_i = \int_a^b \sigma h(u) l(u) du$$

حيث w معيار التجزى .

هذا ما نذهب اليه فى الحالة العامة . فى مسألة خاصة نوجد الآن تعبيرات لـ $h(u)$ و $l(u)$ بدلالة u ونوجد قيمة التكامل .

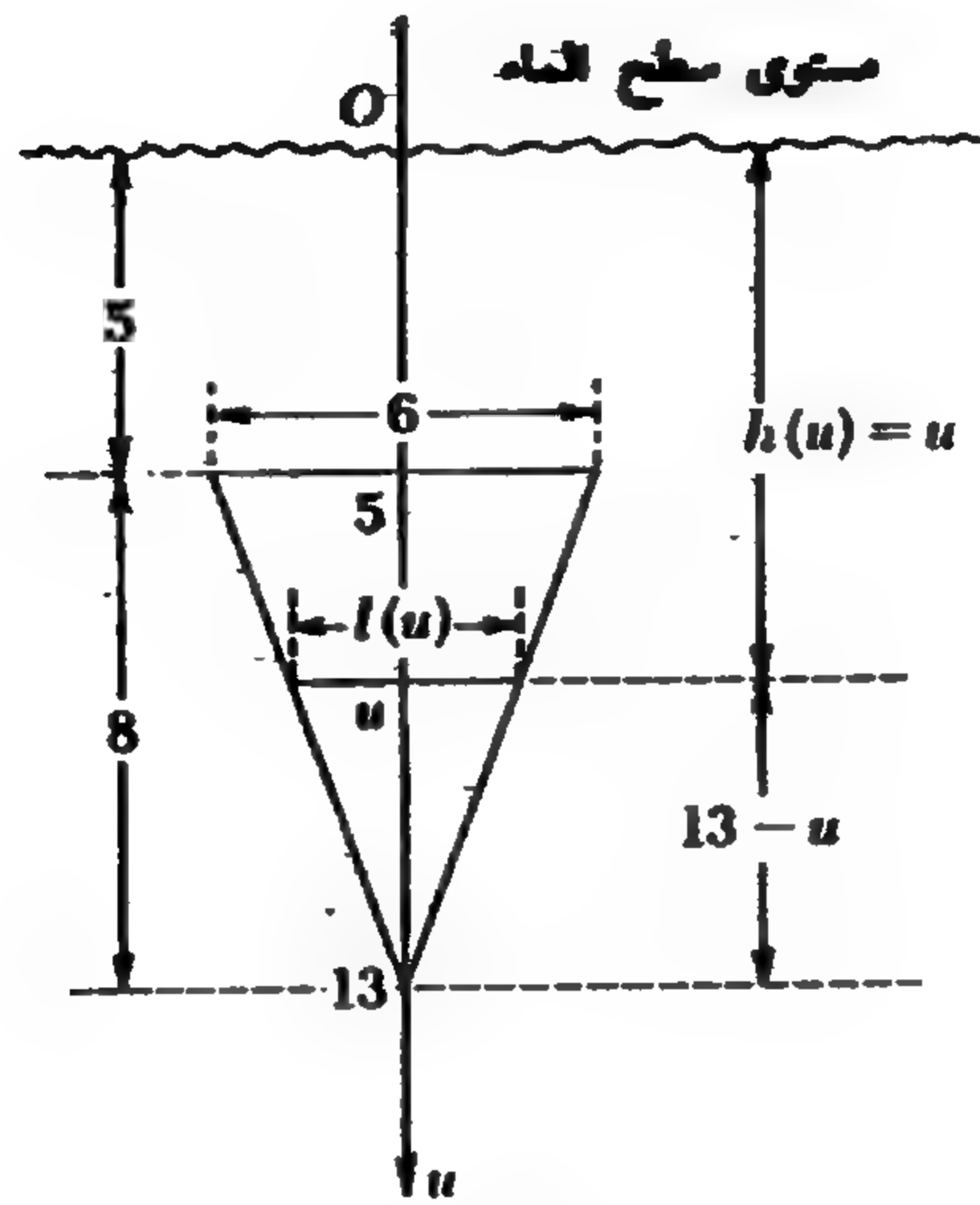
١١-٧ ضغط المائع . لتكن منطقة مستوية رأسية مغمورة فى سائل وزنه σ لكل وحدة حجم . ندخل محور احداثيات رأسى u . لتكن $h(u)$ عمق السائل عند النقطة u على المحور u ولتكن $l(u)$ العرض الأفقى للمنطقة هناك القوة على المنطقة تعطى بالصيغة

$$(3) \quad F = \int_a^b \sigma h(u) l(u) du$$

حدا التكامل $a < b$ و b و a ، هما الاحداثيان u لأقصى وضعين للخط الأفقى المتغير المحدد للعرض $l(u)$ لجزء المنطقة المغمور فى السائل . كل من $h(u)$ و $l(u)$ يجب ألا يكون سالباً لجميع u فى $[a, b]$.

لقد تقدمنا بطريقة غير رسمية ولم نعرف ما المقصود بالقوة على منطقة رأسية . من المعقول الآن أن نعرف القوة على المنطقة بأنها التكامل (٣) .

مثال ١ . بوابة رأسية في سد على صورة مثلث متساوي الساقين طول القاعدة 6 ft والارتفاع 8 ft . القاعدة أفقية وأعلى الرأس المقابل (شكل ١١ - ٣٢) . أوجد القوة على البوابة عندما يكون مستوى سطح الماء 5 ft فوق قمة البوابة .



شكل ١١ - ٣٢

ندخل محور الاحداثيات u متجهاً لأسفل ونقطة الأصل عند مستوى سطح الماء . أقصى وضعين للخط الأفقي $l(u)$ هما قاعدة ورأس المثلث . الاحداثيان u لهاتين النقطتين هما 5 و 13 وهما حدا التكامل . العرض $l(u)$ للمثلث عند النقطة التي احداثيتها u يمكن إيجاده من تشابه المثلثات :

$$\frac{l(u)}{6} = \frac{13-u}{8}, \quad l(u) = \frac{3}{4}(13-u)$$

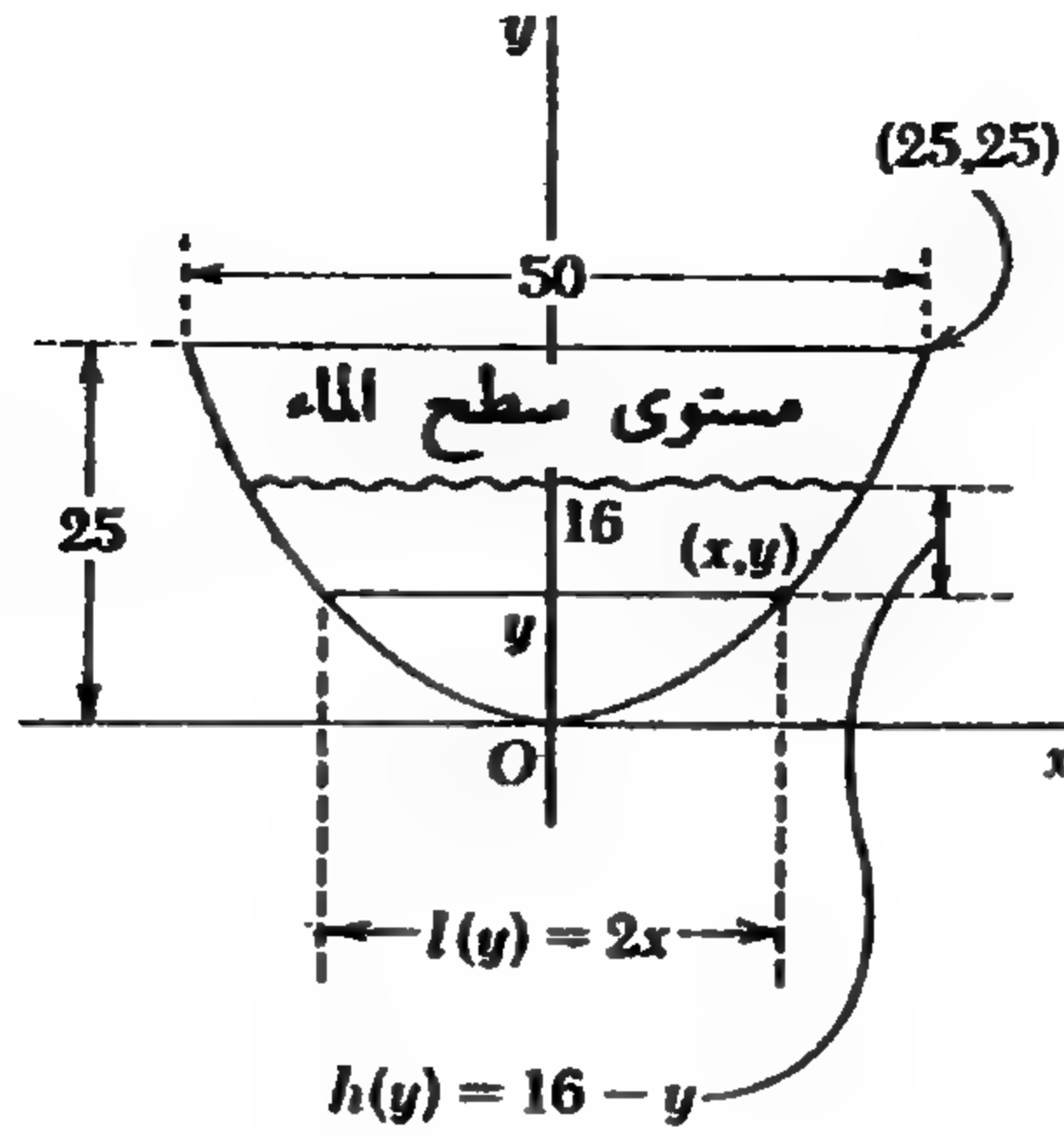
العمق عند هذه النقطة هو $h(u) = u$. المعادلة (٣) تعطى القوة

$$\begin{aligned} F &= \int_5^{13} \sigma u \frac{3}{4}(13-u) du = \frac{3\sigma}{4} \int_5^{13} (13u - u^2) du \\ &= \frac{3\sigma}{4} \left[\frac{13}{2} u^2 - \frac{1}{3} u^3 \right]_5^{13} = 184\sigma. \end{aligned}$$

وحيث أن $\sigma = 62.5 \text{ lb/ cu. ft}$ للماء ، فإن

$$F = (184)(62.5) = 11,500 \text{ lb}$$

مثال ٢ . سد على شكل قطع مكافئ رأسه إلى تحت . قمة السد طولها 50 ft ، وارتفاع السد 25 ft . أوجد القوة على السد عندما يكون عمق الماء 16 ft .



شكل ١١-٣٣

السد موضح في الشكل ١١-٣٣ . نحتاج الى معادلة للقطع المكافئ ولكي نحصل على أبسط صورة نأخذ المحور « متجهاً الى أعلى ونقطة الأصل عند الرأس ونسميه المحور y . نحتاج أيضاً الى المحور x متجهاً الى اليمين ، كما في الشكل . الصيغة (٣) تصبح الآن

$$(٤) \quad F = \int_a^b \sigma h(y) l(y) dy$$

يوجد ضغط فقط على جزء السد تحت الماء . اذن حدا التكامل هما $y=0$ و $y=16$. العمق عند النقطة y هو $h(y) = 16 - y$ لايجاد عرض القطع المكافئ عند y ، نحتاج الى معادلته هذه ستكون على الصورة $y = ax^2$. بما أن القطع المكافئ يجب أن يمر بالنقطة (25, 25) ، اذن $a = 1/25$ ، والمعادلة تكون $y = x^2 / 25$. اذن

$$l(y) = 2x = 10\sqrt{y}$$

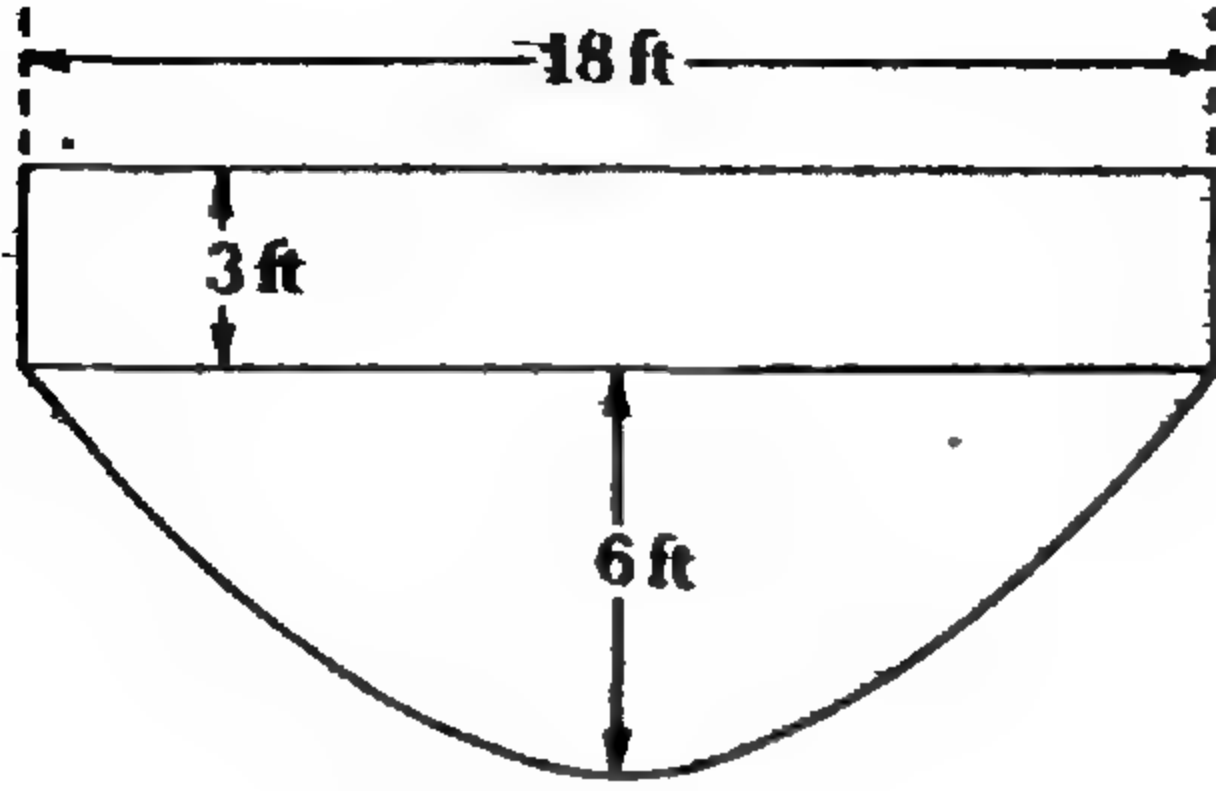
لاحظ أن $l(y)$ و $h(y)$ ليسا سالبين لـ $0 \leq y \leq 16$. المعادلة (٤) تعطى للقوة

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{16} \sigma (16 - y) 10\sqrt{y} dy = 10\sigma \int_0^{16} (16y^{1/2} - y^{3/2}) dy \\ &= 10\sigma \left[\frac{32}{3} y^{3/2} - \frac{2}{5} y^{5/2} \right]_0^{16} = \frac{6144}{5} \sigma. \end{aligned}$$

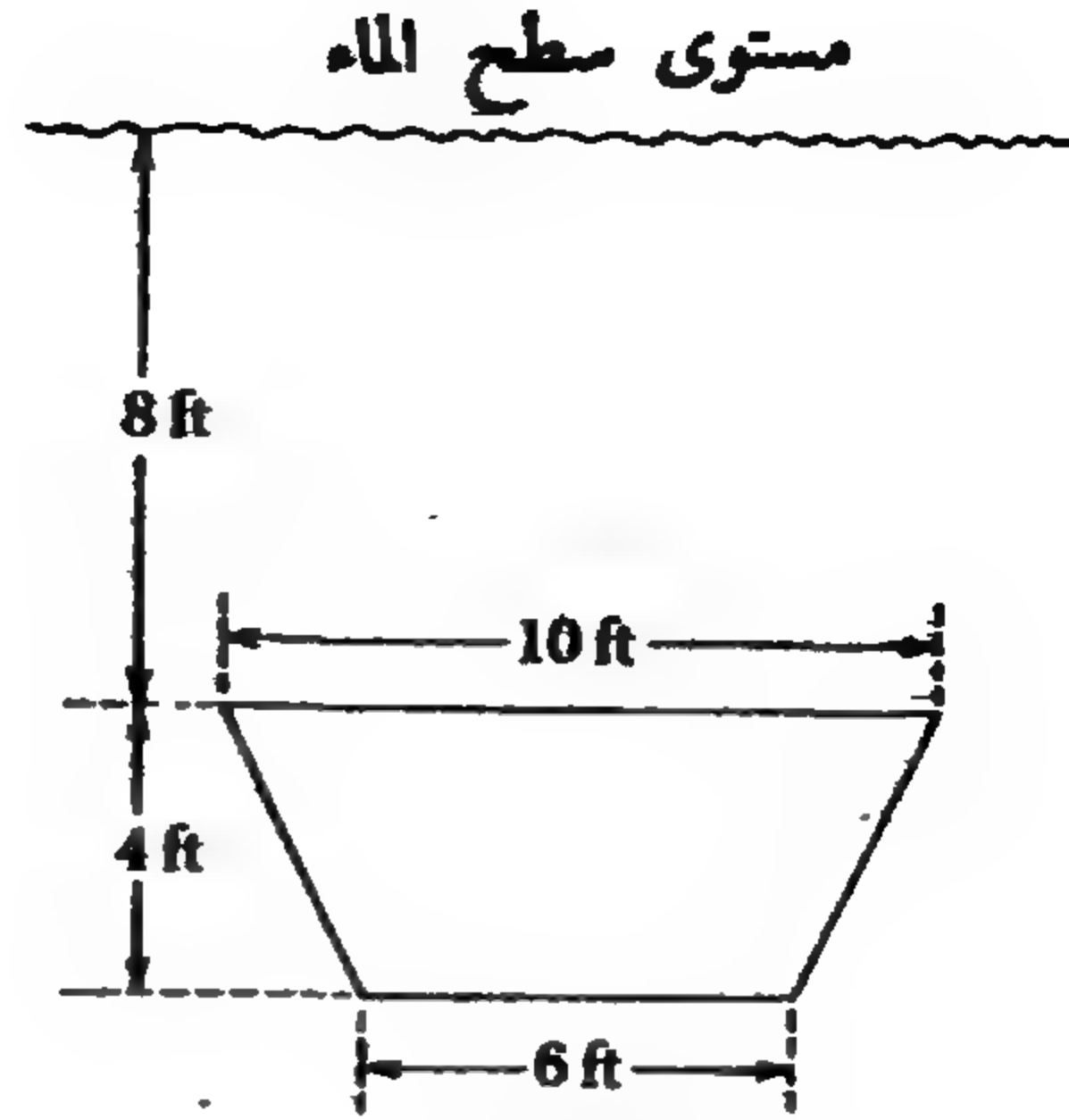
مسائل :

- ١- لوح مستطيل الشكل بعده 5 ft و 3 غمس رأسياً في سائل بالضغط الأكبر أفقياً . أوجد القوة على جانب واحد للوح اذا كانت (أ) القمة في سطح السائل ، (ب) القمة على بعد 4 ft أسفل سطح السائل ، (ج) القمة على بعد 1 ft أعلى سطح السائل .

- ٢ - بوابة رأسية في سد على هيئة مثلث متساوي الساقين قاعدته أفقية والرأس المقابل لأسفل . ارتفاع المثلث 6 ft وطول القاعدة 10 ft . أوجد القوة على البوابة عندما يكون مستوى سطح الماء (أ) عند قمة البوابة ، (ب) أعلى من قمة البوابة بمسافة 2 ft ، (ج) أسفل قمة البوابة بمسافة 2 ft .
- ٣ - حوض للمياه طرفه مثلث قائم متساوي الساقين ووتره أفقى . طول كل ضلع 2 ft . أوجد القوة على الطرف عندما يكون الحوض مملوءاً بالماء .
- ٤ - برميل زيت أسطوانى قطره 3 ft وطوله 5 ft ، موضوع على جانبه . أوجد القوة على طرف واحد عندما يكون البرميل مملوءاً الى نصفه بزيوت ثقله 60 lb/cu. ft .
- ٥ - واجهة سد خرساني على شكل قطع مكافئ رأسه لأسفل . عرضه 6 ft عند القمة وارتفاعه 4 ft . عارضة خشبية رأسية على قمة السد تزيد ارتفاعه بمقدار 2 ft أخرى . أوجد القوة على الجزء المسلح للسد عندما يكون الماء عمقه 6 ft .
- ٦ - لوح على شكل قطع ناقص طولاً محورية الأكبر والأصغر 6 in و 10 in مقطوع على طول المحور الأكبر . غمس اللوح رأسياً في سائل بحيث أن المحور الأكبر يكون في السطح . أوجد القوة على جانب واحد من اللوح .
- ٧ - أوجد القوة على جانب واحد للوح مربع الشكل طول ضلعه 3 ft ، مغمور في سائل بحيث أن أحد أقطاره يكون رأسياً وركنه الأعلى يكون في السطح .
- ٨ - بوابة رأسية في سد على شكل شبه منحرف متساوي الساقين أبعاده ووضع موضحة في الشكل ١١ - ٣٤ . أوجد القوة على البوابة عندما يكون مستوى سطح الماء 8 ft فوق قمة البوابة .
- ٩ - أوجد القوة على وجه واحد للوح محدود بالقطعيتين المكافئتين $y^2 = 2(6 - x)$ و $y^2 = 2x$ ومغمور في سائل حيث المحور y الموجب الى أعلى والسائل مجرد يغطي اللوح .
- ١٠ - بوابة مستطيلة الشكل في خزان ، طولها 10 ft ، وارتفاعها 5 ft والضلع الأكبر لها أفقى . إذا كانت 50,000 lb هي أكبر قوة يمكن تحملها بأمان ، ما هو الارتفاع فوق قمة البوابة الذي يمكن السماح للماء أن يرتفع عليه ؟
- ١١ - سد له بوابة دائرية رأسية نصف قطرها 2 ft . أوجد القوة على البوابة عندما يكون مستوى الماء على مسافة 8 ft فوق مركز البوابة .
- ١٢ - واجهة سد على شكل قطع مكافئ رأسه لأسفل ، ارتفاعه 6 ft وعرضه 18 ft عند القمة ، يعلوه مستطيل ارتفاعه 3 ft (شكل ١١ - ٣٥) . أوجد القوة على السد عندما يكون الماء عند القمة .
- ١٣ - بوابة رأسية في سد ، على شكل مثلث بضلع أفقى والرأس المقابل أعلى ذلك الضلع وأسفل السطح بمقدار $d > 0$ ft . طول القاعدة b ft ، والارتفاع هو c ft أثبت أن القوة على البوابة هي نفس المقدار بصرف النظر عن شكل المثلث .
- ١٤ - الوزن لوحدة الحجم لسائل افتراضى ليس ثابتاً بل بسبب قابليته للامتصاص يزداد الوزن مع العمق ، ويكون على عمق h مساوياً لـ $c(1 + \sqrt[3]{h})$ حيث c ثابت . أوجد القوة على جانب واحد للوح رأسى على شكل مثلث قائم طولاً ضلعيه 6 in و 4 in مغمور في السائل بالضلع الأصغر أفقياً وأعلى الرأس المقابل وعلى بعد 4 in تحت السطح .



شكل ١١-٢٥



شكل ١١-٢٤

- ١٥ - سد يعترض نهراً ، له بوابة مربعة رأسية طول ضلعها 2 ft ، وأضلاعها أفقية ورأسية . النهر في وقت الفيضان ، ويرتفع مستوى سطح الماء بمعدل 1.5 ft في اليوم . ما هي القوة التي على البوابة عندما يكون الماء على ارتفاع 6 ft فوق قمة البوابة ، وما معدل زيادة القوة وقتئذ ؟
- ١٦ - جانب من صهريج مستطيل طوله 6 ft وارتفاعه 4 ft . صب سائل ثقله σ_1 لوحدة الحجم لعمق 2 ft في الصهريج . صب سائل آخر أخف ثقله σ_2 لوحدة الحجم بحرص فوق سطح الأول بدون أى مزج ولعمق إضافي مقداره 1 ft . أوجد القوة على جانب الصهريج . إذا امتزج السائلان امتزاجاً كلياً فهل القوة على جانب الصهريج تزيد أم تنقص ؟
- ١٧ - أثبت أن القوة على جانب واحد لمنطقة مستوية رأسية مغمورة في سائل هي σhA ، حيث σ وزن وحدة الحجم للسائل ، h عمق المركز المتوسط للمنطقة ، A مساحة المنطقة . استخدم ذلك لتحقيق النتيجة التي حصلنا عليها للقوة على البوابة المثلثية في مثال ١ .
- ١٨ - أوجد القوة على البوابة الدائرية في المسألة ١١ بطريقة المسألة ١٧ .
- ١٩ - أوجد بطريقة المسألة ١٧ القوة التي على البوابة المثلثية في المسألة ١٣ (أنظر مثال ٣ ، ببند ١١-٣) .
- ٢٠ - بوابة مربعة رأسية في سد ، طول ضلعها 2 ft ولها ضلع أفقي . مستوى سطح الماء هو 6 ft فوق قمة البوابة . أوجد العزم بسبب قوة الماء على البوابة حول خط أفقي على بعد c ft تحت السطح . (ارشاد : قرب إلى العزم بسبب القوة على شريط أفقي ضيق) . دعمت البوابة بقضيب أفقي . ليكون للقضيب تأثير ، يجب وضعه بحيث لا يوجد ميل للدوران البوابة حوله . أين ينبغي وضع القضيب ؟

الفصل الثاني عشر

الصور غير المحدودة

١٢ - ١

قاعدة لوبيتال (L'Hospital)

النظرية عن نهاية خارج قسمة دالتين ،

$$(١) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

لا تكون صحيحة اذا كانت نهاية المقام صفراً . اذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ وكانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ محدودة ، فان الكسر يكون كبيراً عندما تكون x قريبة من a ونكتب $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)] = \pm \infty$ ، رغم أنه لا توجد نهاية بالمعنى الصحيح للكلمة . اذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، فان الكسر $f(x)/g(x)$ يقال أنه غير محدد على الصورة $0/0$ عند a . في هذه الحالة $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)]$ قد توجد ، رغم أن (١) لا تفيد في ايجادها . مثال ذلك ، $\lim_{x \rightarrow 3} [(x^2 - 9)/(x - 3)]$ ، التي أوجدناها بوسيلة جبرية بسيطة :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6$$

في الماضي عاجلنا كل نهاية على حده ، وبعضها أوجدنا قيمته بعد مجهود كبير ، مثل $\lim_{h \rightarrow 0} [(e^h - 1)/h] = 1$ ، التي احتجنا اليها في إيجاد مشتقة e^x . نظرية هامة اكتشفها الرياضى السويسرى برنولى (Johannes Bernoulli ، ١٦٦٧ - ١٧٤٨) لكن نسبت خطأ الى الرياضى الفرنسى لوبيتال (Guillaume François de L'Hospital ، ١٦٦١ - ١٧٠٤) تعطينا طريقة بسيطة وعامة لايجاد مثل هذه النهايات . مضمون النظرية هو أنه اذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، فعندئذ يكون

$$(٢) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

إذا كانت النهاية الثانية يمكن إيجادها ، وعادة يكون إيجادها أسهل من إيجاد الأولى . لايجاد $\lim_{x \rightarrow 3} [(x^2 - 9) / (x - 3)]$ بهذه النظرية ، نضع $g(x) = x - 3$ و $f(x) = x^2 - 9$ فيكون

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{1} = 6$$

مثال ١ . أوجد $\lim_{x \rightarrow 0} [(e^{2x} - 1)/x]$

الكسر غير محدد على الصورة $0/0$ عند 0 لأن $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - 1) = 0$. قاعدة خارج القسمة (١) لا يمكن استخدامها لايجاد نهاية الكسر . نوجدتها باستخدام (٢) ، بوضع $g(x) = x$ و $f(x) = e^{2x} - 1$ ، فيكون

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2$$

يمكن أيضاً استخدام الطريقة لايجاد $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) / g(x)]$ عندما تكون $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$. مثل هذه الكسور يقال انها غير محددة على الصورة ∞ / ∞ عند a . قبل اعطاء أمثلة أخرى لاستخدام قاعدة لوبيتال ، كما تسمى الطريقة ، سنذكر نصها بعناية أكثر ونبرهن صحتها . لهذا الغرض سنحتاج الى تعميم لنظرية القيمة المتوسطة .

١٢ - ١ نظرية كوشي (Cauchy) . لتكن g و f دالتين متصلتين في الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلتين للتفاضل في الداخل (a, b) ، وبحيث أن $g'(x)$ تختلف عن الصفر في كل الفترة (a, b) . عندئذ توجد z في (a, b) بحيث أن

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

البرهان . من الدالتين g و f كون الدالة u كما يلي :

$$u(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$$

فتكون u متصلة في الفترة $[a, b]$ (لماذا ؟) ، ويكون

$$(٣) \quad u'(x) = [f(b) - f(a)]g'(x) - [g(b) - g(a)]f'(x)$$

لجميع x في (a, b) . أيضاً

$$u(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = u(b)$$

الدالة u تحقق شروط نظرية رول ٤ - ٧ ، ومن ثم توجد z في (a, b) بحيث أن $u'(z) = 0$. اذن من (٣) ، يكون

$$[f(b) - f(a)]g'(z) - [g(b) - g(a)]f'(z) = 0,$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

الخطوة الأخيرة تكون صحيحة فقط إذا كان $g(b) - g(a) \neq 0$ و $g'(x) \neq 0$. الأولى صحيحة بالفرض ، السبب للثانية نتركه للقارئ مع الارشاد أنه يستخدم نظرية رول .
لاحظ أن نظرية كوشي تختزل إلى نظرية القيمة المتوسطة عندما $g(x) = x$.

١٢-٢ قاعدة لوبيتال . لتكن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ أو $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm \infty$. إذا كانت الدالتان f و g قابلتين للتفاضل في جوار منقوص ما \bar{W} لـ a وكانت $g'(x)$ تختلف عن الصفر في كل W ، فعندئذ . يكون

$$(٤) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

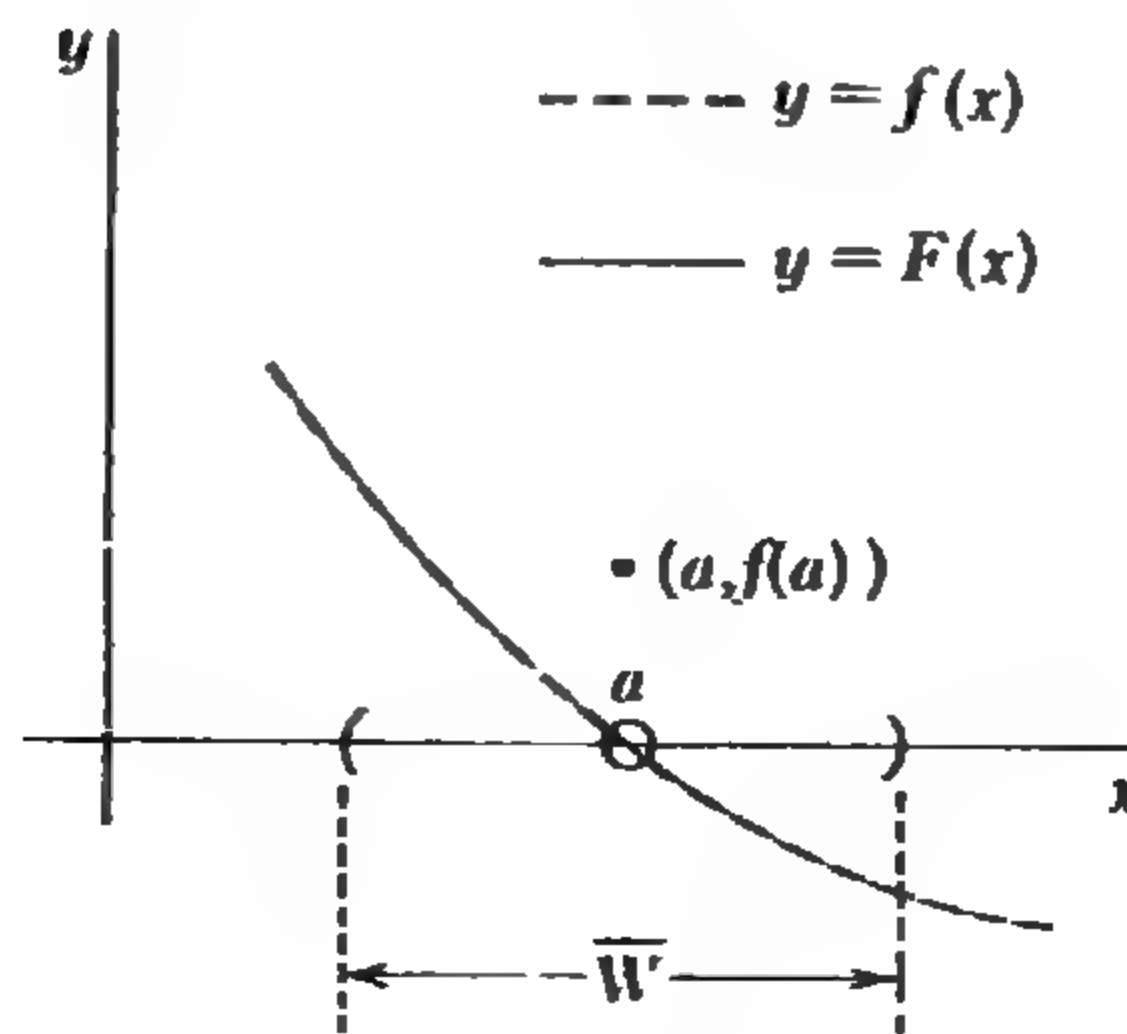
بفرض أن النهاية الثانية تكون موجودة أو تكون لا نهائية . القاعدة أيضاً صحيحة عندما تكون نهائية . في هذه الحالة الجوار المنقوص \bar{W} لـ a يستبدل بفترة لا نهائية ما (d, ∞) .

البرهان . سنبرهن فقط الحالة $0/0$. برهان الحالة ∞/∞ أصعب إلى حد كبير وسيحذف . نفرض أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ وأن a عدد محدود قد نود تطبيق نظرية كوشي على f و g على الفترة $[a, x]$ (أو $[x, a]$ إذا كانت $x < a$) ، لكن f أو g قد لا تكون متصلة أو حتى معرفة عند a . نتجنب هذه الصعوبة بتعريف دالتين جديدتين F و G تتطابقان مع f و g ، إلا ربما عند a ، ومتصلتين عند a (شكل ١٢-١) . الدالتان هما

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ 0, & x = a, \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq a, \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

(لماذا الدالتان F و G متصلتان عند a ؟) نظراً لأن F و G تتطابقان مع f و g في \bar{W} ، فهما تكونتان قابلتين للتفاضل هناك . لكل x في \bar{W} يوجد بنظرية كوشي عدد z بين x و a بحيث أن

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(z)}{G'(z)}, \quad x \neq a$$



شكل ١٢-١
 F متصلة عند a رغم أن f قد لا تكون .

بما أن x تختلف عن a ، فيكون $G(x) = g(x)$ و $F(x) = f(x)$.

أيضاً $F(a) = G(a) = 0$ ، $F'(z) = f'(z)$ ، $G'(z) = g'(z)$ ، والمعادلة أعلاه تبسط الى

$$(5) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

نفرض أن $\lim_{x \rightarrow a} [f'(x)/g'(x)]$ توجد وتساوى k ، مثلاً هذا يعنى أن $f'(w)/g'(w)$ تكون قريبة من k لجميع w القريبة من a . إذا كانت x هى إحدى هذه الأعداد w القريبة من a ، فإن z تكون أقرب إلى a ، إذ أنها تقع بين x و a ، وبالتالي تكون $f'(z)/g'(z)$ قريبة من k . واذن من المعادلة

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)] = k \quad \text{هذا يبين أن} \quad \lim_{x \rightarrow a} [f'(x)/g'(x)] = k$$

$$(4) \quad \text{إذا كان} \quad \lim_{x \rightarrow a} [f'(x)/g'(x)] = \pm\infty \quad \text{فان استدلالاً مماثلاً يبين أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)] = \pm\infty \quad \text{ويثبت (4) لهذه الحالة . هذا يكمل البرهان عندما تكون } a \text{ عدداً محدوداً .}$$

نفرض الآن أن a لا نهائية ، فيكون $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. التعويض $x = 1/y$ يحول $f(x)/g(x)$ إلى كسر يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال لقيمة محدودة a عليه . لدينا

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{D_y f(1/y)}{D_y g(1/y)}$$

بقاعدة السلسلة يكون

$$D_y g\left(\frac{1}{y}\right) = g'\left(\frac{1}{y}\right) D_y \left(\frac{1}{y}\right) \quad \text{و} \quad D_y f\left(\frac{1}{y}\right) = f'\left(\frac{1}{y}\right) D_y \left(\frac{1}{y}\right)$$

واذن

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/y) D_y (1/y)}{g'(1/y) D_y (1/y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

هذا يكمل البرهان .

قد يلزم استخدام قاعدة لوبيتال أكثر من مرة لايجاد النهاية ، كما فى المثال الآتى :

$$\text{مثال ٢ . أوجد } \lim_{x \rightarrow 0} [(\cos x - 1)/x^2]$$

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \text{ نستخدم قاعدة لوبيتال للحصول على}$$

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x}$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ ، الكسر الأخير صورة غير محددة ، التى بدورها يمكن ايجادها بقاعدة لوبيتال :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$$

توجد أيضاً طريقة أخرى . لايجاد مشتقة $\sin x$ احتجنا الى اثبات أن $\lim_{x \rightarrow 0} [(\sin x) / x] = 1$.
يمكننا ايجاد النهاية الأخيرة في (٦) كما يأتي :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{2} (1) = -\frac{1}{2}$$

مثال ٣ . أوجد $\lim_{x \rightarrow \infty} [(\ln x)/x^2]$

الكسر غير محدد على الصورة ∞ / ∞ . بقاعدة لوبيتال يكون

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

عند استخدام قاعدة لوبيتال أكثر من مرة ، يجب تبسيط الكسر $f'(x) / g'(x)$ قبل استخدام القاعدة مرة ثانية . وإلا ، قد نحصل على كسر أكثر تعقيداً .

مثال ٤ . أوجد $\lim_{x \rightarrow 0^+} [(\cot x)/\ln x]$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ نستخدم قاعدة لوبيتال لنحصل على

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cot x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\csc^2 x}{1/x}$$

الكسر الثاني غير محدد على الصورة $\infty / -\infty$ ، لكن قبل استخدام قاعدة لوبيتال مرة ثانية نبسط الكسر إلى

$$\frac{-\csc^2 x}{1/x} = \frac{-x}{\sin^2 x}$$

الذي يكون غير محدد على الصورة $0/0$. قاعدة لوبيتال تعطينا

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2 \sin x \cos x} = -\infty$$

مثال ٥ . أوجد $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^3 + 3x^2 + 1}{4x^3 + x - 2}$

بدلاً من استخدام قاعدة لوبيتال ، من الأسهل قسمة البسط والمقام على أعلى قوة لـ x ، هنا x^3 ، ونوجد النهاية بقاعدة خارج القسمة للنهائيتين :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^3 + 3x^2 + 1}{4x^3 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-5}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{4 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-5}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^3} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right)} = \frac{0}{4} = 0$$

نحذر القارئ من نقطتين . أولاً ، يمكن استخدام قاعدة لوبيتال ، فقط للكسور غير المحددة التي على الصورة $0/0$ أو ∞ / ∞ . ثانياً ، البسط والمقام للكسر $f(x) / g(x)$ يجرى تفاضلها كل على حده ، وليس الكسر ككل .

أوجد النهايات الآتية :

- $$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 2} &= ٣ \lim_{y \rightarrow -3} \frac{y^2 - 9}{y + 3} &= ٧ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} &= ١ \\ \lim_{r \rightarrow 1} \frac{r - 1}{\ln r} &= ٦ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= ٥ \lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 2x - 24}{x^2 - 36} &= ٤ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x} &= ٩ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} &= ٨ \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{x} &= ٧ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^n}, n > 0 &= ١٧ \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - u}{u^2} &= ١١ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2(1 - \cos x)} &= ١٠ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{x^2} &= ١٥ \lim_{b \rightarrow a} \frac{b - a}{b^n - a^n}, a \neq 0 &= ١٤ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} &= ١٣ \\ \lim_{t \rightarrow b} \frac{t^3 - bt^2 - b^2t + b^3}{t^2 - b^2} &= ١٨ \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\ln \cos \theta}{\theta} &= ١٧ \lim_{u \rightarrow \pi/2} \frac{\sec u}{\tan u} &= ١٦ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} &= ٢١ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1/2} - x^{1/3}}{x^{2/3} - x^{1/2}} &= ٢٠ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12}{x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12} &= ١٩ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} &= ٢٤ \lim_{y \rightarrow \pi/2} \frac{\ln \sin y}{(2y - \pi)^2} &= ٢٣ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t - \sin t}{1 - \cos t} &= ٢٢ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - e^x}{x} &= ٢٧ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{\alpha^3} &= ٢٦ \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 2 + e^{-u}}{1 - \cos 3u} &= ٢٥ \\ \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta \sin \theta} &= ٣٠ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x - x}{x^3} &= ٢٩ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} &= ٢٨ \\ \lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \frac{\tan \alpha}{\tan 3\alpha} &= ٣٣ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{25 + h} - 5}{h} &= ٣٢ \lim_{t \rightarrow \pi/2} \frac{t \sin t - \pi/2}{\cos t} &= ٣١ \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - b^t}{t}, a > 0, b > 0 &= ٣٦ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + z} - \sqrt{2 - z}}{z} &= ٣٥ \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\sqrt{u} - \frac{1}{2}(1 + u)}{(u - 1)^2} &= ٣٤ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1/x)}{x + 1} &= ٣٩ \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(x - \pi/2)^2}{\sec x} &= ٣٨ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 + x^2}{x^4} &= ٣٧ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x - \sin x} &= ٤٢ \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan u + \sec u - 1}{\tan u - \sec u + 1} &= ٤١ \lim_{a \rightarrow 0} \frac{ae^{2a} - e^{-2a} - a + 1}{e^{2a} - 1} &= ٤٠ \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + s} - (1 + s/2)}{s^2} &= ٤٤ \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta - \tan \theta}{\sin^3 \theta} &= ٤٣ \\ n &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}\right)}{x^{n+1}} &= ٤٥ \end{aligned}$$

عدد صحيح موجب .

٤٦ - أوجد $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^4 - x^2 - x + 10}{x^3 + 3x - 1}$ بقاعدة لوبيتال وبالطريقة المستخدمة في مثال ٥ .

أوجد النهايات الآتية :

٤٧ - $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n}, n > 0$ - ٤٨ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2-1}$ - ٤٩ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+x^2}{1-3x^2}$

٥٠ - $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^4-1}{z}$ - ٥١ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1} x}{x}$ - ٥٢ $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}u^2 + u + \frac{1}{3}}{u^3 - 1}$

٥٣ - $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + x^2 + \sqrt{2}x + 6}{4x^3 - 2x - 2}$ - ٥٤ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$ - ٥٥ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

٥٦ - $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tan x}{x}$ - ٥٧ $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^4 + 3y^3 - 7y^2 - 18}{y^4 - 3y^3 - 7y^2 + 18}$ - ٥٨ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^6 + x^4 - x^2 + 1}{x^3 + x}$

٥٩ - $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{40} e^{-x}$ - ٦٠ $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z \ln z}{z + \ln z}$ - ٦١ $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s - \sin^{-1} s}{\tan^{-1} s - s}$

٦٢ - $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^{3/2} + 6x^2 + 2\sqrt{x}}{4x^2 - \sqrt{x} - 7}$ - ٦٣ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{b^{\ln x}}, b > 0$

٦٤ - خطط المنحنى $y = (\ln x)/x$

٦٥ - عند برهنة الصيغة $D \sin x = \cos x$ في بند ٦-٣ احتجنا للنهاية $\lim_{x \rightarrow 0} [(\sin x)/x]$ واثبتنا أنها ١ . حقق هذه مرة أخرى بقاعدة لوبيتال . حتى إذا كنا قد عرفنا قاعدة لوبيتال عند ذلك الوقت ، لماذا لم يكن في إمكاننا استخدامها لايوجد النهاية ؟

٦٦ - الدالة $f(x) = (1 - \cos x)/x^2$ غير معرفة عند ٠ . عين قيمة لـ $f(0)$ بحيث تكون f متصلة عند ٠ .

٦٧ - أثبت أن $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^n/e^x) = 0$ لكل n .

٦٨ - أوجد $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1 - e^{-\alpha(1-\alpha)}}{1 - \alpha e^{-\alpha(1-\alpha)}}$ (هذه النهاية ظهرت في مسألة تبادل حرارى فى العلوم الهندسية) .

٦٩ - صيغة حاصل الجمع لمتوالية هندسية .

$$\sum_{i=0}^n ar^i = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

ليست صحيحة إذا كانت $r = 1$. أثبت مع ذلك ، أن

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{i=0}^n ar^i = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

٧٠ - يبدو أنه عندما تكون r قريبة من ١ ، تكون قيمة $\int_1^r \frac{dx}{x^r}$ قريبة من قيمة $\int_1^a \frac{dx}{x}$ لجميع $a > 0$. أثبت أن هذا صحيح .

٧١ - أثبت أن ميل المنحنى الدويرى (السيكلويد) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ عند نقطة P يصبح لا نهائياً عندما تقترب P من نقطة الأصل .

٧٢ - لى قيمة لـ k تكون $\lim_{x \rightarrow 0} [(x - \sin x)/x^k]$ محدودة ؟ . أوجد قيمة النهاية .

٧٣ - المعادلة التفاضلية التى تحكم حركة جسم هابط بسرعة معتدلة فى وسط له مقاومة مثل الهواء هى $dv/dt = g - (k/m)v$ ، حيث الثابت غير السالب k يعتمد على المقاومة وحيث m هى الكتلة ، v سرعة الجسم . فى الفراغ $k = 0$ إذا كانت v_0 هى السرعة الابتدائية ، فأوجد v كدالة للزمن t وأثبت أنه لكل قيمة لـ t ، تعتمد v على k اعتماداً متصلاً .

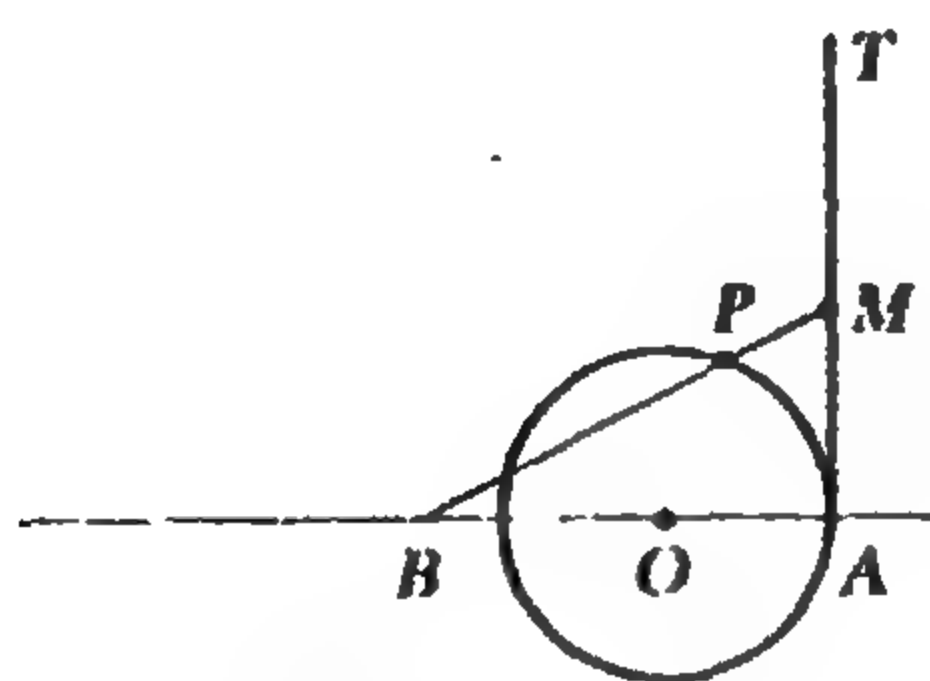
٧٤ - فى الشكل ١٢ - ٢ الخط المستقيم AT مماس عند A للدائرة التى مركزها عند O . لكل نقطة P على الدائرة قرب A ، نختار M على AT بحيث أن المسافة $|AM|$ تساوى طول القوس \widehat{AP} . لتكن B نقطة تقاطع الخط MP مع خط القطر AO . أوجد الموضع النهائى لـ B عندما تقترب P من A .

٧٥ - أوجد الخلل فى البرهان المختصر الآتى لنظرية كوشى بنظرية القيمة المتوسطة ، توجد z فى (a, b) بحيث أن $f(b) - f(a) = (b - a)f'(z)$. بالمثل ، $g(b) - g(a) = (b - a)g'(z)$. اقسم المعادلة الأولى على الثانية واحصل على النظرية .

٧٦ - أشرنا فى بند ١ - ٢ أن الرمز $0/0$ لا يمثل عدداً . هل يمكن استخدام قاعدة لوبيتال لتحديد عدد له .

٧٧ - قرب نهاية برهان نظرية كوشى أكدنا أن $g(b) - g(a) \neq 0$. لماذا يكون هذا كذلك ؟

٧٨ - أعط استدلالاً قاطعاً مستخدماً الجوارات ، لجزء برهان قاعدة لوبيتال ١٢ - ٢ الذى يتلو المعادلة (٥) والذى أثبتنا فيه أنه اذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} [f'(x)/g'(x)] = k$ فان $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)] = k$



شكل ١٢ - ٢

١٢ - ٢

الصور غير المحددة $0(\infty)$, 0^0 , 1^∞ , ∞^0 , $\infty - \infty$

اذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ ، فان قيمة النهاية $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$ لا تكون واضحة ، لأن العامل الأول يميل لجعل حاصل الضرب صغيراً بينما الثانى يميل لجعل

حاصل الضرب كبيراً . حاصل ضرب $f(x) g(x)$ يقال أنه غير محدد على الصورة $0(\infty)$ عند a .
النهاية يمكن ايجادها بكتابة $f(x) g(x)$ فى إحدى الصورتين

$$\frac{g(x)}{1/f(x)} \quad \text{أو} \quad \frac{f(x)}{1/g(x)}$$

هاتان غير محددتين على الصورة $0/0$ أو ∞/∞ ، ويمكن استخدام قاعدة لوبيتال .

مثال ١ . أوجد $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ ، لدالة $x \ln x$ غير محددة على الصورة $0(-\infty)$.
نضعها فى الصورة ∞/∞ ونستخدم قاعدة لوبيتال :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، فإن قيمة $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ لا تكون واضحة . الأساس $f(x)$ يميل لجعل $f(x)^{g(x)}$ قريبة من الصفر بينما $g(x)$ يميل لجعلها قريبة من 1 . فهي غير محددة على الصورة 0^0 . صورتان أخريان غير محددتين لـ $f(x)g(x)$ هما ∞^0 و 1^∞ فى مثل هذه الحالات يمكن إيجاد النهاية باستخدام اللوغاريتمات لاحتضار الأس الى تحت كعامل .

مثال ٢ . أوجد $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$

الدالة غير محددة على الصورة 0^0 . ضع

فيكون

$$\ln y = x \ln \sin x$$

فالمسألة تختزل الى الحالة $0(\infty)$. لدينا

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln \sin x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{1/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\cos x)/(\sin x)}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 \cot x). \end{aligned}$$

النهاية الأخيرة أيضاً على الصورة $0(\infty)$. بالاستمرار ، يكون

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{\sec^2 x} = 0$$

لدينا نهاية $\ln y$ ونحتاج الى نهاية y . اتصال اللوغاريتم يتضمن أن

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} y \right)$$

اذن $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^0 = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = 0$

مثال ٣ . أوجد $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 2/x)^x$

الدالة غير محددة على الصورة I^∞ . ضع $y = (1 + 2/x)^x$

فيكون

$$\ln y = x \ln (1 + 2/x)$$

وهذه غير محددة على الصورة $\infty(0)$. لدينا

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln y &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln (1 + 2/x)}{1/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2/x^2}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + 2/x} = 2. \end{aligned}$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \ln (\lim_{x \rightarrow \infty} y)$ ، إذن $\lim_{x \rightarrow \infty} y = e^2$

الدوال $1/x$ ، $1/x^2$ و $1/x + 3$ جميعها تصبح لا نهائية عندما تقترب x من 0^+ . لكن

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x}{x^2} = \infty,$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{1}{x} + 3 \right) - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 = 3.$$

هذه الأمثلة توضح أنه إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ ، فإن الفرق $f(x) - g(x)$ يكون غير محدد على الصورة $\infty - \infty$. النهاية $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$ قد يكون من الصعب إيجادها ، لكن إحدى الطرق هي أن نحاول التعبير عن $f(x) - g(x)$ في صورة كسر $F(x)/G(x)$. لقد عملنا ذلك في (١) و (٢) . إذا كان الكسر غير محدد على الصورة $0/0$ أو ∞/∞ ، فيمكننا استخدام قاعدة لوبيتال . احتمال آخر هو أن نحاول إيجاد $\lim_{x \rightarrow a} [e^{f(x)}/e^{g(x)}] = \lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)-g(x)}$ حيث الكسر غير محدد على الصورة ∞/∞ .

مثال ٤ . أوجد $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} (\tan \theta - \sec \theta)$

الدالة غير محددة على الصورة $\infty - \infty$ عند $\pi/2$. من السهل التعبير عنها في صورة كسر :

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} (\tan \theta - \sec \theta) = \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{1}{\cos \theta} \right) = \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{\sin \theta - 1}{\cos \theta}$$

النهاية الأخيرة يمكن إيجادها بقاعدة لوبيتال . لدينا

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{\sin \theta - 1}{\cos \theta} = \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} = 0$$

مسائل

أوجد النهايات الآتية :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} &= 1 & \lim_{u \rightarrow -\infty} u^2 e^u &= 0 & \lim_{\theta \rightarrow \pi} \theta e^{1/\theta} &= 0 & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \csc 4\alpha &= 1 \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} (\tan x)^x &= \infty & \lim_{x \rightarrow 0} (\tan x)^x &= 0 & \lim_{t \rightarrow 0} t^{\sqrt{t}} &= 0 & \lim_{\theta \rightarrow 0} x^{1/x} &= 0 \\
 \lim_{y \rightarrow 0} (2-3y)^{1/y} &= 1/2 & \lim_{h \rightarrow 0} (1+ah)^{1/h} &= 1/a & \lim_{x \rightarrow \infty} (1+1/x)^x &= e & \lim_{u \rightarrow 0} u^{\sin u} &= 0 \\
 \lim_{t \rightarrow \infty} t \sin(1/t) &= 1 & \lim_{u \rightarrow \pi/2} (\sin u)^{\tan u} &= 0 & \lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(1-x)} &= \infty & \lim_{y \rightarrow \infty} (y+e^y)^{1/y} &= 1 \\
 \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\ln t} &= 0 & \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{\ln x} &= 0 & \lim_{\theta \rightarrow 0} (1/\theta)^{\tan \theta} &= 0 & \lim_{x \rightarrow 0} (\cos \sqrt{x})^{1/x} &= 0 \\
 \lim_{z \rightarrow 0} z^{a/\ln z} &= 0 & \lim_{x \rightarrow \infty} (1+e^{-x})^x &= 1 & \lim_{x \rightarrow 0} x^{\ln x} &= 0 & \lim_{x \rightarrow 0} (-\ln x)^x &= 0 \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} (x^{1/x} - 1) &= 0 & \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u \ln u}{u + \ln u} &= 0 & \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\sin u}{u^2 \ln u} &= 0 & \lim_{z \rightarrow \infty} z^{a/\ln z} &= \infty \\
 & & & & & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)^x &= 1
 \end{aligned}$$

٣٠- إذا كانت $f(x) = x^2 \ln x$, $x > 0$ ، كيف يجب تعريف f عند $x = 0$ لتكون متصلة على اليمين هناك؟ خطط الشكل البياني لـ f .

٣١- لأي قيمة لـ p توجد النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} x^p \ln x$ ؟

٣٢- خطط المنحنى $y = x \ln x - x$.

٣٣- خطط المنحنى $y = x^x$, $x > 0$.

أوجد النهايات الآتية :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} (\csc x - \cot x) &= 1 & \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin y} - \frac{1}{y} \right) &= 0 & \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln z} - \frac{z}{\ln z} \right) &= 0 & \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln z} - \frac{z}{\ln z} \right) &= 0 \\
 \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{y+1} - \sqrt{y}}{y} &= 0 & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) &= \infty & \lim_{r \rightarrow 2} \left(\frac{1}{\sqrt{r-2}} - \frac{1}{r-2} \right) &= \infty & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) &= 0 \\
 & & \left(a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} : \text{ارشاد} \right) & & & & & \\
 \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2} \right) &= 0 & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= 0 & \lim_{z \rightarrow \infty} (\sqrt{z^2 + z} - z) &= 1/2 & \lim_{u \rightarrow \pi/2} \left(u \tan u - \frac{\pi}{2} \sec u \right) &= 0 \\
 \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sec 5x - \tan x) &= 0 & \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{1+x^2} - x) &= 1/2 & & & &
 \end{aligned}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\tan^{-1} y} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x} [\ln(x+a)^n - \ln x] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x} (x - \ln x) = \infty$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{\tan u} \right) = \infty$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\ln \alpha} \int_{\alpha}^1 \frac{\sin x}{x} dx \right) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x} \left(x e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt \right) = \infty$$

٥٣ - لماذا يتضمن اتصال اللوغاريتم أن $\lim_{x \rightarrow a} [\ln f(x)] = \ln [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]$ ؟ لقد استخدم ذلك في مثالي ٢ ، ٣ .

٥٤ - إذا كانت $F(u) = \lim_{x \rightarrow 0} [(1+3ux)^{1/x} - (1+ux)^{1/x}]$ فأوجد $\lim_{u \rightarrow 0} [F(u)/u]$.

الفصل الثالث عشر

التكاملات المعتلة

١٣ - ١

التكاملات بحدود لا نهائية

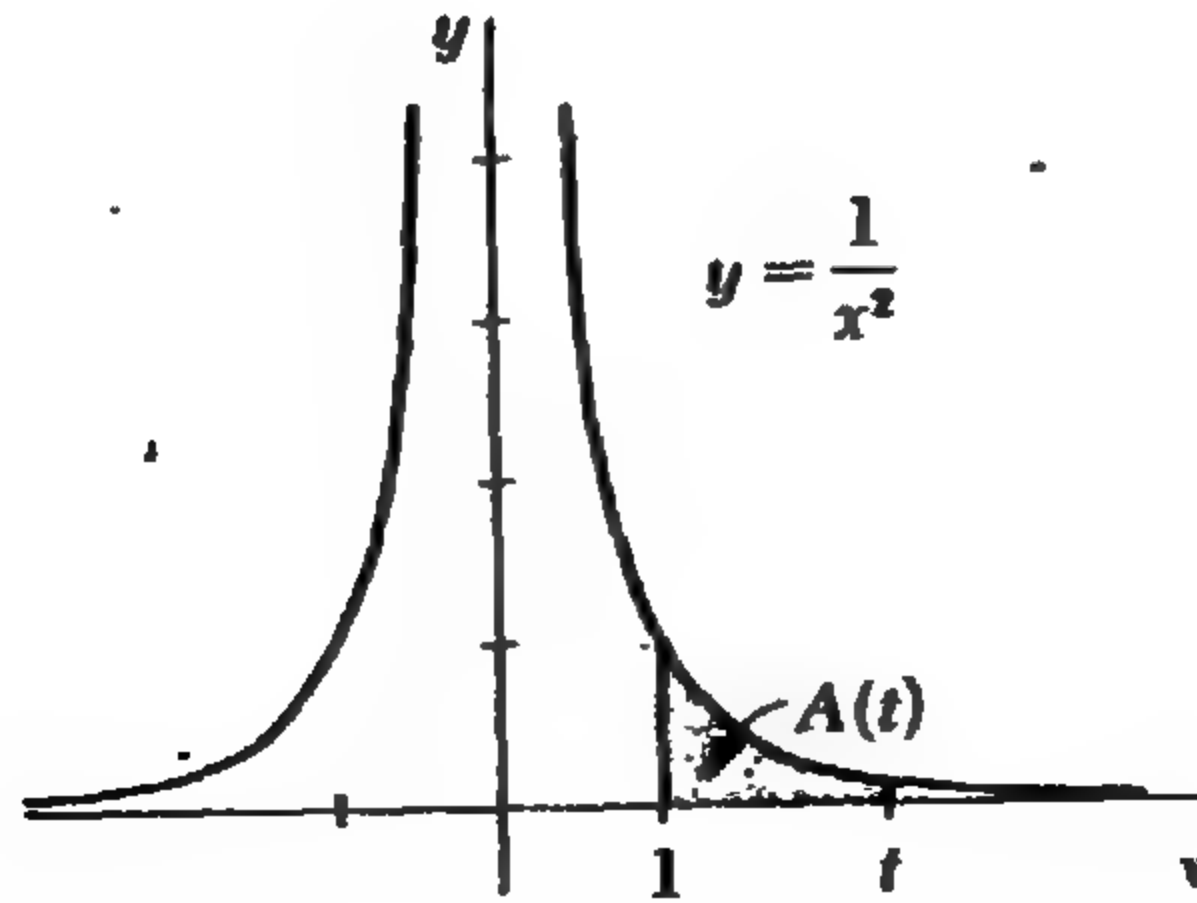
المساحة $A(t)$ للمنطقة تحت المنحنى $y = 1/x^2$ من 1 الى t ، حيث $t > 1$ (شكل ١٣ - ١)، تعطى بالصيغة

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{t} + 1$$

عندما تقترب t من ∞ ، تقترب المساحة من 1 . أى أن،

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} + 1 \right) = 1$$

من الطبيعي أن نرمز الى $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx$ بالرمز $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ ونعتبر التكامل ممثلاً لمساحة المنطقة تحت المنحنى على يمين $x = 1$ ، مع أن المنطقة مفتوحة على اليمين. التكاملات بحد لا نهائى تسمى تكاملات معتلة وستعرف الآن.



شكل ١٣ - ١

١٣-١ تعريف . اذا كانت الدالة f متصلة لجميع $x \geq a$ ، فإن

$$\int_a^x f(x) dx = \lim_{t \rightarrow x} \int_a^t f(x) dx$$

بفرض وجود النهاية . اذا كانت النهاية توجد ، فالتكامل المعتل $\int_a^x f(x) dx$ يقال انه يوجد أو يتقارب . اذا كانت النهاية لا توجد ، فالتكامل يتباعد . بالمثل ،

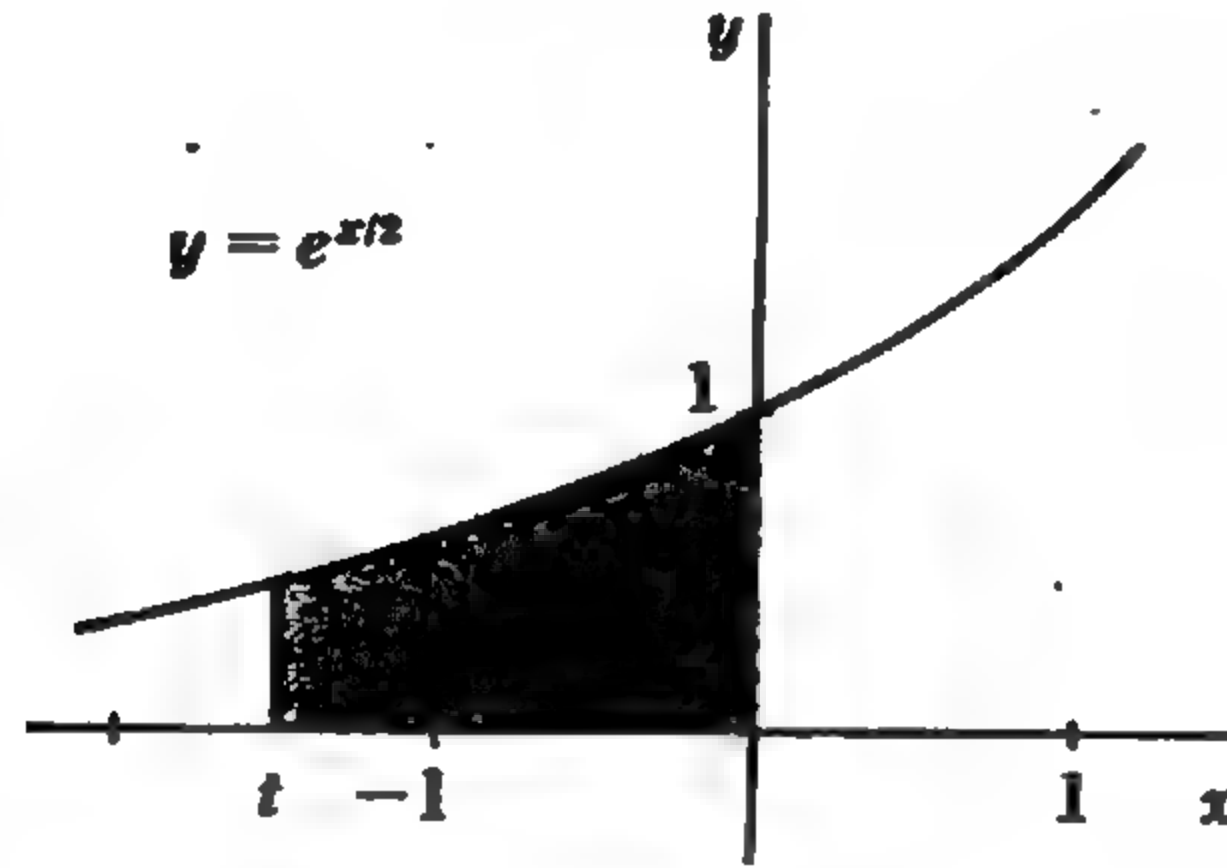
$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx$$

مثال ١ . أوجد $\int_{-\infty}^0 e^{x/2} dx$

المنحنى $y = e^{x/2}$ موضع في الشكل ١٣-٢ . لدينا

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 e^{x/2} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 e^{x/2} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} 2e^{x/2} \Big|_t^0 \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} 2(1 - e^{t/2}) = 2. \end{aligned}$$

التكامل المعتل يتقارب ، والمنطقة تحت المنحنى على يسار المحور y يمكن اعتبار أن لها مساحة .



شكل ١٣-٢

مثال ٢ . أوجد $\int_1^x \frac{dx}{x}$

لدينا

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow x} \int_1^t \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow x} \ln |x| \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow x} \ln t = \infty$$

النهاية لا توجد ، فالتكامل المعتل يتباعد . مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = 1/x$ على يمين 1 لا نهائية .

اذا كان الدالة f متصلة في كل مكان ، فإن التكامل $\int_{-\infty}^x f(x) dx$ يعرف هكذا

$$(١) \quad \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^x f(x) dx$$

حيث c أى عدد . كلا التكاملين المعتلين على يمين المتساوية يجب وجودهما لوجود $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

$$\text{مثال ٣ . أوجد } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$$

باختيار $c = 0$ فى (١) ، يكون

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{x}{1+x^2} dx + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} [-\frac{1}{2} \ln(1+t^2)] + \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln(1+s^2). \end{aligned}$$

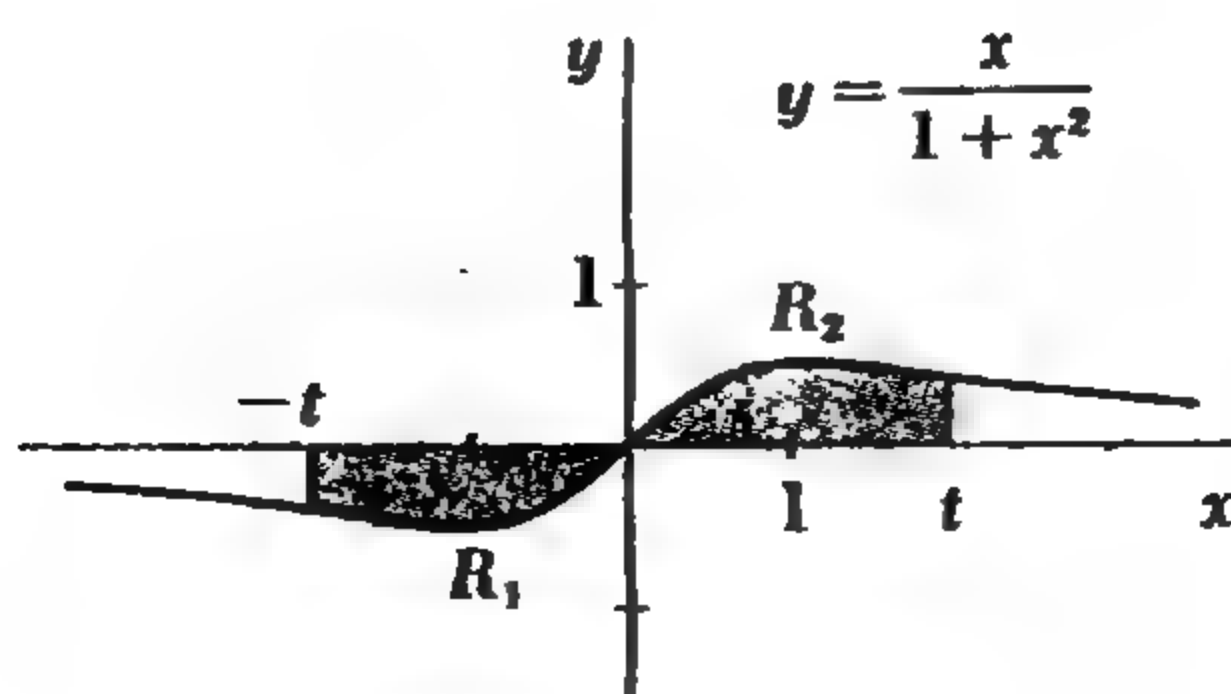
النهاية الأولى لا توجد ، ومن ثم التكامل لا يوجد . النهاية الثانية أيضاً لا توجد . ليس صواباً أن نحلل كما يلى عند إيجاد قيمة هذا التكامل .

$$\begin{aligned} (٢) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [\ln(1+t^2) - \ln(1+(-t^2))] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} 0 = 0. \end{aligned}$$

التكامل على اليمين فى (٢) يمكن كتابته على الصورة

$$\int_{-t}^t \frac{x}{1+x^2} dx = \int_{-t}^0 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_0^t \frac{x}{1+x^2} dx$$

التكامل الثانى على اليمين يمثل مساحة المنطقة R_2 فى الشكل ١٣-٣ ، والتكامل الأول يمثل السالب لمساحة المنطقة R_1 . من الواضح أن حاصل الجمع يساوى صفراً ، لكن كلا من التكاملين ليس له نهاية .



شكل ١٣-٣

مسائل

أوجد قيمة كل من التكاملات المعتلة الآتية اذا كانت توجد :

$$\begin{aligned}
 & ١ - \int_1^x \frac{dx}{x\sqrt{x}} - ٢ - \int_{20}^x \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} - ٣ - \int_1^x \frac{dy}{(1+y)^{3/2}} - ٤ - \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x+3}} \\
 & ٥ - \int_{-x}^3 \frac{dx}{(7-x)^2} - ٦ - \int_0^x e^{-cx} dx, c > 0 - ٧ - \int_0^x \sin t dt - ٨ - \int_0^x \frac{dx}{\sqrt[3]{e^x}} \\
 & ٩ - \int_{-x}^2 \frac{dv}{\sqrt{6-v}} - ١٠ - \int_1^x \frac{dr}{1+r^2} - ١١ - \int_0^x xe^{-x^2} dx - ١٢ - \int_0^x \frac{x^2}{1+x^2} dx \\
 & ١٣ - \int_3^x \frac{dz}{z^2-1} - ١٤ - \int_{-x}^0 x^2 e^x dx - ١٥ - \int_5^x \frac{du}{u^2-3u} - ١٦ - \int_0^x \tan^{-1} x dx \\
 & ١٧ - \int_1^x \frac{\ln u}{u^2} du - ١٨ - \int_0^x x^n e^x dx - ١٩ - \int_{-x}^x \frac{dx}{1+x^2} - ٢٠ - \int_{-x}^x \frac{dz}{z^2+2z+2} \\
 & ٢١ - \int_0^x \frac{dx}{x^3+1}
 \end{aligned}$$

٢٢ - أوجد مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = xe^{-x}$ على يمين نقطة الأصل .

٢٣ - أوجد طول ذلك الجزء من المنحنى الحلزوني الذي معادلته القطبية $r = e^\theta$ الذى يناظر $\theta \leq 0$.

٢٤ - خطط المنحنى $y = (\ln x)/x$. أوجد المساحة ، اذا كانت توجد ، للمنطقة الواقعة تحت المنحنى وفوق المحور x .

٢٥ - فى مثال ٢ أثبتنا أن مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = 1/x$ من 1 الى ∞ تكون لا نهائية . اثبت أن حجم الجسم القرني الناشء من دوران هذه المنطقة حول المحور x هو π . بما أن مساحة المنطقة المنشئة لا نهائية ، فلا يوجد دهان كاف فى العالم ليغطيها . الآن ضع القرن فى وضع رأسى وفتحته الى أعلى واملاء بالدهان . ستكون π cu ft كافية . عندما تسحب المنطقة المنشئة ، من القرن ، ستغطى من الناحيتين . اشرح هذا التناقض الظاهرى .

٢٦ - المنطقة تحت المنحنى $y = 1/x^p$ على يمين الخط $x = 1$ دارت حول المحور x ، فأنشأت جسماً . لاي قيم $p > 0$ يكون الجسم له حجم ؟

٢٧ - أوجد المركز المتوسط للمنطقة المحدودة بالمنحنى $y = e^{-x}$ والمحورين x و y الموجبين .

٢٨ - اثبت أنه بالرغم من أن المنطقة تحت المنحنى $y = 1/(1+x^2)$ على يمين المحور y لها مساحة ، لكن ليس لها مركز متوسط .

٢٩ - لاي قيم n يوجد التكامل $\int_1^x \frac{\ln x}{x^n} dx$ ؟

٣٠- إذا كان $\int_a^\infty f(x) dx$ يتباعد وكانت $f(x) \geq 0$ لجميع $x \geq a$ ، فثبت أن $\int_a^\infty f(x) dx = \infty$ (إرشاد : ضع $S_n = \int_a^n f(x) dx$ ودع M أى عدد . أثبت أنه يجب أنه يوجد عدد N بحيث أن $S_N > M$ ، وبالتالي $S_n > M$ لجميع $n \geq N$) .

٣١- أثبت أن خاصية الجمع للتكامل تظل صحيحة للتكاملات بحد لا نهائى . أى أن ، إذا كانت f متصلة فى كل مكان وكان $\int_b^x f(x) dx$ يوجد ، فإن $\int_a^x f(x) dx$ يوجد لكل عدد b ويكون

$$\int_a^x f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^x f(x) dx$$

٣٢- التكامل $\int_{-\infty}^x f(x) dx$ عرف فى (١) بـ $\int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^x f(x) dx$ حيث c أى عدد . هذا التعريف لا يكون له معنى إذا لم نحصل على نفس القيمة لكل اختيار لـ c . أثبت أن هذا يكون فعلا . (إرشاد : أنظر المسألة ٣١) .

١٣ - ٢

التكاملات بدوال مكاملة لا نهائية
البرهان المعطى فى بند ٥-٩ لوجود التكامل المعين $\int_a^b f(x) dx$ (١)
مبنى على اتصال f فى الفترة المغلقة $[a, b]$. إذا كانت $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$ فإن الدالة f لا تكون متصلة على اليسار عند b ، ويمكن إثبات عدم وجود التكامل . رغماً عن ذلك ، فالنهاية

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

قد توجد . إذا كان كذلك ، فإننا نعرف التكامل (١) ليكون ذلك العدد .

١٣-٢ تعريف . إذا كانت الدالة f متصلة فى الفترة $[a, b)$ وكانت $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$ ، فإن

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

بالمثل ، إذا كانت f متصلة فى الفترة $(a, b]$ وكانت $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ، فإن

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

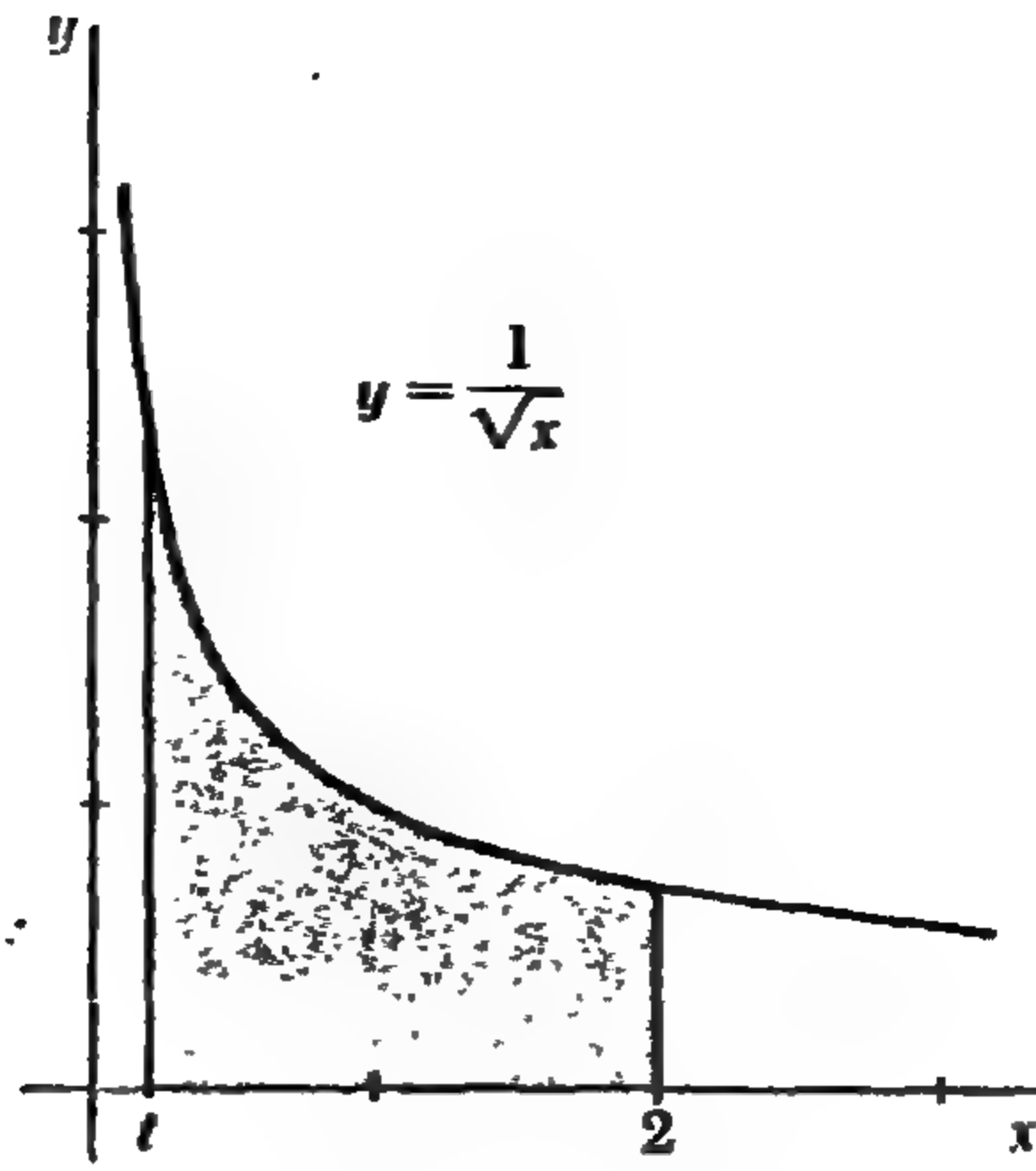
هذه التكاملات أيضاً تسمى تكاملات معتلة ويقال انها توجد أو تتقارب إذا كانت النهايات موجودة ، وأنها تتباعد إذا كانت النهايات غير موجودة .

مثال ١ . أوجد $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/\sqrt{x}) = \infty$ ، فالتكامل معتل . من التعريف ١٣-٢ ، لدينا

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} 2x^{1/2} \Big|_t^2 = \lim_{t \rightarrow 0^+} 2(\sqrt{2} - t^{1/2}) = 2\sqrt{2}$$

التكامل يتقارب . التكامل يمكن اعتباره ممثلاً لمساحة المنطقة تحت المنحنى $y = 1/\sqrt{x}$ بين ٢ و ٠ ، رغم أن المنطقة مفتوحة عند القمة (شكل ١٣-٤) .



شكل ١٣ - ٤

مثال ٢ . أوجد $\int_0^{\pi/2} \tan y \, dy$

التكامل معتل لأن $\tan y$ تصبح لا نهائية عند $\pi/2$. لدينا .

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \tan y \, dy &= \lim_{t \rightarrow (\pi/2)^-} \int_0^t \tan y \, dy = \lim_{t \rightarrow (\pi/2)^-} \left[-\ln \cos y \right]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow (\pi/2)^-} [-\ln \cos t] = \infty \end{aligned}$$

فالتكامل لا يوجد .

إذا كانت الدالة f متصلة في فترة التكامل $[a, b]$ ما عدا عند نقطة داخلية c حيث تصبح لا نهائية ، فإننا نعرف

$$(٢) \quad \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

بفرض أن كلا من التكاملين المعتلين على اليمين يوجدان . إذا كان أحدهما لا يوجد ، فإن التكامل $\int_a^b f(x) \, dx$ لا يوجد .

مثال ٣ أوجد $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$

التكامل معتل لأن الدالة المكاملة تصبح لا نهائية عند $x=1$ داخل فترة التكامل . لدينا

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \int_{-2}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_{-2}^t (x-1)^{-1/3} \, dx + \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^2 (x-1)^{-1/3} \, dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{3}{2} [(t-1)^{2/3} - (-3)^{2/3}] + \lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{3}{2} [1 - (s-1)^{2/3}]$$

$$= -\frac{3}{2}(-3)^{2/3} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(1 - 9^{1/3}).$$

إذا كانت الدالة f متصلة في الفترة (c_1, c_2) وتصبح لا نهائية عند c_1 و c_2 ، فإننا نعرف

$$\int_{c_1}^c f(x) dx = \int_{c_1}^d f(x) dx + \int_d^{c_2} f(x) dx$$

حيث d أى عدد بين c_1 و c_2 ، وذلك بفرض أن كلا التكاملين المعتلين على اليمين يوجدان .

إذا كانت f متصلة في الفترة $[a, b]$ ما عدا عند c_1, c_2, \dots, c_n حيث $c_1 < c_2 < \dots < c_n$ ، فإننا نعرف

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx = & \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x) dx + \dots \\ & + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x) dx + \int_{c_n}^b f(x) dx \end{aligned}$$

بفرض أن كلا من التكاملات المعتلة على اليمين يوجد .

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$ ، فإن التكامل $\int_a^x f(x) dx$ يكون معتلا على أساسين . نعرفه بأنه حاصل جمع تكاملين معتلين من نوعين سبق دراستهما :

$$\int_a^x f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^x f(x) dx$$

حيث c أى عدد أكبر من a .

مثال ٤ أوجد $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

لدينا

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_1^x \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 x^{-2/3} dx + \lim_{s \rightarrow x} \int_1^s x^{-2/3} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} 3(1 - t^{1/3}) + \lim_{s \rightarrow x} 3(s^{1/3} - 1). \end{aligned}$$

النهاية الثانية لا توجد ، والتكامل يتباعد .

مسائل

أوجد قيمة كل من التكاملات المعتلة الآتية إذا كان يوجد :

$$\int_0^{x/2} \cot \alpha d\alpha = \text{ ٤ } \int_0^1 \frac{dt}{t^{0.99}} = \text{ ٣ } \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t-1}} = \text{ ٢ } \int_0^3 \frac{u du}{\sqrt{9-u^2}} = \text{ ١ }$$

$$\int_0^1 (\ln x)^2 dx = \text{ ٨ } \int_0^1 x \ln x dx = \text{ ٧ } \int_0^\pi \frac{\sin t}{\sqrt{1+\cos t}} dt = \text{ ٦ } \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, a > 0 = \text{ ٥ }$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 x^{-4} dx = 12 \quad \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1 - \sin u} = 11 \quad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sec \theta d\theta = 10 \quad \int_3^{10} \frac{dx}{x^2 - 9} = 9 \\
& \int_0^{3c} \frac{z dz}{(z^2 - c^2)^{2/3}} = 16 \quad \int_0^{2a} \frac{dt}{(t-a)^2} = 15 \quad \int_{-2}^1 \frac{dz}{\sqrt[3]{z+1}} = 14 \quad \int_{-1}^4 \frac{dr}{r^{2/3}} = 13 \\
& \int_2^4 \frac{dx}{x^2 - 4x + 1} = 19 \quad \int_0^3 \frac{dz}{z^3 - 3z^2 + 4} = 18 \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2x - 1} = 17 \\
& \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}} = 22 \quad \int_0^6 \frac{3-x}{\sqrt{6x-x^2}} dx = 21 \quad \int_{-1}^0 \frac{dx}{2x^3 + 9x^2 + 12x + 4} = 20 \\
& \int_0^4 \frac{dx}{x^3 - 7x^2 + 10x} = 25 \quad \int_0^2 \frac{du}{(u-1)(u-2)} = 24 \quad \int_{-1}^2 \frac{dz}{z^2 - 1} = 23 \\
& \int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = 29 \quad \int_0^\infty \frac{dx}{x} = 28 \quad \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = 27 \quad \int_0^\infty \frac{dx}{x^3} = 26 \\
& \int_1^\infty \frac{dx}{x^2 - 2x - 1} = 33 \quad \int_2^\infty \frac{dx}{x^2 - 3x} = 32 \quad \int_{-1}^\infty \frac{dy}{\sqrt[3]{y^2}} = 31 \quad \int_{-1}^\infty \frac{du}{u^4} = 30 \\
& \int_0^\infty \frac{dx}{x^3 - 1} = 34
\end{aligned}$$

٣٥- لاي قيم p يوجد التكامل $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$

٣٦- التكامل أدناه يجب أن يكون موجباً لأن دالته المكاملة موجبة في كل مكان . لكن

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -1 - 1 = -2$$

اشرح ما هو الخطأ ، واذا كان التكامل محسوباً خطأ ، فأوجد قيمته الصحيحة .

٣٧- خطط المنحنى $y = x \ln x$. أوجد المساحة ، اذا كانت توجد ، للمنطقة فوق المنحنى وتحت المحور x .

٣٨- خطط المنحنى $y = \csc^2 x$ وأوجد المساحة ، اذا كانت توجد ، للمنطقة تحت المنحنى بين π و 0 .

٣٩- اذا كانت f متصلة في الفترة $[a, b]$ ، فإن $\int_a^b f(x) dx$ يكون موجوداً . أثبت أن

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

أي أنه لا يوجد ضرر اذا استخدم التعريف ١٣- ٢ عندما تكون f متصلة عند b . (إرشاد :

$\int_a^t f(x) dx$ دالة لـ t . لقد أكدنا أن هذه الدالة متصلة من جهة اليسار عند b) .

٤٠- لتكن f متصلة في فترة التكامل $[a, b]$ ما عدا عند نقطة داخلية c ، حيث تصبح لا نهائية .

وضح بمثال أن التكامل المعتل $\int_a^b f(x) dx$ لا يمكن إيجاده دائماً كما يلي :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right]$$

لماذا هذه المعادلة لا تكافئ (٢) ؟

الفصل الرابع عشر

المتجهات المستوية

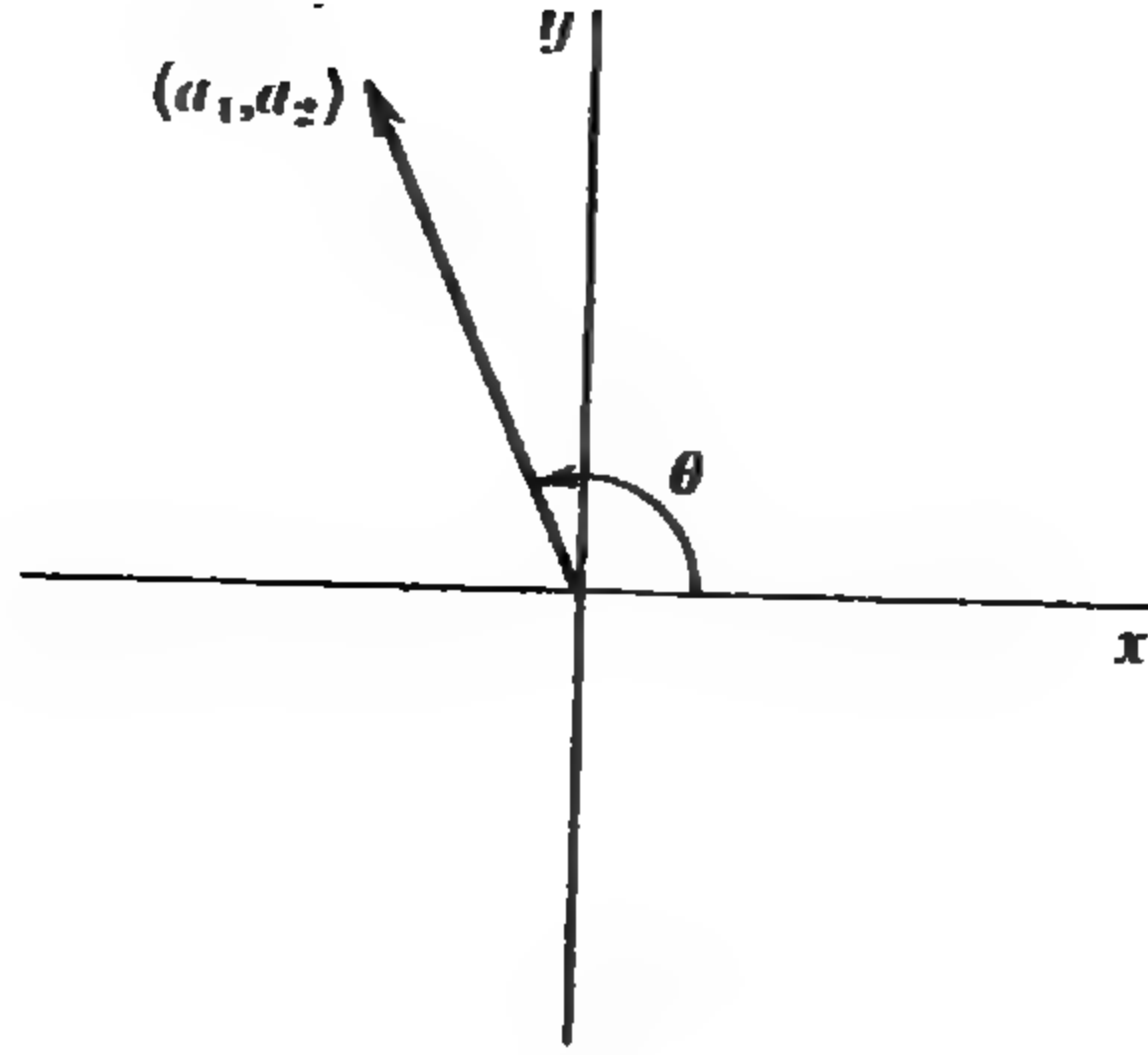
١٤ - ١

المتجهات

عملياً ، استخدمت المتجهات فى الفيزياء منذ أكثر من قرن . بعد ذلك وعلى درجة لا تقل فى الأهمية ظهرت المتجهات فى الرياضيات . الرياضيون يدرسون المتجهات من وجهة نظر مختلفة ، وفكرة الفضاء المتجه تكاد تكون قد أثرت على كل فرع من الرياضيات ، وعمق فى كثير منها . سوف ندرس المتجهات ليس فى الحالة العامة جداً ولكن فى حالة خاصة مفيدة وبسيطة .

المتجه فى مستوى هو زوج مرتب من الأعداد الحقيقية (a, b) . أمثلة على المتجهات هى $(0, \sqrt{3})$ و $(-1, \frac{3}{4})$ و $(4, 2)$. ترتيب الأعداد مهم ، فالمتجه $(4, 2)$ يختلف عن المتجه $(2, 4)$. توجد أنواع أخرى من المتجهات علاوة على المتجهات المستوية ، لكن سوف ندرس فقط المتجهات المستوية ، وللاختصار سندعوها مجرد متجهات . العددان a و b يسميان مركبتى المتجه (a, b) . يعرف المتجهان بأنهما متساويان إذا وإذا فقط كانت مركباتهما المتناظرة متساوية . أى أن ، $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$ إذا وإذا فقط كان $a_1 = b_1$ و $a_2 = b_2$. سنرمز للمتجهات بحروف يونانية ونقول ، مثلاً ، المتجه $(1, 2) = \alpha$. الحروف الصغيرة الرومانية سترمز الى الأعداد الحقيقية .

المتجهات تشبه أحداثيات نقط ، وفى الواقع ، لكل متجه (a, b) يمكن تخصيص نقطة فى المستوى هى النقطة التى أحداثياها هما (a, b) . أى أن كل متجه يناظر نقطة فى المستوى ، وبالعكس ، كل نقطة تناظر متجهاً . لهذا السبب يكون عادة من المناسب أن نشير الى المتجه $(1, 2) = \alpha$ ، مثلاً ، كأنه النقطة α . يمكننا رسم قطعه مستقيمة من نقطة الأصل للنقطة (a_1, a_2) ، كما فى الشكل ١٤ - ١ ، ونضع سهماً عند نقطته الطرفية . قطعة الخط المستقيم هذه لها اتجاه ، يقاس بالزاوية θ فى الشكل ، ولها طول . أى أن كل متجه يمكن تمثيله بقطعة مستقيمة متجهة



شكل ١-١٤

خارجة من نقطة الأصل . هذه القطع المستقيمة المتجهة هي المتجهات في الفيزياء . الفيزيائي يسمح لمتجهاته بالتحرك موازية لنفسها في المستوى . نحن سوف لا نفعل ذلك . متجهاتنا ، أو بالأحرى القطع المستقيمة المتجهة المناظرة ، ستظل دائما خارجة من نقطة الأصل فيما عدا حرية التحرك يوجد اختلاف جوهري بين متجهات الفيزيائيين ومتجهاتنا . أحيانا ، خاصة عند دراسة وجهة هندسة أو فيزيائية للمتجهات ، سوف نشير الى القطع المستقيمة المتجهة كمتجهات من سياق الحديث سيكون واضحا ما إذا كنا نعتبر المجه كزوج من الأعداد ، أو نقطة ، أو قطعة مستقيمة متجهة خارجة الأصل . سنقصد باتجاه المتجه اتجاه القطعة المستقيمة المتجهة المناظرة .

من المتجهين $\alpha = (a_1, a_2)$ و $\beta = (b_1, b_2)$ يمكن تكوين متجه آخر $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ بجمع مركباتهما المتناظرة هذا المتجه الجديد يسمى حاصل جمع α و β ويرمز له بالرمز $\alpha + \beta$. أي أن

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

بالمثل ، الفرق بين α و β هو

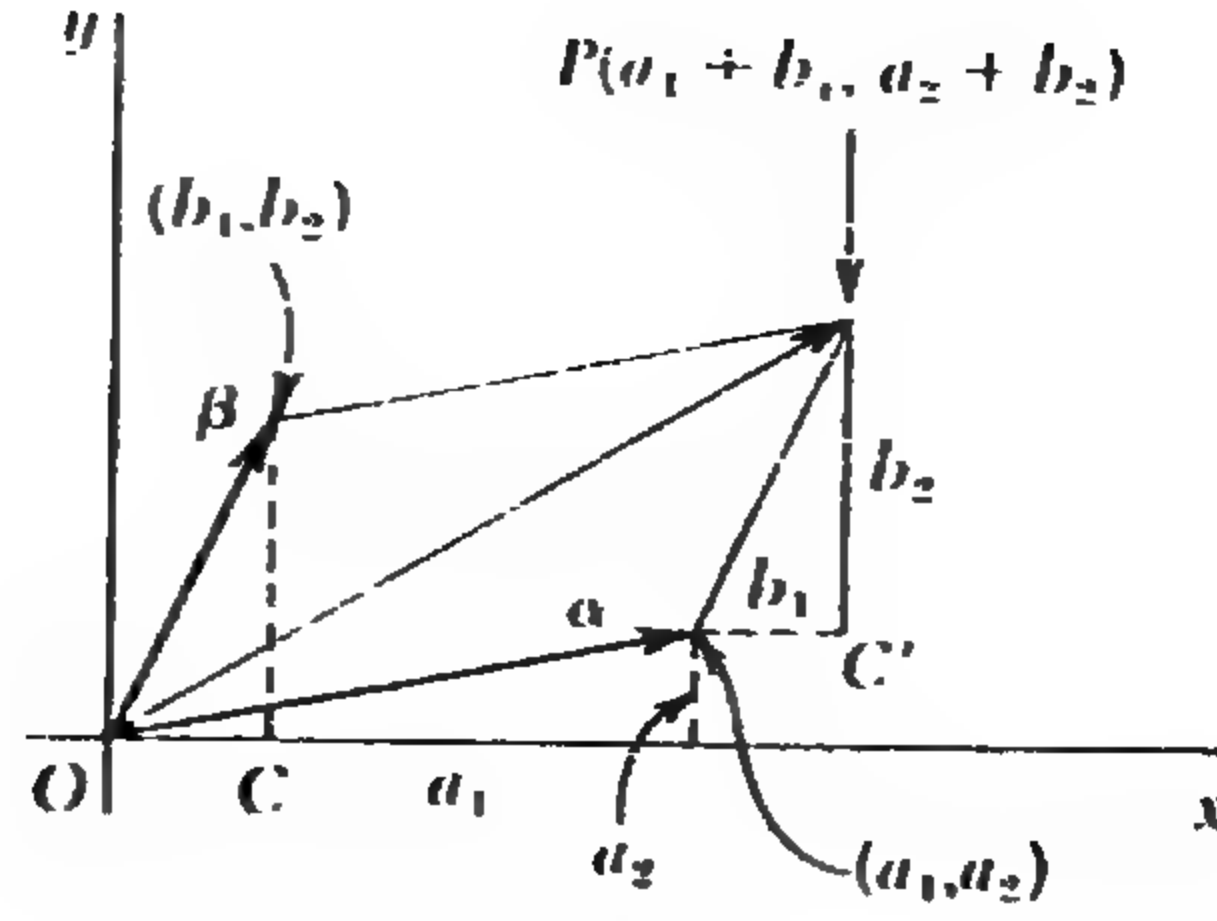
$$\alpha - \beta = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

(١) فمثلا ، إذا كان $\alpha = (1, 2)$ و $\beta = (4, -5)$ ، فإن

$$\alpha + \beta = (1 + 4, 2 + (-5)) = (5, -3)$$

$$\alpha - \beta = (1 - 4, 2 - (-5)) = (-3, 7)$$

حاصل جمع متجهين له تفسير هندسي مفيد . المتجهان $\alpha = (a_1, a_2)$ و $\beta = (b_1, b_2)$ موضحيان في الشكل ١٤ - ٢ مع القطعتين المستقيمتين المتجهتين المناظرتين لهما . ارسم المثلث $\alpha C' P$ يطابق المثلث القائم الزاوية $O C \beta$ وموضوعاً كما هو موضح في الشكل . النقطة P احداثيا هما $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ فهي تناظر المتجه $\alpha + \beta$. الشكل $O \alpha P \beta$ متوازي أضلاع ، اثنان من أضلاعه هما $O \alpha$ و $O \beta$ والقطر OP هو القطعة المستقيمة المتجهة المناظرة للمتجه $\alpha + \beta$. هذا يعطى قاعدة متوازي الأضلاع لجمع المتجهات . القطعة المستقيمة المتجهة المناظرة لحاصل جمع المتجهين α و β هي قطر متوازي الأضلاع الذي اثنان من أضلاعه هما القطعتان المستقيمتان المتجهتان المناظرتان للمتجهين α و β .



شكل ١٤-٢

إذا كان $\gamma = (c_1, c_2)$ متجهاً ثالثاً ، فإن

$$\begin{aligned}
 (\alpha + \beta) + \gamma &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) + (c_1, c_2) \\
 &= ([a_1 + b_1] + c_1, [a_2 + b_2] + c_2) \\
 &= (a_1 + [b_1 + c_1], a_2 + [b_2 + c_2]) \\
 &= (a_1, a_2) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2) \\
 &= \alpha + (\beta + \gamma).
 \end{aligned}$$

هذا يثبت أن ، كما في حالة الأعداد الحقيقية ، جمع المتجهات يتبع قانون الدمج . بالمثل ، يمكن إثبات $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ لأي متجهين α و β فالجمع يتبع أيضاً قانون الابدال (المسألة ٣٤) .

المتجه $(0, 0)$ يسمى المتجه الصفري ويرمز له بـ 0 . وهو ليس له اتجاه . رغم أن المتجه الصفري يختلف عن العدد صفر ، فنفس الرمز يستخدم لكليهما ، من سياق الحديث يكون واضحاً أي صفر هو المقصود . المتجه الصفري له الخاصية أن

$$\alpha + 0 = \alpha$$

لأي متجه α (المسألة ٣٥) .

طول المتجه α يسمى عادة مقدار المتجه ويرمز له بالرمز $|\alpha|$. بنظرية فيثاغورث يتبع من الشكل ١٤-١ أنه إذا كان $\alpha = (a_1, a_2)$ ، فإن

$$|\alpha| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

بما أن الطرف الأيمن من هذه المعادلة يمكن أن يكون صفراً فقط إذا كان $a_1 = a_2 = 0$ فإن $\alpha = 0$ إذا وإذا فقط كان $|\alpha| = 0$. لاحظ أن طول المتجه هو عدد غير سالب .

أي متجهين ، أو أكثر ، يكونان على استقامة واحدة إذا كانت القطعتان المستقيمتان المتجهتان المناظرتان لهما تقعان على نفس الخط المستقيم المار بنقطة الأصل . فالمتجهات $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ و $(4, 8)$ و $(1, 2)$ على استقامة واحدة .

المتجه الذى نحصل عليه بضرب كل مركبة للمتجه $\alpha = (a_1, a_2)$ فى عدد حقيقى c يرمز له بالرمز $c\alpha$. أى أن

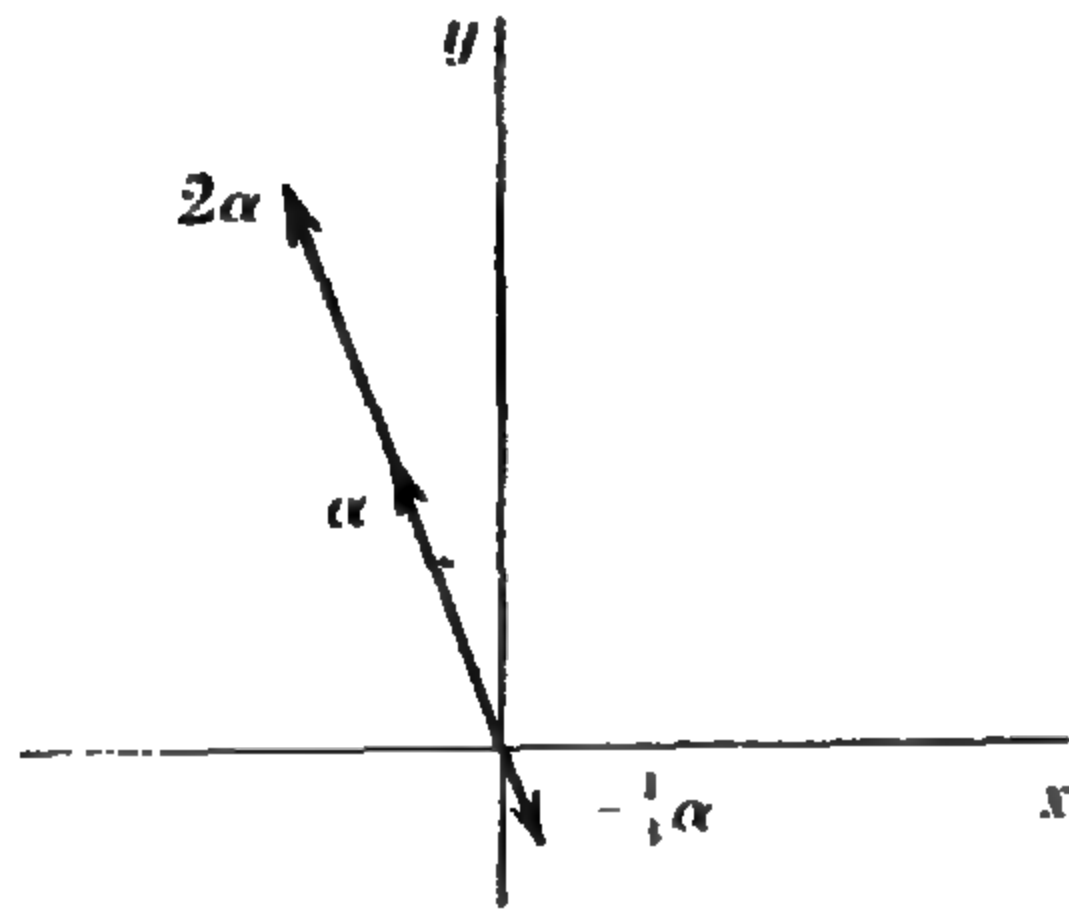
$$(٢) \quad c\alpha = c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2)$$

فمثلاً ، إذا كان $\alpha = (1, 2)$ ، فإن $3\alpha = 3(1, 2) = (3, 6)$. واضح من المثلثين المتشابهين فى الشكل ١٤ - ٣ أن المتجهين α و β يكونان على استقامة واحدة إذا وإذا فقط كان $\beta = c\alpha$ لعدد ما c . إذا كان c موجباً ، فإن $c\alpha$ له نفس الاتجاه مثل α ؛ إذا كان c سالباً ، فإن $c\alpha$ له الاتجاه العكسى . نترك للقارئ أن يتحقق أن

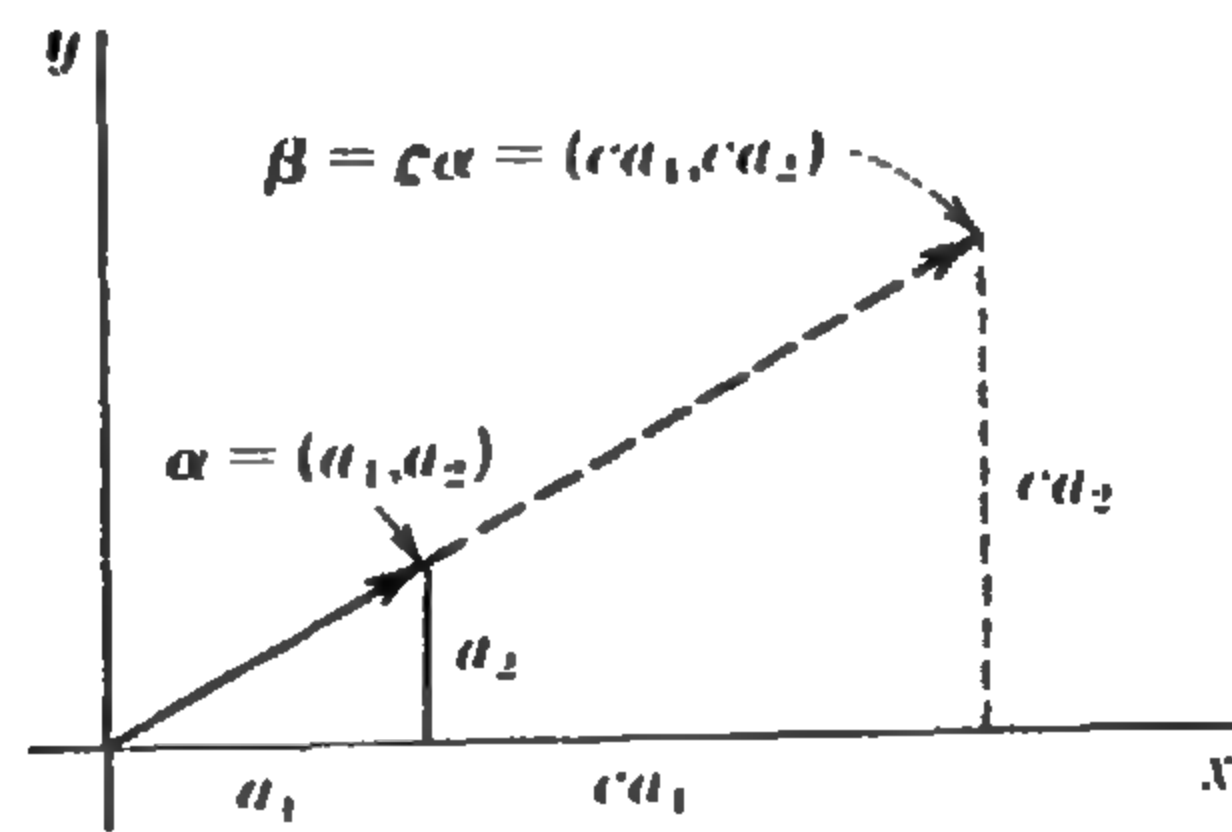
$$|c\alpha| = |c||\alpha|$$

لأى عدد c وأى متجه α (المسألة ٣٧) . واذن المتجه $c\alpha$ يكون أطول أو أقصر من α تبعاً لكون $|c| > 1$ أو $|c| < 1$. فمثلاً ، المتجه 2α طوله ضعف طول المتجه α ويتجه فى نفس الاتجاه ، والمتجه $\frac{1}{2}\alpha$ طوله ثلث طول المتجه α ويتجه فى الاتجاه المضاد (الشكل ١٤ - ٤) .

من المعتاد عند معالجة المتجهات أن نشير إلى الأعداد الحقيقية كمقادير عددية . حاصل الضرب $c\alpha$ فى (٢) هو حاصل ضرب مقدار عددي ومتجه ويسمى حاصل ضرب عددي لتمييزه عن أنواع أخرى من حواصل الضرب المشتملة على متجهات .



شكل ١٤ - ٤



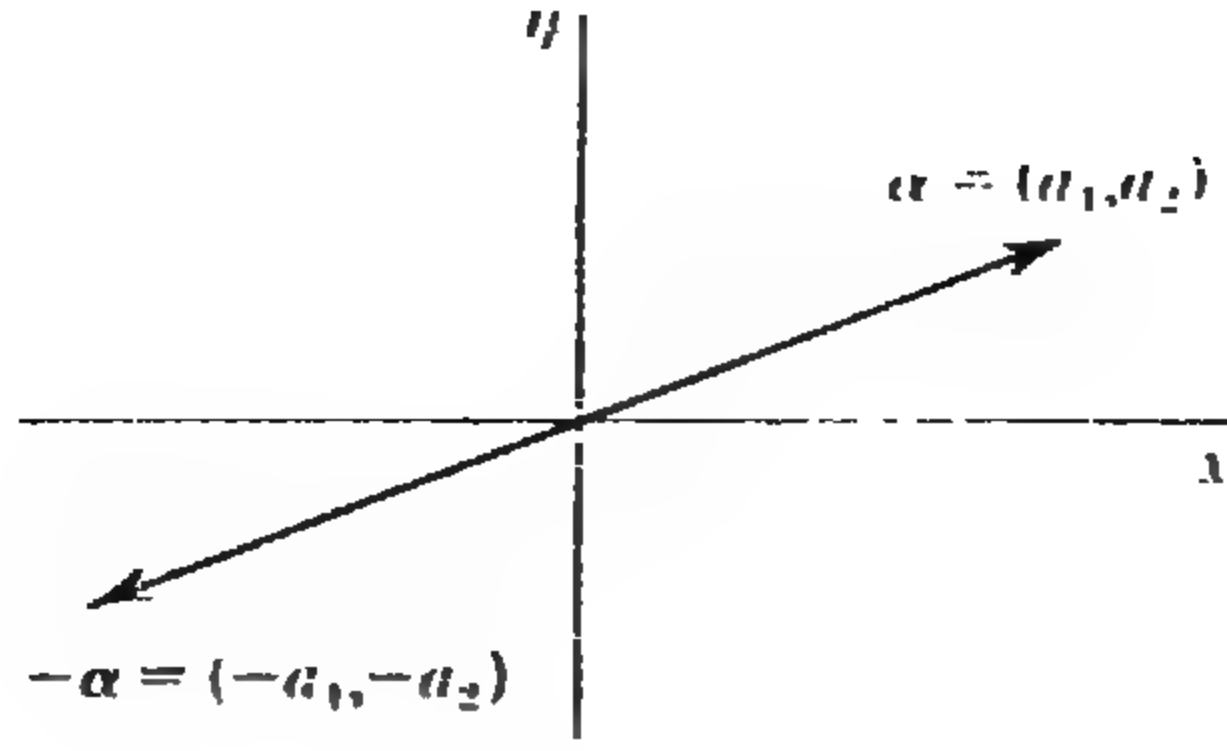
شكل ١٤ - ٣

لاحظ أن حاصل الضرب العددي هو متجه . حاصل الضرب العددي $c\alpha$ سيكتب أحياناً αc ، وحاصل الضرب $\alpha (c/d)$ سيكتب α/d .

سالب المتجه $\alpha = (a_1, a_2)$ يعرف بأنه المتجه $(-a_1, -a_2)$. أى أن

$$-\alpha = -(a_1, a_2) = (-a_1, -a_2)$$

وبالتالى فإن $-\alpha = (-1)\alpha$. هذا المتجه له نفس الطول مثل α لكنه يتجه فى الاتجاه المضاد (شكل ١٤ - ٥) . من (١) ، يكون $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.



شكل ١٤-٥

من السهل إثبات أن $c0 = 0$ ، حيث c أى عدد حقيقى وحيث 0 هو المتجه الصفري وأيضاً أن $0\alpha = 0$ ، حيث α هو أى متجه ، الصفري على اليسار هو العدد صفري ، والصفري على اليمين هو المتجه الصفري (المسألة ٣٦) . صحيح أيضاً (المسألة ٤١) أن لآى متجهين β و α ولأى مقدارين عدديين (عديين حقيقيين) d و c ، يكون

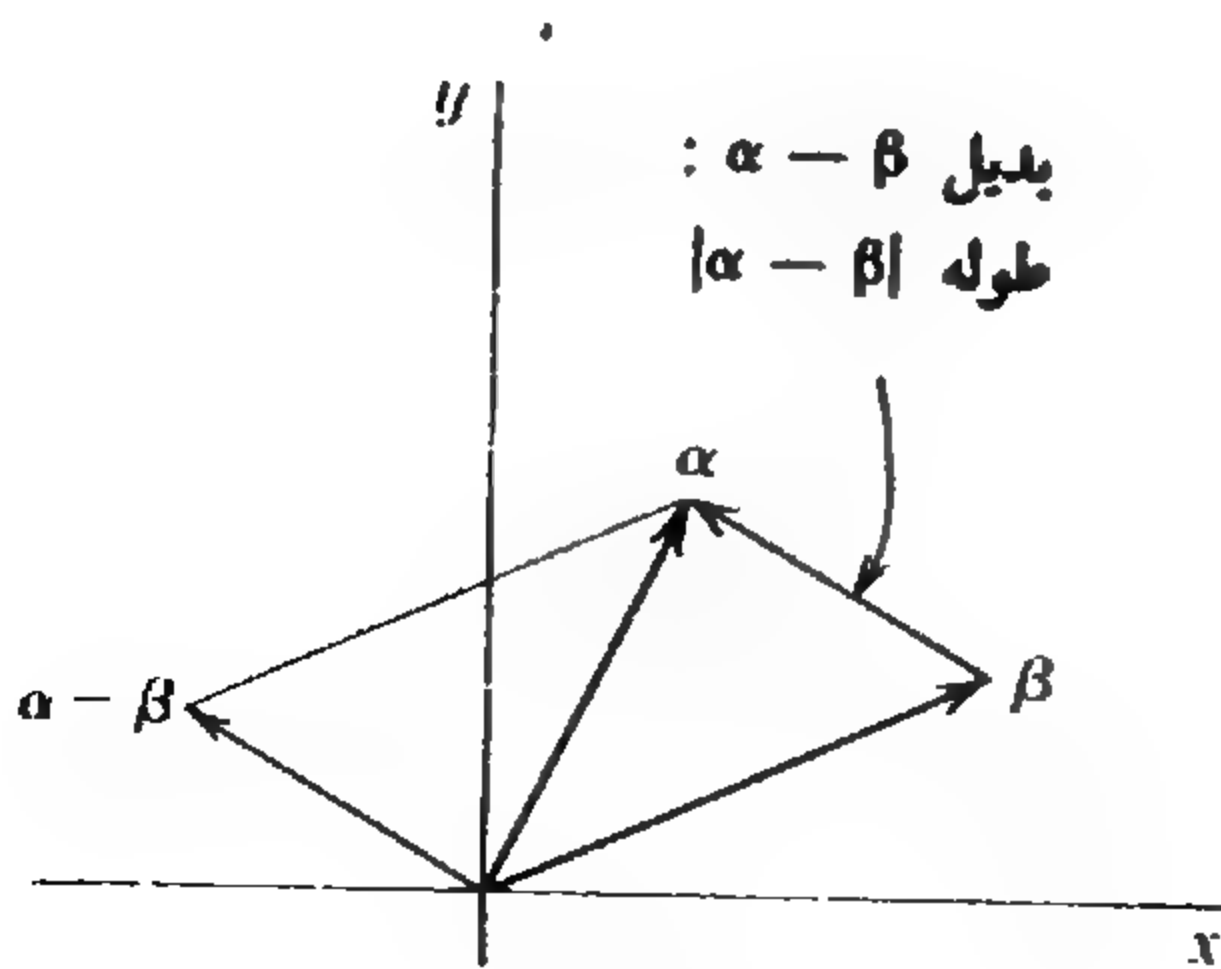
$$c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta, \quad c(d\alpha) = (cd)\alpha$$

$$(c + d)\alpha = c\alpha + d\alpha, \quad 1(\alpha) = \alpha.$$

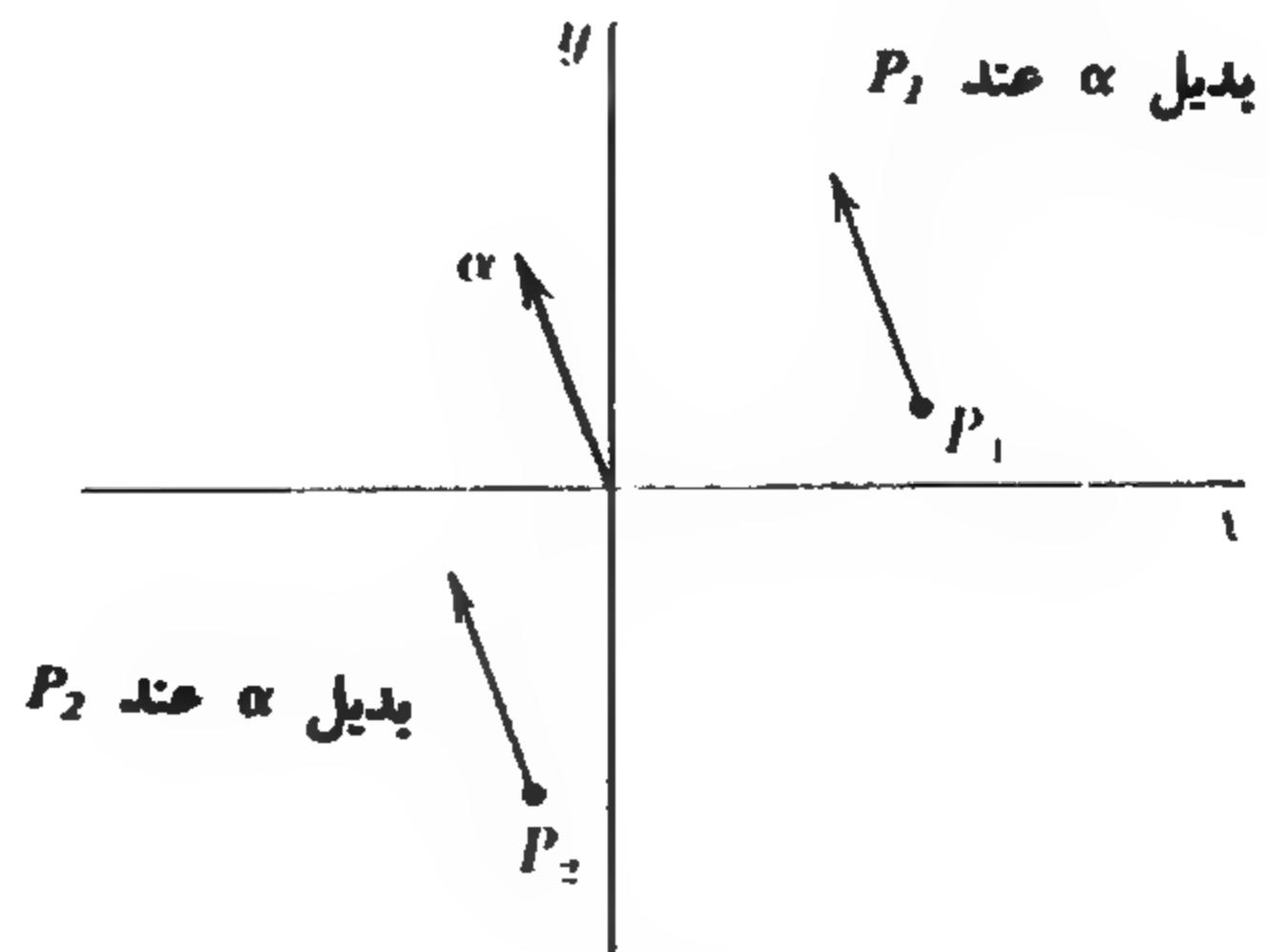
هذه ، وخواص المتجهات التى ذكرناها من قبل ، تكفى لتؤكد أن المتجهات تسلك مثل الأعداد الحقيقية بالنسبة الى الجمع والطرح والضرب فى عدد فمثلاً : $-(\alpha + \beta) = -\alpha - \beta$ ، $(\alpha/5 + \beta) = \frac{1}{5}(\alpha + 5\beta)$ ، $(\alpha - \beta) + 2\beta = \alpha + \beta$

ليكن α متجهاً . من كل نقطة P فى المستوى يمكن رسم قطعة مستقيمة لها نفس الطول والاتجاه مثل α . نسمى مثل هذه القطعة المستقيمة المتجهة البديل للمتجه α عند P (شكل ١٤-٦) . من المناسب اعتبار المتجه α كالبديل لنفسه عند نقطة الأصل . المتجه له بديل كثيرة ، بديل لكل نقطة فى المستوى . وبالعكس كل قطعة مستقيمة متجهة هى بديل لمتجه ما .

بما أن $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$ ، فالمتجه α هو حاصل جمع β و $\alpha - \beta$ ، والمتجه $\alpha - \beta$ يجب ان يبدو كما فى الشكل ١٤-٧ . لاحظ أن القطعة المستقيمة المتجهة من رأس المتجه β الى رأس



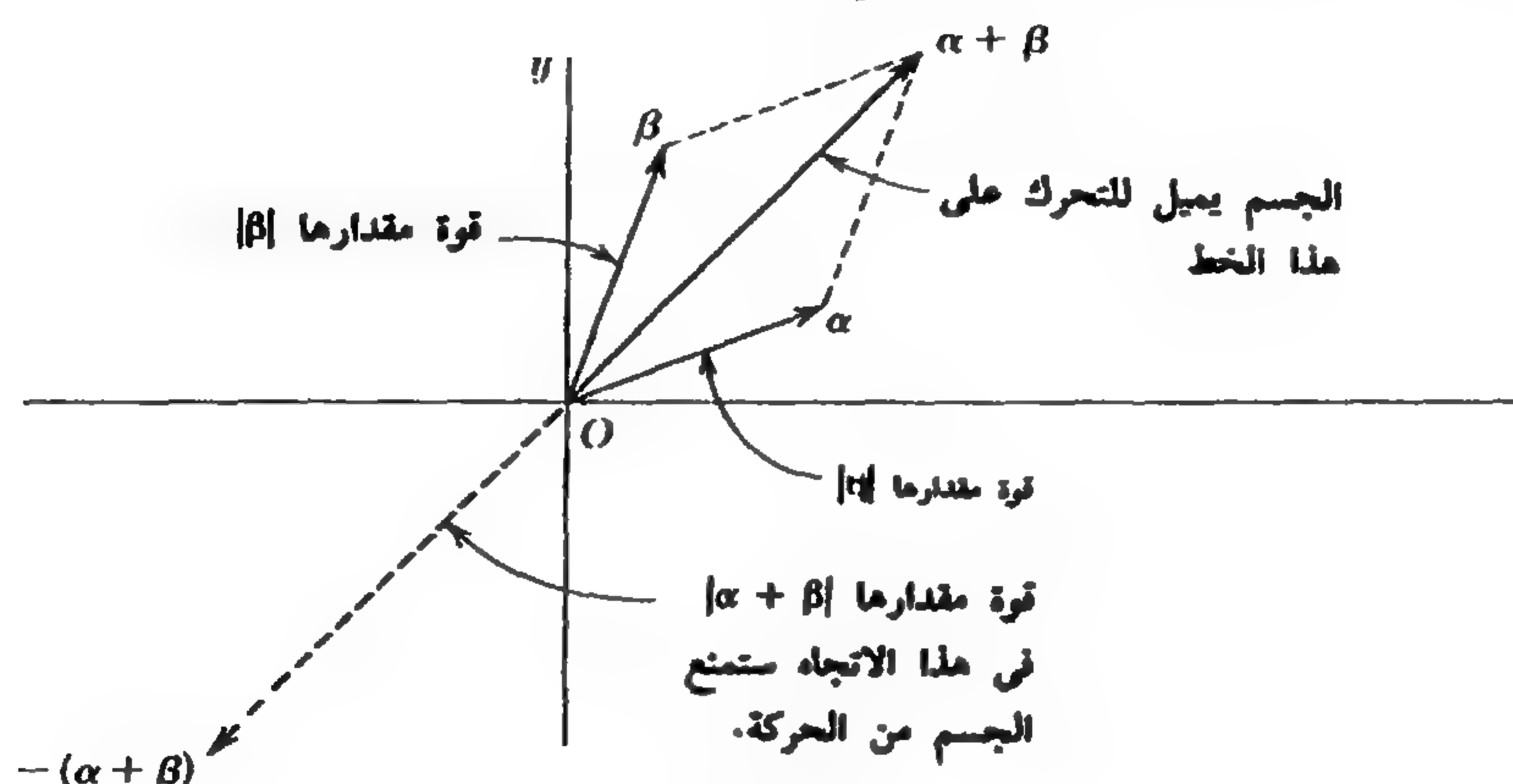
شكل ١٤-٧



شكل ١٤-٦

المتجه α هو البديل للمتجه $\beta - \alpha$ عند β . المتجه يكون صفراً إذا وإذا فقط كان طوله صفراً . إذن $\alpha = \beta$ إذا وإذا فقط كان $|\alpha - \beta| = 0$.

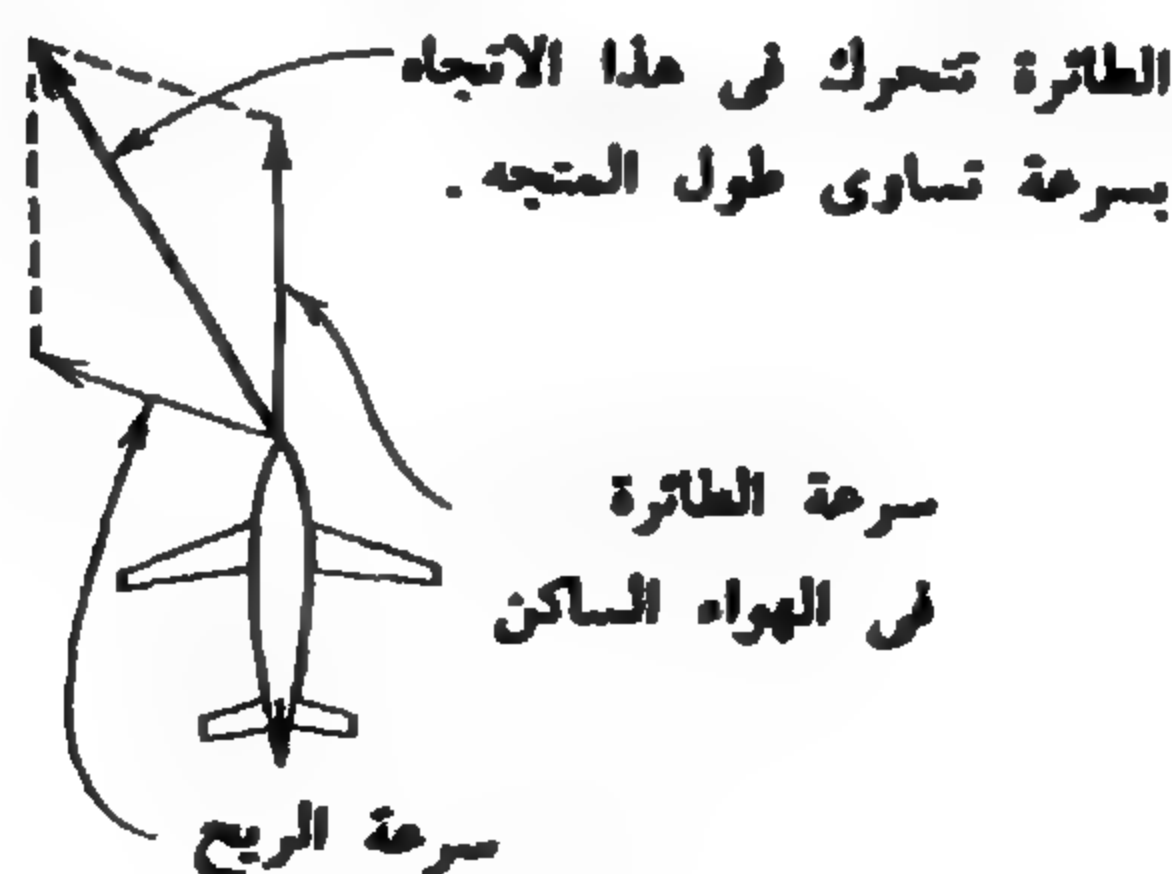
حاصل الجمع لمتجهين له تفسيرات فيزيائية كثيرة . نفرض أن قوتين تؤثران في اتجاهين مختلفين وتشدان جسماً عند O . يمكن تمثيل القوتين بمتجهين α و β يقعان على خطي تأثير القوتين ويتجهان في اتجاه القوتين وطولاهما يساويان مقدارى القوتين (شكل ١٤ - ٨) . نفس التأثير على الجسم يمكن انجازه بقوة واحدة ، تسمى القوة المحصلة ، تؤثر في اتجاه $\alpha + \beta$ ومقدارها يساوى ذلك المتجه . القوة التى تستخدم فى الاتجاه المضاد للمتجه $\alpha + \beta$ ولها نفس المقدار متوازن تماماً مع القوتين على امتداد β و α . والجسم سوف لا يتحرك . وذلك لأن حاصل جمع المتجهات $(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)$ هو المتجه الصفري .



شكل ١٤ - ٨

أى قوة مؤثرة على جسم يمكن تمثيلها ببديل لمتجه عند الجسم . التأثير الكلى لمجموعة من القوى هو حاصل جمعها المتجه . اتجاهه وطوله يعطيان اتجاه ومقدار القوة المحصلة .

سرعة جسم متحرك يمكن تمثيلها بمتجه عند نقطة الأصل أو ببديل للمتجه عند الجسم . اتجاه المتجه أو متجه بديل له هو اتجاه الحركة ، وطوله هو مقدار السرعة . سرعة الطائرة فى الهواء الساكن يمكن تمثيلها بمتجه بديل عند الطائرة مشيراً إلى الأمام (شكل ١٤ - ٩) . سرعة الرياح



شكل ١٤ - ٩

يمثلها متجه بديل عند الطائرة مشيراً إلى اتجاه هبوب الريح . متجه حاصل جمع الاثنين سيشير إلى الاتجاه الذى تتحرك فيه فعلاً ، وطوله سيكون مساوياً لمقدار سرعة الطائرة .

إذا أثرت عدة قوى على جسم ، وكان تأثير كل على حدة سيسبب حركة الجسم فى اتجاه معين بسرعة معينة ، فإن هذه السرعات يمكن تمثيلها بمتجهات عند نقطة الأصل أو ببدايات للمتجهات عند الجسم . الاتجاه الفعلى لحركة الجسم تحت تأثير القوى هو حاصل جمع المتجهات ، وسرعته هى طول حاصل الجمع .

مسائل

أوجد حاصل جمع وفرق (الأول ناقص الثانى) أزواج المتجهات الآتية . ارسم القطعتين المستقيمتين المتجهتين اللتين تمثلان المتجهين ، أكمل متوازى الأضلاع ، الذى اثنان من أضلاعه هما المتجهان المعطيان ، ووضح كلا من متجهى حاصل الجمع والفرق كقطعة مستقيمة متجهة .

$$١ - (2,1), (1,5) \quad ٢ - (1,0), (-1,4) \quad ٣ - (12,4), (-10,-4) \quad ٤ - (0,0), (a,b)$$

$$٥ - (-\epsilon_1 + \epsilon_2) \quad (3\epsilon_1 + 5\epsilon_2) \quad \text{حيث} \quad \epsilon_2 = (0,1) \quad \text{و} \quad \epsilon_1 = (1,0)$$

أوجد حاصل ضرب المتجه والمقدار العددى . ارسم القطعتين المستقيمتين اللتين تمثلان المتجه ومتجه حاصل الضرب العددى .

$$٦ - (2,-4), \frac{1}{2} \quad ٧ - (\frac{1}{3},6), -3 \quad ٨ - (0,0), c \quad ٩ - (a,b), 0$$

إذا كان $\delta = (0,0)$ و $\alpha = (0,1), \beta = (-3,2), \gamma = (3,\frac{1}{2})$ فأوجد ووقع المتجهات الآتية :

$$١٠ - \beta, 2\beta, -\frac{1}{3}\beta, 3\alpha + \beta \quad ١١ - \sqrt{2}\gamma, \alpha - \gamma, (\alpha + \beta)(-\frac{1}{2})$$

$$١٢ - 5\delta, 2\beta - \alpha + 3\gamma, -2(\gamma - \beta) + \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$$

عين أياً من التعبيرات الآتية متجهات ، وأياً منها أعداد ، وأياً منها لا معنى له . فى الحالة الأخيرة اشرح لماذا التعبير لا معنى له . الحروف الإغريقية ترمز الى متجهات والحروف الرومانية ترمز الى أعداد .

$$١٣ - 6\alpha + 3 \quad ١٤ - \alpha/4 \quad ١٥ - (6 + \alpha)\beta \quad ١٦ - (\alpha - 5\beta)\alpha$$

$$١٧ - \alpha^2 - 4\alpha + 4\gamma \quad ١٨ - 8|2\alpha - 7\beta| \quad ١٩ - |(3\alpha)\gamma| \quad ٢٠ - 3|\alpha\gamma|$$

$$٢١ - |3\alpha|\gamma \quad ٢٢ - c\alpha + d\beta \quad ٢٣ - (\alpha - 2\beta)/7 \quad ٢٤ - \gamma\alpha + \delta\beta$$

$$٢٥ - (\alpha + 2\beta)/\delta \quad ٢٦ - \sqrt{\alpha + \beta}$$

حل معادلات المتجهات الآتية للمتجه α :

أوجد المتجه الذى بديله عند النقطة الأولى من كل زوج أدناه يكون القطعة المستقيمة المتجهة من النقطة الأولى إلى الثانية :

$$٥٢ - (3,0), (5,4) \quad ٥٣ - (0,-\frac{1}{2}), (4,-7) \quad ٥٤ - (1,3), (-1,1) \quad ٥٥ - (a,b), (c,d)$$

٥٦ - كيان α و β متجهين . أثبت أنه عندما تتغير t من 0 إلى 1 ، رأس المتجه $(1-t)\alpha + t\beta$ يرسم القطعة المستقيمة من α إلى β . [ارشاد : أنظر (٥) ، بيند ٩-١] .

٥٧ - أثبت أن كلا من القيمتين المطلقتين لمركبتى المتجه أقل من أو تساوى طول المتجه . وضع هذا هندسياً . هل يمكن ان يحدث التساوى ؟

٥٨ - أوجد متجهاً طوله الوحدة وله نفس الاتجاه مثل $(-6, \sqrt{2})$.

٥٩ - أوجد متجهاً طوله الوحدة ويتجه فى الاتجاه المضاد للمتجه $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

٦٠ - أوجد متجهاً طوله الوحدة وله نفس الاتجاه مثل المتجه (a_1, a_2) .

٦١ - ارسم بديلاً متجهاً يمثل قوة مقدارها $3 lb$ تؤثر على جسم عند النقطة $(4, -1)$ فى اتجاه 120° . أوجد احداثى رأس البديل المتجه .

٦٢ - قوتان تشدان جسماً عند نقطة الأصل ، القوة الأولى مقدارها $2\sqrt{2} lb$ وفى الاتجاه $\pi/4$ والقوة الثانية مقدارها $6 lb$ وفى الاتجاه $\pi/3$. ارسم المتجهين الممثلين للقوتين ، كون متوازي الأضلاع ، وارسم المتجه الممثل للقوة المحصلة . أوجد مقدار واتجاه القوة المحصلة .

٦٣ - سرعة طائرة فى الهواء الساكن هى $300 mph$ فى اتجاه 90° . تهب ربح سرعتها $60 mph$ فى اتجاه 60° - ما هو اتجاه ومقدار سرعة الطائرة ؟

١٤-٢

حاصل الضرب الداخلى

هذا البند يقدم فكرتين مفيدتين فى نظرية المتجهات : الضرب الداخلى لمتجهين والتركيب الخطية للمتجهات .

ليكن $\beta = (b_1, b_2)$ و $\alpha = (a_1, a_2)$ متجهين . العدد الحقيقى $a_1b_1 + a_2b_2$ يسمى حاصل الضرب الداخلى (أو حاصل الضرب العدى للمتجهين β و α ويرمز له بالرمز $\alpha \cdot \beta$. أى أن

$$\alpha \cdot \beta = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$$

فمثلاً ، إذا كان $\beta = (8, -1)$ و $\alpha = (2, 3)$ ، فإن

$$\alpha \cdot \beta = 2(8) + 3(-1) = 13$$

لاحظ أن حاصل الضرب الداخلى هو عدد . النظرية الآتية تعطى بعض خواص حاصل الضرب الداخلى .

١٤-١ نظرية لجميع المتجهات α و β و γ ولأي عدد c ، يكون

$$(i) \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

$$(ii) \alpha \cdot (\beta \pm \gamma) = \alpha \cdot \beta \pm \alpha \cdot \gamma$$

$$(iii) (\beta \pm \gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha \pm \gamma \cdot \alpha$$

$$(iv) (c\alpha) \cdot \beta = c(\alpha \cdot \beta) = \alpha \cdot (c\beta)$$

$$(v) 0 \cdot \alpha = 0$$

$$(vi) \alpha \cdot \alpha \geq 0 \text{ و } \alpha \cdot \alpha = 0 \text{ إذا فقط كان } \alpha = 0$$

البرهان سنبرهن (ii) والجزء الأول من (vi) ونترك براهين الخواص الأخرى للقارئ (المسألة ١) .

(ii) ليكن $\gamma = (c_1, c_2)$ و $\beta = (b_1, b_2)$ و $\alpha = (a_1, a_2)$. فيكون $\beta \pm \gamma = (b_1 \pm c_1, b_2 \pm c_2)$

ومن تعريف حاصل الضرب الداخلي ، يكون

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta \pm \gamma) &= a_1(b_1 \pm c_1) + a_2(b_2 \pm c_2) \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2) \pm (a_1c_1 + a_2c_2) \\ &= \alpha \cdot \beta \pm \alpha \cdot \gamma. \end{aligned}$$

(vi) حاصل جمع مربعات لا يمكن أن يكون سالباً إذن

$$(1) \quad \alpha \cdot \alpha = a_1^2 + a_2^2 \geq 0$$

حيث أن $|\alpha| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ فإن المعادلة (١) تبين أن

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha}$$

١٤-٢

يوجد تعبير بسيط ومفيد لجيب تمام الزاوية بين متجهين بدلالة حاصل الضرب الداخلي لهما .
ليكن α و β متجهين غير صفريين ولتكن θ الزاوية بينهما ، حيث $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$. بالرجوع الى الشكل ١٤-١٠ ، لدينا بقانون جيب تمام

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB| \cos \theta$$

أولغة المتجهات

$$(2) \quad |\alpha - \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha||\beta| \cos \theta$$

الآن من المعادلة ١٤-٢ ،

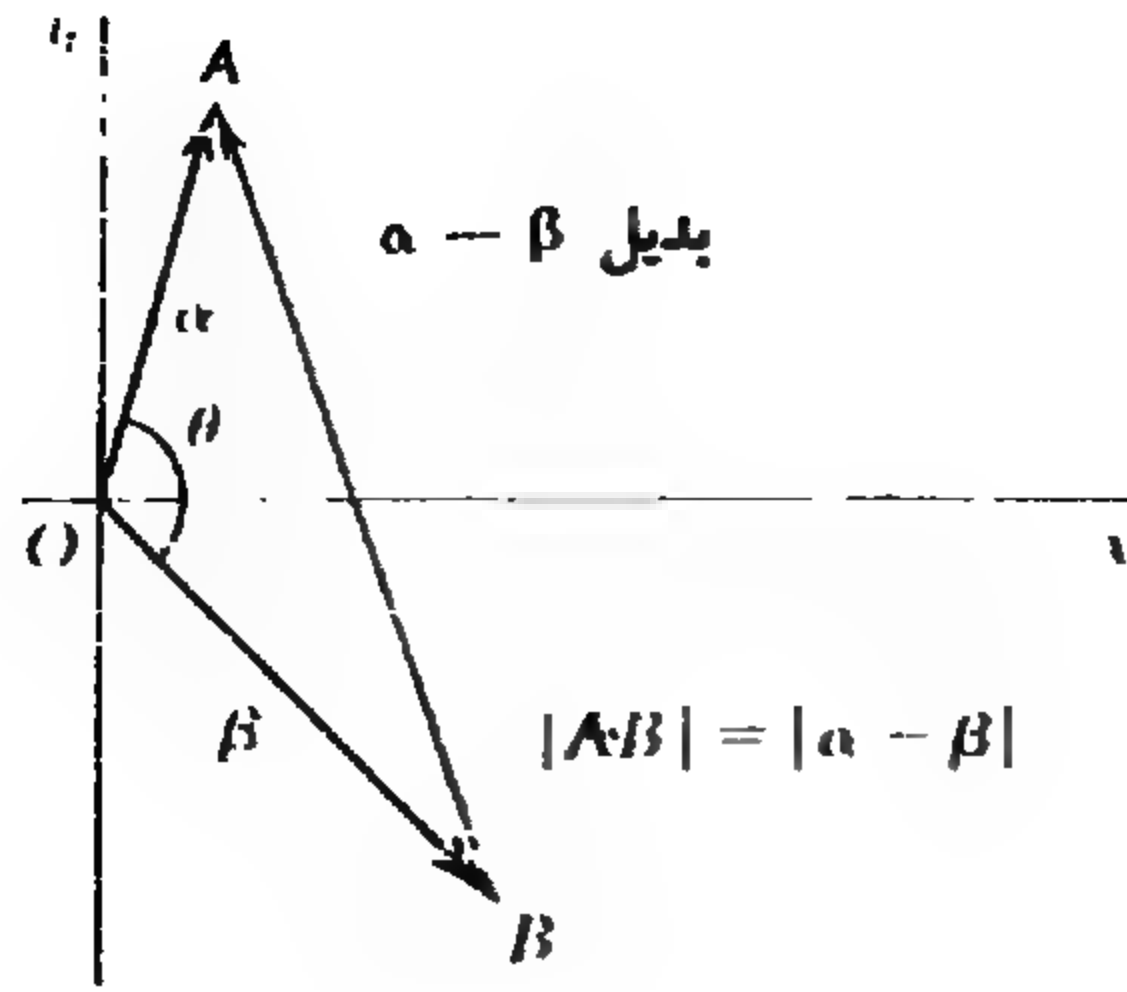
$$|\alpha - \beta|^2 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta)$$

ليس من الصعب ، باستخدام النظرية ١٤-١ ، اثبات أن

$$(3) \quad (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta) = |\alpha|^2 - 2(\alpha \cdot \beta) + |\beta|^2$$

(المسألة ٢) . بمساواة الطرفين الأيمنين للمعادلتين (٢) و (٣) ، يكون لدينا

$$-2|\alpha||\beta| \cos \theta = -2(\alpha \cdot \beta)$$



شكل ١٠-١٢

ومن ثم

$$(٤) \quad \cos \theta = \frac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha| |\beta|}$$

من هذا التعبير يمكن إيجاد θ بالاستعانة بجدول جيوب التمام . بما أن $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ، توجد زاوية واحدة فقط θ جيب التمام لها هو العدد بالطرف الأيمن من (٤) .

مثال ١ . أوجد الزاوية بين المتجهين $(-2, 1)$ و $(3, 2)$.

إذا فرضنا أن $\beta = (-2, 1)$ و $\alpha = (3, 2)$ فإن جيب تمام الزاوية بين المتجهين β و α هو ، باستخدام (٤) ،

$$\cos \theta = \frac{3(-2) + 2(1)}{\sqrt{9+4} \sqrt{4+1}} = \frac{-4}{\sqrt{65}} \approx -0.49614$$

اذن $\theta \approx 119^\circ 45'$

بما أن $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ، فإن $\cos \theta = 0$ إذا وإذا فقط كانت $\theta = 90^\circ$ ، ونستنتج من (٤) النظرية الآتية :

١٤-٣ نظرية . المتجهان β و α يكونان متعامدين إذا وإذا فقط كان $\alpha \cdot \beta = 0$.

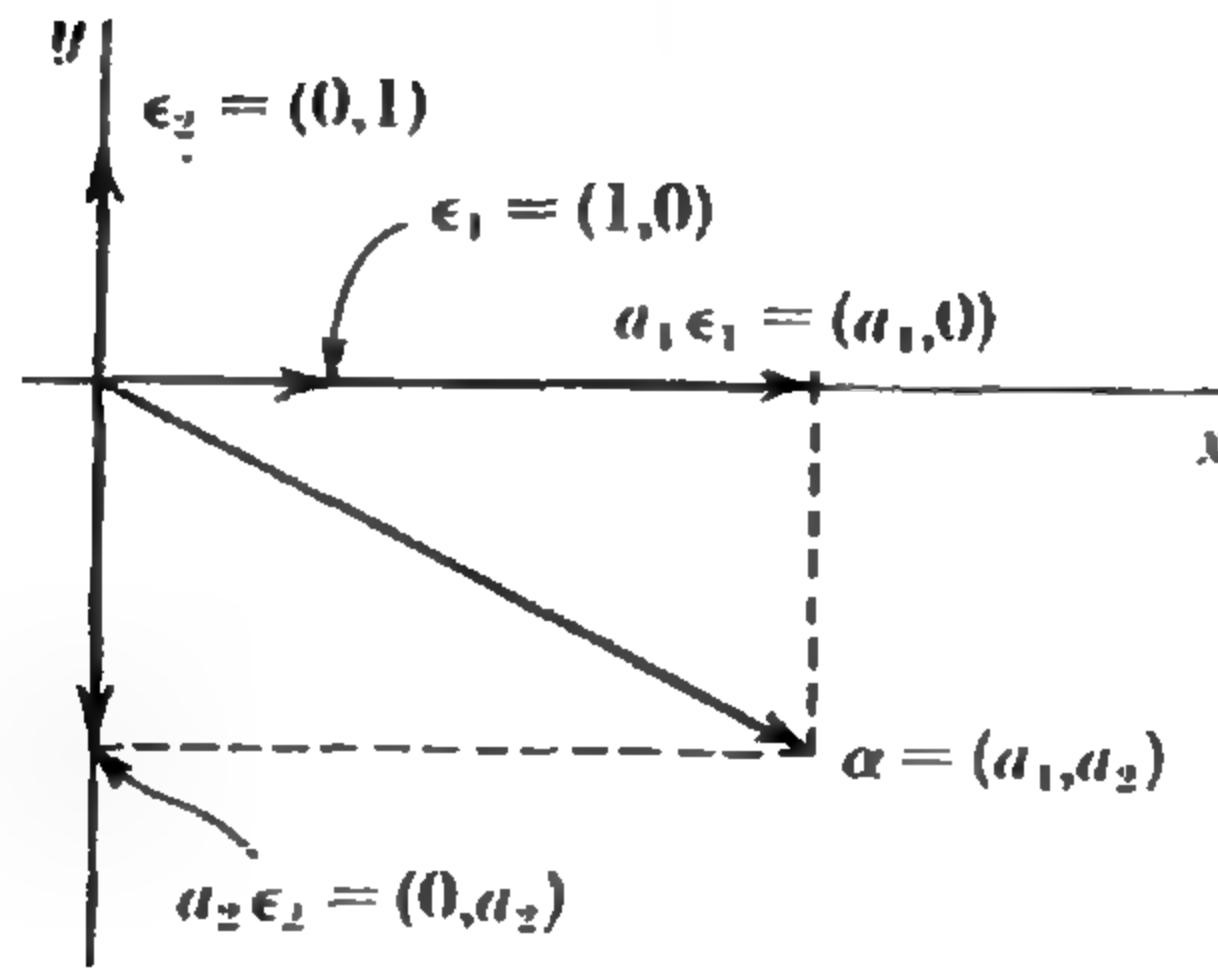
فمثلا المتجهان $\beta = (10, 4)$ و $\alpha = (-2, 5)$ متعامدان لأن $\alpha \cdot \beta = (-2)(10) + (5)(4) = 0$. حتى تنطبق على جميع المتجهات ، نعتبر أن المتجه الصفري عمودى على كل متجه .

ليكن $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ مجموعة من المتجهات . حاصل جمع على الصورة : $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n$ ، حيث c_1, c_2, \dots, c_n أعداد ، يسمى تركيبة خطية للمتجهات $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. الأعداد c_1, c_2, \dots, c_n تسمى معاملات المتجهات $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. فمثلا ، إذا كان $\alpha_1 = (2, 1)$ و $\alpha_2 = (-6, \frac{1}{2})$ ، فإن المتجه $2(2, 1) + 5(-6, \frac{1}{2})$ هو تركيبة خطية للمتجهين α_1 و α_2 . هذه التركيبة الخطية هي المتجه $(-26, \frac{3}{2})$ ، وقد أوضحنا أن $(-26, \frac{3}{2})$ يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية للمتجهين $(-6, \frac{1}{2})$ و $(2, 1)$.

المتجهان $\epsilon_1 = (1, 0)$ و $\epsilon_2 = (0, 1)$ ، اللذان طول كل منهما الوحدة ويقعان على المحور السيني والمحور الصادي ، على الترتيب ، لهما أهمية خاصة لأنهما يتعامدان . أى متجه $\alpha = (a_1, a_2)$ يمكن كتابته على الصورة

$$\begin{aligned}\alpha &= (a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2) \\ &= a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2\end{aligned}$$

أى أن كل متجه يمكن التعبير عنه كتركيب خطية للمتجهين ϵ_1 و ϵ_2 . الشكل ١٤ - ١١ يوضح ذلك هندسياً . كثيراً ما يكون من المطلوب التعبير عن متجه كتركيب خطية لمتجهين معطيين ليسا على استقامة واحدة . المثال الآتى يوضح كيف نجري ذلك .



شكل ١٤ - ١١

كل متجه α يمكن التعبير عنه كتركيب خطية للمتجهين ϵ_1 و ϵ_2 .

مثال ٢ . عبر عن المتجه $\gamma = (-4, 8)$ كتركيب خطية للمتجهين $\beta = (1, -1)$ و $\alpha = (2, 6)$.

نبحث عن عددين a و b بحيث أن

$$(-4, 8) = a(2, 6) + b(1, -1)$$

بتعريف حاصل ضرب عدد ومتجه حاصل جمع متجهين ، يكون

$$a(2, 6) + b(1, -1) = (2a, 6a) + (b, -b) = (2a + b, 6a - b)$$

لكى يكون هذا المتجه الأخير مساوياً للمتجه $(-4, 8)$ ، يجب أن تحقق a و b المعادلتين

$$2a + b = -4, \quad 6a - b = 8$$

بحل هاتين المعادلتين معاً ، نرى أن $a = \frac{1}{2}$ ، $b = -5$ إذن $\gamma = \frac{1}{2}\alpha - 5\beta$.

مسائل :

١ - أثبت أجزاء النظرية ١٤ - ١ التى لم تبرهن فى الكتاب ، أى الأجزاء (أولاً) و (ثالثاً) و (رابعاً) و (خامساً) والجزء الثانى من (سادساً) .

$$-4\alpha + 3\beta = 6(\delta - \alpha) \quad ٢٩$$

$$(a, 1+b) \quad ٢٣ \quad (-2,7)$$

α و β .

ث 0 هو المتجه الصفري . (ب) أثبت أن
هو العدد صفر ، والصفر الأيمن هو المتجه

α . أشرح معنى الخطوط الرأسية في هذه

$$? |\alpha| = |\beta| \text{ كان}$$

$-c\alpha$ — يمكن أن يعنى أيّاً من هذين دون

و c يكون

$$(c+d)\alpha = c\alpha + d\alpha$$

$$1(\alpha) = \alpha$$

ل (4, -1) ويكونان على استقامته .

ن على استقامة الأول :

$$(9,12) \quad ٤٥ \quad (r,5), (2,7)$$

$$(2,3)$$

لى استقامة المتجه $4\alpha - 3\beta$.

ن على استقامة واحدة إذا وإذا فقط كانت

ت c لا يساوى صفراً بحيث أن $b_2 = ca_2$

و (a_1, a_2) يكونان على استقامة واحدة إذا

P . ارسم المتجه α وبديلة عند P .

$$\alpha = (-5,6), P = (4,$$

$$٢ - \text{أثبت أن } -2(\alpha \cdot \beta) + |\beta|^2$$

٣ - حقق متباينة Schwarz - chy

$$\alpha = (-1, 3), (\text{ب})$$

(ارشاد : ضع (b_1, b_2) =

$$٤ - \text{حقق متباينة المثلث } |\alpha| + |\beta|$$

$$(\text{ب}) \beta = (3, 4) \text{ و } (5, 1)$$

هندسياً لمتباينة المثلث . هل

شفارتر (المسألة ٣) .

٥ - عمم متباينة المثلث (المسألة ٤

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n|$$

الى أزواج النقط الآتية :

$$٦ - (2,3), (1,7) \quad ٧ - (5,4)$$

أوجد زوايا المثلث الذى رؤوه

$$١٠ - A(-1,1), B(2,-1), C(4,4)$$

$$١٢ - A(2,0), B(6,2), C(-1,4)$$

١٣ - عين قيمة a بحيث أن الزاوية

١٤ - أوجد a_1, a_2 بحيث أن المتجه

زاوية 30° مع الاتجاه الموجب

$$١٥ - \text{أثبت أن المتجهين } 3\sqrt{2}\epsilon_2$$

١٦ - عين b بحيث أن المتجه b_2

١٧ - (أ) أوجد جميع المتجهات

وأثبت هندسياً أن كلا منها يتعامد

منها الوحلة وتتعامد مع المت

١٨ - أثبت أن الشرط $\alpha \cdot \beta = 0$ لتعام

مقلوب ميل الآخر . لاحظ أن

كان أحد المتجهين رأسياً .

١٩ - أثبت أن المتجه الوحيد العم

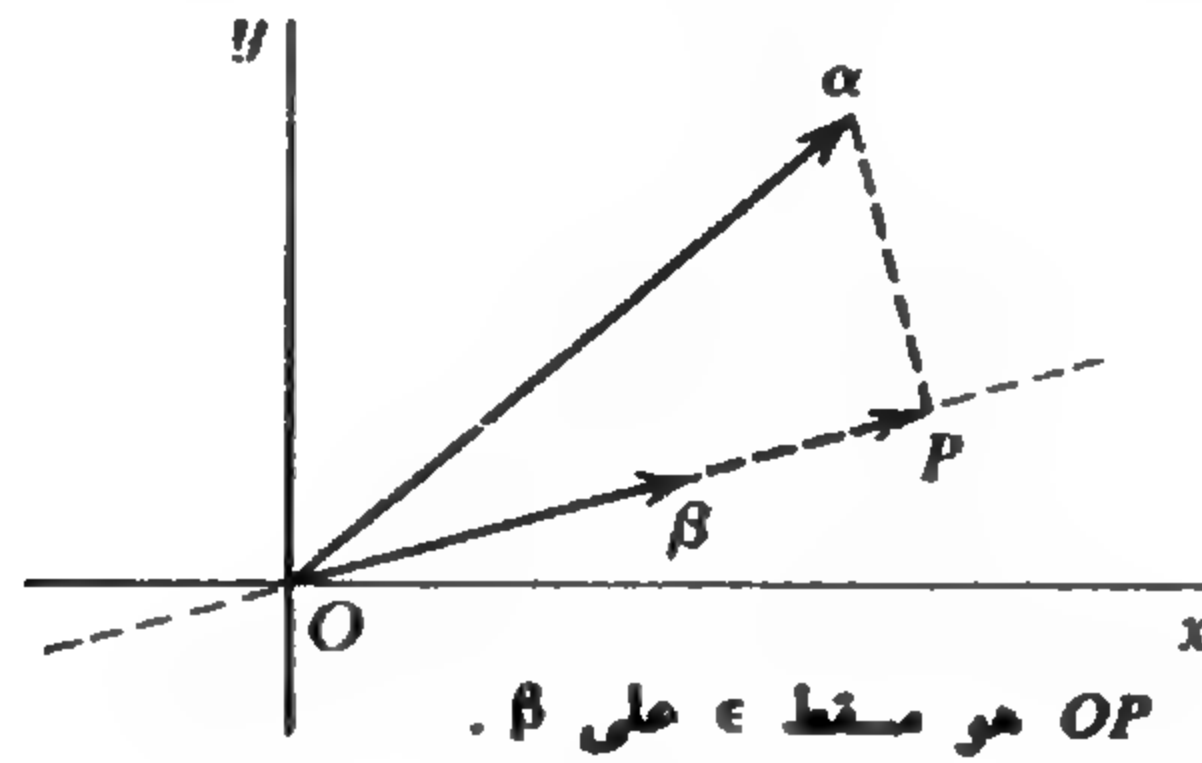
٢٠ - أثبت أن المتجهين $(\phi, \sin \phi)$

وأثبت أن الزاوية من المتجه β

$\cos(\theta - \phi)$ بدلالة مركبات

٢١ - ليكن $\alpha = (a, b)$ متجهاً غير صفري . أرمز الى طوله بالرمز r والى زاوية ميله على محور السينات بالرمز θ . فيكون $\alpha = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. هذان هما الاحداثيان القطبيان للمتجه α . اذا دار المتجه α زاوية 90° ضد اتجاه عقرب الساعة ، فاننا نحصل على المتجه $\beta = (r \cos (\theta + 90^\circ), r \sin (\theta + 90^\circ))$. حقق أن حاصل الضرب الداخلى للمتجهين β و α يساوى صفراً .

٢٢ - مسقط المتجه α على المتجه β هو المتجه الذى قطعه المستقيمة المتجهة هي مسقط القطعة المستقيمة التى تمثل المتجه α على خط المتجه β (شكل ١٤ - ١٢) . (أ) أوجد مسقط المتجه $(3, 3)$ على المتجه $(5, 2)$ ؛ ارشاد : فى الشكل ١٤ - ١٢ ، $OP = c \beta$ لعدد ما c . عين c بحيث أن الخط المستقيم $P\alpha$ يكون عمودياً على OP . (ب) أوجد مسقط المتجه $(5, 2)$ على المتجه $(3, 3)$. (ج) أوجد مسقط المتجه $(4, 1)$ على المتجه $(-\frac{8}{5}, \frac{3}{5})$. (د) أثبت أن طول مسقط المتجه α على المتجه $\beta = 0$ هو $|\alpha| \cos \theta$.



شكل ١٤ - ١٢

٢٣ - أثبت بمثال أن $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$ لا يتضمن أن $\beta = \gamma$. أثبت أنه اذا كان $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$ لكل α ، فان $\beta = \gamma$ (ارشاد : $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$ يتضمن أن $(\beta - \gamma) \cdot \alpha = 0$) .
٢٤ - أثبت أن $|\alpha - \beta|^2 + |\alpha + \beta|^2 = 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2$. فسر هذه المعادلة كنص عن ضلعى وقطرى متوازى الأضلاع .

٢٥ - أثبت أن $\alpha - \beta$ يكون عمودياً على $\alpha + \beta$ اذا وإذا فقط كان $|\alpha| = |\beta|$. أعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة .

٢٦ - المتجهان α و β يكونان ضلعين من متوازى أضلاع . أثبت أن متوازى الأضلاع يكون مستطيلاً اذا وإذا فقط كان $|\alpha + \beta| = |\alpha - \beta|$.

٢٧ - ليكن $\beta \neq 0$ و α متجهين ثابتين . اعتبر مجموعة المتجهات التى على الصورة $\alpha + t\beta$ ، حيث t عدد . خطط المتجهات $\alpha + t\beta$ لقيم متعددة للعدد t وأثبت أن رؤوس هذه المتجهات تقع على خط مستقيم . أوجد أقصر متجه على الصورة $\alpha + t\beta$ وأثبت أنه عمودى على β .

٢٨ - أثبت أن $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|$.

يمر عن المتجه γ تركيبة خطية للمتجهين الثاني والثالث

$$\gamma = (2,5), \alpha = (1,3), \beta = (-1,-1) \quad -٣٠ \quad \gamma = (-6,2), \epsilon_1 = (1,0), \epsilon_2 = (0,1) \quad -٢٩$$

$$\gamma = (0,1), \alpha = (1,0), \beta = (-1,1) \quad -٣٢ \quad \gamma = (3,-4), \alpha = (-5,2), \beta = (1,1) \quad -٣١$$

٣٣ - أثبت أنه توجد تركيبة خطية للمتجهين غير الصفريين α و β ، معاملاتها غير صفرية ، تساوى صفراً إذا وإذا فقط كان β مضاعفاً عددياً للمتجه α . ماذا يعنى ذلك هندسياً ؟

٣٤ - أوجد تركيبة خطية للمتجهات $(-1, -1)$ و $(-4, 0)$ و $(1, 3)$ معاملاتها ليست كلها أصفاراً ، وهي تساوى صفراً .

٣٥ - أثبت أنه لاى ثلاثة متجهات γ و β و α فى المستوى xy توجد تركيبة خطية لها ، معاملاتها ليست كلها أصفاراً ، وهي تساوى صفراً .

٣٦ - ليكن $\beta = (b_1, b_2)$ و $\alpha = (a_1, a_2)$ متجهين ليسا على استقامة واحدة . أثبت أن أى متجه يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية للمتجهين β و α . أثبت أن هذا لا يكون دائماً ممكناً إذا كان المتجهان β و α على استقامة واحدة . أعط تفسيراً هندسياً لهذه المسألة (ارشاد : أنظر المسألة ٤٩ ، بيند ١٤-١) .

٣-١٤

الدوال المتجهة

إذا كانت مركبتا متجه ما غير ثابتين بل هما دالتان ، مثلاً $y(t)$ و $x(t)$ ، فكل قيمة لـ t تعين متجه أو نقطة ، $(x(t), y(t))$ واذن لدينا دالة

$$\alpha(t) = (x(t), y(t))$$

نطاقها فئة من الأعداد الحقيقية ومداهما فئة من المتجهات . مثل هذه الدالة تسمى دالة بقيم متجهة ، أو بايجاز ، دالة متجهة . مغايراً لذلك ، الدالة العادية ، التى مداهما أعداد حقيقية تسمى دالة حقيقية . عندما تتغير t ، تتغير أيضاً $\alpha(t)$ والفئة الناتجة من متجهات أو نقاط هى عادة منحنى . فمثلاً ، إذا كانت $y(t) = t^2$ و $x(t) = 2 - t$ ، فإن $\alpha(t) = (2 - t, t^2)$. الشكل البياني لهذه الدالة المتجهة هو القطع المكافئ الموضح فى الشكل ١٤-١٣ .

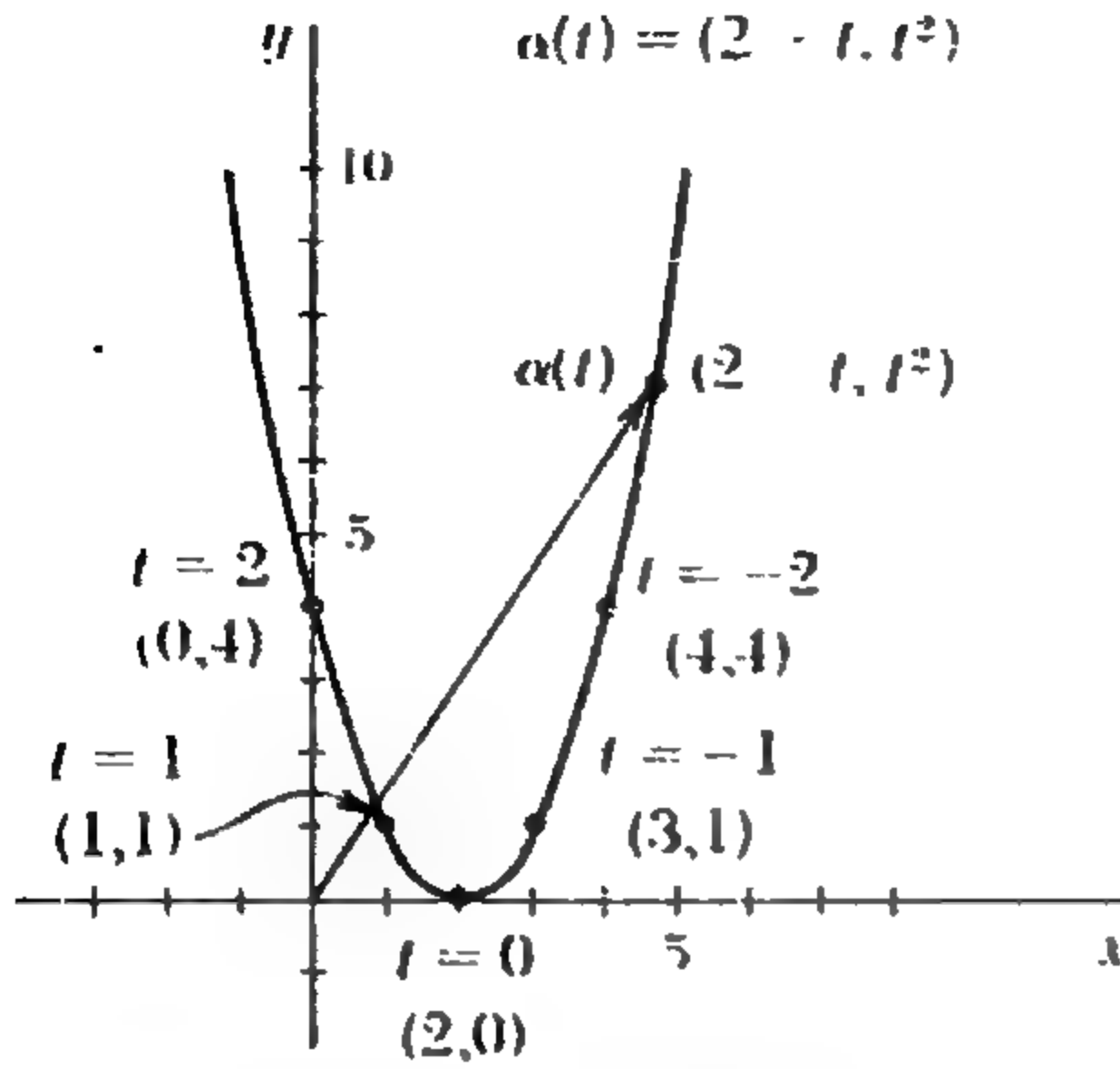
إذا كانت $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ دالة متجهة فان الاحداثيين y و x لنقطة على شكلها البياني يعطيان

بـ

$$(١) \quad x = x(t), \quad y = y(t)$$

زوج من المعادلات البارامترية . واذن الشكل البياني لدالة متجهة يمكن دراسته بواسطة المعادلتين

البارامتريتين (١) . للدالة السابقة $\alpha(t) = (2 - t, t^2)$ لدينا $x = 2 - t, y = t^2$ ، والمعادلة غير البارامترية للشكل البياني هي $y = (2 - x)^2$. عنائيم النهاية والاتصال والمشتقة يمكن تعميمها للدوال المتجهة . بماذا توحى إلنا بداهتنا كتعريف معتول للنهاية ؟



شكل ١٤ - ١٣

نهاية دالة متجهة $\alpha(t)$ عندما تقترب t من c يجب أن تكون متجهاً β ، تكون الدالة $\alpha(t)$ قريبة منه عندما تكون t قريبة من c (شكل ١٤ - ١٤) . لكي تكون $\alpha(t)$ قريبة من β ، طول متجه الفرق $\alpha(t) - \beta$ يجب أن يكون قريباً من الصفر ، وبالعكس ، المطلوب أن $|\alpha(t) - \beta|$ يكون قريباً من الصفر يكفي لاحتضار $\alpha(t)$ بالقرب من β . بما أن $|\alpha(t) - \beta|$ دالة حقيقية لـ t ، فهذا يمكننا من تعريف نهاية دالة متجهة بدلالة نهاية دالة حقيقية .

١٤ - ٤ تعريف $\lim_{t \rightarrow c} \alpha(t) = \beta$ إذا كانت $\lim_{t \rightarrow c} |\alpha(t) - \beta| = 0$.

النظرية الآتية عادة تفيدنا ، أكثر من التعريف ، في إيجاد نهاية دالة متجهة .

١٤ - ٥ . نظرية . الدالة المتجهة $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ يكون لها نهاية عند c إذا وإذا فقط كانت الدالتان الحقيقيتان $x(t)$ و $y(t)$ لهما نهايتان عند c . بالإضافة إلى ذلك ، يكون

$$(٢) \quad \lim_{t \rightarrow c} (x(t), y(t)) = (\lim_{t \rightarrow c} x(t), \lim_{t \rightarrow c} y(t))$$

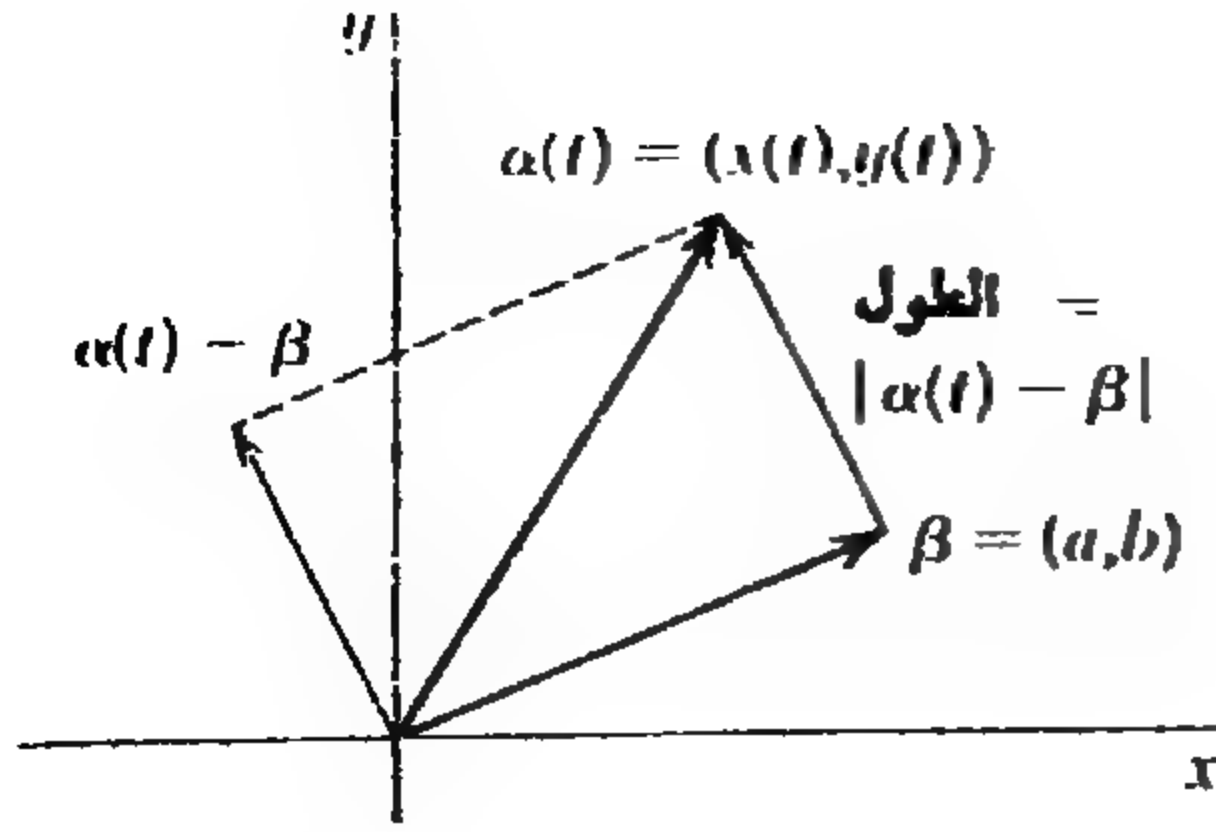
النظرية تقول أن $\alpha(t)$ تقترب من متجه $\beta = (a, b)$ إذا وإذا فقط كانت مركبتها $x(t)$ و $y(t)$ تقتربان من a و b . هذا يكاد يكون واضحاً من الشكل ١٤ - ١٤ .

البرهان . نفرض أن $x(t)$ و $y(t)$ لهما نهايتان عند c ، وليكن $\lim_{t \rightarrow c} x(t) = a$ و $\lim_{t \rightarrow c} y(t) = b$. فيكون

$$\begin{aligned} \alpha(t) - (a, b) &= (x(t) - a, y(t) - b), \\ |\alpha(t) - (a, b)| &= \sqrt{[x(t) - a]^2 + [y(t) - b]^2}, \end{aligned}$$

و

$$\lim_{t \rightarrow c} |\alpha(t) - (a, b)| = \sqrt{\lim_{t \rightarrow c} [x(t) - a]^2 + \lim_{t \rightarrow c} [y(t) - b]^2} = 0$$



شكل ١٤ - ١٤
 $\alpha(t)$ تكون قريبة من β اذا واذا فقط كان $|\alpha(t) - \beta|$ قريباً
 من الصفر .

وهذا يثبت أن $\lim_{t \rightarrow c} \alpha(t) = (a, b)$ أى اذا كان الطرف الأيمن من (٢) موجوداً ، فكذلك يكون الطرف الأيسر ، وتكون (٢) صحيحة . بالعكس ، نفرض أن $\lim_{t \rightarrow c} \alpha(t)$ موجودة وأنها المتجه (a, b) . فيكون

$$(٣) \quad \lim_{t \rightarrow c} |\alpha(t) - (a, b)| = 0$$

الآن واضح من الشكل ١٤ - ١٥ (وكما سبق أن برهن في المسألة ٥٧ بيند ١٤ - ١) أن القيمة المطلقة لكل مركبة لمتجه تساوى على الأكثر طول المتجه . بما أن

$$\alpha(t) - (a, b) = (x(t) - a, y(t) - b)$$

فهذا يتضمن أن

$$0 \leq |x(t) - a| \leq |\alpha(t) - (a, b)|$$

$$0 \leq |y(t) - b| \leq |\alpha(t) - (a, b)|$$

المعادلة (٣) تثبت الآن أن

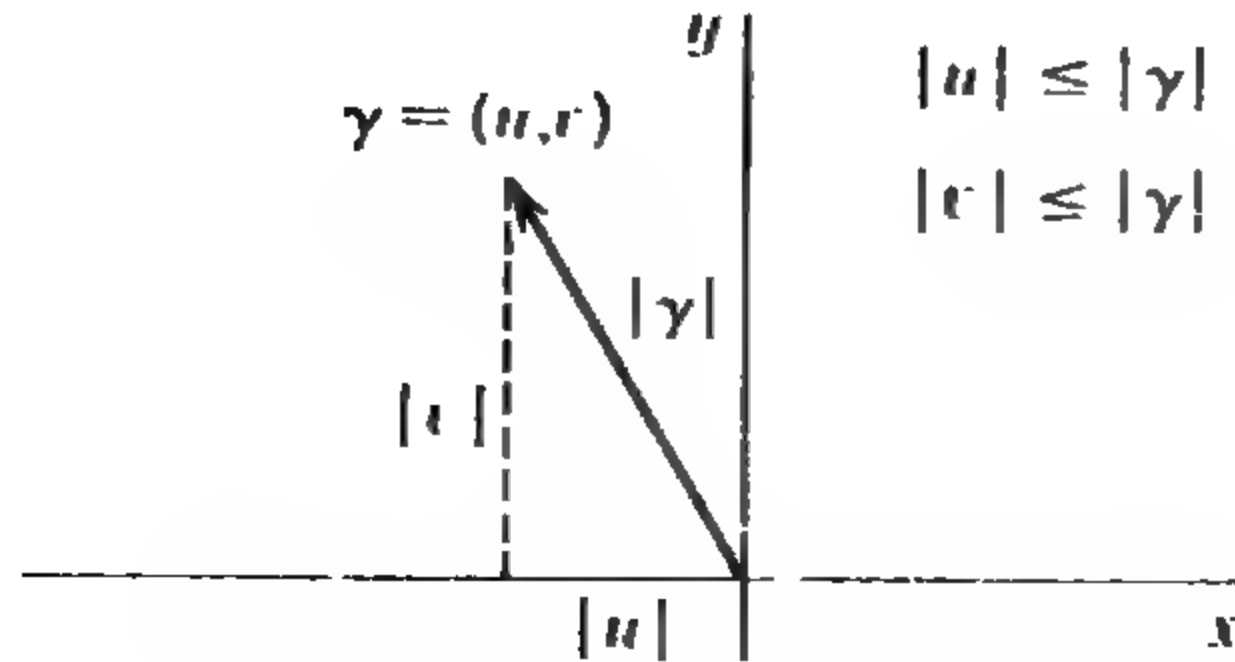
$$\lim_{t \rightarrow c} |x(t) - a| = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{t \rightarrow c} |y(t) - b| = 0$$

اذن $\lim_{t \rightarrow c} x(t) = a$ و $\lim_{t \rightarrow c} y(t) = b$. لقد أثبتنا أنه اذا كان الطرف الأيسر من (٢) موجوداً ، فكذلك يكون الطرف الأيمن ، وتكون (٢) صحيحة .

تعريفا الاتصال والمشتقة للدالة المتجهة هما ذاتهما كما للدول الحقيقية .

١٤ - ٦. تعريف . الدالة المتجهة $\alpha(t)$ تكون متصلة عند c اذا كت

$$\lim_{t \rightarrow c} \alpha(t) = \alpha(c)$$



شكل ١٥ - ١٤

١٤-٧ تعريف مشتقة الدالة المتجهة $\alpha(t)$ عند t هي المتجهة

$$\alpha'(t) = \lim_{u \rightarrow t} \frac{\alpha(u) - \alpha(t)}{u - t}$$

بفرض وجود النهاية .

التعبير $[\alpha(u) - \alpha(t)] / (u - t)$ هو متجه متسوم على العدد $u - t$. واذن هو متجه ، وبالتالي هكذا تكون نهايته $\alpha'(t)$.

١٤-٨ نظرية. اذا كانت $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ ، فان

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$$

البرهان $\alpha(u) - \alpha(t) = (x(u) - x(t), y(u) - y(t))$ ، واذن

$$\frac{\alpha(u) - \alpha(t)}{u - t} = \left(\frac{x(u) - x(t)}{u - t}, \frac{y(u) - y(t)}{u - t} \right)$$

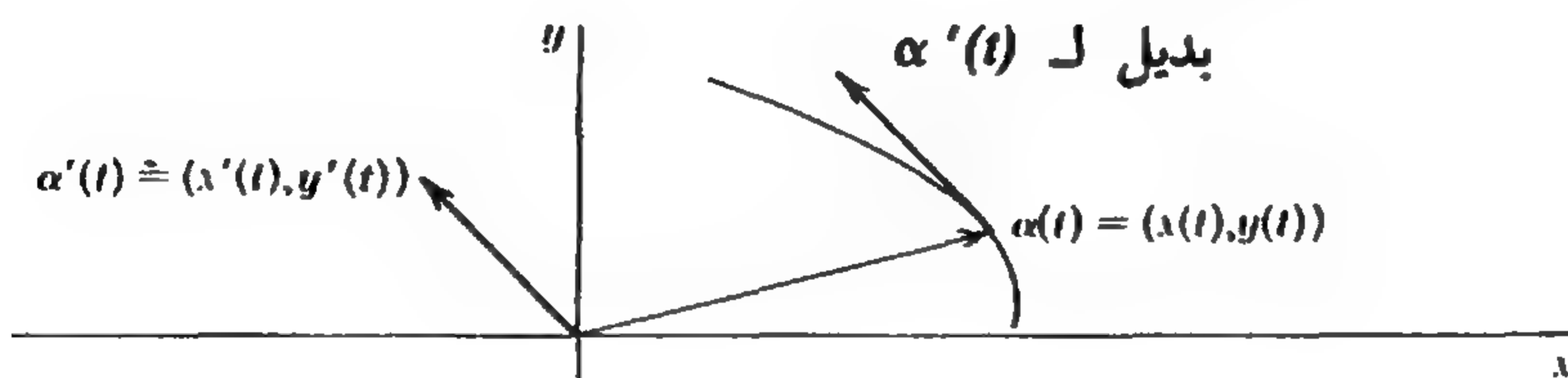
من تعريف $\alpha'(t)$ والنظرية ١٤-٥ ، يكون

$$\alpha'(t) = \lim_{u \rightarrow t} \frac{\alpha(u) - \alpha(t)}{u - t}$$

$$= \left(\lim_{u \rightarrow t} \frac{x(u) - x(t)}{u - t}, \lim_{u \rightarrow t} \frac{y(u) - y(t)}{u - t} \right)$$

$$= (x'(t), y'(t)).$$

الاتجاه الموجب للمنحنى $x = x(t), y = y(t)$ عند نقطة P هو الاتجاه الذى فيه تمر نقطة ترسم المنحنى بتزايد t ، بالنقطة P .



شكل ١٤-١٦

بديل متجه المشتقة يكون مماساً للشكل البياني .

١٤-٩ نظرية . لتكن $\alpha(t)$ دالة متجهة . بديل متجه المشتقة $\alpha'(t)$ عند النقطة $\alpha(t)$ ، اذا كانت

$\alpha'(t) \neq 0$ ، يمس الشكل البياني هناك ويكون فى الاتجاه الموجب للشكل البياني .

البرهان . لتكن $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. المعادلتان البارامتريتان للشكل البياني هما $y = y(t)$ و

$x = x(t)$ ، ومن (١) ، يبيند ٩-٢ ، ميل المماس عند $\alpha(t)$ هو $y'(t) / x'(t)$. ومن ناحية أخرى

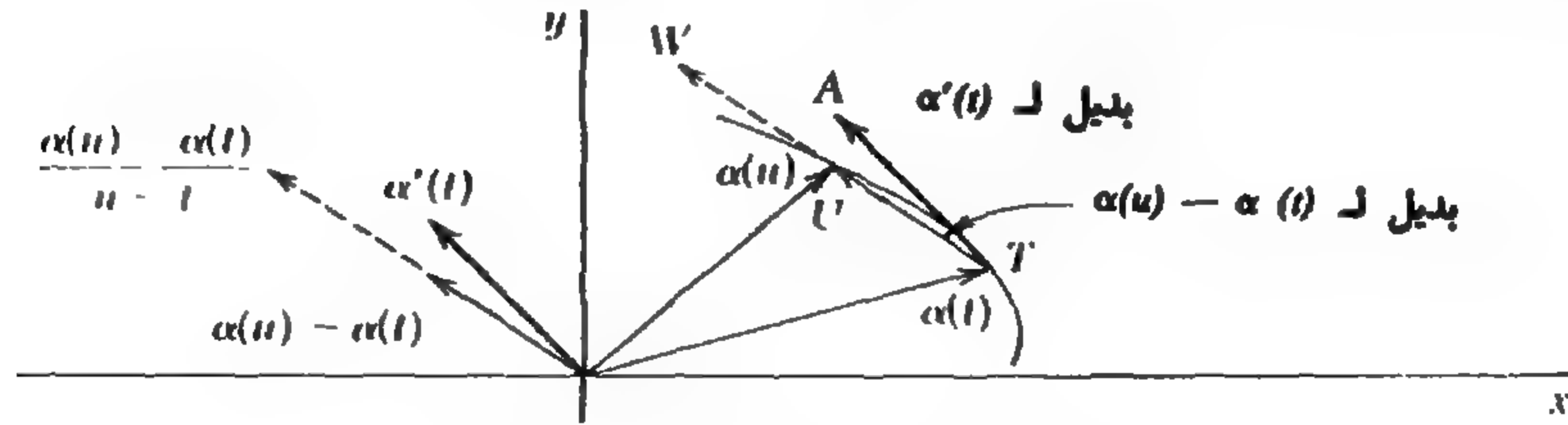
$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$. ونظراً لأن جميع المتجهات تبدأ من نقطة الأصل ، فان ميل $\alpha'(t)$ ،

وبالتالى ميل بديله عند $\alpha(t)$ هو $y'(t)/x'(t)$ (شكل ١٤ - ١٦) . وإذن المماس عند $\alpha(t)$ يجب أن ينطبق على بديل $\alpha'(t)$. هذا البرهان لا يشمل النقط حيث $x'(t) = 0$. إذا كانت $x'(t) = 0$ وكانت $y'(t) \neq 0$ فإن المتجه $\alpha'(t)$ يكون رأسياً . لكن هذه هى شروط لأن يكون للشكل البياني مماس رأسى عند t . الحالة $x'(t) = y'(t) = 0$ لا تحتاج الى دراسة ، لأنه عندئذ تكون $\alpha'(t) = 0$. هذا يثبت الجزء الأول من النظرية . إذا كانت $y'(t)$ و $x'(t)$ موجبتين ، فإن $\alpha'(t)$ تتجه الى أعلى والى اليمين . أيضاً عندما ترسم نقطة الشكل البياني ، إحداثياتها x و y يتزايدان ، والاتجاه الموجب للشكل البياني يكون الى أعلى والى اليمين . وإذن فى هذه الحالة يكون بديل متجه المشتقة فى الاتجاه الموجب للشكل البياني . الحالات التى تكون فيها $y'(t)$ و $x'(t)$ سالبتين أو يكون لهما إشارتان مختلفتان ، نتركها للقارىء .

الحقيقة أن بديل متجه المشتقة يكون مماساً للشكل البياني يمكن أيضاً رؤيتها هندسياً . من التعريف ، يكون

$$\alpha'(t) = \lim_{u \rightarrow t} \frac{\alpha(u) - \alpha(t)}{u - t}$$

لتكن T النقطة $\alpha(t)$ ولتكن U نقطة قريبة منها $\alpha(u)$ على المنحنى (شكل ١٤ - ١٧) . الوتر TU هو بديل عند T لمتجه الفرق $\alpha(u) - \alpha(t)$. عندما تقترب u من t ، تصبح $\alpha(u) - \alpha(t)$ أقصر . لكن $u - t$ تقترب أيضاً من الصفر ، وبالتالي النسبة $[\alpha(u) - \alpha(t)] / (u - t)$ هى متجه على استقامة المتجه $\alpha(u) - \alpha(t)$ ، لكن أطول منه . بديله عند T هو القطعة المستقيمة TW . عندما تقترب u من t ، يقترب $[\alpha(u) - \alpha(t)] / (u - t)$ من $\alpha'(t)$ ويقترب TW من قطعة الخط المماس TA . وإذن يجب أن يكون البديل $\alpha'(t)$ عند T .



شكل ١٤ - ١٧

عندما تقترب u من t ، يقترب TW من TA .

لتكن $(x(t), y(t))$ الاحداثيين عند الزمن t لنقطة P تتحرك فى مستوى الاحداثيات . هذان الاحداثيان يمكن اعتبارهما مركبتى متجه الموضع

$$\alpha(t) = (x(t), y(t))$$

لنقطة P . سرعة P عند الزمن t تعرف بأنها متجه المشتقة $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$. الدافع لهذا هو كما يأتى ، السرعة عند أى لحظة يجب أن تعتمد ليس فقط على مقدار سرعة P بل أيضاً على اتجاه الحركة عند هذه اللحظة ، فهى فعلاً متجه . هذا المتجه ، أو بالأحرى بديله عند P ، يجب

أن يكون مماساً للمسير هناك ، ومتجهاً في اتجاه الحركة . لأنه إذا أصبحت P فجأة غير مقيدة لتتبع المسير ، فسوف تتحرك على المماس . أيضاً طول المتجه سيساوى مقدار السرعة عند P . المتجه $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ يحقق هذين المطلبين . وقد رأينا أن بديل $\alpha'(t)$ هو مماس للمسير .

المعادلتان البارامتريتان للمسير هما $x = x(t), y = y(t)$. إذا كانت s طول المسير ، مقيساً من نقطة ثابتة على المنحنى إلى P ، فإن ds/dt تقيس سرعة تحرك النقطة P على المنحنى وهو ما نعتبره بداهة مقدار السرعة عند P . وقد رأينا في (٨) بيند ٩-٣ ، أن

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

وهذا هو طول $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$. لهذه الأسباب ، تعرف سرعة النقطة P بأنها $\alpha'(t)$. وأيضاً من المناقشة السابقة ، يعرف مقدار السرعة للنقطة P عند الزمن t بأنه طول متجه السرعة :

$$|\alpha'(t)| = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

لاحظ أن مقدار السرعة هو عدد .

العجلة لنقطة عند الزمن t تعرف بأنها المشتقة الثانية $\alpha''(t) = (x''(t), y''(t))$ لمتجه الموضع $\alpha(t)$. هي أيضاً متجه .

قانون نيوتن الثانى للحركة يقول أن $ma = F$. هذه معادلة متجهة . العدد m هو كتلة الجسم ، العجلة a للجسم هي المتجه الذى سمي $\alpha''(t)$ ، F هي حاصل جمع متجهات القوى المؤثرة على الجسم .

مثال ١ . الوضع عند الزمن t لنقطة تتحرك فى مستوى الاحداثيات يعطى بالمتجه $\alpha(t) = (2 - t^2, t + 1)$. أوجد متجهى السرعة والعجلة عند $t = 0$ و $t = 1$.

المعادلتان البارامتريتان لمسير النقطة هما

$$x = 2 - t^2, \quad y = t + 1$$

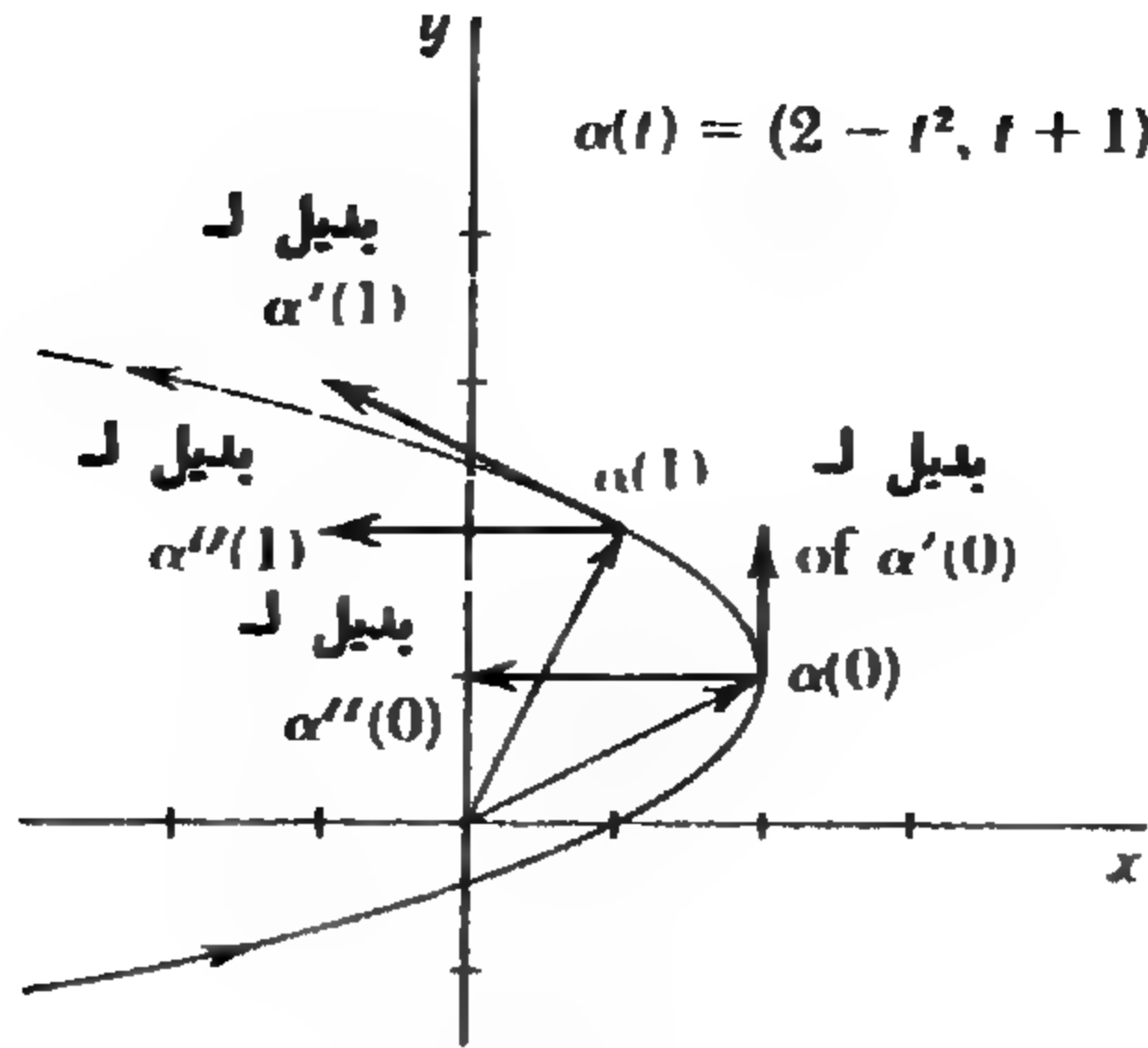
المعادلة غير البارامترية التى نحصل عليها بحذف t هي القطع المكافئ $(y - 1)^2 = -(x - 2)$ ، الموضح فى الشكل ١٤-١٨ . النقطة تتحرك على المنحنى فى اتجاه تزايد y لأن $dy/dt > 0$. السرعة والعجلة هما المتجهان

$$\alpha'(t) = (-2t, 1), \quad \alpha''(t) = (-2, 0)$$

متجه العجلة ثابت . هذان المتجهان عند $t = 0$ و $t = 1$ هما

$$\alpha'(0) = (0, 1), \quad \alpha''(0) = (-2, 0),$$

$$\alpha'(1) = (-2, 1), \quad \alpha''(1) = (-2, 0).$$



شكل ١٤-١٨

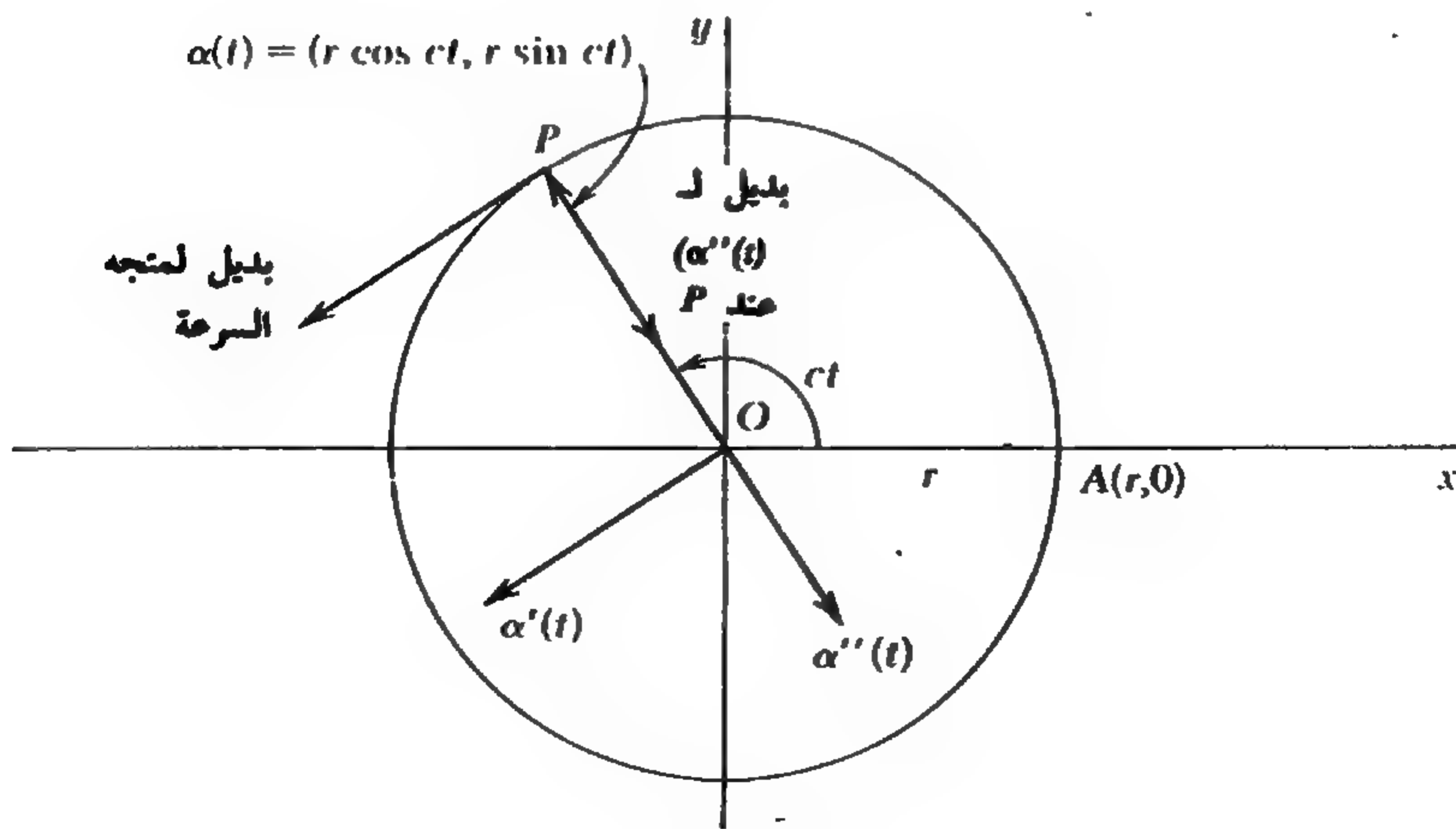
البداية لهذه المتجهات عند النقط المناظرة على المنحنى موضحة في الشكل . مقدار السرعة عند $t = 1$ هو

$$|\alpha'(1)| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

مثال ٢ . تتحرك نقطة مادية P ، في اتجاه ضد عقرب الساعة ، في مسير دائري ، بمعدل ثابت هو b دورة في الدقيقة . أوجد سرعتها وعجلتها .

ليكن نصف قطر الدائرة r وليكن مركزها عند نقطة الأصل (شكل ١٤-١٩) . نفرض أن عند $t = 0$ تكون النقطة المادية عند $A(r, 0)$. متجه نصف القطر OP يدور بمعدل $2\pi b$ زاوية نصف قطرية في الدقيقة . بعد t دقيقة الزاوية التي يكونها OP و OA هي $2\pi bt$ زاوية نصف قطرية . ضع $c = 2\pi b$. إحداثيا P عند الزمن t هما مركبتا متجه موضعها

$$\alpha(t) = (r \cos ct, r \sin ct)$$



شكل ١٤-١٩

السرعة والعجلة هما المتجهان

$$\alpha'(t) = (-cr \sin ct, cr \cos ct)$$

$$\alpha''(t) = (-c^2r \cos ct, -c^2r \sin ct) = -c^2\alpha(t)$$

لاحظ أن العجلة ليست صفراً . حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\alpha'(t)$ و $\alpha(t)$ هو

$$\alpha(t) \cdot \alpha'(t) = -cr^2 \cos ct \sin ct + cr^2 \sin ct \cos ct = 0$$

هذا يثبت أن $\alpha'(t)$ يكون عمودياً على $\alpha(t)$ ، وإذن بديله عند P يمس الدائرة هناك ، وهذه حقيقة نعرفها من قبل من النظرية العامة .

طول متجه السرعة هو مقدار السرعة ،

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(-cr \sin ct)^2 + (cr \cos ct)^2} = cr$$

مع أن مقدار السرعة ثابت في الحركة الدائرية المنتظمة ، إلا أن السرعة ليست كذلك ، إذ أنها تغير اتجاهها . هذا هو سبب وجود عجلة . متجه العجلة $\alpha''(t)$ هو مضاعف سالب لـ $\alpha(t)$ وإذن هو على استقامته ولكن في اتجاه مخالف . طول متجه العجلة هو

$$|\alpha''(t)| = \sqrt{(-c^2r \cos ct)^2 + (-c^2r \sin ct)^2} = c^2r$$

طالما توجد عجلة توجد قوة بقانون نيوتن الثاني للحركة . عندما يتأرجح جسم في نهاية خيط بسرعة مقدارها ثابت ، هذه القوة هي الشد الذي يؤثر على الخيط ليظل الجسم في مسيره الدائري .

لا يوجد تناقض بين مفهومي السرعة والعجلة المعطيين هنا وبين تعريفيهما المعطيين في بند ٤ - ١٠ للحركة في خط مستقيم . إذا كانت نقطة تتحرك على خط إحداثيات ، وليكن المحور x ، فإن متجه الموضع هو

$$\alpha(t) = (x(t), 0) = (s(t), 0)$$

اذأنا في بند ٤ - ١٠ رمزنا الى $x(t)$ بالرمز $s(t)$. متجه السرعة هو

$$\alpha'(t) = (s'(t), 0) = (v(t), 0)$$

حيث $v(t) = s'(t)$. وعلاوة على ذلك ، $\alpha'(t)$ تتجه الى اليمين أو الى اليسار تبعاً لكون $v(t)$ موجبة أو سالبة . أى أن في حالة الحركة الخطية $v(t)$ تعين $\alpha'(t)$ وبالعكس . مقدار السرعة للنقطة يعطى بـ

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{v^2(t) + 0^2} = |v(t)|$$

وهذا يتفق مع تعريف مقدار السرعة في الحركة الخطية المعطى في بند ٤ - ١٠ . متجه العجلة هو

$$\alpha''(t) = (v'(t), 0) = (a(t), 0) .$$

حيث $a(t) = v'(t)$. المتجه $\alpha''(t)$ يتجه الى اليمين أو الى اليسار تبعاً لكون $a(t)$ موجبة أو سالبة . أى أن $a(t)$ يعين $\alpha''(t)$ وبالعكس .

مسائل

فى هذه المسائل ϵ_1 و ϵ_2 هما المتجهان $(0, 1)$ و $(1, 0)$ ، اللذان طول كل منهما الوحدة .

١ - إذا كانت الدالة المتجهة $\alpha(t)$ تمثل بتركيبة خطية $\epsilon_2 y(t) + \epsilon_1 x(t) = \alpha(t)$. فاثبت أن $\epsilon_2 y'(t) + \epsilon_1 x'(t) = \alpha'(t)$.

خطط الشكل البيانى للدوال المتجهة الآتية :

$$\begin{aligned} \beta(t) &= 2t^2\epsilon_1 + t\epsilon_2 - \bullet \quad \gamma(t) = (2, -4) - \text{ ٤ } \quad \alpha(w) = (5, w^2/2) - \text{ ٣ } \quad \beta(t) = (2t, 2t+1) - \text{ ٢ } \\ \alpha(u) &= (3 \cos u)\epsilon_1 + (2 \cos u)\epsilon_2 - \text{ ٧ } \quad \alpha(t) = (\sin t)\epsilon_1 + (\cos t)\epsilon_2 - \text{ ٦ } \end{aligned}$$

٨ - الموضع عند الزمن t لنقطة تتحرك فى مستوى يعطى بالمتجه $(t^2 - 3, 2t - 4)$. (أ) خطط مسير النقطة . (ب) أوجد الموضع والسرعة ومقدار السرعة للنقطة عند 2 و 0 و -1 . (ج) وارسم بدائل متجهات السرعة عند النقطة المناظرة على المنحنى . (ج) أوجد متجهات العجلة عند 2 و 0 و -1 وارسم بدائلها .

٩ - الموضع عند الزمن t لنقطة تتحرك فى مستوى يعطى بالمتجه (t^3, t^2) ، حيث $-2 \leq t \leq 2$. (أ) خطط مسير النقطة . (ب) أوجد الموضع والسرعة ومقدار السرعة للنقطة عند 1 و 0 و -2 وارسم بدائل متجهات السرعة عند النقطة المناظرة على المنحنى . (ج) أوجد متجهات العجلة عند 1 و 0 و -2 وارسم بدائلها .

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (t^2 - t + 1)\epsilon_1 + (t^2 + 2t + 4)\epsilon_2 - \text{ ١١ } & \alpha(t) &= (t, \frac{1}{2}t^2) - \text{ ١٠ } \\ \alpha(t) &= (2 \cos 2t, 3 \sin 2t) - \text{ ١٣ } & \alpha(t) &= (\frac{1}{2}t^2, \frac{2}{3}t^3) - \text{ ١٢ } \\ \beta(t) &= (e^{-t} \cos t)\epsilon_1 + (e^{-t} \sin t)\epsilon_2 - \text{ ١٥ } & \alpha(t) &= (4 \cos t^2, 4 \sin t^2) - \text{ ١٤ } \end{aligned}$$

كل من الدوال المتجهة الآتية تعطى موضع نقطة متحركة عند الزمن t ، أوجد السرعة والعجلة ومقدار السرعة للنقطة عند القيمة المعطاة لـ t .

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (t^3, 4t - 3), t = 0 - \text{ ١٧ } & \alpha(t) &= (2 + 4t, t^2 - 1), t = 3 - \text{ ١٦ } \\ \alpha(t) &= (4 \sin t)\epsilon_1 + (3 \cos t)\epsilon_2, t = \pi/2 - \text{ ١٩ } & \alpha(t) &= (-t^2, t^3 + 1), t = 2 - \text{ ١٨ } \\ & & \beta(t) &= (\ln t, 3/t), t = 2 - \text{ ٢٠ } \end{aligned}$$

٢١ - اشرح الفرق بين $\frac{d}{dt}|\alpha(t)|$ و $\left|\frac{d}{dt}\alpha(t)\right|$

أوجد $\frac{d}{dt}|\alpha(t)|$ للدوال المتجهة الآتية :

$$\alpha(t) = (2 + 3t^2, t^2 - 1) - \text{ ٢٣ } \quad \alpha(t) = (a_1 + b_1t, a_2 + b_2t) - \text{ ٢٢ }$$

$$\alpha(t) = (\cos 3t)\epsilon_1 + (\sin 2t)\epsilon_2 - \text{ ٢٥ } \quad \alpha(t) = (e^t, e^{2t}) - \text{ ٢٤ }$$

٢٦ - أوجد حاصل الضرب الداخلى لـ $\beta'(t)$ و $\beta(t)$ إذا كان

$$\beta(t) = ((t^2 + 1)/t, -3t)$$

- ٢٧ - أثبت أن عجلة النقطة المادية في مثال ٢ لا تكون صفراً أبداً .
- ٢٨ - أثبت أن النقطة التي موضعها عند الزمن t هو المتجه $(\cos t^2, \sin t^2)$ تتحرك في مسار دائري بسرعة متزايدة المقدار .
- ٢٩ - الوضع عند الزمن t لنقطة تتحرك في مستوى يعطى بالمتجه $(t^2, 2 - t)$. (أ) أوجد مسار النقطة وأكبر وأصغر مقدار لسرعتها في الفترة الزمنية $[-2, 5]$. (ب) أوجد المسافة التي تقطعها لنقطة في هذا الزمن .
- ٣٠ - أوجد المسافة المقطوعة بين $t = 0$ و $t = \pi/4$ بالنقطة التي متجه موضعها عند الزمن t هو $(\ln \cos t, t)$.
- ٣١ - إحداثياً نقطة متحركة عند الزمن t هما $x = a \cos kt, y = b \sin kt$ أوجد متجه الموضع للنقطة . أثبت أن المسير هو قطع ناقص وأن بديل متجه العجلة عند النقطة يكون دائماً متجهاً نحو نقطة الأصل إذا كان $|k| \leq 1$.
- ٣٢ - إحداثياً نقطة متحركة عند الزمن t هما

$$x = \frac{a}{2} (e^{bt} + e^{-bt}), \quad y = \frac{a}{2} (e^{bt} - e^{-bt})$$

- عين المسير واثبت أن البديل لمتجه العجلة عند النقطة يكون دائماً متجهاً بعيداً عن نقطة الأصل .
- ٣٣ - أوجد مشتقة حاصل الضرب الداخلي لـ $\gamma'(t)$ و $\gamma''(t)$.
- ٣٤ - إذا كان $\beta(t) = (t + 1, 2t - 1)$ و $\alpha(t) = (4t, 0)$ ، أوجد مشتقة الزاوية $\theta(t)$ بين $\beta(t)$ و $\alpha(t)$.
- ٣٥ - قد رأينا أن $ds/dt = |\alpha'(t)|$. أثبت أن $d^2s/dt^2 \neq |\alpha''(t)|$.
- ٣٦ - أثبت أن للدالة المتجهة $\alpha(t)$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\alpha'(t) \cdot \alpha''(t)}{|\alpha'(t)|}$$

- ٣٧ - أثبت أن $|\alpha''(t)| = (1/r) |\alpha'(t)|^2$ للنقطة المادية في مثال ٢ التي تتحرك بمعدل ثابت حول دائرة نصف قطرها r ومركزها عند نقطة الأصل . هذا يعنى أنه إذا أعطينا مقدار السرعة $|\alpha'(t)|$ ، فإن طول متجه السرعة يكون أكبر للدائرة الأصغر . بما أن القوة تتناسب مع العجلة ، فإن قوة أكبر تلزم لحفظ النقطة المادية تتحرك ، بسرعة معطى مقدارها ، في مسار دائري صغير عما إذا كانت تتحرك في مسار دائري كبير .
- ٣٨ - طاقة الحركة لجسيم متحرك كتلته m ودالة الموضع له $\alpha(t)$ هي $\frac{1}{2}m|\alpha'(t)|^2$. أوجد طاقة الحركة لجسيم كتلته 5 ومتجه الموضع له هو $\alpha(t) = (t^3, t)$.
- ٣٩ - عند أى نقطة في طيران القذيفة التي نوقشت في بند ٩ - ٤ تكون طاقة الحركة أقل ؟ . (انظر المسألة ٣٦ لتعريف طاقة الحركة) .

٤٠ - أثبت أن أى نقطة تتحرك على منحنى بسرعة مقدارها ثابت اذا واذا فقط كان متجه السرعة ومتجه العجلة يتعامدان دائماً ومن ثم اذا واذا فقط كانت القوة المؤثرة على النقطة دائماً عمودية على المنحنى أو صفراً .

٤١ - أوجد دالة متجهة منفصلة وخطط شكلها البياني .

٤٢ - (أ) أثبت أنه إذا كانت $\alpha'(t) = 0$ لجميع t فى فترة ما ، فإن $\alpha(t)$ تكون ثابتة هناك . (ب) أثبت أن أى نقطة متحركة بسرعة ثابتة غير صفيرية تسير على خط مستقيم . (ج) أثبت أنه إذا كانت القوة التى تؤثر على جسم كتلته m تساوى صفراً ، فإن الجسم إما يكون ساكناً واما يكون متحركاً فى خط مستقيم بسرعة ثابتة .

٤٣ - أثبت أن $\lim_{t \rightarrow a} c\alpha(t) = c \lim_{t \rightarrow a} \alpha(t)$ لأى عدد c .

٤٤ - أثبت أن $\frac{d}{dt} [\alpha(t) \pm \beta(t)] = \alpha'(t) \pm \beta'(t)$

٤٥ - أثبت أن $\frac{d}{dt} c\alpha(t) = c\alpha'(t)$ لأى عدد c .

٤٦ - أثبت أن $\frac{d}{dt} f(t)\alpha(t) = f(t)\alpha'(t) + f'(t)\alpha(t)$ حيث $f(t)$ دالة حقيقية .

٤٧ - أثبت أن

$$\frac{\frac{d}{dt} \alpha(t)}{\frac{d}{dt} f(t)} = \frac{f(t)\alpha'(t) - \alpha(t)f'(t)}{f^2(t)}$$

حيث $f(t)$ دالة حقيقية . لماذا لا توجد صيغة مماثلة لـ $\frac{d}{dt} \frac{f(t)}{\alpha(t)}$ ؟

٤٨ - هل قاعدة القوة $\frac{d}{dt} \alpha^n(t) = n\alpha^{n-1}(t)\alpha'(t)$ صحيحة للدالة المتجهة $\alpha(t)$ ؟

٤٩ - أثبت أن

$$\frac{d}{dt} [\alpha(t) \cdot \beta(t)] = \alpha(t) \cdot \beta'(t) + \alpha'(t) \cdot \beta(t)$$

٥٠ - أثبت أن $\alpha(t) \cdot \alpha'(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\alpha(t)|^2$

٥١ - أثبت أن الدالة المتجهة $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ تكون متصلة عند c إذا واذا فقط كانت $y(t)$ و $x(t)$ متصلتين عند c .

٥٢ - إذا كانت الدالة المتجهة $\alpha(t)$ لها مشتقة عند c ، فهل هى متصلة هناك ؟

٥٣ - أكمل برهان النظرية ١٤ - ٩ ان بديل متجه المشتقة يكون فى الاتجاه الموجب للشكل البياني ، للحالات التى لم تدرس فى الكتاب .

الفصل الخامس عشر

المتسلسلات اللانهائية

١٥ - ١

المتابعات

المتابعة هي فئة من الأعداد مكتوبة في ترتيب خاص . أمثلة على المتابعات هي

- (١) $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, n, \dots$
- (٢) $\frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \dots, 2 + \frac{1}{n+1}, \dots$
 $\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots$
- (٣) $-\ln 3, \ln 4, -\ln 5, \ln 6, \dots$
- (٤) $2, 2, 3, 6, 0, 6, 7, 9, 8, \dots$
- (٥) $\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{3}, \dots$

عند دراسة متابعة عامة نستخدم كتابة مثل

- (٦) $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$

كثيراً ما يكون من المناسب أن نبدأ بحد مختلف مثل s_0 أو s_2 ، وفي هذه الحالة تكتب المتابعة

$$s_2, s_3, s_4, \dots, s_n, \dots \quad \text{أو} \quad s_0, s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$$

المتابعة أكثر من أن تكون فئة من الأعداد ، إذ تغير ترتيب الحدود فاننا نحصل على متابعة مختلفة .

المتابعة

$$3, 2, 1, 4, 5, 6, 7, \dots$$

تختلف عن المتابعة في (١) . رغم أن حدود المتابعات عادة تتبع نمطاً معيناً ، فهذا ليس ضرورياً . لا يوجد انتظام ظاهر للحدود في (٤) ، أنها الأرقام المتعاقبة في التقريب العشري للعدد $\sqrt{5}$. حدود المتابعة ليس من الضروري أن تكون مختلفة (انظر المتابعتين (٤) ، (٥)) .

الحد $2 + 1/(n+1)$ في (٢) والحد s_n في (٦) يسميان الحدين العامين للمتابعتين . بوضع $n = 1, 2, 3, \dots$ على الترتيب ، $2 + 1/(n+1)$ تعطي حدود المتابعة (٢) . في المتابعة التي

حدها العام هو $1/(n^2-1)$ ، من الواضح أن n لا تكون 1 . يكون المفهوم هنا أن $n = 2, 3, 4, \dots$. عادة ما يكون اهتمامنا فقط بحدود المتابعة لقيم n الكبيرة ، في هذه الحالة الحدود القليلة الأولى لا يكون لها أهمية . إذا كانت متابعة لها غمط واضح من الحدود القليلة الأولى ، فعادة يحذف الحد العام بمفهوم أن النمط مستمر . فمثلا ، إذا أعطينا المتابعة

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

فمع غياب الحد العام ، لنا الحرية في أن نفترض ، من غمط الحدود الأربعة الأولى ، أن الحد التالي هو $\frac{5}{6}$ وأن الحد العام هو $n/(n+1)$. الحد العام للمتابعة (٣) هو $(-1)^n \ln(n+2)$. لاحظ كيف يتبدل المعامل $(-1)^n$ في الإشارة .

طريقة أدق وأحيانا مفيدة هي أن ننظر الى المتابعة كدالة ، معرفة للأعداد الصحيحة الموجبة ، قيمها هي حدود المتابعة . المتابعة

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots, \frac{2^n - 1}{2^n}, \dots$$

هي دالة f قيمها $f(1) = \frac{1}{2}, f(2) = \frac{3}{4}, f(3) = \frac{7}{8}$ ، وبوجه عام ، $f(n) = (2^n - 1)/2^n$. المتابعة $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ هي دالة قيمها $f(1) = s_1$ و $f(2) = s_2$ ، وبوجه عام $f(n) = s_n$.

أحيانا يكون من المفيد اعتبار حدود المتابعة نقطاً على خط حقيقي . المتابعة

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$$

موضحة في الشكل ١-١٥ .



شكل ١-١٥

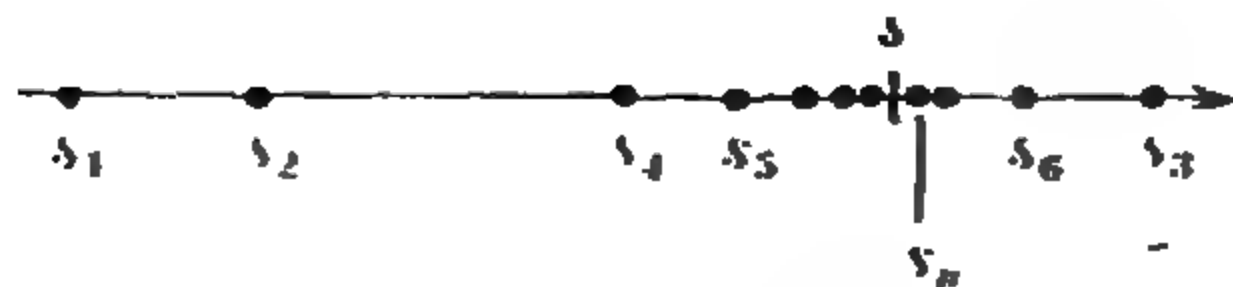
المتابعة لا يشار اليها إطلاقاً في الرياضيات كمتسلسلة . المصطلح متسلسلة يحتفظ به لمفهوم آخر سنقدمه في البند التالي .

حدود المتابعة

$$3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \dots, 2 + \frac{1}{n}, \dots$$

تقترب أكثر فأكثر من العدد 2 عندما n تصبح كبيرة . من الطبيعي أن نقول إن العدد 2 هو نهاية المتابعة ونكتب

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$$



شكل ٢-١٥

عندما تكون n كبيرة ، تكون s_n قريبة من نهايتها s .

الحد العام للمتتابعة

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{17}{16}, \dots, 1 + (-\frac{1}{2})^n, \dots$$

يقترّب من 1 عندما n تصبح كبيرة . إذن 1 هي نهاية المتتابعة ، ونكتب

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [1 + (-\frac{1}{2})^n] = 1$$

الشكل ١٥-٢ يوضح تصويرياً تجمع حدود المتتابعة $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ حول النهاية s لقيم n الكبيرة . التشابه مع $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ لا يدعو للدهشة ، إذ أن المتتابعة هي نوع خاص من الدالة ، فيه النطاق هو فئة الأعداد الصحيحة الموجبة .

المتابعة

$$(V) \quad 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots, \sqrt{n}, \dots$$

ليس لها نهاية لأن الحدود لا تقترب من أي عدد عندما n تصبح كبيرة . إذا كانت المتتابعة لها نهاية ، فيقال إنها تتقارب ، إذا لم يكن لها نهاية ، فهي تتباعد . المتابعة (٧) والمتابعة $1, -1, 1, -1, 1, \dots$ كلاهما تتباعدان .

مفهومنا الدارج لنهاية متتابعة سيوضح على أساس قاطع في التعريف القادم . سيوضح بالضبط فكرة تجمع حدود المتتابعة حول النهاية لقيم n الكبيرة . لاحظ أنه يكاد يتطابق مع تعريف : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ المعطى في التعريف ٢-٩ ، بيند ٢-٧ .

١٥-١ تعريف المتابعة $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ يكون لها نهاية إذا كان يوجد عدد s بحيث أن ما يأتي يكون صحيحاً : لكل جوار V للعدد s ، يوجد عدد صحيح N بحيث أن s_n يكون في V لجميع $n \geq N$. إذا كانت النهاية موجودة ، فالتا نكتب $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ ، والمتابعة يقال إنها تتقارب . المتابعة التي لا تتقارب يقال إنها تتباعد .

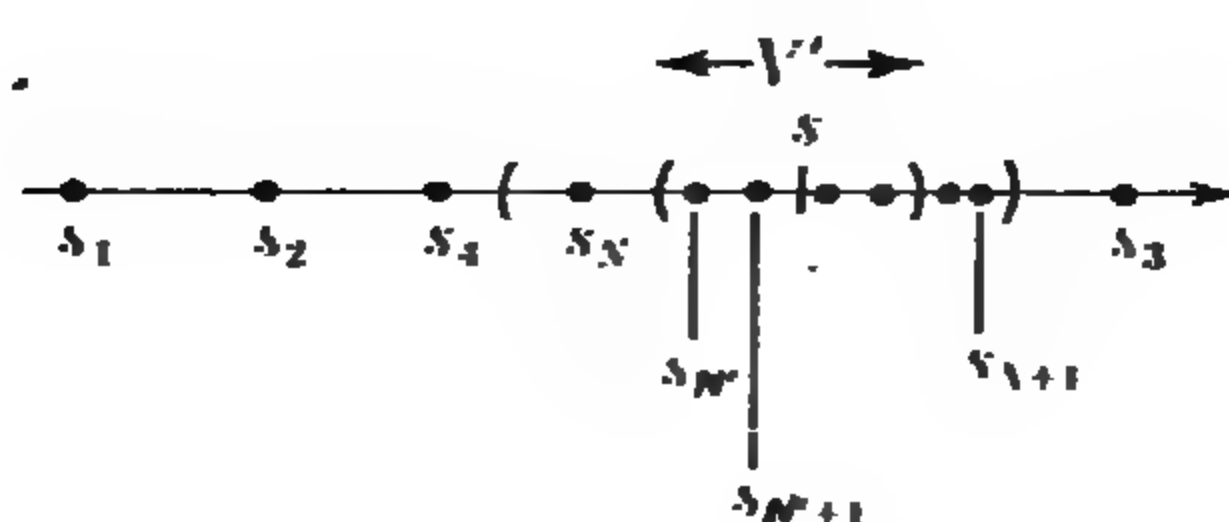
تعريف النهاية موضح في الشكل ١٥-٣ . هو ينص على أن لكل جوار V للعدد s ، جميع حدود المتابعة ابتداء من نقطة معينة (أي لجميع $n \geq N$) تقع في V . إذا أعطينا جواراً آخر أصغر V' ، فالتا نتوقع أن نمثد الى حد أبعد في المتابعة حتى تقع جميع الحدود ، ابتداء منه ، في V' . هذا يناظر اختيار عدد صحيح جديد N' .

مثال ١ . استخدم تعريف نهاية متتابعة لإثبات أن المتتابعة

$$1 + \frac{1}{1^2}, 1 + \frac{1}{2^2}, \dots, 1 + \frac{1}{n^2}, \dots$$

لها نهاية .

جميع s_n في V حيث $n \geq N$



جميع s_n في V' حيث $n \geq N'$

شكل ١٥-٣

نخمن أن النهاية هي l ونحاول إثبات ذلك . ليكن $V = (l - \epsilon_1, l + \epsilon_2)$ أى جوار l ، حيث $\epsilon_1 > 0$ و $\epsilon_2 > 0$. عندئذ يكون $l + 1/n^2$ في V إذا وإذا فقط كان

$$1 - \epsilon_1 < 1 + \frac{1}{n^2} < 1 + \epsilon_2$$

أو ، ما يكافئ ذلك ، إذا وإذا فقط كان

$$-\epsilon_1 < \frac{1}{n^2} < \epsilon_2$$

المتباينة اليسرى صحيحة لجميع n . المتباينة اليمنى ستكون صحيحة لـ $n > 1/\sqrt{\epsilon_2}$. إذا اخترنا N العدد الصحيح الأول الأكبر من $1/\sqrt{\epsilon_2}$ ، فإن $l + 1/n^2$ سيكون في V لجميع $n \geq N$ ، ونكون قد أثبتنا أن $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n^2) = 1$.

إذا كانت حدود المتابعة تصبح كبيرة ، وأخيراً تتجاوز أى عدد معطى ، فإن المتابعة يقال إنها تتباعد الى ما لا نهاية . التعريف الرسمى يتبع .

١٥-٢ . تعريف المتابعة $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ تتباعد الى ما لا نهاية ، ونكتب $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ إذا كان لكل عدد M ، يوجد عدد صحيح N بحيث أن $s_n > M$ لجميع $n \geq N$.

المتابعة $10, 9, 20, 19, 30, 29, 40, 39, \dots$ تتباعد الى ما لا نهاية . المتابعة $1, -1, 1, -1, 1, \dots$ تتباعد لكن ليس الى ما لا نهاية . هي متابعة تذبذبية .

من المتابعتين

$$(٨) \quad s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$$

و

$$(٩) \quad t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, \dots$$

يمكن تكوين متتابعات أخرى . تألفات مفيدة هي :

$$(10) \quad c \text{ أى عدد } cs_1, cs_2, cs_3, \dots, cs_n, \dots$$

$$(11) \quad s_1 + t_1, s_2 + t_2, s_3 + t_3, \dots, s_n + t_n, \dots,$$

$$(12) \quad s_1 t_1, s_2 t_2, s_3 t_3, \dots, s_n t_n, \dots,$$

$$(13) \quad \frac{s_1}{t_1}, \frac{s_2}{t_2}, \frac{s_3}{t_3}, \dots, \frac{s_n}{t_n}, \dots,$$

$$(14) \quad |s_1|, |s_2|, |s_3|, \dots, |s_n|, \dots$$

المتابعتان (11) ، (12) تسميان حاصل جمع وحاصل ضرب المتابعتين (8) ، (9) .

النظريات على نهايات حواصل الجمع وحواصل الضرب وقوى الدوال لها نظائرها على المتابعات .

١٥-٣ نظرية. إذا كانت نهايتا المتابعتين $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ و $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ موجودتين ،

فكذلك تكون نهايات المتابعات في (10) الى (14) ، ويكون

$$(أولاً) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} cs_n = c(\lim_{n \rightarrow \infty} s_n) \text{ أى عدد}$$

$$(ثانياً) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n \pm t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$$

$$(ثالثاً) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n t_n = (\lim_{n \rightarrow \infty} s_n)(\lim_{n \rightarrow \infty} t_n)$$

$$(رابعاً) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{t_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} s_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} t_n} \text{ بفرض أن } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \neq 0$$

$$(خامساً) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n)^r = (\lim_{n \rightarrow \infty} s_n)^r \text{ أى عدد حقيقى } r$$

نترك البراهين للقارئ (المسائل ٧٣ الى ٧٧) . اذا حذفنا الحدود الـ m الأولى من متتابعة

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_m, s_{m+1}, s_{m+2}, \dots$$

فاننا نحصل على المتتابعة

$$s_{m+1}, s_{m+2}, s_{m+3}, \dots$$

من السهل إثبات أنه إذا كانت المتتابعة الأولى تتقارب ، فكذلك الثانية ، وبالعكس ، وأن نهايتهما واحدة (المسألة ٦٧) .

نفرض أن $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ متتابعة نريد إيجاد نهايتها . لتكن g دالة معرفة لجميع الأعداد

الحقيقية الموجبة بحيث أن $g(n) = s_n$. فمثلاً ، إذا كانت $s_n = n/e^n$ ، فإن g المناسبة هي

$g(x) = x/e^x$. إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ موجودة ، فإن المتتابعة لها نهاية ويكون

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(n)$ لأن $g(x)$ تكون قريبة من نهايتها b لجميع قيم x الكبيرة وبوجه

خاص تكون قريبة من b عندما تكون x عدداً صحيحاً كبيراً . لكن عندما تكون x عدداً صحيحاً

$$g(n) = s_n, n \text{ اذن } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = b$$

مثال ٢ . أوجد $\lim_{n \rightarrow \infty} (n/e^n)$

باتباع المناقشة أعلاه ، نضع $g(x) = x/e^x$. بقاعدة لوبيتال ، يكون $\lim_{x \rightarrow \infty} (x/e^x) = 0$ ومن ثم $\lim_{n \rightarrow \infty} (n/e^n) = 0$.

١٥ - ٤ تعريف . المتتابعة $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ تكون محدودة من أعلى إذا كانت باعتبارها فئة من الأعداد محددة من أعلى ، أي إذا كان يوجد عدد b بحيث أن $s_n \leq b$ لجميع n . وهي تكون محدودة من أدنى إذا كان يوجد عدد a بحيث أن $a \leq s_n$ لجميع n . المتتابعة تكون محدودة إذا كانت محدودة من أعلى ومن أدنى .

نترك برهان النظرية المفيدة الآتية للقارئ (المسألة ٨٠) .

١٥ - ٥ نظرية . إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = x$ وكانت $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ موجودة ، أو حتى كانت المتتابعة s_1, s_2, \dots فقط محدودة ، فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n/t_n) = 0$ و t_n/s_n تكون كبيرة سالبة أو موجبة لقيم n الكبيرة .

مثال ٣ . أوجد نهاية المتتابعة التي حددها العام هو $(2/n)(1 + 6/n)$.

الطريقة الأولى لدينا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left(1 + \frac{6}{n}\right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n}\right) \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{n}\right)\right] \quad (١٥ - ٣ \text{ ثالثاً})$$

$$= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n}\right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n}\right) \quad (١٥ - ٣ \text{ ثانياً})$$

$$= 0(1 + 0) \quad (١٥ - ٥ \text{ من})$$

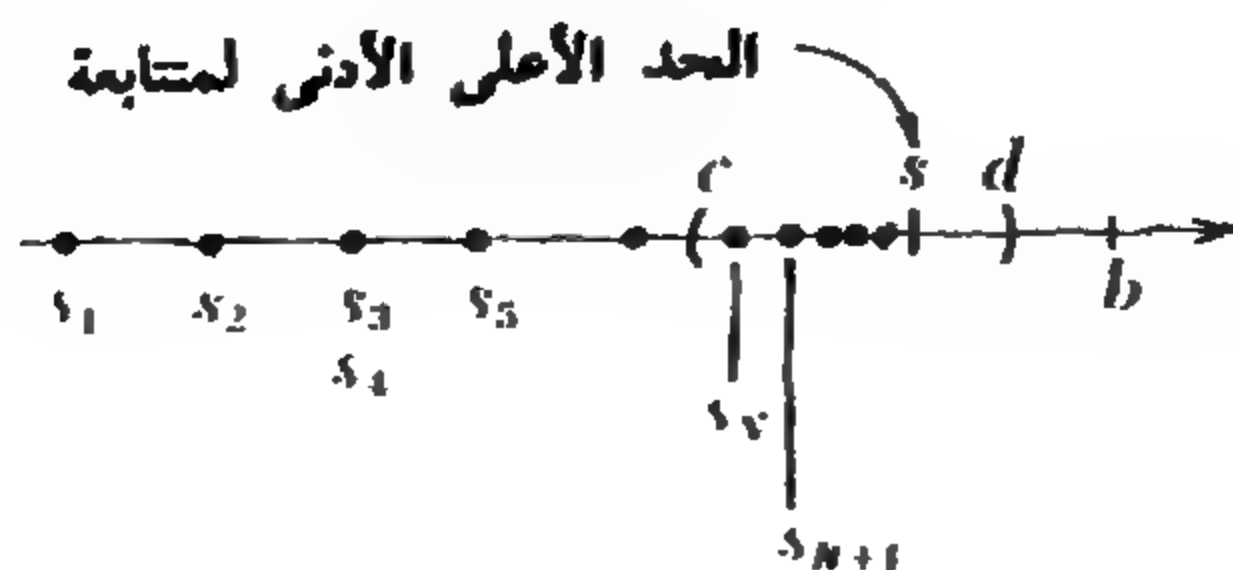
الطريقة الثانية . العبارة $(2/x)(1 + 6/x)$ معرفة لجميع $x > 0$ الحقيقية . بنظريات النهايات للدوال ، يكون

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} \left(1 + \frac{6}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left(1 + \frac{6}{n}\right) = 0$$

إذن

رغم أن المتتابعة المحدودة قد لا يكون لها نهاية ، مثل $1, -1, 1, -1, 1, \dots$ ، إلا أن النظرية الآتية توضح أن المتتابعة سيكون لها نهاية إذا كانت تتزايد باطراد . هذه النتيجة أساسية في نظرية المتتابعات والمتسلسلات اللانهائية .



شكل ١٥-٤

١٥ - ٦ نظرية . لتكن $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ متتابعة حدودها تتزايد باطراد ومحدودة من أعلى بعدد ما b ،
 أى أن

$$s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq \dots$$

وأن $s_n \leq b$ لجميع n . حيث $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ تكون موجودة ، ويكون $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq b$ لجميع m .
 البرهان . حدود المتتابعة تظل تمتد الى اليمين لكن لا يمكن أن تتجاوز b . فى الواقع ، الحدود
 لا يمكن أن تتجاوز حدها الأعلى الأدنى s (شكل ١٥ - ٤) . بما أن الحدود تقترب من s كما نريد ،
 يبدو من المعقول أن تكون s النهاية ، وهذا ما سنتبته . لتكن الفترة (c, d) أى جوار لـ s . يجب أن
 يوجد حد ما s_N للمتتابعة أكبر من c ، وإلا كانت c حداً أعلى للمتتابعة أصغر من الحد الأعلى الأدنى .
 لأن المتتابعة تتزايد باطراد ، فإن

$$c < s_N \leq s_{N+1} \leq s_{N+2} \leq \dots \leq s < d$$

وجميع حدود المتتابعة بعد s_N تكون أيضاً فى (c, d) . شروط التعريف ١٥ - ١ لى تكون s النهاية قد
 تحققت . بما أن s هى الحد الأعلى الأدنى للمتتابعة ، فإن $s_m \leq s$ لجميع m . العدد b هو حد أعلى
 بالفرض . إذن $s \leq b$.

مسائل

بفرض أن نط الحدود القليلة الأولى يستمر ، أوجد الحدود الثلاثة التالية والحد العام للمتابعات
 الآتية :

- | | | | |
|-----|---|-----|---|
| ١ - | ١, 4, 9, 16, 25, . . . | ٢ - | 3, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{4}{3}$, . . . |
| ٣ - | $\frac{1}{4(5)}$, $\frac{1}{5(6)}$, $\frac{1}{6(7)}$, $\frac{1}{7(8)}$, . . . | ٤ - | $\frac{a^2}{3}$, $-\frac{a^3}{5}$, $\frac{a^4}{7}$, $-\frac{a^5}{9}$, . . . |
| ٥ - | 1, 0, $\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{5}$, 0, $\sqrt{7}$, 0, . . . | ٦ - | 0, 7, 26, 63, 124, . . . |
| ٧ - | $1 - \frac{1}{2}$, $1 - \frac{2}{3}$, $1 - \frac{3}{4}$, $1 - \frac{4}{5}$, $1 - \frac{5}{6}$, . . . | ٨ - | $2 + \frac{1}{2}$, $-2 - \frac{1}{3}$, $2 + \frac{1}{4}$, $-2 - \frac{1}{5}$, . . . |
| ٩ - | 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, . . . | | |

استخدم تعريف نهاية متتابعة لاثبات أن المتابعات الآتية لها نهاية :

- | | | | |
|------|---|------|---|
| ١٠ - | c, c, ϵ, \dots | ١١ - | $c, \frac{c}{2}, \frac{c}{3}, \frac{c}{4}, \dots, \frac{c}{n}, \dots$ |
| ١٢ - | $1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \dots, \frac{1}{\sqrt[3]{n}}, \dots$ | ١٣ - | $1, \frac{1}{2^p}, \frac{1}{3^p}, \dots, \frac{1}{n^p}, \dots ; p \geq 0$ |
| ١٤ - | $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots, \frac{2^n - 1}{2^n}, \dots$ | | |

استخدم نظريات النهاية ١٥ - ٣ لايجاد نهاية المتتابعة التي حددها العام معطى . بين أين استخدمت نظريات النهاية .

$$- ١٥ \quad 2 - \frac{5}{n} \quad - ١٦ \quad \frac{n-1}{n} \quad - ١٧ \quad (-1)^i \left(1 + \frac{1}{i}\right) \quad - ١٨ \quad \frac{n^2 + 4n - 6}{2n^2}$$

$$- ١٩ \quad 4 + \frac{(-1)^r}{r} + r \quad - ٢٠ \quad \left(1 + \frac{2}{t}\right)\left(3 - \frac{1}{t}\right) \quad - ٢١ \quad \frac{1}{\sqrt{2 + 1/j^2}}$$

اكتب الحدود الأربعة الأولى للمتتابعة التي حددها العام معطى ، وأوجد نهاية المتتابعة اذا كانت توجد :

$$- ٢٢ \quad \frac{4}{m} \quad - ٢٣ \quad \frac{2n+1}{1-3n} \quad - ٢٤ \quad 2 + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \quad - ٢٥ \quad \frac{3+2n}{1+n^2}$$

$$- ٢٦ \quad \frac{n^2 + 2n}{n-5} \quad - ٢٧ \quad \frac{(-1)^i}{2i^2} \quad - ٢٨ \quad \frac{-n^2 + 3}{n^2 + 2} \quad - ٢٩ \quad \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

$$- ٣٠ \quad m\sqrt{\frac{\pi+4}{m^2}} + 3 \quad - ٣١ \quad \frac{\ln m}{2m} \quad - ٣٢ \quad \frac{m}{\ln m} \quad - ٣٣ \quad \frac{3n}{n-1} - \frac{n-1}{3n}$$

$$- ٣٤ \quad \frac{e^n + e^{-n}}{n} \quad - ٣٥ \quad e^{1/m} \quad - ٣٦ \quad 1 + (-1)^i \quad - ٣٧ \quad c^i, i=0, 1, 2, \dots$$

$$- ٣٨ \quad \sqrt{m} - \sqrt{m+1} \quad - ٣٩ \quad \sin n \quad - ٤٠ \quad \frac{1}{n} \sin n \quad - ٤١ \quad n \sin \frac{1}{n}$$

$$- ٤٢ \quad [(-1)^n + 1] \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$- ٤٣ \quad 1 + \frac{[m]}{m} \quad , \quad \text{حيث } [m] \text{ يرمز الى أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوى } m.$$

$$- ٤٤ \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad - ٤٥ \quad \sqrt[n]{n}$$

عين ما إذا كانت المتتابعة المعطى حددها العام s_n تتقارب أم تتباعد . إذا كانت المتتابعة تتقارب ، أوجد النهاية . اذا كانت تتباعد ، فهل تتباعد الى مالا نهاية ؟

$$- ٤٦ \quad s_n = 5 \quad - ٤٧ \quad s_n = \begin{cases} 2, & n \text{ زوجية} \\ 1, & n \text{ فردية} \end{cases}$$

$$- ٤٨ \quad s_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & n \text{ فردية} \\ 1, & n \text{ زوجية} \end{cases}$$

$$- ٤٩ \quad s_n = 3 + \frac{n}{2^n}$$

$$- ٥٠ \quad s_n = \begin{cases} 2 + \frac{3}{n}, & 1 \leq n \leq 8, \\ 5, & n > 8. \end{cases}$$

$$- ٥١ \quad s_n = \cos \pi n$$

$$- ٥٢ \quad s_n = [n] \quad - ٥٣ \quad s_n = n - \ln n$$

وقع النقط الست الأولى على الخط الحقيقي لكل من المتتابعات المعطى حدها العام s_n . أوجد ووقع $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ إذا كانت توجد .

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^{n-1}} \quad - ٥٦ \quad s_n = 3 + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} \quad - ٥٥ \quad s_n = \frac{1}{n} \quad - ٥٤$$

$$s_n = 2 + \ln n \quad - ٥٩ \quad s_n = \frac{(-1)^n (n^2 + 1)}{n} \quad - ٥٨ \quad s_n = \sin \frac{\pi n}{2} \quad - ٥٧$$

٦٠ - أعط مثالا لمتابعة $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ غير مطردة ، حتى ولو أخيراً ، ولكن $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$.

٦١* - أثبت أن $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ إذا كانت $-1 < a < 1$ وأن $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ إذا كانت $a > 1$.

٦٢ - النهاية $\lim_{m \rightarrow \infty} [x^{2^m}/(1+x^{2^m})]$ تعتمد على x فهي تعرف دالة f . أوجد $f(1/2), f(1), f(3)$. لأي x تعرف f ؟ . خطط الشكل البياني للدالة f .

٦٣ - لتكن g هي الدالة المعرفة بـ $g(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} [x^{2^m}/(1+x^{2^m})]$ أوجد $g(1)$ و $g(1/2)$ و $g(-3)$. لأي x تعرف g ؟ خطط الشكل البياني للدالة g .

٦٤ - أثبت أنه إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ موجودة ، فكذا تكون $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + c)$ حيث c أى عدد .

٦٥ - من المتابعة $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ كون المتابعة $s_2 - s_1, s_3 - s_2, \dots, s_n - s_{n-1}, \dots$ أثبت أنه إذا كانت المتابعة الأولى تتقارب ، فإن الثانية تتقارب الى الصفر . العكس ليس صحيحاً .
فى البند القادم سنرى أن المتابعة التى حدها العام هو $s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ تتباعد رغم أن :
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$$

٦٦ - أثبت أنه إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ موجودة ولا تساوى صفراً ، فإنه يوجد عدد صحيح N بحيث أن $b_n \neq 0$ لجميع $n \geq N$. (ارشاد : أنظر التمهيدية ٢ - ٢٢) .

٦٧ - أثبت أنه إذا كانت المتابعة s_1, s_2, s_3, \dots تتقارب ، فكذا تكون المتابعة :
 $s_{m+1}, s_{m+2}, s_{m+3}, \dots$ التى نحصل عليها بحذف الـ m حداً الأولى ، وأن نهايتهما واحدة .

٦٨ - إذا استبدلت الحدود الـ m الأولى للمتابعة

$$s_1, s_2, \dots, s_m, s_{m+1}, \dots, s_n, \dots$$

بـ t_1, t_2, \dots, t_m ، فاثبت أن تقارب أو تباعد المتابعة لا يتأثر .

٦٩ - إذا كانت $a_n \leq b_n$ لجميع n وكانت $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ موجودتين ، فاثبت أن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (\text{ارشاد : افرض أن } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > \lim_{n \rightarrow \infty} b_n)$$

٧٠ - أثبت أنه إذا كانت $s_n \leq u_n \leq t_n$ لجميع n أكبر من عدد صحيح ما N وكانت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$$

فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ تكون موجودة وأن $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$

٧١- أثبت أنه إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n| = |s|$ تكون موجودة وأن $\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n| = |s|$. هل العكس صحيح ؟

٧٢- أثبت أن $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ إذا وإذا فقط كان $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.

٧٣- أثبت النظرية ٣-١٥ (أولاً) ٧٤- أثبت النظرية ٣-١٥ (ثانياً)

٧٥- أثبت النظرية ٣-١٥ (ثالثاً) ٧٦- أثبت النظرية ٣-١٥ (رابعاً)

٧٧- أثبت النظرية ٣-١٥ (خامساً) .

٧٨- أثبت أنه إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ موجودة ، فإن المتتابعة $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ تكون محدودة (ارشاد : لتكن $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ توجد N بحيث أن s_n تقع في الجوار $(s - I, s + I)$ لـ s لجميع $n \geq N$.

٧٩- أثبت المناظر للنظرية ١٥-٦ للمتابعات المتناقصة : دع $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ متتابعة مطردة النقصان ومحدودة من أدنى بعدد ما a ؛ أي أن ، $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n \geq \dots$ و $s_n \geq a$ لجميع n . حينئذ تكون $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ موجودة ، وتكون $s_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq a$ لجميع n .

٨٠- أثبت النظرية ١٥-٥ (ارشاد : بالمسألة ٧٨ ، نحتاج فقط إلى دراسة الحالة التي تكون فيها $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ محدودة . ليكن $V = (-\epsilon_1, \epsilon_2)$ أي جوار لـ 0 . يوجد عدنان a و b بحيث أن $a < s_n < b$ لجميع n . إذن $a/t_n < s_n/t_n < b/t_n$ لجميع n الكبيرة كبراً كافياً) .

٨١- لتكن $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ متتابعة . لقد أثبتنا أنه إذا كانت g دالة معرفة لجميع الأعداد الحقيقية الموجبة بحيث أن $g(n) = s_n$ ، وكانت $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ موجودة ، فإن المتتابعة لها نهاية وأن $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ برهن أن العكس ليس صحيحاً بإعطاء مثال لدالة g ليس لها نهاية ومع ذلك $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ موجودة .

٢-١٥

المتسلسلات اللانهائية

لتكن $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ متتابعة من الأعداد . العبارة

$$(1) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

المتكونة من هذه المتتابعة تسمى متسلسلة لا نهائية ، أو باختصار متسلسلة . وهي ليست حاصل جمع بالمعنى العادى لأن حاصل جمع عدد لا نهائى من الأعداد لم يسبق تعريفه . عادة يكون من المناسب أن نرمز الى الحد الأول من المتسلسلة بـ a_m ، حيث m عدد صحيح ما غير الواحد الصحيح ، كثيراً ما يكون 0 . حينئذ تبدو المتسلسلة هكذا :

$$(2) \quad a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n + \dots$$

المتسلسلتان في (١) و (٢) يمكن كتابتهما بإيجاز هكذا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ أو مجرد $\sum a_n$ عندما يكون دليل الحد الأول واضحاً أو غير هام . الحد a_n يسمى الحد العام للمتسلسلة وعادة يحذف في (١) و (٢) إذا كانت الحدود لها نمط واضح . إذا كان أى حد a_i في (١) سالباً ، فالإشارة الموجبة التي تسبقه تستبدل عادة بإشارة سالبة . فمثلاً ، المتسلسلة المتكونة من المتتابعة

$$1, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{4}, \dots$$

تكتب

$$1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \dots$$

بدلاً من

$$1 + (-\sqrt{2}) + \sqrt{3} + (-\sqrt{4}) + \dots$$

أمثلة للمتسلسلات اللانهائية هي

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots ,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{i^2} = \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \dots + (-1)^i \frac{1}{i^2} + \dots$$

حاصل جمع الـ n حداً الأولى من المتسلسلة اللانهائية

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

يسمى حاصل الجمع الجزئى النونى ويرمز له بالرمز S_n .
أى أن

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$\dots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i = S_{n-1} + a_n,$$

$$\dots$$

وبما أن خواصل الجمع الجزئية هي خواصل جمع أعداد محدودة من الحدود فهي معرفة تماماً .
فمثلاً ، خواصل الجمع الجزئية للمتسلسلة

$$(3) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

هى

$$S_1 = \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4},$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(4) \quad S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

أهمية المتسلسلات اللانهائية ترجع إلى الحقيقة أن بالرغم من أن حاصل جمع عدد لا نهائى من الأعداد غير معرف ، فإن حاصل جمع الـ n حدا الأولى لمتسلسلات كثيرة يكون بالتقريب ثابتاً عندما تكون n كبيرة . فمثلاً ، حاصل جمع الـ n حدا الأولى للمتسلسلة (٣) ، كما هو معطى فى (٤) يكون قريباً من 1 عندما تكون n كبيرة . هذه الفكرة نجعلها دقيقة فى التعريف التالى .

١٥-٧ تعريف . المتسلسلة اللانهائية

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

تكون تقاربية إذا كانت المتابعة $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ لحواصل جمعها الجزئية لها نهاية . أى إذا كانت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

موجودة . إذا لم تكن "نهاية موجودة" ، فالمتسلسلة تباعدية . إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ موجودة ، وبالتالى المتسلسلة تقاربية ، فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ تسمى حاصل جمع أو نهاية المتسلسلة اللانهائية التقاربية . ويقال أن المتسلسلة تتقارب إلى حاصل جمعها . المتسلسلة التباعدية ليس لها حاصل جمع .

المتسلسلة فى (٣) لها حاصل جمع جزئى نونى يعطى بـ (٤) . بما أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

نهاية متابعة حواصل الجمع الجزئية موجودة والمتسلسلة تتقارب . حاصل جمعها 1 .

حاصل جمع المتسلسلة اللانهائية التقاربية يرمز له عادة بالرمز $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ أى أن

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i$$

للمتسلسلة في (٣) ، مثلاً ، يمكننا كتابة $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$. فالرمز $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ يستخدم لكل من المتسلسلة ، وحاصل جمع المتسلسلة إذا كانت تتقارب . هذا قد لا يكون موفقاً لكن أصبح معتاداً . الحديث سيوضح أى معنى يكون المقصود .

المتسلسلة الهندسية

$$(٥) \quad a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + \dots$$

متسلسلة هامة . حاصل جمعها الجزئى النونى هو المتوالى الهندسية

$$(٦) \quad S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

يمكن إيجاد صيغة لـ S_n بضرب طرفى (٦) فى r ،

$$rS_n = ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$$

وطرح هذه من (٦) ،

$$(1 - r)S_n = a - ar^n$$

إذن ، إذا كانت $r \neq 1$ ، فإن

$$S_n = a \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

إذا كانت $-1 < r < 1$ ، فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ (المسألة ٦١ ، بيند ١٥ - ١) ويكون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}$$

إذن المتسلسلة الهندسية (٥) تتقارب إذا كان $|r| < 1$ ، وحاصل جمعها هو $a/(1 - r)$:

$$(٧) \quad a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + \dots = \frac{a}{1 - r}, \quad -1 < r < 1$$

إذا كانت $r > 1$ أو $r \leq -1$ ، فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ لا توجد ، وبالتالي لا توجد $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ إذا كانت $r = 1$ ، فإن من (٦) ، $S_n = na$ ، والنهاية $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ لا توجد .

وإذن المتسلسلة الهندسية تتباعد وليس لها حاصل جمع إذا كان $|r| \geq 1$. استثناء تافهاً لهذا النص الأخير يحدث إذا كانت $a = 0$ ، لأن عندئذ ، من (٦) ، تكون $s_n = 0$ لجميع n ومستقارب (٥) لحاصل الجمع ٠ لـ r .

المتسلسلة

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

متسلسلة هندسية حيث $r = -\frac{1}{2}$ و $a = 1$. هي تتقارب ، ومن (٧) ، حاصل جمعها هو $1/(1 + \frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$

الكسر العشري المتكرر غير المنتهى ... 0.333 هو صورة موجزة للمتسلسلة اللانهائية

$$(8) \quad \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$$

هذا هو تعريفه . المتسلسلة هندسية حيث $r = \frac{1}{10}$ و $a = \frac{3}{10}$. بما أن $-1 < \frac{1}{10} < 1$ ،
فالمتسلسلة تتقارب ، وحاصل جمعها هو

$$\frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3}$$

عندما نكتب $\frac{1}{3} = 0.333 \dots$ فإننا نقصد أن (8) تتقارب إلى $\frac{1}{3}$.

أى كسر عشري غير منته على الصورة

$$(9) \quad 0.a_1a_2a_3 \dots a_n \dots$$

حيث الـ a_i هي الأعداد الصحيحة 0, 1, ..., 9 ليست مضروبة ولكن موضوعة بجوار بعضها ،
كما فى ... 0.579523 ، هو أسلوب لكتابة المتسلسلة غير المنتهى

$$(10) \quad \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$$

هذه ليست متسلسلة هندسية مالم تكن الـ a_i متساوية ، لكن يمكن إثبات أنها تتقارب لـ أى اختيار للـ a_i (المسألة ١٨ ، بيند ١٥ - ٤) . اذا كان حاصل الجمع هو a ، فإننا نكتب
 $a = 0.a_1a_2a_3 \dots$. الحقيقة أن (10) دائماً تتقارب لها أهمية جوهرية فى نظامنا بالاسلوب
العشرى . هي تعنى أن كل كسر عشري غير منته (9) يمثل عدداً حقيقياً بين صفر وواحد .
وصحيح أيضاً أن كل عدد حقيقى بين صفر وواحد له تمثيل عشري .

مثال ١ . عين ما إذا كانت المتسلسلة $\frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)} + \dots$ تتقارب .

حاصل الجمع الجزئى النونى هو

$$(11) \quad S_n = \frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

هذا يمكن التعبير عنه هكذا :

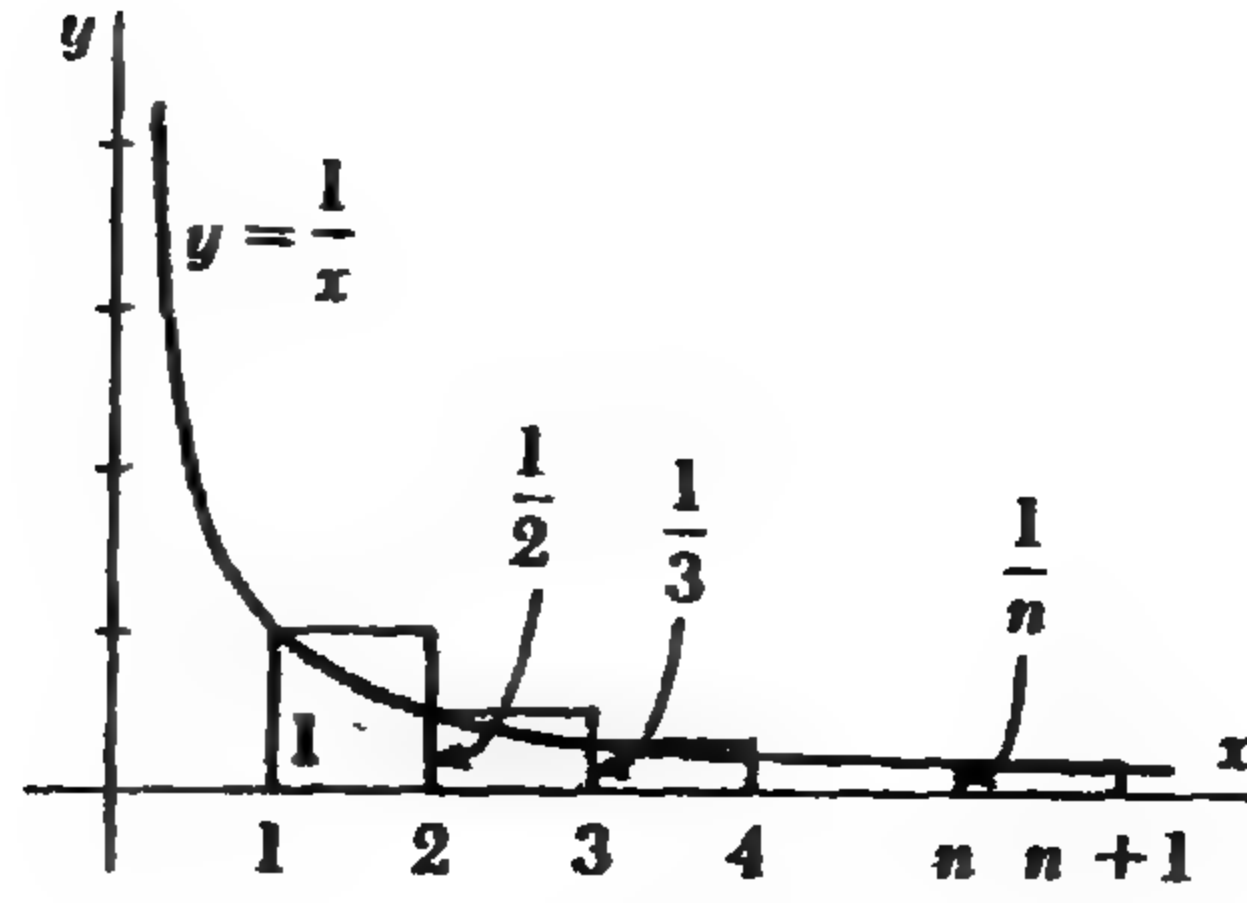
$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

بما أن $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ المتسلسلة تتقارب وحاصل الجمع هو 1 . متسلسلة هامة جداً هي المتسلسلة
التوافقية

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

حدود المتسلسلة هي مساحات المستطيلات المبينة فى الشكل ١٥ - ٥ . حاصل جمع الحدود الـ n
الأولى ،



شكل ١٥-٥

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

أكبر من مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = 1/x$ بين 1 و $n + 1$. إذن

$$S_n > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$$

بما أن $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$ والمتسلسلة التوافقية تتباعد. المتسلسلة التباعدية $\sum a_n$ التي حواصل جمعها الجزئية النونية تصبح لا نهائية، مثل حواصل الجمع الجزئية النونية للمتسلسلة التوافقية، أحياناً يقال أنها تتباعد إلى ما لا نهاية.

من الواضح أنه إذا كانت المتسلسلة $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ لتقارب، فإن حدودها يجب أن تقترب أخيراً من الصفر. لأنه، بما أن $S_n = S_{n-1} + a_n$ ، فإذا لم يكن كذلك، فإن حواصل الجمع الجزئية المتعاقبة سوف لا تكون قريبة من بعضها البعض ولا تقدر أن تتجمع حول نهاية. مثبتت هذه الخاصية في النظرية التالية.

١٥-٨ نظرية. إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تتقارب، فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

البرهان. لتكن a حاصل جمع المتسلسلة، S_n حاصل جمعها الجزئي النوني. عندئذ يكون $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = a$ بما أن $a_n = S_n - S_{n-1}$ ، فيكون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0$$

بينما الحد النوني لمتسلسلة تقاربية يجب أن يقترب من الصفر، فإن العكس ليس صحيحاً. توجد متسلسلات حدها النوني يقترب من الصفر وبالرغم من ذلك تتباعد. المتسلسلة التوافقية $\sum \frac{1}{n}$ واحدة.

فائدة النظرية تنحصر في إثبات تباعد المتسلسلات، لأنه إذا كان الحد النوني لا يقترب من الصفر،

$$-1 + \frac{2}{3} - \frac{3}{5} + \frac{4}{7} - \dots + (-1)^n \frac{n}{2n-1} + \dots$$

لا يمكن أن تتقارب ، إذ أن عندما تكون n كبيرة ، يكون $(-1)^n n / (2n-1)$ قريباً من $\frac{1}{2}$ إذا كانت n زوجية و $-\frac{1}{2}$ إذا كانت n فردية . الحد النوني ليس له نهاية . هذه المتسلسلة تتباعد لكن ليس الى ما لا نهاية . عندما تكون n كبيرة ، كل حاصل جمع جزئيين متعاقبين يختلفان بمقدار $\frac{1}{2}$ تقريباً ، S_n تقفز الى الخلف والى الامام بمقدار $\frac{1}{2}$ تقريباً في كل مرة . في مثل هذه الأحوال S_n تجد صعوبة في الاقتراب الى نهاية . هذه المتسلسلة هي مثال للمتسلسلة التذبذبية .

النظرية الآتية تعمم الى المتسلسلات خاصية لحواصل الجمع المنتهية . ونترك البرهان للقارئ .
(المسألة ٤.٢) .

١٥-٩ نظرية . إذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ و $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ متسلسلتين تقاربتين وكان حاصل جمعهما A و B ، وكانت $a_i \leq b_i$ لجميع i ، فإن $A \leq B$.

في المعالجة بالمتسلسلات وفي أجزاء أخرى من الرياضيات حاصل الضرب $1.2.3 \dots n$ للأعداد الصحيحة الموجبة الـ n الأولى يظهر كثيراً فنستخدم عادة الرمز $n!$ (يقرأ « مضروب n ») له . فمثلاً ، $7! = 1.2.3 \dots 7 = 5040$ و $2! = 1.2 = 2$ و $1! = 1$ وبوجه عام $n! = 1.2.3 \dots n$. من المفيد تعريف $0! = 1$ لاحظ أن $0! = (n+1) (n!)$. رغم أن $n!$ تعرف في الرياضيات المتقدمة لجميع الأعداد الحقيقية $n > -1$ ، لكن في الرياضيات الأولية يستخدم الرمز فقط عندما تكون n عدداً صحيحاً غير سالب . المتسلسلة

$$1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} + \dots$$

بالرمزين سجما ومضروب هي $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

نلخص النقاط الأساسية لهذا البند : المتابعة هي قائمة لا نهائية مرتبة من الأعداد

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

هذه ليست متسلسلة . المتسلسلة هي العبارة المتكونة من هذه المتابعة بوضع علامات زائد بين الحدود

$$(12) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

بالتعريف ، المتسلسلة (١٢) تتقارب إذا كانت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

موجودة . الحد النوني a_n يجب أن يقترب من الصفر إذا كانت المتسلسلة مستقاربة ، لكن هذا فقط لا يؤكد التقارب . لا تخلط بين المتابعة a_1, a_2, a_3, \dots المتكونة من حدود المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$

والمتابعة s_1, s_2, s_3, \dots لحواصل الجمع الجزئية لها ، حيث $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

مسائل

أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتسلسلات اللانهائية الآتية . ما عدا حيث يشار ، أوجد $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ، حيث a_n هو الحد العام .

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n+1} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{2n} - 3 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{i}{4^{i-1}} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$$

$$5 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2}{n+1} - 6 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\ln m}{m} - 7 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{\cos^2 j}{2^j}$$

$$8 - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{m+1}{2} \right] \text{ حيث } [a] \text{ ترمز الى أكبر عدد صحيح أقل من}$$

أو يساوى a .

$$9 - \sum_{m=3}^{\infty} \frac{t^{m+1}}{\sqrt{m}} - 10 - \sum_{i=3}^{\infty} \frac{t^{m+1}}{\sqrt{m}} - 11 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} - 12 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}$$

بفرض أن نمط الحدود القليلة الأولى يستمر ، أوجد الحدود الثلاثة التالية والحد العام للمتسلسلات اللانهائية الآتية :

$$13 - 2 + 4 + 8 + 16 + \dots - 14 - 3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \dots$$

$$15 - \frac{x^3}{1} + \frac{x^4}{1 \cdot 2} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots - 16 - 0 + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{6} + \frac{4}{7} + \dots$$

$$17 - \frac{5}{2} - \frac{7}{3} + \frac{9}{4} - \frac{11}{5} + \frac{13}{6} - \dots - 18 - \frac{\sqrt{y}}{1} + \frac{y}{1 \cdot 3} + \frac{y\sqrt{y}}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{y^2}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$$

19 - إذا اتبع لك استخدام حاسب آلى ، أوجد حاصل الجمع الجزئى النونى للمتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ عندما $n = 10, 20, 30, \dots, 100$. يمكن إثبات أن حاصل جمع هذه المتسلسلة هو : $\pi^2/6 \approx 1.644934$

حدد ما اذا كانت المتسلسلات الآتية تتقارب أم تباعد :

$$20 - \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3} \right)^i - 21 - 4 + 4(-\frac{2}{3}) + 4(-\frac{2}{3})^2 + 4(-\frac{2}{3})^3 + \dots$$

$$22 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{j+1} - 23 - 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$$

$$24 - \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{2} - 25 - \frac{1}{4} + \frac{2}{7} - \frac{3}{10} + \dots + (-1)^k \frac{k}{3k+1} + \dots$$

$$26 - \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \left[\frac{i+1}{2} \right] \text{ حيث } [a] \text{ ترمز الى أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوى } a .$$

• Omit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$27 - \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{3} + \ln \frac{1}{4} + \ln \frac{1}{5} + \dots$$

أوجد حاصل جمع المتسلسلات التقاربية الآتية :

$$28 - \dots + \frac{7}{5^{n-1}} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{7}{5^{n-1}} + \dots - \frac{7}{5} + \frac{7}{5^2} - \dots - 7$$

$$30 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)(2m+1)} \quad (\text{ارشاد : استخدم الكسور الجزئية})$$

$$31 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad (\text{ارشاد : استخدم الكسور الجزئية})$$

أوجد العدد الممثل بالكسور العشرية غير المنتهية الآتية :

$$32 - 0.222 \dots \quad 33 - 0.5999 \dots \quad 34 - 0.434343 \dots \quad 35 - 0.713713713 \dots$$

36 - تسقط كرة من ارتفاع h وترتطم بالأرض بعد $\sqrt{h}/4$ ثانية ، ثم ترتد لارتفاع bh ، حيث

$0 < b < 1$. تأخذ زمناً للوصول الى هذا الارتفاع مساوياً للزمن من هذه النقطة للأرض .

تستمر الكرة في الحركة بهذه الكيفية . أوجد المسافة الكلية التي تقطعها الكرة والزمن الكلى

لحركتها .

37 - متسلسلة على الصورة

$$(13) \quad \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - b_{i+1})$$

تسمى متسلسلة تلسكوبية . المتسلسلة في (١١) متسلسلة تلسكوبية . أثبت أن (١٣) تتقارب إذا

وإذا فقط كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ موجودة ، وإذا كانت المتسلسلة تتقارب فأوجد حاصل جمعها .

38 - أوجد صيغة لحاصل الجمع $S_n = r + 2r^2 + 3r^3 + \dots + nr^n$. أثبت أن المتسلسلة

$\sum_{i=1}^{\infty} ir^i$ تتقارب إذا كان $|r| < 1$ ، وأوجد حاصل جمعها .

39 - أثبت أن المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} i^2 r^i$ تتقارب إذا كان $|r| < 1$ وأوجد حاصل جمعها .

40 - إذا جمعت حدود المتسلسلة التوافقية بالكيفية

$$1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}) + \dots$$

فإن حاصل جمع الحدود في كل مجموعة بين قوسين أكبر من $\frac{1}{2}$. استخدام هذه الحقيقة

لأثبت أن المتسلسلة التوافقية تتباعد .

41 - أثبت أنه إذا كانت متسلسلة حدودها موجبة تتباعد ، فيجب أن تتباعد الى مالا نهية .

42* - أثبت النظرية ١٥ - ٩ (ارشاد : افرض أن $A > B$. اختر جوارين لـ A و B صغيرين حتى

لا يتقاطعان وادرس حواصل الجمع الجزئية للمتسلسلتين عندما تكون n كبيرة .)

بسط ما يأتي

$$43 - \frac{n!}{(n+1)!} \quad 44 - \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \quad 45 - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3n} \quad 46 - \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$47 - \text{أثبت أن } \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$$

أوجد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ لـ a_n المعطى .

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \quad \frac{1}{2^n} - 49 \quad a_n = \frac{1}{(2n-1)!} \quad - 48$$

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad - 51 \quad a_n = \frac{n!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)} - 50$$

٥٢ - هل $n!$ أكبر أو أصغر من n^n ؟ أوجد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$ (إرشاد : استخدم نظرية الحصر للمتتابعات ، المسألة ٧٠ ، بيند ١٥ - ١) .

٥٣ - الرمز $\binom{n}{r}$ ، حيث r و n عدداً صحيحان وحيث $0 \leq r \leq n$ يعرف بـ

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

من بين الاستخدامات المختلفة ، $\binom{n}{r}$ هو عدد الطرق الممكنة لاختيار r من الأشياء من بين

مجموعة من n من الأشياء . (أ) أوجد $\binom{6}{3}, \binom{8}{2}, \binom{8}{6}, \binom{5}{0}, \binom{5}{5}$

(ب) أثبت أن $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ (ج) ، أثبت أن $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$

٣ - ١٥

العمليات الجبرية على المتسلسلات

قد نود لو أننا نستطيع إيجاد حاصل جمع كل متسلسلة تقارب ، لكن هذا يمكننا فقط لعدد قليل جداً . الموضوع الخطير التالي هو معرفة ما إذا كانت المتسلسلة تتقارب أم لا . هذه تكون معلومات مفيدة ، ومجموعة واسعة معروفة باختبارات التقارب قد صممت كوسائل لتعيين ما إذا كانت المتسلسلة تتقارب أم تتباعد . قبل دراسة أهمها ، سنبرهن بعض الخواص البسيطة للمتسلسلات عامة .

تغيير عدد محدود من الحدود في متسلسلة لا نهائية لا يؤثر على تقاربها أو تباعدها . أى أن ، المتسلسلة المعدلة ستتقارب أو تتباعد وفقاً لكون المتسلسلة الأصلية تتقارب أو تتباعد . لكن حاصل جمعها قد يختلف . فمثلاً ، المتسلسلة الهندسية

$$2 + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + \dots$$

تتقارب . كذلك أيضاً تتقارب المتسلسلة

$$6 - 13 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{7} + 2\left(\frac{1}{3}\right)^4 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \dots + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + \dots$$

التي نحصل عليها منها بتغيير الحد الأول والثاني والرابع . لاثبات هذه النتيجة للمتسلسلات عامة ، لتكن $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ المتسلسلة ، ولنفرض أن a_m هو الحد الأخير الذي يتغير . من الملائم أن نعتبر أن جميع الحدود الـ m الأولى a_1, a_2, \dots, a_m قد استبدلت بـ b_1, b_2, \dots, b_m مع أن واحداً أو أكثر من الـ b_i قد يساوى a_i .

إذا كان

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

$$T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_m + a_{m+1} + \dots + a_n.$$

حيث $n > m$ هما حاصل الجمع الجزئيان التوحيان للمتسلسلة الأصلية والمتسلسلة المعدلة ، فان

$$T_n = S_n - \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=1}^m b_i$$

بما أن $-\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=1}^m b_i$ هو ثابت ، فان T_n يكون له نهاية إذا وإذا فقط كان S_n له نهاية .

إذا حذف الحدود الـ m الأولى من المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ فان الحدود الباقية تكون متسلسلة

$$(1) \quad a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \dots$$

برهان مماثل لما سبق سيثبت أن (١) تتقارب إذا وإذا فقط كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تتقارب ، إلا أن حاصل جمعها سيختلف عن حاصل جمع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بمقدار يساوى حاصل جمع الحدود المحذوفة . عند تعيين ما إذا كانت متسلسلة ما تتقارب ، كثيراً ما يكون من الملائم أن نتغاضى عن الحدود القليلة الأولى . النظرية السابقة توضح أنه يمكننا عمل ذلك دون أن يتأثر تقارب أو تباعد المتسلسلة . فمثلاً ، إذا أردنا تعيين ما إذا كانت المتسلسلة

$$(2) \quad 5 + \frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-2} + \dots$$

تتقارب ، يمكننا إسقاط الحدود الثلاثة الأولى وملاحظة أن المتسلسلة الباقية هي المتسلسلة التوافقية منقوصة حدها الأول . هذه المتسلسلة تتباعد ، وبالتالي هكذا تعمل (٢) .

إذا ضرب كل حد من متسلسلة في عدد ثابت لا يساوى صفراً ، فاننا نحصل على متسلسلة جديدة تتقارب أو تتباعد تبعاً لكون المتسلسلة الأصلية تتقارب أو تتباعد . لأنه إذا كتبنا

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

فإن

$$cS_n = ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n, \quad c \neq 0$$

إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ موجودة ، فهكذا تكون $\lim_{n \rightarrow \infty} cS_n = c(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n)$ وبالعكس . وإذن $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ تتقارب إذا وإذا فقط كانت $\sum_{i=1}^{\infty} ca_i$ تتقارب ويكون $\sum_{i=1}^{\infty} ca_i = c \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ فمثلاً ، المتسلسلة

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} + \dots$$

تتباعد إذ أن حدودها نصف حدود المتسلسلة التوافقية التباعدية .

من المتسلسلتين $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ و $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ يمكن تكوين المتسلسلتين

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i \pm b_i) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_i \pm b_i) + \dots$$

اللتين تسميان متسلسلتى الجمع والفرق للمتسلسلتين $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ و $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$.

نترك برهان النظرية الآتية للقارىء (المسألة ١٢) .

١٥ - ١٠ نظرية . إذا كانت المتسلسلتان $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ و $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ تقاربيتين وكان حاصل جمعهما A و B ، فإن متسلسلة جمعهما ومتسلسلة فرقهما تقاربان ويكون

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i \pm b_i) = A \pm B$$

حتى العمليات الجبرية البسيطة ، التى تكون صحيحة لحواصل الجمع المنتهية ، يجب أن ننظر إليها بعين الشك عند إجرائها على المتسلسلات . فمثلا ، تجمع الحدود فى المتسلسلة $\sum a_n$ بإدخال أقواس ، كما فى

$$(a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + (a_8 + a_9 + a_{10}) + \dots$$

يكون متسلسلة جديدة $\sum b_n$ ، حيث

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = a_3, \quad b_3 = a_4 + a_5 + a_6 + a_7, \quad \dots$$

من غير الواضح أن تقارب المتسلسلة $\sum a_n$ يتضمن تقارب المتسلسلة $\sum b_n$. إذا كانت $\sum a_n$ تقارب ، فحواصل جمعها الجزئية تقترب من نهاية . بما أن كل حاصل جمع جزئى لـ $\sum b_n$ هو حاصل جمع جزئى لـ $\sum a_n$ ، فهذه أيضاً يجب أن تقترب من نفس النهاية . أى أن $\sum b_n$ تقارب ولها نفس حاصل الجمع مثل $\sum a_n$.

مع أن الأقواس يمكن إدخالها فى المتسلسلة التقاربية بدون تأثير على حاصل جمعها ، لكن لا يمكن حذف الأقواس دائماً . المتسلسلة

$$(٣) \quad (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

هى المتسلسلة $0 + 0 + 0 + \dots$ ، التى تقارب كإى متسلسلة تقاربية . عند حذف الأقواس ، نحصل على متسلسلة أخرى ،

$$(٤) \quad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

حاصل الجمع الجزئى النونى S_n لهذه المتسلسلة هو 1 إذا كانت n فردية وصفر إذا كانت n زوجية . S_n ليس له نهاية ، والمتسلسلة (٤) تتباعد .

الرياضيون فى أول العهد لم يحققوا أهمية التقارب . افترضوا أن أى عملية صحيحة لحواصل الجمع المنتهية يجب أن تكون صحيحة للمتسلسلات . بتجميع حدود المتسلسلة : $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ كما فى (٣) نحصل على المتسلسلة $0 + 0 + \dots$ التى حاصل جمعها صفر ، لكن بتجميع الحدود بكيفية مختلفة قليلا ، نحصل على

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots$$

التي هي $0 = 0 = 0 = 1$ ، والتي حاصل جمعها 1 . الرياضيون الأكفاء قد ازعجوا بمثل هذه انتصارات ، أما الرياضيون الأقل كفاءة فقد غالوا فيها . في القرن الثامن عشر الناسك Guido Grandi اعتقد أنه في البرهان السابق لا ثبات أن $0 = 1$ قد وجد برهاناً رياضياً لخلق الدنيا من لا شيء .

تقارب أو تباعد المتسلسلة ، وحاصل جمعها إذا كانت تقاربية ، لا يتأثر بادخال أو حذف أي عدد من الحدود الصفرية . نترك البرهان للقارئ (المسألة ١٤) . فمثلاً ، المتسلسلة

$$a_1 + a_2 + 0 + a_3 + a_4 + 0 + a_5 + a_6 + 0 + \dots$$

تقارب إذا وإذا فقط كانت

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

تقارب ، ويكون لهما نفس حاصل الجمع .

مسائل:

١ - أثبت أن متسلسلة الجمع لمتسلسلة تقاربية ومتسلسلة تباعدية هي متسلسلة تباعدية . (ارشاد : افرض أن متسلسلة الجمع تقاربية) .

٢ - هل متسلسلة الجمع لمتسلسلتين تباعديتين متسلسلة تباعدية ؟

عين ما إذا كانت المتسلسلات الآتية تقاربية أو تباعدية :

$$3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \dots - 4 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b}{4^n} - 5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \dots$$

$$6 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+3} - 7 - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^i} - \frac{1}{2^i} \right) - 8 - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{-2(3^i + 7^i)}{12^i}$$

$$9 - \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^j} + \frac{2}{j} \right) - 10 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$11 - 1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 + 0 + \frac{1}{3^2} + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{3^3} + 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{3^4} + \dots$$

١٢ - أثبت النظرية ١٥ - ١٠ (ارشاد : دع $S_n = \sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i)$ و $B_n = \sum_{i=1}^n b_i$ ، $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$) أثبت النظرية ١٥ - ١٠ (ارشاد : دع $S_n = \sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i)$ و $B_n = \sum_{i=1}^n b_i$ ، $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$) .

١٣ - أثبت أن قسمة $1-x$ على قسمة غير منتهية تعطى المتسلسلة الهندسية $1+x+x^2+\dots$. أوجد الباقي عند أي مرحلة وبواسطة أثبت تقارب المتسلسلة لـ $|x| < 1$.

١٤ - أثبت أن ادخال أو حذف أي عدد من الحدود الصفرية لا يؤثر على تقارب أو تباعد المتسلسلة ولا على حاصل جمعها ، إذا كانت تقاربية . (ارشاد : لتكن $\sum a_i$ هي المتسلسلة المعطاة ، $\sum b_i$ المتسلسلة الناتجة من هذه بادخال حدود صفرية . كل حاصل جمع جزئي لـ $\sum b_i$ هو حاصل جمع جزئي لـ $\sum a_i$) .

١٥ - من المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ كون المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + a_{i+1})$ هل تقارب المتسلسلة الأولى يتضمن تقارب الثانية ؟ هل تقارب المتسلسلة الثانية يتضمن تقارب الأولى ؟

١٥ - ٤

المتسلسلات ذات الحدود غير السالبة

نبدأ دراستنا لاختبارات التقارب بدراسة المتسلسلات التي حدودها ليست سالبة . النظريات لهذه المتسلسلات تقدمت كثيراً عنها للمتسلسلات العامة . المتسلسلة ذات الحدود غير السالبة يمكن كتابتها على الصورة

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

بجميع $a_n \geq 0$. المتسلسلة

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

ليست متسلسلة حدودها غير سالبة .

١٥ - ١١ اختبار المقارنة . لتكن $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ متسلسلة حدودها غير سالبة .

(أولاً) إذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ متسلسلة تقاربية وكان $a_i \leq c_i$ لجميع i ، فإن $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ تقارب . إذا كان A و C هما حاصل الجمع للمتسلسلتين ، فإن $A \leq C$.

(ثانياً) إذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty} d_i$ هي متسلسلة حدودها غير سالبة وكان $d_i \leq a_i$ لجميع i ، فإن $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ تتباعد وتتباعد الى ما لا نهاية .

البرهان . (أولاً) لتكن $C_n = \sum_{i=1}^n c_i$ و $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$ حاصلى الجمع الجزئيين النونيين للمتسلسلتين $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ و $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$. من الفرض $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n$ يوجد وتكون C . لأن $c_n \geq 0$ و $C_n = C_{n-1} + c_n$ ، المتابعة C_1, C_2, \dots تكون متزايدة باطراد . اذن بالنظرية ١٥ - ٦ ، يكون $C_n \leq C$ لجميع n . بما أن $a_i \leq c_i$ ،

$$A_n \leq C_n \leq C$$

لجميع n . أى أن المتابعة A_1, A_2, \dots تكون محدودة من أعلى بـ C ، ولأنها أيضاً متتابعة متزايدة باطراد ، فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ توجد اذن $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ تقارب بالتعريف . إذا كانت A ترمز الى حاصل جمعها ، فإن $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ والنظرية ١٥ - ٦ تثبت أن $A \leq C$.

(ثانياً) ضع $D_n = \sum_{i=1}^n d_i$ فيكون $D_1 \leq D_2 \leq \dots$ (لماذا ؟) . تباعد المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} d_i$ يتضمن أن المتابعة D_1, D_2, \dots لا تقارب . ليكن M أى عدد . يجب أن يوجد عدد ما N بحيث أن $D_N > M$ ، لأنه اذا لم يكن كذلك ، فجميع D_N تكون أقل من أو تساوى M ،

والمتتابعة المتزايدة باطراد D_1, D_2, \dots ستكون محدودة من أعلى ، وتتقارب بالنظرية ١٥ - ٦ . لكن $M < D_N$ يتضمن أن جميع D_N التالية تكون أكبر من M (لماذا ؟) . أي مهما كانت M كبيرة ، توجد دائماً نقطة في المتتابعة D_1, D_2, \dots بعدها تكون جميع الحدود أكبر من M . لكن هذا هو تماماً تعريف $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \infty$. بما أن $D_n \leq A_n$ لجميع n ، إذن $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty$ ، والمتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ تباعد الى مالا نهاية .

طريقة دارجة للنظر الى البرهان هي أن نتخيل في الحالة الأولى أن حواصل الجمع الجزئية للمتسلسلة التقاربية $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ تتقدم حواصل الجمع الجزئية لـ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ وهذا يجبر على التقارب . في الحالة الثانية حواصل الجمع الجزئية لـ $\sum_{i=1}^{\infty} d_i$ تدفع أمامها حواصل الجمع الجزئية لـ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ أثناء تباعدها الى مالا نهاية .

إذا كانت $0 \leq a_i \leq c_i$ لجميع i ، فإن المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ يقال أنها محكومة بالمتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$. اختبار المقارنة يقول أن المتسلسلة اللانهائية التي حدودها غير سالبة المحكومة بمتسلسلة تقاربية تكون تقاربية .

مثال ١ . أثبت أن المتسلسلة

$$(1) \quad 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

تتقارب

سوف لا نلتفت الى الحد الأول للمتسلسلة . لدينا

$$1 \cdot 2 \cdot 3 > 2 \cdot 2, \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 > 2 \cdot 2 \cdot 2, \dots, \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \geq 2$$

إذن كل حد في المتسلسلة

$$(2) \quad 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

يكون أقل من أو يساوي الحد المناظر في المتسلسلة

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots$$

المتسلسلة الأخيرة متسلسلة هندسية تقاربية . إذن (٢) وبالتالي (١) تتقارب باختبار المقارنة . سنرى في بند ١٦ - ٥ أن حاصل جمع المتسلسلة (١) هو e .

مثال ٢ . حدد ما اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ تتقارب أم تباعد .

بما أن $\sqrt{n} \leq n$ ، فيكون $1/\sqrt{n} \geq 1/n$. تباعد المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ يتضمن باختبار المقارنة تباعد المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

مثال ٣ . اختبار المتسلسلة

$$(٣) \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \dots$$

للتقارب .

العبارة « اختبار المتسلسلة للتقارب » تعنى تعيين ما اذا كانت المتسلسلة تتقارب أم تباعد . كما سنشرح فى البند القادم ، توجد أسباب لان نعتقد أن المتسلسلة تباعد . لذلك نحاول اثبات التباعد باستخدام اختبار المقارنة . اذا حاولنا مقارنة (٣) بالمتسلسلة

$$(٤) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} + \dots$$

التي هى تباعدية لأن حدودها أنصاف حدود المتسلسلة التوافقية ، نرى أن حدود (٣) أقل من حدود (٤) لأن $1/(2n+1) < 1/2n$ ، ولا يمكننا استخلاص أى نتيجة عن تقارب أو تباعد (٣) . لكن اذا قارنا كل حد فى (٣) مع الحد التالى فى (٤) يكون لدينا $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}, \frac{1}{4} > \frac{1}{6}$ ويوجه عام ،

$$\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+2}$$

فى الواقع ، أننا نقارن (٣) بالمتسلسلة

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n+2} + \dots$$

التي هى (٤) محذوفاً منها الحد الأول . اذن المتسلسلة (٣) تباعد .

يجب أن نتذكر أن اختبار المقارنة يطبق فقط على المتسلسلات ذات الحدود غير السالبة . أيضاً لا يكفى أن نقارن مجرد الحدود الثلاثة أو الأربعة الأولى للمتسلسلتين . يجب مقارنة الحدين العامين لكى نتأكد أن $a_i \leq c_i$ لجميع i ، أو على الأقل لجميع i ابتداء من نقطة ما فى المتسلسلة .

اختبار المقارنة أساسى وهام ، لكنه محدود بضرورة إيجاد متسلسلة معروفة تقاربية أو تباعدية لتقارن مع المتسلسلة المعطاة . هذا يتطلب أننا نخمن منذ البداية ما اذا كانت المتسلسلة المعطاة تقاربية أم تباعدية ، وبعد ذلك نحاول اثبات ذلك . اختبار التقرب فى البند القادم سيجعل هذا التخمين أسهل لمتسلسلات معينة . اختبار المقارنة يتطلب أيضاً أن يكون لدينا مجموعة من المتسلسلات المعروفة أنها تقاربية أو تباعدية . معلوماتنا الحالية محدودة بالمتسلسلة الهندسية ، والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ التي أثبتنا فى بند ١٥ - ٢ أنها تقاربية ، والمتسلسلة التوافقية . فى البند القادم سنمى مجموعتنا .

مسائل

عين ما اذا كانت المتسلسلات الآتية تتقارب أم تتباعد :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} - 3 \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i(i+1)}} - 2 \quad \frac{1}{2^{1/3}} + \frac{1}{3^{1/3}} + \frac{1}{4^{1/3}} + \dots - 1$$

$$\sum_{t=2}^{\infty} \frac{\ln t}{t} - 6 \quad \sum_{t=2}^{\infty} \frac{t}{\ln t} - 5 \quad 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \dots - 4$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} - 8 \quad 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots + (-1)^{j+1} \frac{1}{4^{j+1}} + \dots - 7$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} + \dots - 10 \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{3n-2} + \dots - 9$$

$$\frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2^3} \left(\frac{2}{3} \right) + \frac{1}{2^4} \left(\frac{3}{4} \right) + \dots - 12 \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots - 11$$

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots, p \leq 1 - 14 \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2-1}{k^2+2} - 13$$

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{8^3} + \dots - 17 \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots - 16 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 15$$

١٨ - أثبت أن الكسر العشري غير المنتهى $0. a_1 a_2 a_3 \dots$ ، حيث الـ a_i هي الأعداد الصحيحة $0, 1, \dots, 9$ ليست مضروبة بل موضوعة بجانب بعضها ، يمثل عدداً حقيقياً ، باثبات أن المتسلسلة

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots$$

التي يعبر عنها الكسر العشري ، تتقارب .

١٩ - أثبت أنه اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تتقارب ، حيث $a_n \geq 0$ ، فان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ تتقارب . (ارشاد : أدرس a_n عندما تكون n كبيرة .)

٢٠ - لتكن $\sum c_n$ متسلسلة تقارب ذات حدود موجبة . اذا حذف عدد محدود أو لا نهائي من الحدود ، فان الحدود الباقية تكون متسلسلة $\sum c'_m$. أثبت أن $\sum c'_m$ تتقارب .

٢١ - (أ) لتكن f دالة بحيث $f(x) \geq 0$ لجميع x . أثبت أن اذا كانت $f(x) \leq g(x)$ لجميع $x \geq a$ وكان $\int_a^{\infty} g(x) dx$ يتقارب ، فان $\int_a^{\infty} f(x) dx$ يتقارب .

(ب) لتكن f و h دالتين بحيث $h(x) \geq 0$ و $f(x) \geq 0$ لجميع $x \geq a$ أثبت أنه اذا كانت $\int_a^{\infty} h(x) dx$ يتباعد ، فان $\int_a^{\infty} f(x) dx$ يتباعد . وضع

(أ) ، (ب) بالرسم .

٢٢ - أثبت أن $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ موجود (ارشاد : قارن e^{-x^2} مع e^{-x} واستخدم المسألة ٢١) .

المتسلسلات ذات الحدود غير السالبة (تابع)

١٥-١٢ تعريف . المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقريباً تتناسب مع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n)$ موجودة وموجبة .

فمثلاً ، المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3n^2+1}$ تقريباً تتناسب مع $\sum_{n=1}^{\infty} n$ لأن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2+1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3n^2+1}{n^2}} = \sqrt{3}$$

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقريباً تتناسب مع $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ، فإن $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تقريباً تتناسب مع $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (المسألة ٥١) ويمكننا أن نقول أن المتسلسلتين تتناسبان تقريباً .

١٥-١٣ اختبار التقرب . المتسلسلة التي تقريباً تتناسب مع متسلسلة حدودها موجبة تتقارب أو تتباعد تبعاً لكون المتسلسلة الثانية تتقارب أو تتباعد .

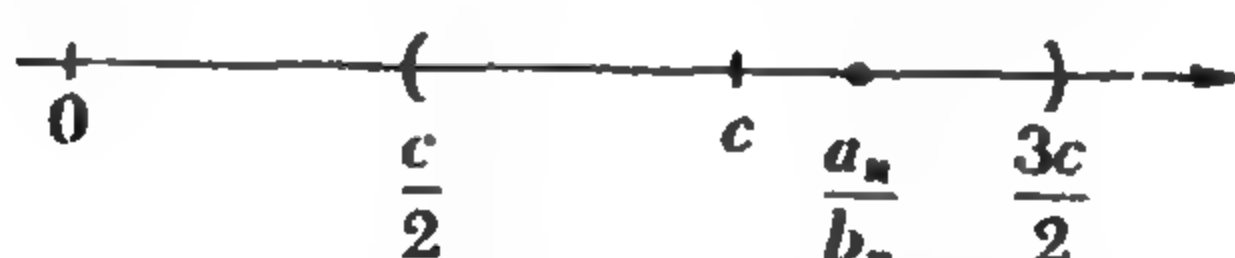
البرهان . لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة تقريباً تتناسب مع $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ، حيث $b_n > 0$ ، ولتكن $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = c > 0$. عندما تكون n كبيرة تتجمع الحدود a_n/b_n حول c وستقع أخيراً بين $3c/2$ و $c/2$ (شكل ١٥-٦) . بعبارة أدق ، توجد N بحيث أن لجميع $n \geq N$ ، يكون

$$\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2}$$

ومن ثم

$$(1) \quad \frac{c}{2} b_n < a_n < \frac{3c}{2} b_n$$

هذا يتضمن أن $a_n > 0$ لـ $n \geq N$. إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تتقارب ، فكذلك أيضاً $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{3c}{2} b_n$ واختبار المقارنة مطبقاً على النصف الأيمن من (١) يثبت أن $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ وبالتالي $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، تتقارب .



شكل ١٥-٦

لكبر المقدار n يكون ، $c/2 \leq a_n/b_n \leq 3c/2$

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تتباعد ، فاختبار المقارنة مطبقاً على النصف الأيسر لـ (١) يثبت أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تتباعد . (الشرط $b_n > 0$ استخدم في إثبات أن $a_n > 0$. أين استخدم من قبل ؟) اختبار التقرب يفيد على وجه الخصوص في تعيين تقارب أو تباعد المتسلسلات التي حدودها دوال جبرية موجبة لـ n .

مثال ١ . عين ما اذا كانت المتسلسلة

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n^2 + 2}{(n-1)(n^2 + 5n + 1)}$$

تتقارب أم تتباعد .

عندما تكون n كبيرة ، تكون الكميات السائدة في الحد العام هي أعلى قوى لـ n في كل عامل ، أي $3n^2$ في البسط و n و n^2 في العاملين بالمقام . الكميات الأخرى لها تأثير ضئيل بالمقارنة مع هذه . واذن عندما تكون n كبيرة ، الحد العام يسلك مثل $3n^2 / (n \cdot n^2) = 3/n$. هذا يوحي بأن المتسلسلة قد تتناسب تقريباً مع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n}$ ، وفي هذه الحالة يمكننا استخدام اختبار التقرب حيث a_n هو الحد العام للمتسلسلة المعطاة وحيث $b_n = 3/n$. لتحقيق ذلك ، يجب إيجاد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2 + 2) \cdot n}{(n-1)(n^2 + 5n + 1) \cdot 3}$$

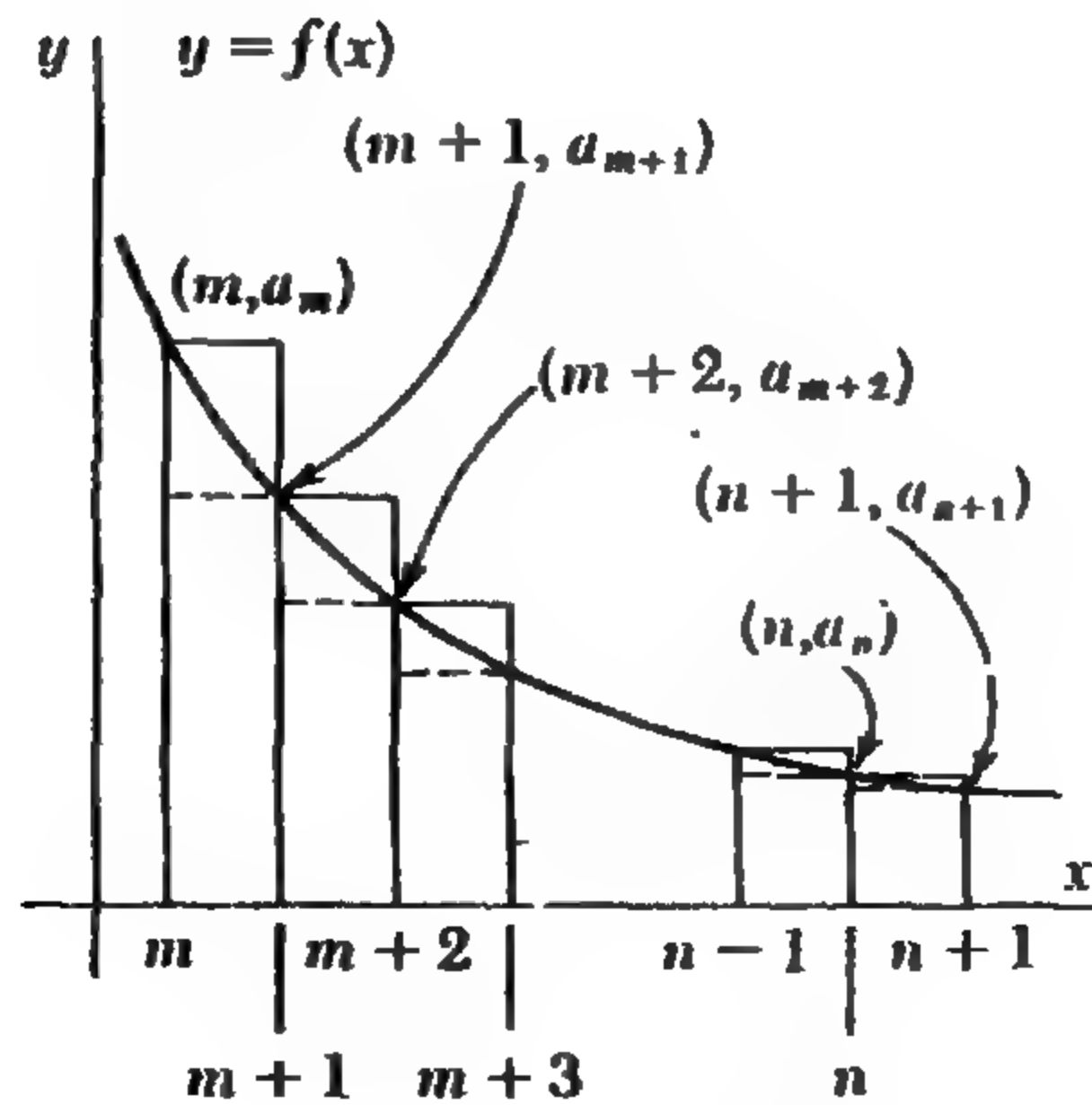
نهاية هذه الصورة غير المعينة يمكن إيجادها بقسمة البسط والمقام على n^3 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 2/n^2}{(1 - 1/n)(1 + 5/n + 1/n^2) \cdot 3} = 1$$

واذن المتسلسلة المعطاة تكون تتناسب تقريباً مع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n}$ وبما أن المتسلسلة الأخيرة تتباعد ، لأنها ثلاثة أمثال المتسلسلة التوافقية ، فذلك تتباعد المتسلسلة الأولى .

اختبار التقرب هو أساساً اختبار مقارنة . المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقارن مع مضاعف للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ، وكما في أى اختبار مقارنة ، توجد مشكلة إيجاد متسلسلة مناسبة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. الاختبار الآتى له ميزة احتواء نفسه . فبه يمكننا تحديد التقارب من مجرد المتسلسلة نفسها . لكن الاختبار له حدود ، كما سيكتشف القارئ .

١٥ - ١٤ اختبار التكامل لنكن $\sum_{i=m}^{\infty} a_i$ متسلسلة ذات حدود غير سالبة . اذا كانت f دالة متصلة متناقصة باطراد بحيث أن $f(i) = a_i$ ، فإن $\sum_{i=m}^{\infty} a_i$ تتقارب أو تتباعد تبعاً لكون التكامل المعتل $\int_m^{\infty} f(x) dx$ يكون موجوداً أو لا نهائياً .



شكل ١٥ - ٧

البرهان . الشرط $f(i) = a_i$ يعنى أن المنحنى $y = f(x)$ يمر بالنقط $(m, a_m), (m+1, a_{m+1}), \dots$ (شكل ١٥-٧) . ضع

$$(٢) \quad T_n = \sum_{i=m}^n a_i - \int_m^n f(x) dx, \quad n \geq m$$

مشتت أن المتابعة $T_m, T_{m+1}, \dots, T_n, \dots$ تتقارب . لدينا

$$T_n - T_{n+1} = \sum_{i=m}^n a_i - \int_m^n f(x) dx - \sum_{i=m}^{n+1} a_i + \int_m^{n+1} f(x) dx$$

$$= \int_m^{n+1} f(x) dx - \int_m^n f(x) dx - a_{n+1}$$

$$(٣) \quad = \int_n^{n+1} f(x) dx - a_{n+1}.$$

مساحة المنطقة تحت المنحنى بين $n+1$ و n أكبر من أو تساوى مساحة المستطيل الواقع تحت ذلك الجزء من المنحنى ، التى هى a_{n+1} . ومن ثم فالطرف الأيمن من (٣) ليس سالباً ، $T_n \geq T_{n+1}$ لجميع $n \geq m$. إذن المتابعة T_m, T_{m+1}, \dots متناقصة باطراد كل a_i هى مساحة المستطيل فى الشكل ١٥-٧ بين i و $i+1$ حيث قيمته فوق المنحنى . حاصل الجمع $\sum_{i=m}^n a_i$ أكبر من تساوى مساحة المنطقة تحت المنحنى بين n و m . إذن من (٢) $T_n \geq 0$. نظرية مرافقة للنظرية ١٥-٦ . نقول أن المتابعة المتناقصة باطراد المحددة من أدنى لها نهاية . إذن $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ توجد من (٢) ، يكون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=m}^n a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_m^n f(x) dx$$

هذا يبرهن على أنه إذا كان $\int_m^x f(x) dx$ موجوداً ، فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=m}^n a_i$ أيضاً تكون موجودة ، والمتسلسلة $\sum_{i=m}^{\infty} a_i$ تتقارب بالتعريف . إذا كان $\int_m^x f(x) dx = \infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=m}^n a_i = \infty$ والمتسلسلة تتباعد الى ما لا نهاية .

متسلسلة مفيدة فى المقارنة هى متسلسلة p

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

حيث p عدد ثابت . إذا كانت $p \leq 0$ ، الحد النونى لا يمكن أن يقترب من الصفر والمتسلسلة تتباعد . إذا كانت $p > 0$ ، حدود المتسلسلة تحقق شروط اختبار التكامل بوضع $f(x) = 1/x^p$. لدينا

$$\int_1^t f(x) dx = \int_1^t \frac{1}{x^p} dx = \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^t = \frac{1}{1-p} \left(\frac{1}{t^{p-1}} - 1 \right), \quad p \neq 1$$

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{1-p} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t^{p-1}} - 1 \right) = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{if } p > 1, \\ \infty & \text{if } p < 1. \end{cases} \quad \text{إذن}$$

إذا كانت $p = 1$ ، فإن

$$\int_1^x f(x) dx = \lim_{t \rightarrow x} \int_1^t \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow x} \ln t = \infty$$

متسلسلة p اذن تتقارب لجميع $p > 1$ وتتباع لجميع $p \leq 1$. بالطبع ، نعلم من قبل أن المتسلسلة تتباع عندما $p = 1$ لأنها عندئذ تكون المتسلسلة التوافقية .

مثال ٢ . حدد ما اذا كانت المتسلسلة

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2\sqrt{n}+1}{(n+1)(n-2)(3n+1)}$$

تقارب أم تتباع .

الكميات السائلة في الحد العام عندما تكون n كبيرة هي أعلى قوى لـ n في كل عامل . ومن ثم ، عندما تكون n كبيرة ، الحد العام يسلك مثل

$$\frac{2\sqrt{n}}{n \cdot n \cdot 3n} = \frac{2}{3n^{5/2}}$$

المتسلسلة تتناسب تقريباً مع $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{3n^{5/2}}$ لأن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}+1}{(n+1)(n-2)(3n+1)} \cdot \frac{3n^{5/2}}{2} = 1$$

المتسلسلة $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{3n^{5/2}}$ تقارب لأن حدودها هي $\frac{2}{3}$ الحدود المناظرة بمتسلسلة p التقاربية $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$

التكامل يعطينا تقديراً لحاصل جمع أي مجموعة متتالية من حدود متسلسلة ذات حدود غير سالبة ومتناقصة باطراد .

لتكن $\sum_{i=m}^n a_i$ مجموعة من حدود مثل هذه المتسلسلة ولتكن f دالة متصلة ومتناقصة باطراد بحيث أن $f(i) = a_i$. حاصل الجمع

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n = \sum_{i=m}^n a_i - a_m$$

يمكن تفسيره بأنه حاصل جمع مساحات المستطيلات الواقعة تحت المنحنى $y = f(x)$ بين m و n في الشكل ١٥ - ٧ . اذن

$$\sum_{i=m}^n a_i - a_m \leq \int_m^n f(x) dx$$

في برهان اختبار التكامل أثبتنا أن

$$T_n = \sum_{i=m}^n a_i - \int_m^n f(x) dx \geq 0$$

واذن

$$(4) \quad 0 \leq \sum_{i=m}^n a_i - \int_m^n f(x) dx \leq a_m$$

بما أن (٤) صحيحة لجميع $n \geq m$ ، وبما أن $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ موجودة ، كما أثبتنا من قبل ، فإن

$$(٥) \quad 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=m}^n a_i - \int_m^n f(x) dx \right] \leq a_m$$

إذا كتبنا $\sum_{i=m}^n a_i$ على الصورة

$$(٦) \quad \sum_{i=m}^n a_i = \int_m^n f(x) dx + \left[\sum_{i=m}^n a_i - \int_m^n f(x) dx \right]$$

نرى أن ، عندما تكون n كبيرة ، حتى إذا كانت المتسلسلة تباعدية ، $\sum_{i=m}^n a_i$ تساوى بالتقريب $\int_m^n f(x) dx$ زائد عدد ما ثابت بين a_m و 0 ، هو قيمة النهاية في (٥) .

دعنا نطبق هذه النتيجة الأخيرة على المتسلسلة التوافقية $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$. ضع $f(x) = 1/x$ واختر $m = 1$. حيثئذ يكون $a_m = 1$ ، ويكون

$$\int_1^n f(x) dx = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$$

واذن من (٥)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

تكون موجودة وتقع بين الصفر والواحد الصحيح . هذه النهاية ، وتسمى ثابت أولر ، ويرمز لها بالرمز γ ، هي ثابت رياضي هام* غير معروف ما إذا كان الثابت γ عدداً كسرياً أم غير كسري ، لكن قيمته بالتقريب هي 0.577216 . المعادلة (٦) حيث $m = 1$ ، مطبقة على المتسلسلة التوافقية تثبت أن ، عندما تكون n كبيرة ، قيمة $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ هي بالتقريب $\ln n + \gamma$ ، والتقريب يكون أفضل كلما كبرت n .

مسائل

اختبر المتسلسلات الآتية من حيث التقارب :

$$1. \quad 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \dots \quad - \quad \gamma \quad 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3^3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{4^3}} + \dots$$

$$3. \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \dots \quad - \quad 4. \quad 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

$$5. \quad \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \dots \quad - \quad 6. \quad \frac{1}{1(2)} + \frac{1}{3(4)} + \frac{1}{5(6)} + \frac{1}{7(8)} + \dots$$

$$7. \quad 3 + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{3^3} + \frac{6}{4^3} + \frac{7}{5^3} + \dots$$

* الرياضي السويسري Leonhard Euler (1707-1783) كان أحد قادة تطوير علم التفاضل والتكامل في أيامه الأولى .

عين ما اذا كانت المتسلسلات الآتية تتقارب أم تباعد :

$\sum_{n=-2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{3/2}}$	- ١٠	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+n}$	- ٩	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i)^2}$	- ٨
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+2n^2+3}$	- ١٣	$\sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{(j-2)(2j+3)}$	- ١٢	$\sum_{z=0}^{\infty} \frac{1}{(z+1)(z+3)}$	- ١١
$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$	- ١٦	$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m^2+2}}$	- ١٥	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n-2}$	- ١٤
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\ln(n+2)}$	- ١٩	$\sum_{i=3}^{\infty} \frac{2^i}{i^3+1}$	- ١٨	$\sum_{t=2}^{\infty} \frac{1}{t \ln t}$	- ١٧
$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{t+1}{(t+2)3^t}$	- ٢٢	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i+\sqrt{i}}{i^2-i}$	- ٢١	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i^2+6)^{1/3}}$	- ٢٠
$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r}{e^r}$	- ٢٥	$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\ln t}{t}$	- ٢٤	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{i}}{i^2-3}$	- ٢٣
$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}$	- ٢٨	$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{j(1+j^2)}}$	- ٢٧	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$	- ٢٦
$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}$	- ٣١	$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$	- ٣٠	$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\ln m}{m^2}$	- ٢٩
$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{2^k}$	- ٣٤	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an+b}$	- ٣٣	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{3}}$	- ٣٢
$\sum_{t=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln t)^p}, p > 0$	- ٣٧	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^n}$	- ٣٦	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{-r}}{\sqrt{n}}$	- ٣٥
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\sin n}{n^2}$	- ٤٠	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}, a \geq 0$	- ٣٩	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$	- ٣٨
$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})$	- ٤٣	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$	- ٤٢	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} i}{i^2+1}$	- ٤١
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{e^k + e^{-k}}$	- ٤٦	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}$	- ٤٥	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$	- ٤٤
				$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)}$	- ٤٧

٤٨ - لای قیم α تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+5)^n}$ تقاربة؟

٤٩ - لای قیم α تكون المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^n}$ تقاربة؟

٥٠- أثبت أن المتسلسلة

$$\sum \frac{1}{p^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \dots$$

حيث p تجرى خلال جميع الأعداد الأولية الموجبة ، تتقارب إذا كانت $\alpha > 1$. يمكن إثبات أن المتسلسلة تتباعد إذا كانت $\alpha \leq 1$.

٥١- إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تتناسب تقريباً مع $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ فاثبت أن $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تتناسب تقريباً مع $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

٥٢- أثبت تباعد متسلسلة p عندما تكون $p < 1$ بمقارنتها بمتسلسلة تباعدية مناسبة .

٥٣- قرب إلى حاصل جمع مقلوبات المائة الأولى من الأعداد الصحيحة الموجبة بطريقة اللوغاريتم . إذا كان متاحاً لك استخدام حاسب آلي ، فاختر تقريبك بإيجاد حاصل الجمع .

٥٤- قرب إلى حاصل الجمع $\sum_{n=10}^{100} \frac{1}{n^2}$. إذا كان متاحاً لك استخدام حاسب آلي فاختر تقريبك بإيجاد حاصل الجمع .

٥٥- قرب إلى حاصل جمع الحدود الـ $n - 1$ الأولى من المتسلسلة $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ أثبت أن هذه المتسلسلة تتباعد ببطء عن المتسلسلة التوافقية .

٥٦- أثبت أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2$$

[ارشاد : استخدم (٤) إذا كان متاحاً لك استخدام الحاسب الآلي ، تحقق بحساب

$$\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \dots + \frac{1}{2000}$$

٥٧- أين استخدم الشرط أن الدالة f متناقصة باطراد في برهان اختبار التكامل ؟

٥٨- المتتابعة a_1, a_2, \dots تكون تقريبية للمتتابعة b_1, b_2, \dots إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = 1$. أثبت أن المتتابعة

$$(1), \left(1 + \frac{1}{2}\right), \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right), \dots, \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right), \dots$$

تكون تقريبية للمتتابعة $\ln 1, \ln 2, \dots, \ln n, \dots$. نظرية مشهورة تقول أن عدد الأعداد الأولية الموجبة الأقل من أو تساوى n هو عدد تقريبي للعدد $n/(\ln n)$. هذا يثبت أن عدد الأعداد الأولية الموجبة الأقل من أو تساوى n يكون بالتقريب $n/(\ln n)$ عندما تكون n كبيرة . قرب إلى عدد الأعداد الأولية الموجبة الأقل من أو تساوى مليون .

المتسلسلات المتبدلة الاشارة

الاختبارات التي وصفت في البندين الأخيرين يمكن تطبيقها فقط على المتسلسلات ذات الحدود غير السالبة . عندما تكون المتسلسلة بها حدود موجبة وأخرى سالبة ، قد يكون من الصعب تحديد ما اذا كانت تتقارب أم تتباعد . نوع هام لمثل هذه المتسلسلة هو المتسلسلة المتبدلة الاشارة

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1}a_n + \dots, \quad a_n > 0$$

التي تكون فيها الحدود موجبة وسالبة على التعاقب . مثال للمتسلسلة المتبدلة الاشارة هي المتسلسلة التوافقية المتبدلة الاشارة .

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

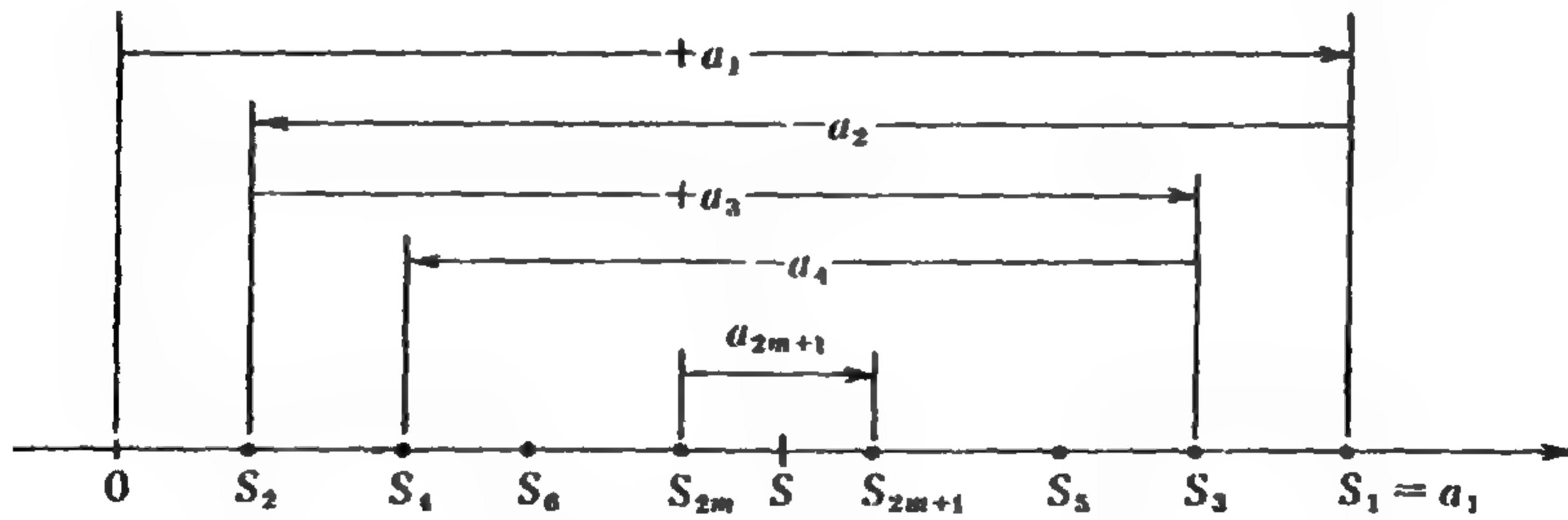
يوجد اختبار بسيط لتقارب المتسلسلة المتبدلة الاشارة .

١٥-١٥ اختبار المتسلسلة المتبدلة الاشارة . المتسلسلة المتبدلة الاشارة

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1}a_n + \dots, \quad a_n > 0$$

تكون تقاربية اذا كانت $a_n \geq a_{n+1}$ لجميع n وكانت $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

البرهان . صورة هندسية للبرهان تساعدنا . نعلم حواصل الجمع الجزئية S_n على الخط الحقيقي الموضح في الشكل ١٥-١٨ حاصل الجمع الأول ، $S_1 = a_1$ يقع على يمين نقطة الأصل . لايجاد S_2 ، نذهب لليسار مسافة a_2 . S_2 ستقع على يمين نقطة الأصل أو عليها لأن $a_2 \leq a_1$ بالفرض . بعد ذلك نذهب الى اليمين مسافة a_3 ، وهذا يوصلنا الى S_3 .



شكل ١٥-١٨

بما أن $a_3 \leq a_2$ فإن $S_3 \leq S_1$ التحرك التالي يكون الى اليسار مسافة a_4 ، ويكون $S_2 \geq S_4$. نستمر في الذهاب خلفاً وأماماً بهذه الكيفية ، حيث كل خطوة تكون أقل من أو تساوى سابقتها لأن $a_{n+1} \leq a_n$. ولأن $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ بالفرض ، فالخطوات تصبح أقصر وأقصر . حواصل الجمع الجزئية تنذب خلفاً وأماماً بسعة تقترب من الصفر . يكاد يكون من الواضح تلقائياً انها تقفل عند نقطة ما S كنهاية لها . البرهان الجبري يعكس هذه الصورة . حواصل الجمع الجزئية لعدد زوجي

من الحدود هي

$$S_2 = a_1 - a_2, \quad S_4 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4)$$

ويوجه عام

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m})$$

كل حد بين قوسين غير سالب (لماذا ؟) ، واذن

$$S_2 \leq S_4 \leq \dots \leq S_{2m} \leq \dots$$

يمكن أيضاً كتابة S_{2m} على الصورة

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$$

بما أن كل حد بين قوسين غير سالب ، اذن $S_{2m} \leq a_1$ المتتابعة $S_2, S_4, \dots, S_{2m}, \dots$ متزايدة باطراد ومحدودة من أعلى بالمعد a_1 (شكل ١٥ - ٨) . واذن يجب أن يكون لها نهاية . نسميها S .
 مثبت أن متتابعة حواصل الجمع الجزئية الفردية الترقيم $S_1, S_3, \dots, S_{2m+1}, \dots$ لها نفس النهاية .

هنا يستخدم الفرض الثانى $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ لدينا

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$$

ومن ثم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2m+1} = S + 0 = S$$

بما أن $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m} = S$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m+1} = S$ ، جميع حواصل الجمع الجزئية S_n تكون قريبة من S عندما تكون n كبيرة . أى أن $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ، والمتسلسلة تتقارب .

اختبار المتسلسلة المتبدلة الاشارة يثبت أن المتسلسلة التوافقية المتبدلة الاشارة

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

تتقارب لأن $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ و $a_n \geq a_{n+1}$.

فى برهان اختبار المتسلسلة المتبدلة الاشارة رأينا أن حواصل الجمع الجزئية الزوجية الترقيم S_2, S_4, S_6, \dots تقترب من النهاية S من أدنى . حواصل الجمع الفردية الترقيم S_1, S_3, S_5, \dots تقترب منها من أعلى (المسألة ٣٨) . واذن يكون من الواضح من الشكل ١٥ - ٨ أن

$$|S - S_n| \leq |S_{n+1} - S_n| = |(-1)^n a_{n+1}| = a_{n+1}$$

هذه النتيجة المفيدة هي محتوى النظرية الآتية .

١٥ - ١٦ نظرية. لتكن

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots, \quad a_n > 0$$

متسلسلة متبدلة الاشارة تقاربية حيث $a_n \geq a_{n+1}$ لجميع n . حاصل الجمع للحدود الـ n الأولى يختلف ، في القيمة المطلقة ، عن حاصل جمع المتسلسلة بما لا يزيد عن الحد التالى a_{n+1} .

حاصل الجمع S_n للحدود الـ n الأولى من متسلسلة تقاربية هو تقريب الى حاصل الجمع S للمتسلسلة . القيمة المطلقة للفرق بين S و S_n يسمى الخطأ فى تقريب S بحاصل الجمع S_n . لقد أثبتنا أنه للمتسلسلة المتبدلة الاشارة هذا الخطأ يكون أقل من أو يساوى الحد التالى a_{n+1} وأن

$$(1) \quad S_n - a_{n+1} \leq S \leq S_n + a_{n+1}$$

مثال ١ . عين ما اذا كانت المتسلسلة

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} + \dots$$

تقارب أم تتباعد .

المتسلسلة متبدلة الاشارة ، ولدينا

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)!} \geq \frac{1}{(2n+1)!} = a_{n+1}$$

وأيضاً $\lim_{n \rightarrow \infty} [1/(2n-1)!] = 0$. شروط اختبار المتسلسلة المتبدلة الاشارة متحققة ، والمتسلسلة تقارب . حاصل جمع الحدود الثلاثة الأولى هو

$$S_3 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{101}{120}$$

هذا العدد يختلف عن حاصل جمع المتسلسلة بما لا يزيد عن الحد التالى بالمتسلسلة وهو $1/7! = 1/5040$. بناء على ذلك ، حاصل جمع المتسلسلة يقع بين

$$\frac{101}{120} - \frac{1}{5040} \approx 0.84147 \quad \text{و} \quad \frac{101}{120} + \frac{1}{5040} \approx$$

وحاصل جمع المتسلسلة صحيحاً الى رقمين عشريين هو 0.84 .

نحذر القارئ من نقطتين . أولاً ، لا يكفى أن نتحقق أن الحدود القليلة الأولى من المتسلسلة المتبدلة الاشارة تتناقص . يجب أن نتأكد أن جميع الحدود تفعل ذلك ، أو على الأقل جميع الحدود ابتداء من نقطة ما . من الضروري استخدام الحد العام لاثبات ذلك .

حدود المتسلسلة

$$\sum_{n=5}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{n-4} = \frac{25}{1} - \frac{36}{2} + \frac{49}{3} - \frac{64}{4} + \frac{81}{5} - \frac{100}{6} + \dots$$

تتناقص أولاً ، لكن ابتداء من $n=8$ تزايد . ثانياً ، لا نغفل الشرط $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ، اللازم لتقارب أى متسلسلة .

مثال ٢ . اختبار تقارب المتسلسلة

$$(2) \quad \sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \frac{n-3}{n^2+1}$$

المتسلسلة متبدلة الإشارة . هنا

(٣)

$$a_n \geq a_{n+1}$$

$$\frac{n-3}{n^2+1} \geq \frac{n-2}{(n+1)^2+1} \quad \text{إذا وإذا فقط كان}$$

أو ، لأن المقامين موجبان ، إذا وإذا فقط كان

$$\frac{(n-3)[(n+1)^2+1]}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]} \geq \frac{(n^2+1)(n-2)}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$$

واذن البسط على اليسار يجب أن يكون أكبر من أو يساوى البسط على اليمين . بعد الاختصار هذا الشرط يصبح

$$n^2 - 5n - 4 \geq 0$$

وهذا يكون صحيحاً لجميع $n \geq 6$. اذن (٣) تكون صحيحة لجميع $n \geq 6$. أيضاً

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(n-3)/(n^2+1)] = 0 \quad \text{إذا حذف حدا (٢) المناظران لـ 5 و 4 ،}$$

فالمتسلسلة الباقية تتقارب باختبار المتسلسلة المتبدلة الإشارة . اذن (٢) تتقارب .

غالباً ما تكون أسهل طريقة لمعرفة ما إذا كانت حدود المتابعة $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ متناقصة باطراد ، هي معرفة ما إذا كانت مشتقاتها سالبة أو صفراً . بدقة أكثر ، لتكن f دالة قابلة للتفاضل . ويحيث أن $f(n) = a_n$ إذا كانت $f'(x) \leq 0$ لجميع x أكبر من عدد ما N ، فإن f تكون متناقصة باطراد ويكون $a_n \geq a_{n+1}$ لجميع $n > N$.

يمكننا استخدام هذه الطريقة في مثال (٢) بوضع

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2+6x+1}{(x^2+1)^2} \quad \text{حيث يكون}$$

بما أن x^4 و $-x^2$ هما الحدان الرئيسيان في البسط والمقام ، فإن $f'(x)$ ستكون أخيراً سالبة ويكون $a_n \geq a_{n+1}$ لجميع n أكبر من عدد ما N .

مسائل

حدد ما إذا كانت المتسلسلات الآتية تقاربية أم تباعدية :

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots \quad - \quad 1 \quad - \quad 2 \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \dots$$

$$\frac{3}{\ln 2} - \frac{3}{\ln 3} + \frac{3}{\ln 4} - \frac{3}{\ln 5} + \dots \quad - \quad 2 \quad 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{7} + \frac{2}{8} - \dots$$

$$\frac{2}{3} - \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 6} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 6 \cdot 9} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} + \dots \quad - \quad 6 \quad -\frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{3}{9} - \frac{4}{11} + \dots \quad - \quad 0$$

اختبر المتسلسلات الآتية من حيث التقارب :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{(2n)!} - 9 \quad \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{1}{j! 10^j} - 8 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a}{2n} - 7$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\ln \ln m} - 12 \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \ln k} - 11 \quad \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i e^{-i} - 10$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{6n-1} - 15 \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n} - 14 \quad \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{3i+1}{5i-1} - 13$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} - 18 \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln n} - 17 \quad \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{i}{i^2+1} - 16$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{\sqrt{j}}{2j+1} - 21 \quad \sum_{r=2}^{\infty} (-1)^r \frac{r^2}{2(r^2-5)} - 20 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n\pi}{n} - 19$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^{3/2}} - 24 \quad \sum_{x=1}^{\infty} (-1)^x \frac{x^2+1}{2x^2-1} - 23 \quad \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{5m}{(m+1)(m+2)} - 22$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \right) - 26 \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \right) - 25$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} - 28 \quad \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r+1} \left(\frac{1}{r^2} + \sin \frac{\pi r}{2} \right) - 27$$

٢٩ - أوجد حداً للفرق بين حاصل جمع المتسلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!}$ وحاصل جمع الحدود

الأربعة الأولى . كم حداً ينبغي أخذها لكي يكون الفرق أقل من 10^{-5} ؟

٣٠ - كم حداً من المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^3}$ يجب أخذها للتأكد أن حاصل جمعها يختلف عن

حاصل جمع المتسلسلة بأقل من 0.0001 ؟

٣١ - (أ) كم حداً من المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ يجب أخذها للتأكد أن حاصل جمعها

يختلف عن حاصل جمع المتسلسلة بأقل من 0.1 ؟

(ب) كرر الجزء (أ) للمتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n}$. هذه المتسلسلة تتقارب ببطء شديد

عن $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

٣٢ - أثبت أن حاصل جمع المتسلسلة $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$ يقع بين 1 و $\frac{1}{2}$.

أوجد حاصل جمع كل من المتسلسلات المتبدلة الإشارة الآتية صحيحاً إلى m رقم

عشرى للعدد المعطى m . (ارشاد : اجر حساباتك إلى $m+2$ من الأرقام العشرية . من

(١) ، حاصل الجمع يقع بين $S_n - a_{n+1}$ و $S_n + a_{n+1}$. استخدم حدوداً كافية بحيث أنه

عندما

$S_n - a_{n+1}$ و $S_n + a_{n+1}$ يقربان إلى m رقم عشرى نحصل على نفس العدد .)

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots, m=2 \quad - ٣٣ \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^7} + \dots, m=3 \quad - ٣٤$$

$$-1 + \frac{2}{3} - \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} - \dots, m=2 \quad - ٣٦ \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^3}, m=2 \quad - ٣٥$$

$$٣٧ - \text{لأى قيم } p \text{ تتقارب متسلسلة } p \text{ المتبدلة الإشارة } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p} ?$$

٣٨ - أثبت أن المتتابعة $S_1, S_3, \dots, S_{2n+1}, \dots$ لحاصل الجمع الجزئية الفردية الترقيم

$$\text{للمتسلسلة المتبدلة الإشارة} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, a_n > 0 \quad \text{تتناقص باطراد :}$$

٣٩ - أثبت أن المتسلسلة

$$a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5 + a_6 - \dots, \quad a_n > 0$$

التي فيها أزواج الحدود موجبة وسالبة على التعاقب ، تكون تقاربية إذا كانت $a_n \geq a_{n+1}$ لجميع n وكانت $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

٧-١٥

التقارب المطلق

يرتبط بأى متسلسلة $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ متسلسلة القيم المطلقة لحدودها ،

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$$

قد يبدو غريباً ، لكنه صحيح ، أنه إذا كانت المتسلسلة الأخيرة تقاربية فإن المتسلسلة الأولى أيضاً تكون تقاربية .

$$٧-١٥ \text{ نظرية . إذا كانت } \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \text{ تقاربية ، فهكذا أيضاً تكون } \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

$$\text{البرهان . بما أن } -|a_i| \leq a_i \leq |a_i|$$

$$\text{ليكون} \quad (١) \quad 0 \leq a_i + |a_i| \leq 2|a_i|$$

$$\text{المتسلسلة } \sum_{i=1}^{\infty} (a_i + |a_i|) \text{ ذات الحدود غير السالبة ، تسودها المتسلسلة التقاربية } \sum_{i=1}^{\infty} 2|a_i|$$

واذن هي تتقارب . المتسلسلتان التقاربيتان يمكن طرحهما حداً حداً ومتسلسلة الفرق

متقارب (النظرية ١٥ - ١٠) . بما أن $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ و $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + |a_i|)$ متقاربان فإن المتسلسلة

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + |a_i| - |a_i|) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

تتقارب .

المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ التي متسلسلتها المرافقة ، للقيم المطلقة ، $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ تتقارب ، يقال أنها مطلقة التقارب . النظرية الأخيرة تقول أن كل متسلسلة مطلقة التقارب تكون تقاربية . اذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ تقاربية لكن $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ ليست كذلك ، فان $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ تسمى مقيدة التقارب . المتسلسلة التوافقية المتبدلة الاشارة .

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

مقيدة التقارب . المتسلسلة تقاربية ، لكن متسلسلة القيم المطلقة ليست كذلك . من ناحية أخرى ، المتسلسلة

$$(2) \quad 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

مطلقة التقارب لأن متسلسلة القيم المطلقة هي متسلسلة p تقاربية . إذن (2) نفسها تقاربية . أيضاً اختبار المتسلسلة المتبدلة الاشارة يثبت أن (2) تقاربية ، لكن بالطبع لا يساعد في إثبات التقارب المطلق .

مفهوم التقارب المطلق هام جداً في كلتا الناحيتين العملية والنظرية فهو يفيد في تحديد تقارب المتسلسلات . فمثلا المتسلسلة

$$1 + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} - \dots$$

التي فيها أزواج الحدود تكون موجبة وسالبة على التعاقب ، تتقارب لأن متسلسلة القيم المطلقة هي متسلسلة p تقاربية . في الواقع ، متسلسلة $p=3$ بأي ترتيب لعلامتي زائد وناقص سوف تتقارب .

لقد سبق أن ذكرنا أن ليس جميع العمليات على حواصل الجمع المنتهية يمكن إجراؤها على المتسلسلات . إحدى العمليات الطبيعية هي ضرب متسلسلتين . لاجراء ذلك بكيفية تعميم حاصل ضرب حاصل جمع ، حاصل ضرب المتسلسلتين

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad \text{و} \quad b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots$$

يعرف بأنه المتسلسلة

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \dots$$

حيث حواصل جمع أدلة العوامل بين قوسين هي ، على الترتيب ، $0, 1, 2, \dots$. فمثلا ، حاصل ضرب المتسلسلتين

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots \quad \text{و} \quad 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

هو المتسلسلة

$$1(1) + \left[1 \left(-\frac{1}{2^2} \right) + \left(-\frac{1}{2} \right) 1 \right] + \left(1 \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} 1 \right) + \dots$$

التي تبسط الى

$$(3) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots$$

يمكن إثبات أنه إذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ تقاربيتين تقارباً مقيداً فقط ، فإن حاصل الضرب قد لا يتقارب ، أما إذا كانتا تقاربيتين تقارباً مطلقاً ، فمتسلسلة حاصل الضرب تتقارب الى حاصل ضرب حاصلى جمع المتسلسلتين $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$ وإذن المتسلسلة فى (٣) تتقارب .

المتسلسلات لا يمكن إعادة ترتيبها بدون ضرر . ليس من الصعب إثبات أن المتسلسلة التقاربية تقارباً مقيداً يمكن إعادة ترتيبها بحيث أن المتسلسلة الناتجة تتقارب الى أى عدد معطى أو حتى تتباعد الى ما لا نهاية . لكن إذا كانت المتسلسلة تتقارب تقارباً مطلقاً ، فإى ترتيب للمتسلسلة يتقارب ولنفس حاصل الجمع .

الحدود الموجبة والسالبة لمتسلسلة تكونان متسلسلتين جزئيتين منفصلتين . إذا كانت المتسلسلة تتقارب تقارباً مطلقاً ، فإن كلا من هاتين المتسلسلتين تتقارب ، لكن إذا كانت تتقارب تقارباً مقيداً ، فإن المتسلسلتين الجزئيتين تتباعدان الى ∞ و $-\infty$ (المسألة ١٩) . فى حالة التقارب المقيد حدود المتسلسلتين الجزئيتين تتوازن كل مع الأخرى ، بمعنى ما ، بحيث تمكن المتسلسلة الأصلية من أن تتقارب . هذا يمكن رؤيته فى المتسلسلة التوافقية المتبدنه الاشارة .

$$(4) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

المتسلسلتان الجزئيتان

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots \quad \text{و} \quad -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \dots$$

تتباعدان . إذا جمعت الحدود فى (٤) أزواجاً ، فإنا نحصل على المتسلسلة

$$(5) \quad \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots$$

$$= \frac{1}{1(2)} + \frac{1}{3(4)} + \frac{1}{5(6)} + \dots$$

وإذن أن هذه المتسلسلة الأخيرة تسودها المتسلسلة التقاربية

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

فهى تتقارب . الأزواج فى (٥) ، لكل حد موجب مع الحد السالب الذى يليه ، تنتج متسلسلة ، حدودها صغيرة ، للدرجة أنها تتقارب . هذا لا يبرهن أن (٤) تقاربية إذ أن (٤) نحصل عليها من (٥) بحذف الأقواس وهذه ليست دائماً عملية مسموح بها . لكن بمعالجة حواصل الجمع الجزئية يمكن إثبات تقارب (٤) من تقارب (٥) . بالطبع ، نعلم من قبل

أن (٤) تقاربية . هذا مجرد توضيح للفكرة كيف أن متسلسلتين ، إحداهما تتباعد الى ∞ والأخرى الى $-\infty$ ، يمكن حبكهما لانتاج متسلسلة تقاربية .

١٥ - ٨ نظرية . إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربية تقارباً مطلقاً ، فإن $\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

هذا يعمم الى المتسلسلات اللانهائية المتباينة

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_m| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_m|$$

البرهان . المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ يجب أن تتقارب ، وحيث أن

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

لجميع n ، فالنظرية ١٥ - ٩ تثبت أن

$$-\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{ومن ثم ،}$$

مسائل

حدد ما إذا كانت المتسلسلات الآتية تقاربية تقارباً مطلقاً أو تقارباً مقيداً أم تباعدية :

$$\begin{aligned} ١ - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} & - ٢ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n+4} & - ٣ \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{1}{(i-1)^{3/5}} \\ ٤ - \sum_{u=1}^{\infty} (-1)^u \frac{u^2}{2(u^2-3)} & - ٥ \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{6^i}{5^{i+1}} & - ٦ \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{r+1}{1000r} \\ ٧ - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(r^3+1)^4} & - ٨ \sum_{n=b>-a}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+a} & - ٩ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{m!}{50m} \\ ١٠ - \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^2(n-4)} & - ١١ \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{-t}}{t^2+1} & - ١٢ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} \\ ١٣ - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k} & - ١٤ \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k^p}, p > 1 & - ١٥ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} + \sin \frac{\pi n}{2} \right) \\ ١٦ - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[(n+1)/2]} \frac{1}{n^{3/2}} & - ١٧ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[(n+1)/2]} \frac{1}{n} & - ١٨ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1)x}{(2n-1)^2} \end{aligned}$$

١٨ - لاي قيم x تكون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1)x}{(2n-1)^2}$ تقاربية ؟ تقاربية تقارباً مطلقاً ؟

* [a] ترمز الى اكبر عدد صحيح اقل من اويساوى a .

١٩ - لتكن $\sum_i p_i$ هي المتسلسلة الجزئية للحدود الموجبة بالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_i q_i$ هي المتسلسلة الجزئية لحدودها السالبة . أثبت أن $\sum_i p_i$ و $\sum_i q_i$ تتقاربان إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تتقارب تقارباً مطلقاً ، لكن تباعدان إلى ∞ و $-\infty$ ، على الترتيب ، إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تتقارب تقارباً مقيداً فقط (إرشاد :

$$a_n + |a_n| = \begin{cases} 2a_n & \text{if } a_n > 0. \\ 0 & \text{if } a_n \leq 0. \end{cases}$$

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ هي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ لكن بكل حد سالب في الأخيرة مستبدلاً بصفر (

٢٠ - أثبت أنه إذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ و $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ تقاربيتين تقارباً مطلقاً ، فهكذا تكون المتسلسلات $\sum_{i=1}^{\infty} ca_i$ و $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i \pm b_i)$ لأي ثابت c . (إرشاد : أثبت أن $\sum_{i=1}^n |a_i \pm b_i| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| + \sum_{i=1}^n |b_i|$) .

٢١ - أثبت أن المتسلسلة التي تتناسب تقريباً مع متسلسلة تقاربية تقارباً مطلقاً ، تتقارب تقارباً مطلقاً .

٢٢ - أثبت أن $\int_a^x f(x) dx$ يتقارب إذا كان $\int_a^x |f(x)| dx$ يتقارب (إرشاد : استخدم المسألة ٢١ ، بيند ١٥ - ٤) .

٨ - ١٥

اختبار النسبة

الاختبار المعطى أدناه فعال لمجموعة واسعة من المتسلسلات .

١٥ - ٩ اختبار النسبة . لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة حيث $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n|$ توجد أو تكون لا نهائية .

(أولاً) إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$ فالمتسلسلة تكون تقاربية تقارباً مطلقاً .

(ثانياً) إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| > 1$ أو لا نهائية ، فالمتسلسلة تكون تباعدية .

(ثالثاً) إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$ فالاختبار لا يعطى أى معلومات عن تقارب أو تباعد المتسلسلة ويقال أنه يفشل .

البرهان . (أولاً) فكرة البرهان هي أن نجد متسلسلة هندسية تقاربية تسود المتسلسلة المعطاة ؛

لتكن $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = b < 1$. اختر أى عدد r بحيث أن $b < r < 1$. بما أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = b.$$

فالنسبة $|a_{n+1}/a_n|$ ستكون أخيراً أقل من r . أى أن ، يوجد عدد صحيح N بحيث أن :

$$|a_{n+1}/a_n| < r \text{ لجميع } n \geq N \text{ وإذاً}$$

$$|a_{N+1}| < |a_N|r.$$

$$|a_{N+2}| < |a_{N+1}|r < |a_N|r^2.$$

$$|a_{N+3}| < |a_{N+2}|r < |a_N|r^3,$$

وبوجه عام

$$|a_{N+t}| < |a_N|r^t \text{ لجميع } t \geq 1$$

هذا يوضح أن المتسلسلة

$$(1) \quad |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \dots + |a_{N+t}| + \dots$$

تسودها المتسلسلة الهندسية التقاربية

$$|a_N|r + |a_N|r^2 + \dots + |a_N|r^t + \dots$$

التي تقاربها يتج من أن $0 \leq b < r < 1$. إذن (١) تتقارب ومن ثم أيضاً $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. وبناء على ذلك ، المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تتقارب ، وتتقارب تقارباً مطلقاً .

(ثانياً) نفرض الآن أن $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = b > 1$ حيث b يمكن أن تكون لا نهائية . النسبة $|a_{n+1}/a_n|$ يجب أن تكون أخيراً أكبر من 1 . أى أن ، يوجد عدد صحيح N بحيث أن $|a_{n+1}/a_n| > 1$ ، أى $|a_{n+1}| > |a_n|$ ، لجميع $n \geq N$. بما أن حدود المتسلسلة تزايد فى القيمة المطلقة ، فهي لا يمكن أن تقترب من الصفر ، والمتسلسلة لا يمكن أن تتقارب .

(ثالثاً) لمتسلسلة p التي هي $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ ، يكون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)^p}{1/n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^p = 1$$

بصرف النظر عن p ، لكن المتسلسلة تتباعد إذا كانت $p = 1$ وتتقارب إذا كانت $p = 2$. هذا يوضح أن اختبار النسبة لا يعطى نتيجة عندما $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$ ، وتتقارب وتتباعد المتسلسلة يجب تحديده بطرق أخرى .

عملياً اختبار النسبة يعطينا مقارنة أوتوماتيكية للمتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ مع متسلسلة هندسية . بسبب ذلك ، أى متسلسلة تتقارب أو تتباعد يبطء عن متسلسلة هندسية لا يمكن اختبارها باختبار النسبة . المتسلسلات الهندسية تتقارب أو تتباعد بسرعة كبيرة نسبياً ، ولذلك تستبعد متسلسلات كثيرة . الاختبار يفشل بالنسبة لها .

مثال ١ . حدد ما إذا كانت المتسلسلة

$$1 + \frac{5}{3} + \frac{10}{9} + \dots + \frac{n^2 + 1}{3^{n-1}} + \dots$$

تتقارب أم تتباعد .

باستخدام اختبار النسبة ، لدينا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^2 + 1}{3^n}}{\frac{n^2 + 1}{3^{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + 1}{3(n^2 + 1)} = \frac{1}{3}$$

بما أن النهاية أقل من 1 ، فالمتسلسلة تتقارب .

مثال ٢ . اختر المتسلسلة

$$1 + \frac{1 \cdot 3^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 3^4}{2 \cdot 4 \cdot 2^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2^6} + \dots$$

من حيث التقارب .

الحد العام ، الذي يناسب جميع الحدود ما عدا الحد الأول ، هو

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)3^{2n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n \cdot 2^{2n}}$$

لدينا

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)3^{2n+2}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n(2n+2)2^{2n+2}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n \cdot 2^{2n}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)3^{2n}} \\ &= \frac{(2n+1)3^2}{(2n+2)2^2} \end{aligned}$$

بما أن $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \frac{3}{2} > 1$ فالمتسلسلة تتباعد .

مثال ٣ . عين ما إذا كانت المتسلسلة

$$1 - \frac{2}{2!} + \frac{2^2}{3!} - \dots + (-1)^n \frac{2^n}{(n+1)!} + \dots$$

تتقارب أم تتباعد .

لدينا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{2^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{2^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+2} = 0$$

المتسلسلة تتقارب تقارباً مطلقاً .

نختم ببعض الملاحظات العامة عن اختبار المتسلسلات . لا يوجد اختبار وحيد يكون فعالاً لجميع المتسلسلات . لقد أعطينا هنا الاختبارات الأبسط والتي بصفة عامة أكثر فائدة ، لكن توجد اختبارات أخرى كثيرة ، غالبيتها لها طبيعة خاصة . عندما نواجه متسلسلة نريد تحديد تقاربها ، أولاً نلاحظ ، إذا كان ممكناً ، ما إذا كان الحد العام يقترب من الصفر .

إذا لم يكن كذلك ، فالمتسلسلة تتباعد . إذا كان يقترب من الصفر ، فالاستفسار عن التقارب .
مازال مفتوحاً . بعد ذلك نحاول اختبار النسبة ، فهو سهل وغالباً ينجح . إذا كانت :
 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$ أولاً يمكن إيجادها ، متسلسلة القيم المطلقة ، وهي متسلسلة ذات حدود غير
سالبة ، قد تتقارب . إذا كانت المتسلسلة متبدلة الإشارة نحاول اختبار المتسلسلة المتبدلة
الإشارة . المتسلسلات ذات الحدود غير السالبة يمكن اختبارها باختبار التقرب أو اختبار التكامل .
الطريقة الأولى تنجح تماماً مع المتسلسلات التي حدودها دوال جبرية لـ n . اختبار التكامل محدود
بالدوال التي تكاملاتها غير المعينة يمكن إيجادها لكن غالباً ينجح معها . أخيراً ، مع المتسلسلات
ذات الحدود غير السالبة لا تنسى اختبار المقارنة . أحياناً متسلسلة تقاربية تسود المتسلسلة المعطاة
واضحة مباشرة ، والاستفسار يمكن الإجابة عنه في الحال . إذا كانت الاختبارات الأخرى غير
ناجحة ، فاختبار المقارنة يكون الملجأ الأخير ، لكن نحتاج الى البحث عن متسلسلة مناسبة
للمقارنة . قد يكون من الصعب تعيين ما إذا كانت متسلسلة تقاربية أم تباعدية . اختبار المتسلسلات
فن ولا توجد طريقة معينة .

مسائل

عين ما إذا كانت المتسلسلات الآتية تتقارب أم تتباعد :

$$\begin{array}{ll}
 1 - & \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots \\
 2 - & \frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \frac{7}{3^4} + \dots \\
 3 - & 4 - \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{4^n}{n!} + \dots \\
 4 - & \frac{3}{9} + \frac{4}{9^2} + \frac{5}{9^3} + \frac{6}{9^4} + \dots \\
 5 - & \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots \\
 6 - & \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} + \dots \\
 7 - & \frac{2}{6} - \frac{2 \cdot 4}{6 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{6 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} + \dots
 \end{array}$$

اختبر المتسلسلات الآتية من حيث التقارب :

$$\begin{array}{lll}
 8 - & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n2^n} & - 10 \\
 9 - & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2 + 1} & - 11 \\
 10 - & \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r-3}{r^3} & - 12 \\
 11 - & \sum_{r=1}^{\infty} \frac{5^r}{3^{r+1}} & - 13 \\
 12 - & \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^3 + 1} & - 14 \\
 13 - & \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-5)^{r+1} r^2}{8^r} & - 15 \\
 14 - & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-3)^{m-1}}{m^2 + 1} & - 16 \\
 15 - & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)2i} & - 17 \\
 16 - & \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j+3}{2^j} & - 18 \\
 17 - & \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{1 + \ln r} & - 19 \\
 18 - & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} & - 20
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{100^n}{n!} & - ٢٢ \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{i!}{7^i} & - ٢١ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k!}{100(k-1)} & - ٢٠ \\
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n}{(2n-1)!} & - ٢٥ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} & - ٢٤ \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\ln i}{i^3} & - ٢٣ \\
\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{(1.01)^j}{j} & - ٢٨ \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k^2} & - ٢٧ \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\alpha 2^\alpha}{5^{\alpha+1}} & - ٢٦ \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} & - ٣١ \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{6^i}{i^{2i+2}} & - ٣٠ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m-1)(m+3)}{m!} & - ٢٩ \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^{10}}{n!} & - ٣٤ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n! 2^{n+1}} & - ٣٣ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2j-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3j-2)} & - ٣٢ \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n!)}{n^n} & - ٣٧ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} & - ٣٦ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} & - ٣٥ \\
\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}, a > 0 & - ٤٠ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}} & - ٣٩ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{87^n (n!)}{32^n n^n} & - ٣٨ \\
& & \sum_{m=2}^{\infty} \left(1 + \frac{\ln m}{m}\right)^m & - ٤١
\end{array}$$

٤٢ - لاي قيم r تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}$ تقاربية ؟

٤٣ - أثبت أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ لجميع x (ارشاد : اعتبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$)

٤٤ - أثبت أن $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!/n^n) = 0$ (ارشاد : اعتبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$)

٤٥ - أكتب الحدود السبعة الأولى بالمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ، حيث $a_{2n+1} = 1/3^{n+1} 5^n$ و $a_{2n} = 1/3^n 5^n$. أثبت أن المتسلسلة تقارب .

٤٦ - أثبت أن في اختبار النسبة الشرط $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$ للتقارب لا يمكن استبداله بالشرط الأضعف $|a_{n+1}/a_n| < 1$ لجميع $n \geq N$.

٤٧ - أثبت اختبار الجذر لكوشي : لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة حيث $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ تكون موجودة أولاً نهائية .

(أولاً) إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ فان المتسلسلة تكون تقاربية تقارباً مطلقاً .

(ثانياً) إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ أو كانت لا نهائية ، فان المتسلسلة تكون تباعدية .

(ثالثاً) إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ فالاختبار يفشل .

(إرشاد : تتبع برهان اختبار النسبة) .

اختبر تقارب المتسلسلات الآتية : اختبر الجذر (المسألة ٤٧)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n = 0.1 \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3^j} = 0.5 \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n} = 0.49 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n} \cdot a \geq 0 = 0.48$$

مسائل متنوعة

اختبر المتسلسلات الآتية من حيث التقارب :

$$\begin{array}{lll} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{\sqrt[3]{2i}} & - 3 \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{4i-5} & - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n r^n \quad - 1 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k}{5k+2} & - 6 \sum_{u=-2}^{\infty} \frac{1}{(3u+1)^2} & - 5 \sum_{m=5}^{\infty} \frac{1}{(2m+7)(m-4)} = 4 \\ \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{\ln(2m-1)} & - 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} & - 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 7 \\ \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} & - 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1.01^{n+1}}{(n+2)^3} & - 11 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{e^n} = 10 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u+2}{u^2} & - 15 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n-2)^2}{2^n} & - 14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n - 3} = 13 \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m+2}{m(2m+1)} & - 18 \sum_{j=3}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j^2 - 2} & - 17 \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{2} = 16 \\ \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i \frac{6i}{(i-1)(3i+4)} & - 21 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} & - 20 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j3^j}{2^{j-1}} = 19 \\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i2^i}{(i+1)!} & - 24 \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x+2} & - 23 \sum_{t=1}^{\infty} (-1)^{t+1} \frac{t^2-3}{t^2} = 22 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n4^n}{(n+1)25^n} = 27 & \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} i^{-2} e^i = 26 & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+2)(3n-1)}{(n+1)!} = 25 \\ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j+3}{3^j} = 30 & \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{5} = 29 & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{(2k)!} = 28 \\ \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{2j+1}{3j-1} = 33 & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{8^n} = 32 & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{e^i} = 31 \\ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^2-2}{e^i} = 36 & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i(i-1)}{2i^3-5} = 35 & \sum_{t=1}^{\infty} \frac{2t^3}{t!} = 34 \\ \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m \ln m}{(m+2)^3} = 39 & \sum_{t=2}^{\infty} \frac{t - \sqrt[3]{t}}{t^2 + 2t} = 38 & \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\sqrt{i+1}}{\sqrt[3]{4i+3}} = 37 \\ \sum_{j=3}^{\infty} \frac{j+2}{\ln(j-1)} = 42 & \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{\ln n} = 41 & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n!}{(2n)!} = 40 \end{array}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)n} \quad - \text{xi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{3}}{\ln(n+2)} \quad - \text{xi} \quad -$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m^2}} \quad - \text{xi} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{i}\right)^i \quad - \text{xi} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m} \quad - \text{xi} \quad -$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1), a > 0 \quad - \text{xi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad - \text{xi} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^m}{2^m(m!)^m} \quad - \text{xi} \quad -$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln m}{m}\right)^m \quad - \text{xi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}}, a > 0 \quad - \text{xi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n \quad - \text{xi} \quad -$$

الفصل السادس عشر

متسلسلات القوى

١٦-١

متسلسلات القوى

الامتداد الهام للمتسلسلات اللانهائية نحصل عليه بدراسة المتسلسلات التي حدودها ليست ثابتة بل على الصورة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

مثل هذه المتسلسلة تسمى متسلسلة قوى في x أو باختصار ، متسلسلة قوى . وهي تعميم لكثير الحدود . أمثلة لمتسلسلات القوى هي

$$(١) \quad \sum_{n=0}^{\infty} ax^n = a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots$$

$$(٢) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2(2^2)} + \frac{x^3}{3(2^3)} + \frac{x^4}{4(2^4)} + \dots$$

$$(٣) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

إذا استبدل المتغير في متسلسلة القوى بثابت ، فأننا نحصل على متسلسلة ثابتة . أي أن متسلسلة القوى يمكن اعتبارها تمثل مجموعة من المتسلسلات لثوابت ، واحدة لكل قيمة للمتغير x . متسلسلة القوى قد تتقارب لبعض قيم x وتتباعد لقيم أخرى . لقد رأينا أن المتسلسلة (١) ، التي هي متسلسلة هندسية ، تتقارب لـ $-1 < x < 1$ وتتباعد لجميع القيم الأخرى لـ x .

مثال ١ . أوجد قيم x التي تجعل المتسلسلة

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2(2^2)} + \frac{x^3}{3(2^3)} + \frac{x^4}{4(2^4)} + \dots$$

في (٢) تتقارب .

الحد العام للمتسلسلة هو $u_n = x^n / n2^n$. نستخدم اختبار النسبة فيكون لدينا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \cdot \frac{n2^n}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} |x| = \frac{|x|}{2}$$

المتسلسلة تتقارب تقارباً مطلقاً عندما $|x| < 2$ وتتباعد عندما $|x| > 2$. اختبار النسبة لا يعطي معلومات عن التقارب $x = \pm 2$ عندما $x = 2$ ، المتسلسلة هي

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

التي هي المتسلسلة التوافقية التباعدية . عندما $x = -2$ ، المتسلسلة هي

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots$$

التي هي سالب المتسلسلة التوافقية المتبدلة الإشارة التقاربية . لقد درسنا جميع الاختبارات الممكنة لـ x ونرى أن المتسلسلة تتقارب عندما $-2 \leq x < 2$ وتتباعد لجميع القيم الأخرى لـ x .

مثال ٢ . أوجد قيم x التي تجعل المتسلسلة

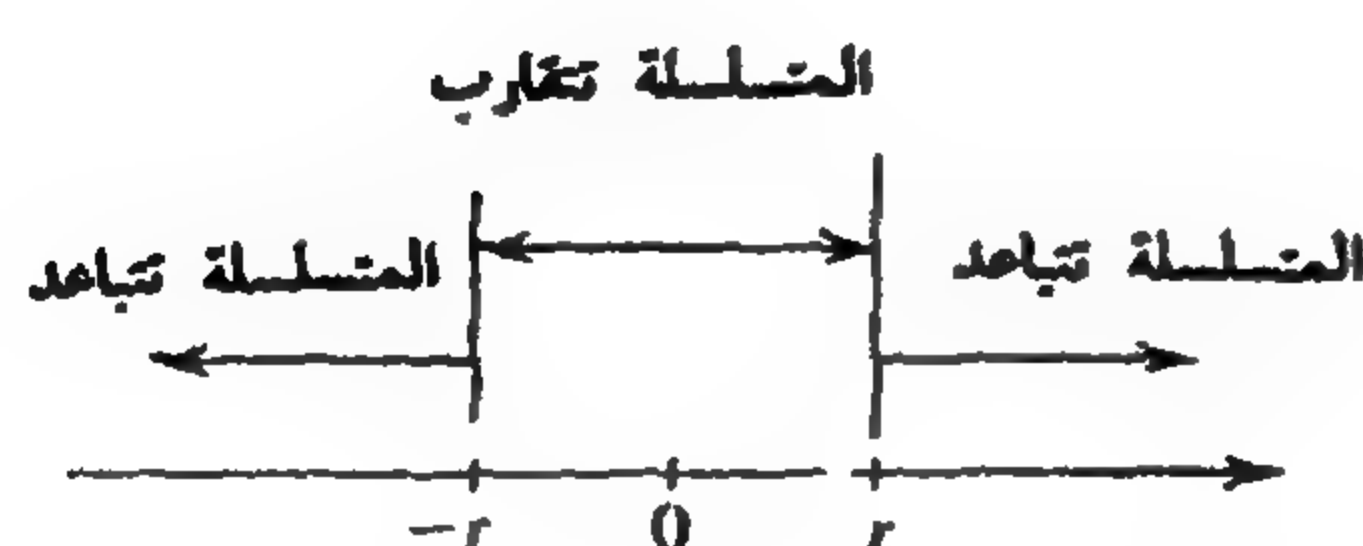
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

في (٣) تقارب .

بإستخدام اختبار النسبة ، يكون لدينا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{x^{2n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2n+1)2n} = 0$$

المتسلسلة تتقارب لجميع قيم x .



شكل ١-١٦

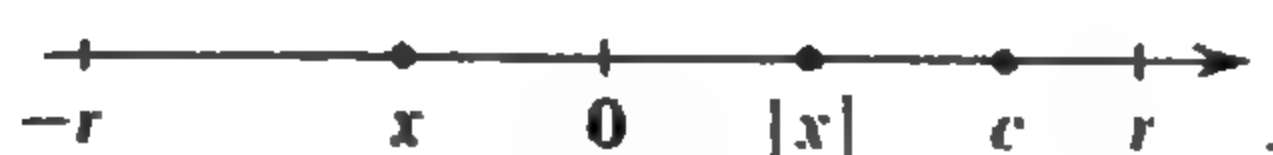
r هي نصف قطر التقارب . التقارب ليس مؤكداً عند $\pm r$

المتسلسلتان في (١) ومثال ١ تتقاربان ، وتتقاربان تقارباً مطلقاً ، لجميع قيم x داخل فترة مركزها عند الصفر وتتباعد لجميع قيم x خارج هذه الفترة . من خصائص متسلسلة القوى أنه توجد فترة $[-r, r]$ تتقارب المتسلسلة داخلها تقارباً مطلقاً وتتباعد خارجها (شكل ١-١٦) . المتسلسلة قد تتقارب وقد لا تتقارب عند النقطتين الطرفيتين . العدد r نصف طول الفترة ، يسمى نصف قطر تقارب المتسلسلة . فئة جميع قيم x التي تجعل المتسلسلة تتقارب تسمى فترة التقارب . وهي فترة مفتوحة $(-r, r)$ مع احتمال أن يضاف إليها إحدى النقطتين الطرفيتين أو كليهما . في مثال ١ نصف

قطر التقارب هو 2 وفترة التقارب هي $(-2, 2)$. كثيراً ما تكون فترة التقارب المخط بأكمله ، كما في حالة المتسلسلة في مثال ٢ ، وفي مثل هذه الحالة يقال أن نصف قطر التقارب لا نهائي وأحياناً المتسلسلة تتقارب عند $x = 0$ فقط ، وفي هذه الحالة $r = 0$. نبرهن خاصية الفترة في النظرية الآتية .

١٦-١ نظرية . متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تتقارب تقارباً مطلقاً لجميع x في فترة ما $-r < x < r$ وتتباع لجميع $|x| > r$. الفترة قد تكون لا نهائية ، وفي هذه الحالة المتسلسلة تتقارب تقارباً مطلقاً لجميع x ؛ أو r قد تكون صفراً ، وفي هذه الحالة تتقارب المتسلسلة عند $x = 0$ فقط .

البرهان . سيكون البرهان سهلاً إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n|$ موجودة لكل متسلسلة قوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، لأنه حينئذ نتابع كما في الأمثلة . لكن النهاية قد لا توجد . لتكن S هي فئة جميع x التي تجعل $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ تتقارب . إذا كانت S محدودة من أعلى ، فهي لها حد أعلى أصغر r . بما أن $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ تتقارب عنده $x = 0$ ، فيكون $r \geq 0$. نفرض أن $r > 0$. لتكن x أي عدد بحيث أن $|x| < r$ (شكل ١٦-٢) . لأن r هي الحد الأعلى الأصغر ، يوجد عدد ما في S بين r و $|x|$. أي أن ، توجد c حيث $0 \leq |x| < c \leq r$ بحيث أن $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n c^n|$ تتقارب . من ثم ، $|a_n c^n| < |a_n x^n|$ ، واختبار المقارنة يثبت أن $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ تتقارب . بما أن x هي أي عدد بحيث أن $|x| < r$ ، فالمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تتقارب تقارباً مطلقاً لجميع هذه القيم لـ x . إذا كانت S غير محدودة من أعلى ، فإن تعديلاً بسيطاً لهذا البرهان سيثبت أن المتسلسلة تتقارب تقارباً مطلقاً لجميع x .



شكل ١٦-٢

جزء التباعد بالنظرية يكون له معنى إذا كانت S محدودة من أعلى وبالتالي حدها الأعلى الأصغر r يكون موجوداً . لتكن x أي عدد بحيث أن $0 \leq r < |x|$. إذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تتقارب ، فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n x^n| = 0$ وبالتالي $|a_n x^n| < 1$ لجميع قيم x الكبيرة كبراً كافياً . لتكن b أي عدد بحيث أن $|x| < b < r$ ، فيكون

$$|a_n b^n| = |a_n x^n| \left| \frac{b}{x} \right|^n < \left| \frac{b}{x} \right|^n$$

لقيم n الكبيرة كبراً كافياً ، والمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n b^n|$ سيسودها آخر الأمر المتسلسلة الهندسية التقريبية $\sum_{n=0}^{\infty} |b/x|^n$ (لماذا تقاربية ؟) واذن هي تتقارب . لكن هذا محال لأن $b > r$. إذن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تتباع لجميع $|x| > r$. هذا يكمل البرهان .

إذا كانت حدود متسلسلة القوى تتبع غطاً معيناً ، فإنه يمكننا عادة إيجاد نصف قطر التقارب r باستخدام اختبار النسبة ، كما في مثالي ١ ، ٢ . هذا يحدد الفترة $[-r, r]$ ، التي داخلها تتقارب المتسلسلة وخارجها تتباع . تقارب المتسلسلة عند r و $-r$ يجب دراسته كل على حده . لاجراء

ذلك ، نعوض بـ $-r$ و r عن x في المتسلسلة ، ونختبر متسلسلة اثبات ، النتيجة ، من حيث التقارب ، بأحد الاختبارات التي سبقت دراستها انى انفصل ١٥ .

مثال ٣ . أوجد فترة تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n z^n}{n^2}$

لدينا ، باستخدام اختبار النسبة ،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{n+1} z^{n+1}}{(n+1)^2} \frac{n^2}{3^n z^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{(n+1)^2} |z| = 3|z|$$

المتسلسلة تقارب لـ $|z| < \frac{1}{3}$ وتتباعده لـ $|z| > \frac{1}{3}$. نصف قطر التقارب هو $\frac{1}{3}$. عندما $z = \frac{1}{3}$ ، المتسلسلة تكون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ وهى متسلسلة p ، تقاربية . عندما $z = -\frac{1}{3}$ ، المتسلسلة تكون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ ، التى تقارب لأن متسلسلتها للقيم المطلقة تقارب . فترة التقارب هى الفترة المفتوحة $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.

تعميم لمتسلسلة القوى فى x هو المتسلسلة

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

وتسمى متسلسلة القوى فى $x-a$. تعويض y لـ $x-a$ يحول هذه المتسلسلة الى متسلسلة قوى فى y . وعلى ذلك ، فهى لها نصف قطر تقارب r ، وتتقارب لجميع x حيث

$$-r < x-a < r,$$

$$a-r < x < a+r.$$

أى حيث ،

فترة التقارب مركزها عند a ونقطتها الطرفيتان هما $a+r$ و $a-r$.

مثال ٤ . أوجد فترة تقارب المتسلسلة

$$2(x-3) + 2^2 \cdot 2^2(x-3)^2 + 2^3 \cdot 3^2(x-3)^3 + 2^4 \cdot 4^2(x-3)^4 + \dots$$

الحد العام للمتسلسلة هو $2^n n^2 (x-3)^n$. لدينا باختبار النسبة

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1} (n+1)^2 (x-3)^{n+1}}{2^n n^2 (x-3)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 |x-3| = 2|x-3|$$

المتسلسلة تقارب لـ $|x-3| < \frac{1}{2}$ ، أى لـ $3 - \frac{1}{2} < x < 3 + \frac{1}{2}$ ، وتتباعده لـ $x > \frac{7}{2}$ و $x < \frac{5}{2}$. نصف قطر التقارب هو $\frac{1}{2}$.

عندما $x < \frac{5}{2}$ ، المتسلسلة تكون

$$-1 + 2^2 - 3^2 + \dots + (-1)^n n^2 + \dots$$

وهذه تتباعده ، وعندما $x = \frac{7}{2}$ ، المتسلسلة تكون

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + \dots$$

وهذه أيضاً تتباعده . فترة التقارب هى الفترة المفتوحة $(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$.

أوجد فترة التقارب لمتسلسلات القوى وبنها على الخط الحقيقي :

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \quad - \quad ٢ \quad 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots \quad - \quad ١$$

$$1 + \frac{z}{2} + \frac{2z^2}{2^2} + \frac{3z^3}{2^3} + \frac{4z^4}{2^4} + \dots \quad - \quad ٣ \quad 1 - u + \frac{u^2}{2^2} - \frac{u^3}{3^2} + \dots$$

$$(x-1) + \frac{(x-1)^2}{\sqrt{2}} + \frac{(x-1)^3}{\sqrt{3}} + \frac{(x-1)^4}{\sqrt{4}} + \dots \quad - \quad ٥$$

$$1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{4^2} - \frac{t^6}{6^2} + \dots \quad - \quad ٦ \quad 1 + \frac{y}{a} + \frac{y^2}{2a^2} + \frac{y^3}{3a^3} + \dots, a > 0$$

$$1 - 2(3r-5) + 3(3r-5)^2 - 4(3r-5)^3 + \dots \quad - \quad ٨$$

$$\frac{x}{1(2)} - \frac{x^2}{2(2^2)} + \frac{x^3}{3(2^3)} - \frac{x^4}{4(2^4)} + \dots \quad - \quad ٩$$

$$1 + \frac{2^2x}{2!} + \frac{3^2x^2}{3!} + \frac{4^2x^3}{4!} + \dots \quad - \quad ١١ \quad 2(2z+1) + \frac{3(2z+1)^2}{2!} + \frac{4(2z+1)^3}{3!} + \dots \quad - \quad ١٠$$

$$\frac{x-5}{1(3)} - \frac{(x-5)^2}{2(3^2)} + \frac{(x-5)^3}{3(3^3)} - \frac{(x-5)^4}{4(3^4)} + \dots \quad - \quad ١٢$$

$$\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{2x^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3x^3}{2^2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{4x^4}{2^3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \quad - \quad ١٣$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2u}{2(3^2)} + \frac{3u^2}{2^2(3^3)} + \frac{4u^3}{2^3(3^4)} + \dots \quad - \quad ١٤$$

$$1 + \frac{u^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot u^4}{2 \cdot 4 \cdot 2^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot u^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2^6} + \dots \quad - \quad ١٥ \quad (\text{احذف النقطتين الطرفيتين})$$

$$\lambda - \frac{\lambda^2}{2(2!)} (2^2 - 1) + \frac{\lambda^3}{3(3!)} (2^3 - 1) - \dots \quad - \quad ١٧ \quad x + \frac{x^2}{2^h} + \frac{x^3}{3^h} + \frac{x^4}{4^h} + \dots \quad - \quad ١٦$$

أوجد فترة التقارب لمتسلسلات القوى الآتية :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n+1} \quad - \quad ٢٠$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m^2 r^m \quad - \quad ١٩$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad - \quad ١٨$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad - \quad ٢٣$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{y^n}{\sqrt{n}} \quad - \quad ٢٢$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n} \quad - \quad ٢١$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{4^j x^j}{5(j-3)^2} \quad - \quad ٢٦$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{it^i}{(-3)^i} \quad - \quad ٢٥$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{2k}}{k!} \quad - \quad ٢٤$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{nx^n}{(n-1)!} \quad - \quad ٢٩$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j! x^j \quad - \quad ٢٨$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z-1)^n}{n!} \quad - \quad ٢٧$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^{n-1}}{4^n} &= ٢٢ & \sum_{j=3}^{\infty} \frac{(2x+1)^j}{j3^{j-1}} &= ٢١ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3s+1)^n}{2^n} &= ٢٠ \\
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(n-1)n} (t-4)^{2n-1} &= ٢٥ & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} (z+2)^k &= ٢٤ & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} &= ٢٣ \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{7^n} &= ٢٨ & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n (y+\frac{5}{2})^n}{n-1} &= ٢٧ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} (x+4)^n &= ٢٦ \\
& & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)n^n}{n(n+2)2^n} &= ٤٠ & \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(x-3)^t}{2^t \sqrt{t+1}} &= ٣٩
\end{aligned}$$

$$\cdot (احذف النقطتين الطرفيتين) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = ٤١$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} &= ٤٤ & \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1} (y+2)^{2r}}{(r+1)2^{4r}} &= ٤٣ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)} &= ٤٢ \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n x^n}{n^2+1}, a > 0 &= ٤٦ & \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k \ln k} &= ٤٥
\end{aligned}$$

أوجد قيم x التي تجعل المتسلسلات الآتية تتقارب :

$$\frac{\sin x}{2(2)} - \frac{\sin^2 x}{4(2^2)} + \frac{\sin^3 x}{6(2^3)} - \frac{\sin^4 x}{8(2^4)} + \cdots = ٤٧$$

$$1 - \tan x + \frac{1}{2^2} \tan^2 x - \frac{1}{3^2} \tan^3 x + \cdots, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} = ٤٨$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)x^{2n-1}} = ٥١ \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{3^2 x^3} + \frac{1}{5^2 x^5} - \frac{1}{7^2 x^7} + \cdots = ٥٠ \quad \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \cdots = ٤٩$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n^2} = ٥٤ \quad 1 + \frac{2^2}{2!x} + \frac{3^2}{3!x^2} + \frac{4^2}{4!x^3} + \cdots = ٥٣ \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} = ٥٢$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^x} = ٥٥$$

٥٦ - أعط مثالا لمتسلسلة قوى في x بحيث (أ) تتقارب لجميع قيم x ، (ب) تتقارب عند $x=3$ وتتباعده عند $x=4$ ، (ج) تتقارب عند $x=0$ فقط .

٥٧ - أثبت أن فئة قيم x التي تجعل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2x^2)^n}{\sqrt{n}}$ تتقارب لا تكون فترة . لماذا لا يتعارض هذا مع النظرية ١٦-١ ؟

٥٨ - إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = c$ ، فاثبت أن نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ هو

$$1/c$$

٥٩ - أثبت أنه إذا كان نصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ هو r ، فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n x^n$ يكون نصف قطر التقارب لها واحد صحيح . أثبت أيضاً أن المتسلسلة الأخيرة تتقارب عند $-r$ و r إذا فقط كانت المتسلسلة الأولى تتقارب عند $-r$ و r ، على الترتيب . إذا كانت r نصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، فأوجد b بحيث أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n x^n$ يكون لها نصف قطر التقارب s .

٦٠ - أثبت أنه إذا كانت الفئة S في برهان النظرية ١٦ - ١ غير محدودة من أعلى ، فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تتقارب تقارباً مطلقاً لجميع x .

٦١ - بدون استخدام النظرية ١٦ - ١ ، أثبت أنه إذا كانت متسلسلة قوى تتباعد عند $x = d$ ، فهي تتباعد لجميع $|x| > |d|$.

٦٢ - المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ تعرف بمتسلسلة ديريشلت (Dirichlet) . خذ في الاعتبار الحالة : $a_n > 0$. فقط أثبت أنه إذا كانت المتسلسلة تتقارب عند $x = c$ ، فهي تتقارب لجميع $x > c$ ، وإذا كانت تتباعد عند $x = d$ ، فهي تتباعد لجميع $x < d$. بعض متسلسلات ديريشلت تتقارب لجميع x والبعض الآخر لا يتقارب لأي x . أثبت أنه في غير هاتين الحالتين المتطرفتين ، يوجد عدد r ، بحيث أن المتسلسلة تتقارب لجميع $x > r$ وتتباعد لجميع $x < r$. هذا يناظر نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى . النظرية صحيحة أيضاً عندما لا تكون a_n مفيدة .

١٦ - ٢

الدوال المعروفة بمتسلسلات قوى

متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تتقارب لكل x في فترة تقاربها . حاصل جمع المتسلسلة يعتمد على x فهو دالة لـ x . يمكننا أن نكتب

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

متسلسلة القوى يقال أنها تعين (أو تعرف) الدالة f . فمثلاً ، حاصل جمع المتسلسلة الهندسية $1 + x + x^2 + \dots$ هو الدالة $1/(1-x)$ لـ $-1 < x < 1$ ، ونكتب

$$(1) \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

المتسلسلة

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

تتقارب لجميع x . سنرى في البند التالي أن حاصل جمعها هو الدالة $\cos x$. بالمثل ، المتسلسلة

$$x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

تتقارب إلى $\sin^{-1} x$ كمجموعها لجميع $-1 \leq x \leq 1$. لنشير إلى أن المتسلسلتين تتقاربان إلى هاتين الدالتين ، نكتب

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad \text{لجميع } x$$

و

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

هاتان المعادلتان صحيحتان فقط لقيم x في فترتي تقاربهما . ليس مقبولا أن ندعى أن

$$\frac{1}{3} = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots$$

الذي نحصل عليه بوضع $x = -2$ في (١) ، لأن المتسلسلة تتباعد لهذه القيمة لـ x .

رغم أن المتسلسلات التي أعطيناها كتوضيحات تتقارب إلى دوال ليس لها اسم شائع . في الواقع ، هذه الدوال عادة تعرف بالمتسلسلات ، والدوال الهامة تعطى أسماء ورموزاً خاصة دالة بسل (Bessel) من رتبة صفر ، ويرمز لها بالرمز $J_0(x)$ هي إحدى هذه الدوال . المتسلسلة المعروفة لها معطاة في المسألة ١٢ .

المتسلسلة اللانهائية ليست حاصل جمع عادي . لمجرد أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تتقارب إلى $f(x)$ لا يوجد ما يضمن أن متسلسلة مشتقات حدودها ستقارب إلى $f'(x)$. المتسلسلة

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \dots + \frac{\sin nx}{n^2} + \dots$$

توضح الحاجة إلى الحذر . هذه ليست متسلسلة قوى لكنها متسلسلة دوال مثلثة لـ x . وهي تتقارب لجميع x (المسألة ٨) وتعرف دالة f . متسلسلة مشتقاتها هي

$$\cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \dots + \frac{\cos nx}{n} + \dots$$

وهذه لا تتقارب حتى عند $x = 0$ ، وبالأحرى لا تتقارب إلى $f'(0)$.

رغم أنه يجب علينا أن نكون حذرين بخصوص تفاضل متسلسلة حدودها دوال عامة ، فمن الصحيح أن متسلسلات القوى يمكن تفاضلها ، وأيضاً تكاملها ، حداً حداً عند أي نقطة داخل فترة التقارب ، والمتسلسلة الناتجة ستقارب إلى مشتقة وتكامل الدالة . متسلسلة التفاضل أو التكامل لها نفس نصف قطر التقارب r مثل المتسلسلة الأصلية لكن قد لا تتقارب عند النقطتين الطرفيتين $-r$ و r ، حتى لو كانت المتسلسلة الأصلية تتقارب هناك .

١٦-٢ نظرية . لتكن $r > 0$ نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. الدالة f المعرفة بـ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

لها مشتقة ، وهذه المشتقة هي $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ لجميع x في الفترة المفتوحة $(-r, r)$.

بالمثل

$$\int_0^r f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^r a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$$

لجميع c في الفترة $(-r, r)$.

نحذف برهان هذه النظرية . كتطبيق للنظرية ، سنوجد متسلسلة قوى تتقارب إلى الدالة اللوغاريتمية . المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ تتقارب إلى $1/(1-t)$. باستبدال t بـ $-t$ ، يكون لدينا

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots , \quad -1 < t < 1.$$

الآن نكامل كلا الطرفين ،

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x dt - \int_0^x t dt + \int_0^x t^2 dt - \int_0^x t^3 dt + \dots$$

ونحصل على

$$(2) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots , \quad -1 < x < 1$$

عندما $x = \frac{1}{2}$ ، هذا يصبح

$$(3) \quad \ln \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2^2)} + \frac{1}{3(2^3)} - \frac{1}{4(2^4)} + \frac{1}{5(2^5)} - \dots$$

حاصل جمع الحدود الخمسة الأولى من المتسلسلة متبدلة الإشارة في (3) هو بالتقريب 0.40729 بخطأ لا يزيد عن الحد التالي ، الذي هو $0.0026 \approx 1/6(2^6)$. رغم أن (2) يمكن استخدامها لحساب اللوغاريتمات الطبيعية للأعداد بين 2 و 0 ، إلا أنها تتقارب ببطء شديد لدرجة أنها لا تكون عملية . سنحتاج إلى سبعة عشر حداً من (3) للحصول على خمسة أرقام عشرية صحيحة . توجد متسلسلات أخرى للوغاريتم ، ليست فقط تتقارب بسرعة أكبر ، بل أيضاً مداها غير محدود بالأعداد بين 2 و 0 . نؤكد أنه مع أن المتسلسلة في (2) تتقارب عند $x = 1$ ، فإن الشروط التي اشتقنا المعادلة (2) تحتها لا تؤكد أن المتسلسلة تساوي $\ln(1+x)$ عند $x = 1$. المعادلة بالتأكيد لا تكون صحيحة لـ $x > 1$ ، حيث المتسلسلة تتباعد ، لكننا سنرى في الفقرة التالية أن فترة الصلاحية يمكن امتدادها لتشمل 1 .

بما أن $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ قابلة للتفاضل داخل فترة تقاربها ، فهي متصلة هناك ، واذن

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$$

لـ $-r < c < r$. بمعنى آخر ، نهاية دالة مغرقة بمتسلسلة قوى عندما x تقترب من c هي قيمة المتسلسلة عند $x = c$. يمكننا إثبات أن c بالإضافة إلى ذلك تكون f متصلة يساراً عند النقطة الطرفية r إذا كانت المتسلسلة تتقارب هناك ، واذن

$$\lim_{x \rightarrow r} f(x) = f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

عبارة مماثلة تكون صحيحة عند النقطة الطرفية الأخرى $-r$. المتسلسلة في (e) تتقارب عند

$x = 1$. تطبيق لموضوع الاتصال هذا يعطى

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$$

لقد أوجدنا حاصل جمع المتسلسلة التوافقية متبدلة الإشارة .

رغم أن تكامل أو تفاضل المتسلسلات هو أبسط طريقة لإيجاد متسلسلات بعض الدوال ، لكن طريقة متسلسلة تايلور المشروحة فى البند التالى لها مدى أوسع فى التطبيق ولمعظم الدوال تكون أبسط .

مسائل

- ١ - قرب $\ln 0.8$ الى ثلاثة أرقام عشرية صحيحة .
- ٢ - المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ تتقارب إلى $1/(1-x)$. أوجد بالتفاضل متسلسلة لـ $1/(1-x)^2$. ما هى فترة تقاربها ؟
- ٣ - أوجد الدالة التى هى حاصل جمع المتسلسلة الهندسية $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ ومن ثم أثبت أن $x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ (أ) لاي قيم x تكون هذه المتسلسلة للدالة $\tan^{-1} x$ صحيحة ؟ (ب) قرب $\frac{1}{2} \tan^{-1}$ إلى ثلاثة أرقام عشرية صحيحة باستخدام المتسلسلة . (ج) أثبت أن $\pi/4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$. (د) بتفاضل $\tan^{-1}(1/x)$ و $\tan^{-1} x$ ، أوجد علاقة بينهما واستخدمها لتقريب $2 \tan^{-1}$ إلى ثلاثة أرقام عشرية .
- ٤ - أوجد متسلسلة لـ $\ln x$. لاي قيم x تكون المتسلسلة صحيحة ؟ [ارشاد: استخدم (٢)] .
- ٥ - التكامل $\int \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ لا يمكن التعبير عنه بدلالة دوال معروفة لنا . أثبت أن $\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \dots$ لاي قيم x يكون هذا صحيحاً ؟ أوجد قيمة التكامل صحيحة إلى أربعة أرقام عشرية عند $x = 0.1$.
- ٦ - لقد أثبتنا فى (٢) أن $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \dots$ وان هذا صحيح لـ $-1 < x < 1$. اشتق الصيغة $\ln(1-x) = -x - x^2/2 - x^3/3 - x^4/4 - \dots$ أيضاً صحيحة لـ $-1 < x < 1$. بالجمع بين هاتين المتسلسلتين أثبت أن $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right)$ ، $-1 < x < 1$ أثبت أن اللوغاريتم الطبيعى لاي عدد موجب يمكن إيجاد من هذه المتسلسلة الأخيرة باختيار مناسب لـ x ، وأوجد $\ln 3$ ، مجرياً الحساب إلى أن حدود المتسلسلة لا تؤثر على الرقم العشرى الثالث .

٧- المتسلسلة $x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \dots$ تتقارب عند $x=1$ ، لكن متسلسلة المشتقة $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ تتباعد هناك . لماذا لا يتعارض هذا مع النظرية ١٦ - ٢ ؟ .

٨- أثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ تتقارب لجميع x لكن متسلسلة المشتقات $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ تتباعد عند $x=0$.

٩- أثبت أن المتسلسلة

$$x + \frac{x}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2} + \dots$$

تتقارب لجميع x وأوجد الدالة $f(x)$ التي تتقارب إليها . هذا يوضح أن المتسلسلة لدوال متصلة قد تتقارب إلى دالة غير متصلة .

١٠- لتكن u الدالة المعرفة بمتسلسلة القوى

$$u(x) = 2 + 2x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \dots + \frac{2x^n}{n!} + \dots$$

(أ) أوجد نطاق الدالة u ، أى فترة التقارب للمتسلسلة . (ب) أثبت أن $u'(x) = u(x)$.
(ج) من ناحية أخرى نحن نعرف جميع حلول المعادلة التفاضلية $dy/dx = y$. ماهى هذه الحلول ؟ ماهى الدالة $u(x)$.

١١- لتكن الدالتان g و f معرفتين بمتسلسلتى القوى

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

(أ) أوجد نطاقى هاتين الدالتين ، أى فترتى التقارب للمتسلسلتين . (ب) أثبت أن $g'(x) = -f(x)$ و $f'(x) = g(x)$ (ج) أثبت أن g و f هما حلان للمعادلة التفاضلية $d^2y/dx^2 + y = 0$. (د) هل يمكنك تخمين ماهما الدالتان ؟ f و g ؟

١٢- تعرف دالة بسل من رتبة صفر بالمتسلسلة

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \dots + \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \dots$$

هذه الدالة هامة فى الفيزياء الرياضية . (أ) لآى قيم x تتقارب المتسلسلة ؟ (ب) أثبت أن $J_0(x)$ هى حل للمعادلة التفاضلية $xy'' + y' + xy = 0$.

١٣- أثبت أنه إذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ لها نصف قطر تقارب غير الصفر وكانت $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n|$ موجودة ، فان المتسلسلة والمتسلسلة المشتقة يكون لهما نفس نصف قطر التقارب .

١٤- إذا كانت $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ وكانت $r > 0$ هى نصف قطر تقارب المتسلسلة ، فاثبت أن

$$\int_b^r f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (c^{n+1} - b^{n+1}), \quad -r < b < c < r$$

١٥ - إذا كانت $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ وكانت $r > 1$ نصف قطر تقارب المتسلسلة ، فقد رأينا أن

$$\int_0^t f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} \quad (٤)$$

لـ $-r < t < r$. أثبت أن هذا غير صحيح لأي $t > r$ باثبات أن المتسلسلة في (٤) تتباعد إذا كانت $t > r$.

٣-١٦

متسلسلة تايلور

متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تعين دالة $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، معرفة لكل x في فترة تقاربها . بالعكس إذا اعطينا دالة f ، فيمكننا أن نسأل عما إذا كانت توجد متسلسلة قوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ بحيث تكون

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (١)$$

الجواب ليس دائماً نعم ، لكن دوال كثيرة له مثل هذه المتسلسلة ، مع نتائج بعيدة المدى . دراسة هذه النقطة وتشعباتها ستكون موضوع امسامنا في هذا البند والبنود الثلاثة التالية .

إذا وجدت فعلاً متسلسلة تحقق (١) لكل x في فترة التقارب ، فإن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ يقال أنها متسلسلة قوى تمثل الدالة f . ويقال أن (١) هو مفكك الدالة f كمتسلسلة قوى . دعنا نرى ماذا يجب أن تكون المعاملات a_i حتى يكون للدالة f متسلسلة قوى

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (٢)$$

نفترض أن نصف قطر التقارب r موجباً ، ولتألي المتسلسلة تتقارب إلى $f(x)$ لجميع x في فترة مفتوحة معينة $(-r, r)$. بالنظرية ١٦-٢ الدالة f لها مشتقة ، ومتسلسلة مشتقات حدود (٢) تتقارب إلى $f'(x)$ في نفس الفترة :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} + \dots \quad (٣)$$

بوضع $x = 0$ في (٢) ، (٣) ، نرى أن $a_1 = f'(0)$ و $a_0 = f(0)$. بالمثل ، $f''(x)$ توجد وتساوي متسلسلة مشتقات (٣) :

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + 3 \cdot 4a_4 x^2 + \dots + (n-1)na_n x^{n-2} + \dots$$

بوضع $x = 0$ في هذه المعادلة نحصل على $a_2 = f''(0)/2!$. بإجراء التفاضل مرة أخرى ووضع $x = 0$ ، نحصل على $a_3 = f'''(0)/3!$ ، لاستمرار بهذه الكيفية ، نرى أن لكل n ، يكون

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

أي أن المعاملات a_n لمتسلسلة القوى نعين بالدالة ومشتقاتها . بتعويض هذه القيم لـ :

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ في (٢) ، يكون لدينا

$$\begin{aligned}
 (٤) \quad f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots \\
 &\quad + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,
 \end{aligned}$$

حيث $f^{(0)}(0)$ تعرف بأنها $f(0)$.

لم نثبت أن f لها تمثيل بمتسلسلة قوى . كل ما أثبتناه هو أنه إذا كانت f لها تمثيل بمتسلسلة قوى ، فهذا التمثيل يجب أن يكون ذلك الذي في (٤) . هذا يعنى أنه بأية طريقة نجد متسلسلة القوى لدالة ، سواء بالتكامل ، كما فعلنا للدالة $\ln(1+x)$ في البند السابق ، أو بطريقة ما أخرى فأننا نحصل دائماً على نفس المتسلسلة ، والمعاملات ، رغم أنها قد تبدو مختلفة ، هي تلك التي في (٤) .

١٦-٣ نظرية . يمكن تمثيل الدالة بمتسلسلة قوى واحدة في x ، إذا كان لها تمثيل ، وهي تلك التي في (٤) .

بما أننا غير متأكدين أن الدالة f لها تمثيل بمتسلسلة قوى ، فعلاقة التساوي في (٤) مضللة ، ولا تكون صائبة هناك . في البند القادم سنجد أن معظم الدوال الشائعة لها مثل هذا التمثيل . تبعاً لذلك ، سنسبق عملنا هناك ونكتب علامة التساوي في (٤) الآن . الطرف الأيمن من (٤) يسمى متسلسلة مكلاورين (Maclaurin) للدالة f .

مثال ١ . أوجد متسلسلة مكلاورين للدالة e^x وأوجد فترة تقاربها .

نضع $f(x) = e^x$. نحسب قيم المشتقات للدالة e^x عند 0 :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^x, & f(0) &= 1, \\
 f'(x) &= e^x, & f'(0) &= 1, \\
 \dots &\dots & \dots &\dots \\
 f^{(n)}(x) &= e^x, & f^{(n)}(0) &= 1.
 \end{aligned}$$

بالتعويض في (٤) ، يكون لدينا متسلسلة مكلاورين للدالة e^x :

$$(٥) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

لايجاد فترة التقارب ، نستخدم اختبار النسبة :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

المتسلسلة تتقارب لكل x .

مثال ٢ . أوجد متسلسلة مكلورين للدالة $\sin x$ وأوجد فترة تقاربها .

نضع $f(x) = \sin x$ فيكون

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0, \\ f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0, \\ f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1, \\ f^{(4)}(x) &= \sin x, & f^{(4)}(0) &= 0, \\ f^{(5)}(x) &= \cos x, & f^{(5)}(0) &= 1, \\ &\dots\dots\dots & & \end{aligned}$$

المشتقات تتكرر في نمط دورى دورته 4 . متسلسلة مكلورين (٤) لـ $\sin x$ هي

$$(٦) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

الحدود الصفرية في المتسلسلة قد حذفت . هذه المتسلسلة أيضاً تتقارب لجميع x .

نحن نؤكد أننا لم نثبت صحة علامتى التساوى في (٥) و (٦) . كل ما أوجدناه هو متسلسلتا القوى المرتبطتان بـ $\sin x$ و e^x . فى البند القادم سنثبت أن المتسلسلتين تتقاربان فعلاً الى هاتين الدالتين لجميع قيم x .

كمراجع ، نعمل قائمة بمتسلسلات مكلورين للدوال المسترسلة الأكثر أهمية . المتسلسلات لـ $\cos x$ و $\sin x$ و e^x تظهر كثيراً فيجب تذكرها .

$$(٧) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \text{لجميع قيم } x$$

$$(٨) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad \text{لجميع قيم } x$$

$$(٩) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad \text{لجميع قيم } x$$

$$(١٠) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad -1 < x \leq 1.$$

$$(١١) \quad \sin^{-1} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

$$(12) \quad \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \\ -1 \leq x \leq 1.$$

تعميم هام لمتسلسلة مكلاورين نحصل عليه باختيار أى عدد a ، والاستفسار عما إذا كانت $f(x)$ يمكن تمثيلها بمتسلسلة قوى فى $x - a$ ، أى ما إذا كانت توجد متسلسلة بحيث أن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$

$$(13) \quad f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n + \dots$$

بفرض أن مثل هذا التمثيل يوجد فعلاً ، يمكننا إيجاد المعاملات a_n بنفس الطريقة التى استخدمناها لمتسلسلات مكلاورين . إذا عوضنا a بـ x فى (١٣) ، فالتا نحصل على $a_0 = f(a)$. باجراء تفاضل (١٣) ثم تعويض a بـ x يعطينا $a_1 = f'(a)$. بالاستمرار بهذه الكيفية ، نجد أن لكل n ، يكون

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

بتعويض هذه القيم لـ a_0, a_1, \dots فى (١٣) ، نحصل على متسلسلة تايلور للدالة f عند a :

$$(14) \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \dots \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

كما سبق ، لقد أثبتنا فقط أنه إذا كانت f لها تمثيل بمتسلسلة قوى فى $x - a$ ، فهذا التمثيل هو ذلك المعطى فى (١٤) . المتسلسلة تكون وحيدة للعدد المعطى a . نقول إننا أوجدنا مفكوك الدالة حول a أو أننا أوجدنا مفكوك الدالة بدلالة قوى $x - a$. متسلسلة مكلاورين هى متسلسلة تايلور حيث $a = 0$ وهى مفكوك الدالة f حول 0 .*

* (1685 — 1731) Brook Taylor رياضى انجليزى ، نشر متسلسلة عام :
 1715. Colin Maclaurin اسكتلندى ، أعطى متسلسله فى كتاب عن حساب التفاضل والتكامل نشر عام 1692 .
 نظراً الى أن Maclaurin كان عمره 17 عاماً فقط عندما نشر تايلور صيغته ، فيبدو أنه لا يوجد مايرر إعطاه مكلاورين شرف حمل اسم متسلسله .

مثال ٣ . أوجد متسلسلة تايلور لـ $\ln x$ في قوى $x - 1$ وأوجد فترة تقاربها .

ضع $f(x) = \ln x$. منستخدم (١٤) عند $a = 1$ ويجب أن نوجد قيم مشتقات $\ln x$ عند 1 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x, & f(1) &= 0, \\ f'(x) &= \frac{1}{x}, & f'(1) &= 1, \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2}, & f''(1) &= -1, \\ f'''(x) &= \frac{2}{x^3}, & f'''(1) &= 2, \\ &\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}, & f^{(n)}(1) &= (-1)^{n-1} (n-1)!. \end{aligned}$$

بتعويض هذه القيم في (١٤) ، يكون لدينا

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + \dots$$

بما أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} \frac{n}{(x-1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} |x-1| = |x-1|$$

فالمتسلسلة تتقارب لـ $0 < x < 2$. المتسلسلة تتقارب أيضاً عند $x = 2$ ، لكن تتباعد عند $x = 0$. فترة التقارب هي $(0, 2]$.

أحياناً يمكن استخدام طريق مختصر لإيجاد متسلسلة مكلاورين لدالة . فمثلاً ، إذا أردنا المتسلسلة للدالة xe^{-x} ، يمكننا استبدال x بـ $-x$ في المتسلسلة (٧) وضرب المتسلسلة الناتجة في x لنحصل على

$$(15) \quad xe^{-x} = x - x^2 + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^4}{3!} + \dots$$

بما أن xe^{-x} يمكن أن يكون لها متسلسلة قوى واحدة في x ، فهذه هي المتسلسلة التي نحصل عليها بإيجاد مشتقات الدالة xe^{-x} واستخدام (٤) .

مسائل

١ - بما أن المتسلسلة الهندسية $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ تتقارب إلى $1/(1-x)$ ،

فالمتسلسلة يمكن اعتبارها مفكوك الدالة $f(x) = 1/(1-x)$ كمتسلسلة

قوى . تحقق أن معامل x^n في المتسلسلة هو $f^{(n)}(0)/n!$. أوجد متسلسلة مكلاورين للدوال

الآتية وأوجد فترة تقاربها :

$$\begin{array}{llll} \cos x & - 5 & \ln(a+x), a > 0 & - 4 & \ln(1-y) & - 3 & \ln(1+x) & - 2 \\ \frac{1}{1+x^2} & - 9 & \frac{1}{t-2} & - 8 & 2^x & - 7 & \sin(x+\pi/4) & - 6 \\ \frac{1}{\sqrt{1-2x}} & \bullet - 13 & \frac{1}{(1-x)^{2/3}} & \bullet - 12 & \sqrt{1+x} & \bullet - 11 & \tan^{-1} x & - 10 \end{array}$$

أوجد الحدود الى x^n ، للعدد المعطى n ، فى متسلسلة مكلاورين للدوال الآتية :

$$\begin{array}{llll} \sin^{-1} x, n=5 & - 17 & \tan x, n=5 & - 16 & \ln \cos x, n=6 & - 15 & \sec x, n=4 & - 14 \\ \tan^{-1} \frac{1}{x}, n=5 & - 20 & e^{\sin x}, n=5 & - 19 & e^x \sin x, n=7 & - 18 \end{array}$$

أوجد متسلسلة تايلور عند العدد المعطى a للدوال الآتية . لآى قيم x تتقارب المتسلسلة ؟

$$\begin{array}{llll} 1/x, a=-1 & - 24 & \ln|x|, a=-1 & - 23 & \ln x, a=2 & - 22 & e^x, a=c & - 21 \\ \cos x, a=\pi/3 & - 28 & \cos x, a=-\pi/4 & - 27 & \sin x, a=\pi/4 & - 26 & \sin x, a=c & - 25 \\ \sqrt{x}, a=4 & * - 29 \end{array}$$

$$30 - \text{من المتسلسلة الهندسية } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ أوجد متسلسلة لـ } 1/x \text{ بدلالة قوى } x-1.$$

أوجد متسلسلة تايلور لـ $1/x$ عند 1 .

$$31 - \text{حقق المتسلسلة لـ } xe^{-x} \text{ فى (١٥) بإيجاد قيم المشتقات لـ } xe^{-x} \text{ عند } 0 \text{ واستخدام (٤) .}$$

أوجد المفكوك كمتسلسلة فى قوى x للدوال الآتية :

$$\begin{array}{llll} a^x & - 36 & \cos \frac{x}{2} & - 35 & \sin \sqrt{x} & - 34 & e^{e^x} & - 33 & e^{3x} & - 32 \\ \frac{1-\cos x}{x^2} & - 40 & \frac{\ln(1-x)}{x} & - 39 & \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & - 38 & (\sin x)/x & - 37 \end{array}$$

$$41 - \text{اشتق مفكوك } \cos^2 x \text{ كمتسلسلة قوى (ارشاد : [Hint: } \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \text{].)}$$

$$42 - \text{اشتق مفكوك } \sin^2 x \text{ كمتسلسلة قوى .}$$

$$43 - \text{من متسلسلتى } \cos x \text{ و } \sin x \text{ أثبت أن } (-x) = -\sin x \text{ و } \cos(-x) = \cos x.$$

$$44 - \text{هل مشتقة متسلسلة مكلاورين للدالة } e^x \text{ تعطى } e^x \text{ ؟}$$

$$45 - \text{حقق أن } \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \text{ و } \frac{d}{dx} \sin x = \cos x \text{ بإجراء تفاضل المتسلسلتين (٨)}$$

و (٩) .

$$46 - \text{أوجد متسلسلة مكلاورين لكثيرة الحدود}$$

• احذف النقطتين الطرفيتين .

٤٧ - لماذا $\ln x$ ليس لها متسلسلة مكلاورين ؟

٤٨ - أثبت أن $\tan^{-1} x + \tan^{-1} (1/x) = \pi/2, x > 0$ (ارشاد : اجر تفاضل $\tan^{-1}(1/x)$ و $\tan^{-1} x$) استنتج المتسلسلة

$$\tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots$$

لأى قيم x تتقارب المتسلسلة ؟

٤٩ - اشتق الصورة الآتية لمتسلسلة تايلور من الصورة الأكثر شيوعاً (١٤) :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} + \dots$$

استخدمها لإيجاد مفكوك $\cos(x+h)$ بدلالة قوى h .

٥٠ - الدالة $J_0(x)$ المعرفة بالمتسلسلة

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \dots + \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \dots$$

تسمى دالة بسل من رتبة صفر. أثبت أنها دالة زوجية.

٥١ - إثبت أن التى ، التى لها تمثيل بمتسلسلة قوى فى x ، تكون زوجية إذا وإذا فقط كانت

معاملات القوى الفردية لـ x أصفاً . بالمثل ، الدالة تكون فردية إذا وإذا فقط كانت معاملات

القوى الزوجية لـ x أصفاً . متسلسلتا $\sin x$ و $\cos x$ توضحان ذلك .

٥٢ - أحياناً نريد التعبير عن كثيرة حدود فى x ككثيرة حدود فى $x-a$ ، كعدد معطى a . فمثلاً

$$x^3 - 5x^2 + 2 = (x-1)^3 - 2(x-1)^2 - 7(x-1) - 2 \quad (١٦)$$

اشتق هذه المعادلة بطريقة المعاملات غير المعينة . أى ضع

$$x^3 - 5x^2 + 2 = A(x-1)^3 + B(x-1)^2 + C(x-1) + D$$

ويتعويض أربعة أعداد لـ x أوجد الثوابت D و C و B و A . نفس الطريقة استخدمت فى

التعبير عن دالة كسرية كحاصل جمع كسور جزئية فى البند ١٠ - ٥ . الآن اشتق (١٦)

بايجاد مفكوك $x^3 - 5x^2 + 2$ بدلالة قوى $x-1$ باستخدام متسلسلة تايلور .

٥٣ - عبر عن $x^3 - 3x^2 + 8x - 5$ ككثيرة حدود فى $x-1$ (انظر المسألة ٥٢) .

٥٤ - عبر عن $x^4 - 2x + 8$ ككثيرة حدود فى $x-2$ (انظر المسألة ٥٢) .

٥٥ - عبر عن x^{10} ككثيرة حدود فى $x+1$ (انظر المسألة ٥٢) .

٥٦ - عبر عن $(x+2)^{10}$ ككثيرة حدود فى x دون ضربها أو استخدام نظرية ذات الحدين

(انظر المسألة ٥٢) .

٥٧ - بدون إيجاد المشتقة فعلاً ، أثبت أن قيمة $\frac{d^n}{dx^n} \sin^{-1} x$ عند 0 هى

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (n-1)} (n-1)! \quad \text{إذا كانت } n \text{ فردية وأنها تكون صفراً إذا كانت}$$

n زوجية .

٥٨ - أوجد متسلسلة $f(x)$ في قوى $x - a$.

١٦ - ٤

نظرية تايلور

لقد رأينا في البند السابق أنه إذا كانت الدالة f لها تمثيل بمتسلسلة في قوى $x - a$ ، فإن المتسلسلة يجب أن تكون متسلسلة تايلور

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

أما عن هل الدالة لها مثل هذا التمثيل فهذا شيء آخر ، وهو ما ندرسه هنا .

لأي دالة f لها مشتقات من جميع الرتب عند a يمكن تكوين متسلسلة تايلور لها

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

حاصل الجمع الجزئي للحدود التي عددها $n + 1$ من هذه المتسلسلة سنرمز له بالرمز $T_n(x)$. أي أن

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

كثيرة الحدود هذه في $x - a$ تسمى كثيرة حدود تايلور من درجة n للدالة f عند a . متسلسلة تايلور (١) ستقارب إلى $f(x)$ والدالة $f(x)$ سيكون لها تمثيل بمتسلسلة في قوى $x - a$ إذا كانت

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = f(x)$$

هذا هو مجرد التعريف أن $f(x)$ تكون حاصل جمع المتسلسلة . إذا كانت $R_n(x)$ ترمز إلى الفرق بين $T_n(x)$ و $f(x)$ أي إذا كانت

$$(3) \quad R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

فإن الشرط السابق لتقارب المتسلسلة إلى $f(x)$ يمكن التعبير عنه هكذا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

الكمية $R_n(x)$ تسمى الحد الباقي النوني للدالة f عند a . للدوال العامة ، يوجد ما يمكن قوله أكثر قليلاً من ذلك . كل دالة يجب أخذها بمفردها لتعيين ما إذا كانت (٢) صحيحة . يساعدنا في ذلك النظرية الآتية ، التي تعبر عن $R_n(x)$ بدلالة المشتقة رقم $(n + 1)$ للدالة f .

١٦ - ٤ نظرية تايلور . لتكن f دالة ، a عدداً ، I فترة تحتوي a وبحيث أن $f^{(n+1)}(x)$ تكون موجودة لجميع x في I . حيث أن لكل x في I توجد z ، التي تقع حتماً بين x و a إذا كانت $x \neq a$ ويمكن أن تكون أي عدد إذا كانت $x = a$ ، بحيث أن $R_n(x)$ ، الحد الباقي النوني للدالة f عند a ، يمكن التعبير عنه هكذا

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

بناء على ذلك ، من (٣) ، يكون

$$(٤) \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \\ + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

لاحظ أن التعبير لـ $R_n(x)$ يشبه الحد العام لمتسلسلة تايلور لكن بالعدد z بدلا من a في المشتقة . العدد z يعتمد على n و x ، ولا يمكن تحديد موقعه بأكثر من أنه يقع في مكان ما بين x و a . فهو بذلك يشبه العدد z في نظرية القيمة المتوسطة ، وهذا لا يدعو للدهشة إذ أنه يظهر من استخدام تلك النظرية - أو بتحديد أدق نظرية رول - في البرهان .

البرهان . إذا كانت $x = a$ ، فإن (٤) تكون حقيقة تافهة لأي z . نفرض الآن أن $x \neq a$ وأن x في I . لكل x مثل هذه ، نكون من f الدالة الآتية ϕ ، المعرفة لجميع t في الفترة الجزئية المقفلة $[a, x]$ أو $[x, a]$ إذا كانت $x < a$:

$$\phi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!} (x-t)^2 \\ - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (x-t)^n - \frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} (x-t)^{n+1}$$

نعتبر x ثابت ، كدالة لـ t . كل x تعين دالة مختلفة ϕ من الواضح أن $\phi(t) = 0$ عندما $t = x$. أيضاً $\phi(a) = 0$ لأن

$$\phi(a) = f(x) - \left[f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 \right. \\ \left. + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \right] - R_n(x) \\ = f(x) - T_n(x) - R_n(x) = f(x) - f(x) = 0$$

سنوجد مشتقة ϕ . (تذكر أن x ثابت وأنا نفاضل بالنسبة إلى t . معظم الحدود في التعبير لـ $\phi(t)$ هي حواصل ضرب) .

$$\phi'(t) = -f'(t) - [-f'(t) + f''(t)(x-t)] \\ - \left[-f''(t)(x-t) + \frac{f'''(t)}{2!} (x-t)^2 \right] \\ - \left[-\frac{f'''(t)}{2!} (x-t)^2 + \frac{f^{(4)}(t)}{3!} (x-t)^3 \right] \\ - \dots - \left[-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \right] \\ + \frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} (n+1)(x-t)^n$$

لحسن الحظ ، معظم الحدود تختزل ، وهذا يختصر إلى

$$\phi'(t) = \left[-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} + \frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} (n+1) \right] (x-t)^n$$

المشتقة توجد لجميع x في $[a, x]$ واذن الدالة ϕ تحقق شروط نظرية رون . وبالتالي توجد ϕ حتماً بين x و a بحيث أن

$$\phi'(z) = \left[-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!} + \frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} (n+1) \right] (x-z)^n = 0$$

بما أن $x - z \neq 0$ (لماذا ؟) فإن

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} (n+1) - \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!} = 0,$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

ومنها

وهذا يكمل البرهان .

الصورة الصريحة للحد الباقي المعطى فى نظرية تابلور عادة يمكننا من تعيين ما إذا كانت الدالة يمكن تمثيلها بمتسلسلة تايلور . التمهيدية الآتية تساعد فى تطبيق ذلك . هى تثبت أن $n!$ سيكون أخيراً أكبر من x^n ، مهما كانت x كبيرة . البرهان تطبيق جيد للمتسلسلات .

١٦-٥ . تمهيدية . $\lim_{n \rightarrow \infty} (x^n/n!) = 0$ لجميع x .

البرهان بما أن n مقيدة بالقيم الصحيحة ، فقاعدة لوبيتال لا يمكن استخدامها لايجاد قيمة هذه الصورة غير المعينة . إلا أن اختبار النسبة يثبت أن المتسلسلة

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

تتقارب لكل x . واذن حدّها النونى يجب أن يقترب من الصفر .

مثال ١ . فى مثال ١ ، بيند ١٦-٣ ، أوجدنا متسلسلة ماكلورين للدالة e^x :

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

أثبت أن حاصل جمع المتسلسلة هو e^x لجميع قيم x .

السؤال ليس خاصاً بالتقارب (فاختبار النسبة يثبت ذلك) لكن عما إذا كانت المتسلسلة تتقارب الى e^x . لتكن $f(x) = e^x$ الحد الباقي النونى للدالة f عند 0 هو

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^z}{(n+1)!} x^{n+1}$$

حيث z تكون بين x و 0 . حاصل جمع المتسلسلة سيكون e^x إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. إذا كانت $x \geq 0$ ، فحيثئذ يكون $e^z \leq e^x$ ، $0 \leq z \leq x$ ، ويكون

$$0 \leq R_n(x) \leq e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

إذا كانت $x < 0$ ، فحيث يكون $e^z < e^0 = 1$ ، $x < z < 0$ ويكون

$$0 < R_n(x) < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

التمهيدية ١٦ - ٥ تثبت أن في كلتا الحالتين $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. المتسلسلة تتقارب الى e^x لجميع قيم x .

مثال ٢ . في مثال ٣ ، بيند ١٦ - ٣ ، أوجدنا متسلسلة تايلور للدالة $\ln x$ حول ١ ،

$$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + \dots$$

وأثبتنا أنها تتقارب لجميع $0 < x \leq 2$. أثبت أن المتسلسلة تمثل $\ln x$ ، أى أن حاصل جمعها هو $\ln x$ ، لجميع $1 \leq x \leq 2$.

إذا كانت $f(x) = \ln x$ ، فإن

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

والحد الباقي النوني للدالة f عند ١ يكون

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x-1)^{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x-1}{z} \right)^{n+1}$$

حيث $1 \leq z \leq x \leq 2$. من ثم $0 \leq x-1/z \leq 1$ و $0 \leq x-1 \leq 1 \leq z$. واذن

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

وبالتالى $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$. هذا يثبت أن المتسلسلة لها حاصل الجمع $\ln x$ إذا كانت $1 \leq x \leq 2$. المتسلسلة أيضاً تمثل $\ln x$ للقيم $0 < x < 1$ ، لكن هذا يصعب إثباته باستخدام الحد الباقي . فى بند ١٦ - ٢ أثبتنا باستخدام معالجة مختلفة أن المتسلسلة تتقارب الى $\ln x$ فوق فترة التقارب بأكملها . هناك عالجتا متسلسلة $\ln(1+x)$ ، لكن تعويض $y = 1+x$ يحولها الى متسلسلة $\ln y$.

توجد دوال ، متسلسلات تايلور لها ، بالرغم من أنها تتقارب لجميع قيم x فى فترة ما ، لا تتقارب الى الدالة المعطاة لكن الى دالة ما أخرى . مثال ذلك هو

$$(٥) \quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

يمكن إثبات أن $f^{(n)}(0) = 0$ لجميع n . واذن متسلسلة مكلاورين للدالة f هي

$$0 + 0(x) + 0(x^2) + \dots + 0(x^n) + \dots$$

هذه المتسلسلة تتقارب لكل x ، ومن الواضح أن نهايتها هي الدالة الصفرية $g(x) = 0$. بناء على ذلك ، المتسلسلة لها حاصل الجمع $f(x)$ فقط عند $x = 0$ وليس عند أى قيمة أخرى لـ x . هذا يوضح أن تقارب متسلسلة تايلور الخاصة بدالة لا يكفى للتأكيد أن المتسلسلة تتقارب الى

الدالة . للتقارب الى الدالة ، الحد الباقي يجب أن يقترب من الصفر . بالرجوع الى الدالة في (٥) ، لدينا بنظرية تايلور

$$f(x) = 0 + 0(x) + 0(x^2) + \dots + 0(x^n) + R_n(x)$$

ومن ثم $R_n(x) = e^{-1/x^2}$ عندما $x = 0$. كما نتوقع تحت الظروف القائمة $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = e^{-1/x^2}$. إذا كانت $x \neq 0$.

مسائل

أوجد متسلسلة تايلور لكل من الدوال الآتية عند العدد المعطى a . أوجد فترة التقارب وأثبت أن الدالة هي حاصل جمع المتسلسلة لكل x في فترة التقارب .

$$\cos x, a = 0 - ٢$$

$$\sin x, a = 0 - ١$$

(أثبت حاصل الجمع للنصف الأيمن من الفترة فقط .)

$$\ln(1+x), a = 0 - ٣$$

(أثبت حاصل جمع للنصف الأيسر من الفترة فقط .)

$$\ln(1-x), a = 0 - ٤$$

$$\cos x, a = -\pi/4 - ٨ \quad \sin x, a = c - ٧ \quad \sin x, a = \pi/6 - ٦ \quad e^x, a = -1 - ٥$$

٩ - إذا كانت $T_n(x)$ هي كثيرة حدود تايلور من درجة n للدالة $f(x)$ عند a ، فأثبت أن $T_n^{(j)}(a) = f^{(j)}(a)$ لـ $j = 0, 1, \dots, n$.

١٠ - أين استخدم وجود $f^{(n+1)}(x)$ لجميع x في I في برهان نظرية تايلور؟

١١ - أثبت أن نظرية القيمة المتوسطة هي حالة خاصة من نظرية تايلور .

١٢ - أثبت اختبار المشتقة الثانية للنهاية القصوى المحلية بنظرية تايلور : إذا كانت $f'(c) = 0$ وكانت f'' متصلة عند c ، فإن f يكون لها نهاية عظمى أو صغرى محلية عند c تبعاً لكون $f''(c) < 0$ أو $f''(c) > 0$. لاحظ أن الفرض أقوى قليلاً من ذلك في النظرية ٤ - ١٩ . (ارشاد :)

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(z)}{2!}(x-c)^2$$

لعدد ما z بين x و c .

١٣ - إذا كانت $f''(c) = 0$ ، فإن اختبار المشتقة الثانية للنهاية القصوى المحلية يفشل . أثبت أن المشتقة الأعلى الأولى التي تختلف عن الصفر عند c يمكن استخدامها للتمييز بين النهاية العظمى والنهاية الصغرى المحلية كما يلي . ليكن $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ ، لكن $f^{(n)}(c) \neq 0$ ولتكن $f^{(n)}$ متصلة عند c تبعاً لكون $f^{(n)}(c) < 0$ أو $f^{(n)}(c) > 0$. إذا كانت n فردية ، فإن f ليس لها نهاية عظمى ولا نهاية صغرى محلية عند c لكن لها نقطة إنقلاب هناك . (ارشاد : استخدام نظرية تايلور) . وضع بالدالتين $f(x) = x^4$ و $f(x) = x^5$ عند 0 .

١٤ - لتكن f دالة ، a عدداً ، I فترة تحتوى a . أثبت أنه إذا كان يوجد عدد ثابت M بحيث أن $|f^{(n)}(x)| \leq M$ لجميع x فى I ولجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n ، فإن متسلسلة تايلور للدالة f عند a تتقارب الى $f(x)$ لجميع x فى I . وضح بالدالة $\sin x$.

١٥ - أجب عن الأسئلة المبعثرة فى البرهان الآتى للحقيقة أن e عدد غير كسرى . فى البند ٧ - ٢ . اثبتنا أن $1 < e < 4$. نقح ذلك إلى $2 < e < 3$. واذن e ليست عدداً صحيحاً . نفرض أن e عدد كسرى . حيثذ يوجد عدنان صحيحان b و a حيث $b \geq 2$ (لماذا ؟) بحيث أن

$$e = a/b \text{ لدينا}$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{b!} + \frac{e^z}{(b+1)!}$$

لعدد ما z حيث $0 < z < 1$ (لماذا ؟) . اذن

$$e(b!) = m + \frac{e^z}{b+1}$$

لعدد صحيح ما m (لماذا ؟) . أيضاً $e(b!)$ عدد صحيح (لماذا ؟) . بما أن $e^z < 3$ (لماذا ؟) ، $b + 1 \geq 3$ فلدينا تناقض (لماذا ؟) . اذن e عدد غير كسرى (لماذا ؟)

١٦ - ٥

تطبيقات متسلسلة تايلور

يمكننا إعطاء عدد قليل فقط من التطبيقات الكثيرة للمتسلسلات اللانهائية .

كثيرة الحدود ، من نواح عديدة ، هى أبسط الدوال وأكثرها إنطلاقاً . كثيراً ما يكون من المفيد إستبدال دالة بكثيرة حدود تقرب اليها الى درجة كبيرة . حيثذ يمكننا إستنتاج بعض المعلومات عن الدالة بدراسة كثيرة الحدود الأبسط منها . كثيرة حدود تايلور هى واحدة من كثيرات الحدود المقربة :

$$f(x) \approx T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

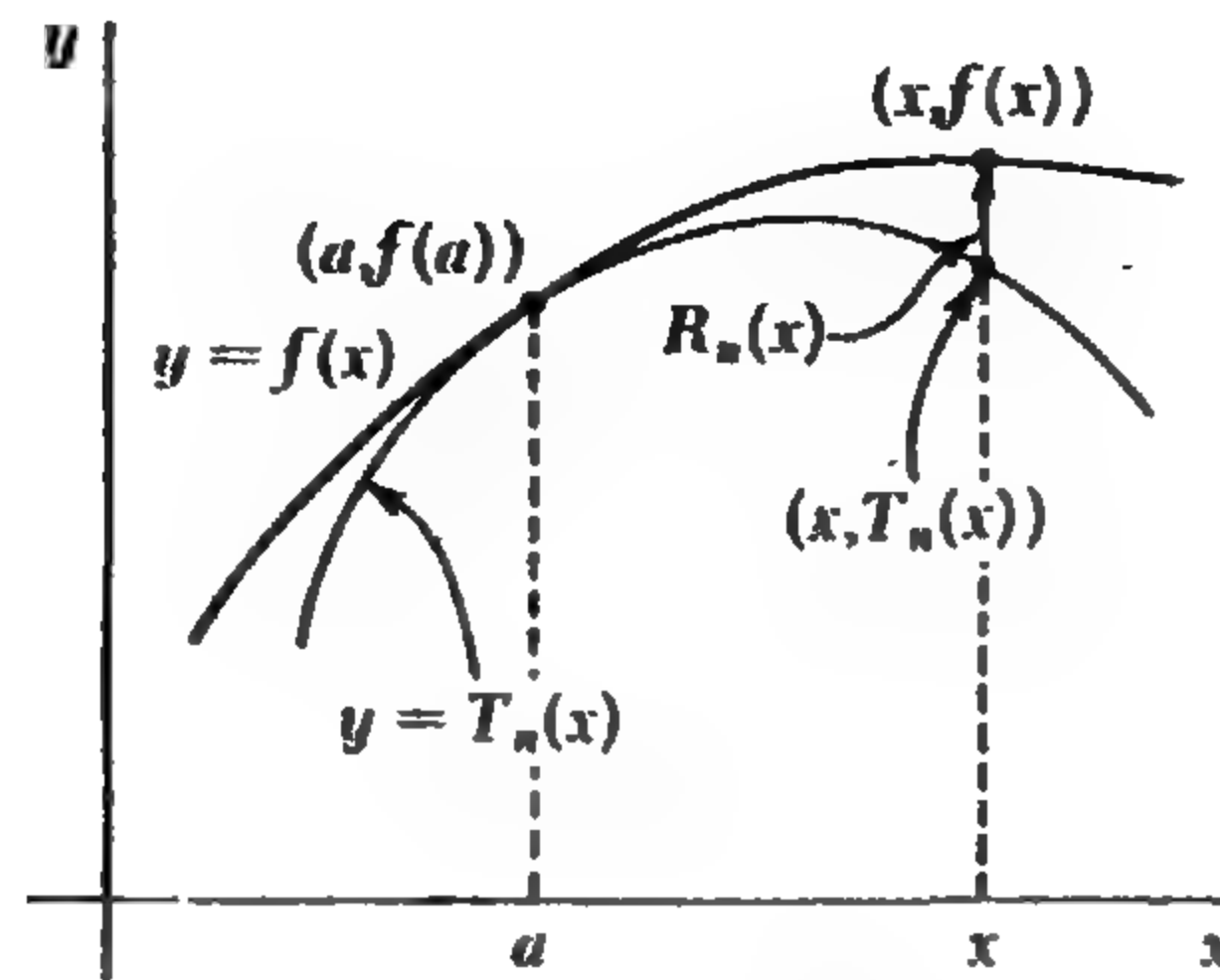
الفرق بين الدالة . وكثيرة الحدود عند العدد x يعطى بالحد الباقي $R_n(x)$ ، الذى بنظرية تايلور يمكن التعبير عنه فى الصورة

$$(1) \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

لعدد ما z بين x و a (شكل ١٦ - ٣) . لدوال كثيرة ، الحد الباقي يصبح صغيراً عندما تزايد n ، وكثيرة حدود تايلور $T_n(x)$ تصبح تقريباً جيداً للدالة .

عند اختيار كثيرة حدود تايلور للتقريب ، يجب اختيار a بحيث يمكن ايجاد قيم المشتقات $f^{(i)}(a)$ باستثناء هذا القيد ، العدد a والدرجة n يمكن اختيارهما كما نريد . التقريب يكون مضبوطاً عند a . عندما تكون x قريبة من a ، التقريب يكون جيداً لأن $(x-a)^{n+1}$ فى (١) يكون حيثذ

قوة لعدد صغير قريب من الصفر . لعدد ثابت n ، التقريب يصبح ضعيفا كلما بعدت x عن a .
 (شكل ١٦ - ٣) لكن يمكن تحسينه بإضافة حدود أكثر الى كثيرة الحدود ، وذلك يزيد درجتها n .
 إذا كنا نهتم فقط بمدى محدود للعدد x ، يمكننا اختيار a في هذا المدى أو بالقرب منه بقدر
 الامكان ، لكن بحيث يحقق القيد أننا نستطيع إيجاد قيم $f^{(i)}(a)$ ، وبذلك تكون $x - a$ صغيرة .



شكل ٣-١٦
 $R_n(x)$ يكون صغيراً عندما تكون x قريبة من a

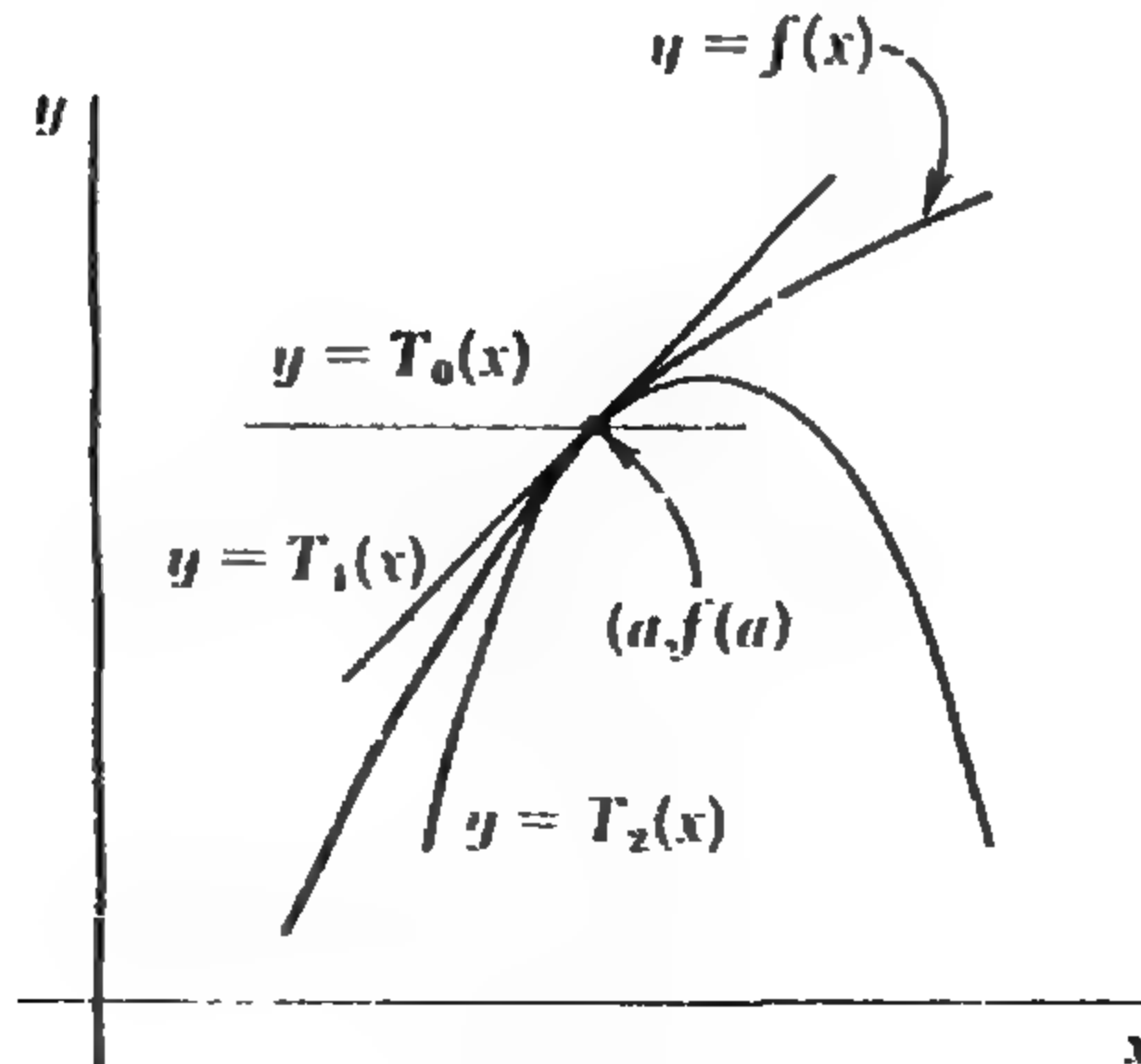
$f(x)$ و $T_n(x)$ ليس فقط لهما نفس القيمة عند a بل مشتقاتهما الـ n الأولى لها نفس القيم هناك ،
 كما نرى بسهولة باجراء تفاضل $T_n(x)$. هذا يتضمن أن الشكل البياني لـ $T_0(x)$ هو الخط الأفقي
 $y = f(a)$ المار بالنقطة $(a, f(a))$ (شكل ١٦ - ٤) . الشكل البياني لـ $T_1(x)$ هو الخط

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

الذي يمس المنحنى $y = f(x)$ عند a . الشكل البياني لـ $T_2(x)$ هو القطع المكافئ

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2$$

الذي ليس فقط يمس $y = f(x)$ عند a بل له نفس التقعر هناك . عندما تزايد n ، $T_n(x)$ توفق
 $y = f(x)$ أكثر فأكثر في جوار النقطة $(a, f(a))$ ، رغم أنها تكون في تماس مع المنحنى عند تلك
 النقطة فقط .



شكل ٤-١٦

كتوضيح لهذا ، ندرس الأربعة الأولى من كثيرات حدود تايلور للدالة e^x عند 0 :

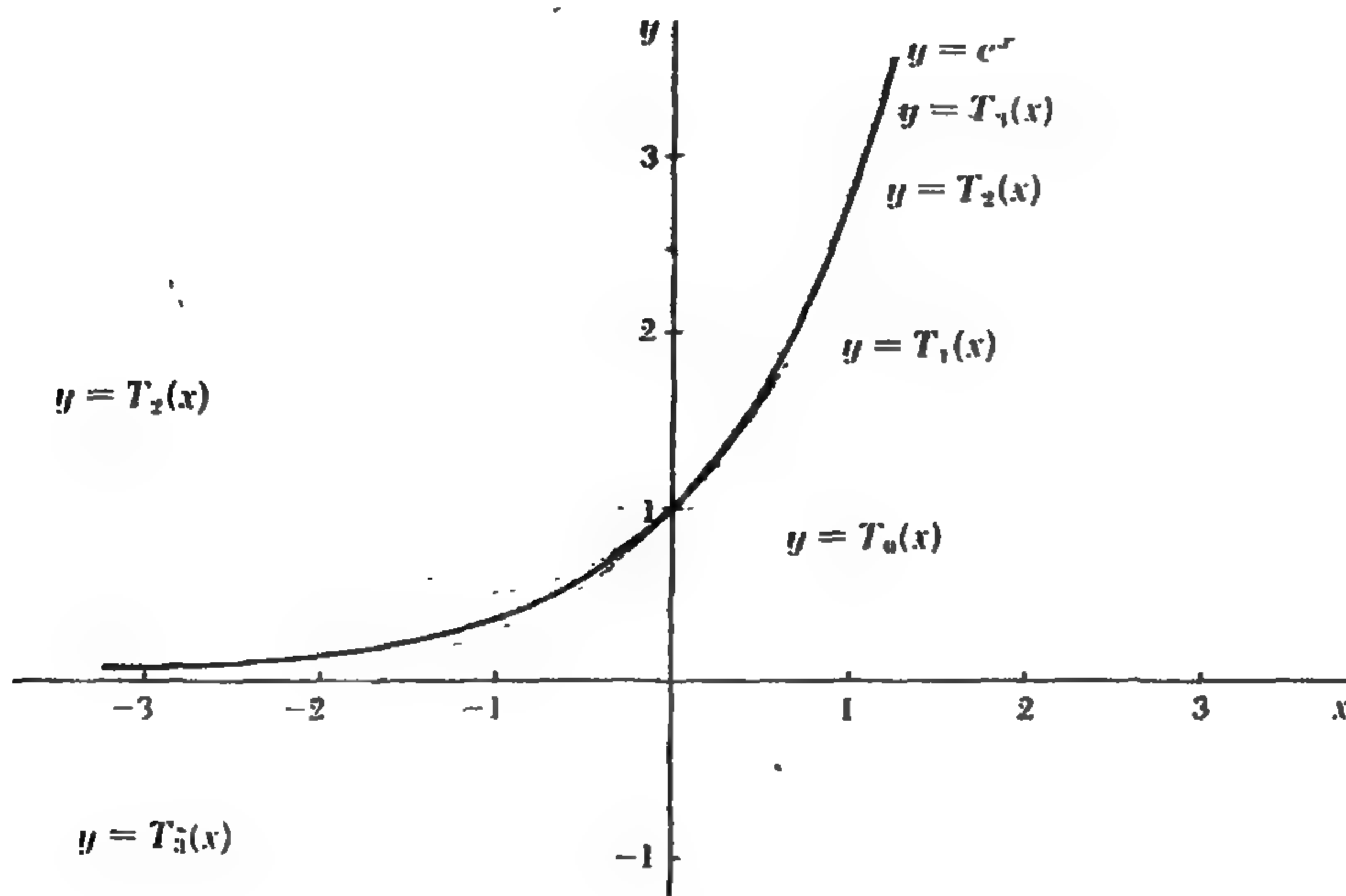
$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = 1 + x,$$

$$T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

الشكل البياني للدالة $y = e^x$ موضح في الشكل ١٦ - ٥ مع كثيرات الحدود المقربة هذه . كل $T_n(x)$ تتفق مع e^x عند النقطة $(0, 1)$. الشكل البياني لـ $T_0(x)$ هو الخط الأفقي $y = 1$



شكل ١٦ - ٥

رغم أنه تقريب ضعيف ، إلا أنه أفضل تقريب لـ e^x عند $(0, 1)$ بدالة ثابتة . الشكل البياني لـ $T_1(x)$ هو الخط المماس عند $(0, 1)$ ، وهو تقريب أفضل من $T_0(x)$ في جوار تلك النقطة ، وأفضل تقريب بمنحنى من الدرجة الأولى . القطع المكافئ $T_2(x)$ يوفق e^x أكثر من $T_1(x)$ في جوار النقطة $(0, 1)$ وهو أفضل لتقريبات من الدرجة الثانية . كثيرة حدود الدرجة الثالثة $T_3(x)$ لا تزال أفضل ، وهكذا .

اللوغاريتمات ، والعدد e وقيم الدوال المثلثية يمكن التقريب إليها لدرجة كبيرة من الدقة بمتسلسلات تايلور . القيمة المطلقة للفرق بين $T_n(x)$ و $f(x)$ هي الخطأ في التقريب للدالة $f(x)$ بحاصل الجمع الجزئي $T_n(x)$. هذا الخطأ هو :

$$|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)|$$

يندر أن يمكن إيجاد الخطأ بالضبط ، لكن عادة يمكننا إيجاد حد للخطأ وهذا يمكننا من معرفة دقة التقريب . إذا كان لقيمة x تحت الاعتبار $|R_n(x)| < b$ فإن $|f(x) - T_n(x)| < b$ وبالتالي

$$(2) \quad T_n(x) - b < f(x) < T_n(x) + b$$

بالكلمات ، الفرق بين $f(x)$ وتقريبها $T_n(x)$ أقل من b .

مثال ١ . قرب الى قيمة e .

متسلسلة مكلاورين للدالة e^x تتقارب لجميع x . كثيرة الحدود مكلاورين من الدرجة السابعة $T_7(x)$ المقربة لـ e^x هي

$$e^x \approx T_7(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}$$

بتعويض 1 لـ x ، نحصل على

$$\begin{aligned} e &\approx T_7(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} \\ &= 1 + 1 + 0.500000 + 0.166667 + 0.041667 + 0.008333 \\ &\quad + 0.001389 + 0.000198 \\ &= 2.718254. \end{aligned}$$

الفرق بين $f(x) = e^x$ و $T_7(x)$ يعطى الحد الباقي

$$R_7(x) = \frac{f^{(8)}(z)}{8!} x^8 = \frac{e^z}{8!} x^8$$

حيث $0 < z < x$. في حالتنا $x = 1$ ، يكون

$$|R_7(1)| = \frac{e^z}{8!} < \frac{e}{8!} < \frac{3}{40,320} < 0.0001$$

هذا يثبت أن الخطأ في تقريب e بـ $T_7(1)$ التي تساوى 2.718254 أقل من 0.0001 .

اذن من (٢) ، إذ أن $f(1) = e$ ، يكون

$$T_7(1) - 0.0001 < e < T_7(1) + 0.0001$$

$$2.718154 < e < 2.718354$$

وبالتقريب إلى ثلاثة أرقام عشرية ، نحصل على نفس العدد . واذن قيمة e صحيحة إلى ثلاثة أرقام عشرية هي 2.718 . متسلسلة e تتقارب بسرعة ، وباستخدام حدود إضافية قليلة يمكن تحسين الدقة لدرجة كبيرة .

مثال ٢ . أوجد $\sin 10^\circ$ صحيحة إلى أربعة أرقام عشرية . متسلسلة مكلاورين للدالة $\sin x$ هي

$$|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)|$$

التي تتقارب لجميع قيم x . يجب استخدام التقدير الدائري . الزاوية 10° تقديرها الدائري هو $\pi/18 = 10 \pi/180$. بتعويض هذه القيمة لـ x في متسلسلة $\sin x$ ، يكون لدينا

$$\sin \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{18} \right)^3 + \frac{1}{120} \left(\frac{\pi}{18} \right)^5 - \dots$$

$$(3) \quad \approx 0.174533 - 0.000886 + 0.000001 - \dots$$

لكي تكون القيمة العددية لـ $\sin 10^\circ$ صحيحة إلى أربعة أرقام عشرية ، يجب استخدام حدود كافية حتى لا يؤثر الخطأ على الرقم العشري الرابع . ولأن الحد الثالث في (3) لا يؤثر على الرقم العشري الرابع لحاصل الجمع ، فنحن نخمن أن حاصل جمع الحدين الأولين من (3) سيكون كافياً للدقة إلى أربعة أرقام عشرية . دعنا نرى ما إذا كنا على حق . حاصل جمع الحدين الأولين ($n=3$) هو

$$T_3 \left(\frac{\pi}{18} \right) = 0.173647$$

ولأن المتسلسلة متبدلة الإشارة ، يمكننا تجنب إيجاد قيمة الخطأ عن طريق حساب $|R_3(\pi/18)|$. إذ نلاحظ أن الخطأ يجب أن يكون أقل من أو يساوي الحد التالي من المتسلسلة 0.000001 . إذن

$$T_3 \left(\frac{\pi}{18} \right) - 0.000001 \leq \sin \frac{\pi}{18} \leq T_3 \left(\frac{\pi}{18} \right) + 0.000001$$

$$0.173646 \leq \sin \frac{\pi}{18} \leq 0.173648$$

وبالتقريب إلى أربعة أرقام عشرية ، نحصل على نفس العدد 0.1736 . فهذه هي قيمة $\sin(\pi/18)$ صحيحة إلى أربعة أرقام عشرية . لو كان حدان من (3) لا يكفيان للدقة إلى أربعة أرقام عشرية ، فإنه كان يمكننا جمع الحدود الثلاثة الأولى واستخدام الحد الرابع كمقياس للخطأ . في الواقع حاصل جمع الحدين الأولين يعطى $\sin 10^\circ$ صحيحاً إلى خمسة أرقام عشرية .

مثال 3 : أوجد $\cos 54^\circ$ صحيحاً لأربعة أرقام متتالية تيلور عشرية .

بالرغم من أنه يمكننا التعويض عن المكافئ نصف القطري للزاوية 54° في متتالية مكلوريان الخاصة بالدالة $\cos x$ ، فإن عدد الحدود المطلوب لأربعة أرقام عشرية يزيد عنه في حالة استخدام متتالية تيلور الخاصة بالدالة $\cos x$ لعدد a قريب من 54° . ووجب اختيار العدد a بحيث يمكن حساب قيمة مشتقات $\cos x$ عنده . يمكن اختيار قيمة a إما $\pi/4$ أو $\pi/3$ ، ولكن العدد الأخير أقرب إلى 54° وتتقارب المتتالية أسرع عند استعماله عما إذا استعملنا العدد الأول . وعلى هذا سنستعمل متتالية تيلور للدالة $\cos x$ عند $\pi/3$.

$$\begin{aligned} \cos x = & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{2!2} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^2 \\ & + \frac{\sqrt{3}}{3!2} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^3 + \frac{1}{4!2} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^4 - \dots \end{aligned}$$

وبالتعويض عن x بقيمة $54\pi/180$ ، وهو المكافئ نصف القطرى للزاوية 54° ، نحصل على :

$$\cos \frac{54\pi}{180} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{\pi}{30}\right) - \frac{1}{4} \left(-\frac{\pi}{30}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(-\frac{\pi}{30}\right)^3 + \frac{1}{48} \left(-\frac{\pi}{30}\right)^4 - \dots$$

$$(4) \quad = 0.500000 + 0.090690 - 0.002742 - 0.000166 + 0.000003 + \dots$$

الحد الباقي النونى هو :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{n+1} = \frac{\pm(\sin z \text{ or } \cos z)}{(n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{n+1}$$

وبالتالى :

$$(5) \quad \left| R_n \left(\frac{54\pi}{180} \right) \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\pi}{30} \right)^{n+1}$$

ولأن الحد الخامس لا يؤثر على الرقم العشرى الرابع ، فنحن نخمن أن حاصل جمع الحدود الأربعة الأولى من (4) سيعطى أربعة أرقام عشرية صحيحة . حاصل جمع الحدود الأربعة ($n = 3$) هو

$$T_3 \left(\frac{54\pi}{180} \right) = 0.587782$$

نعين ما إذا كان هذا صحيحاً إلى أربعة أرقام عشرية بإيجاد حد للخطأ . من (5) ،

$$\left| R_3 \left(\frac{54\pi}{180} \right) \right| \leq \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{30} \right)^4 \approx 0.000005$$

واذن

$$T_3 \left(\frac{54\pi}{180} \right) - 0.000005 \leq \cos \frac{54\pi}{180} \leq T_3 \left(\frac{54\pi}{180} \right) + 0.000005$$

$$0.587777 \leq \cos \frac{54\pi}{180} \leq 0.587787$$

ومنها

وبالتقريب الى أربعة أرقام عشرية نحصل على نفس العدد 0.5878 . هذه اذن هى قيمة $\cos 54^\circ$ صحيحة إلى أربعة أرقام عشرية .

مثال 4 . أوجد $\cos 54^\circ$ بخطأ يقل عن 0.0001 .

نشير إلى المثال السابق . الخطأ فى تقريب $\cos (54\pi/180)$ بـ $T_n(54\pi/180)$ هو $|R_n(54\pi/180)|$. يجب اختيار n بحيث أن $|R_n(54\pi/180)| < 0.0001$. هذا يمكن اجراؤه فقط

بالتجربة والخطأ . من (5) ، إذا كانت $n = 2$ ، يكون

$$\left| R_2 \left(\frac{54\pi}{180} \right) \right| \leq \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{30} \right)^3 \approx 0.00019$$

وهذا ليس صغيراً الصغر الكافى ، لكن إذا كانت $n = 3$ ، يكون

$$\left| R_3 \left(\frac{54\pi}{180} \right) \right| \leq \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{30} \right)^4 \approx 0.000005$$

وهذا صغير صغراً كافياً . بناء على ذلك ، حاصل جمع الحدود الأربعة الأولى من (٤) ،

$$T_3 \left(\frac{54\pi}{180} \right) = 0.587782$$

يقرب الى $\cos 54^\circ$ بخطأ يقل عن 0.0001 .

بسبب الأخطاء الناتجة عن تقريب الأرقام ، من الحكمة فى الحسابات العددية أن نأخذ على الأقل رقمين عشرين إضافيين زيادة عن الأرقام العشرية المطلوب أن تكون صحيحة فى النتيجة النهائية .

سبق أن ذكرنا أن تكاملات دوال كثيرة لا يمكن إيجادها بدلالة دوال مألوفة لنا . قاعدة شبه المنحرف هى إحدى طرق تقريب التكاملات المعينة لمثل هذه الدوال ، لكن لكثير من الدوال الهامة يكون من الأسهل الحصول على نفس الدرجة من الدقة باستخدام متسلسلات القوى . مثال ٥ . أوجد قيمة $\int_{1/2}^1 \frac{e^x}{x} dx$ باستخدام المتسلسلات ، ومجريا العمل حتى تصبح حدود المتسلسلة أقل من 0.005 .

متسلسلة مكلاورين لـ e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

تقارب الى e^x لجميع x فى فترة التكامل . نقسم على x ونكامل حداً حداً :

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^1 \frac{e^x}{x} dx &= \left[\ln x + x + \frac{x^2}{2!2} + \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^4}{4!4} + \dots \right]_{1/2}^1 \\ &= -\ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!2} \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) + \frac{1}{3!3} \left(1 - \frac{1}{2^3} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4!4} \left(1 - \frac{1}{2^4} \right) + \frac{1}{5!5} \left(1 - \frac{1}{2^5} \right) + \dots \\ &\approx 0.6932 + 0.5000 + 0.1875 + 0.0486 + 0.0098 \\ &\quad + 0.0016 + \dots \end{aligned}$$

حاصل جمع الحدود الخمسة الأولى هو 1.4391 الحدود بعد الخامس ، تقل عن 0.005 ، فيصرف النظر عنها . عملنا لا يؤكد أن 1.44 هى القيمة الصحيحة الى رقمين عشرين ، مع أنها هى كذلك ، لكننا سوف لا نجرى هنا تحليلاً للحد الباقي .

المتسلسلات تعطينا بديلاً لقاعدة لوبيتال لإيجاد قيم الصور غير المعينة .

$$\text{مثال ٦ . أوجد } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

متسلسلة مكلاورين للدالة $\sin x$ هى

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

بتعريف هذه لـ $\sin x$ في التعبير المعطى والاختصار ، نحصل على

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x} = \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) - x}{x^2 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)} \\ &= \frac{-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{x^3 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \right)} = \frac{-\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \dots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots} \end{aligned}$$

متسلسلة القوى تعرف دالة متصلة . إذن

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

ستكون قيمة هذا الكسر الأخير عند $x = 0$ ، وهي $-\frac{1}{6}$

مسائل

في المسائل الآتية ، يمكن افتراض أن متسلسلة تايلور للدوال المتضمنة تمثل الدوال .

أوجد كثيرة حدود تايلور من درجة n ، $T_n(x)$ ، عند a ، للدالة ، للعديدين المعطيين n و a .
 خطط الشكل البياني للدالة $f(x)$ وكثيرة الحدود المقربة $T_n(x)$. لاحظ دقة التقريب جوار النقطة $(a, f(a))$.

$$f(x) = \sin x; a = 0, n = 0, 1, 2, 3 \quad - \quad ٢ \quad f(x) = \cos x; a = 0, n = 0, 1, 2, 3, 4 \quad - \quad ١$$

$$f(x) = 1/x; a = 1, n = 0, 1, 2, 3 \quad - \quad ٤ \quad f(x) = \ln x; a = 1, n = 0, 1, 2, 3 \quad - \quad ٣$$

أوجد كثيرة حدود تايلور من درجة n ، $T_n(x)$ ، عند a ، المقربة للدالة ، للعديدين المعطيين n و a :

$$f(x) = x^2 + 2x + 3; a = 2, n = 1, 2, 3, 10 \quad - \quad ٥$$

$$f(x) = 4x^3 + x^2 - 3x - 8; a = 0, n = 1, 2, 3, 4 \quad - \quad ٦$$

$$f(x) = x^3 + 1; a = -2, n = 1, 2, 3, 4. \quad - \quad ٧$$

$$f(x) = 2x^3 + 2x^2 - x - 1; a = 1, n = 1, 2, 3, 4 \quad - \quad ٨$$

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 2; a = -1, n = 1, 2, 4, 6 \quad - \quad ٩$$

$$f(x) = 1/(x^2 - 1); a = 0, n = 0, 1, 2 \quad - \quad ١١ \quad f(x) = 1/(x + 3); a = 0, n = 0, 1, 2 \quad - \quad ١٠$$

$$f(x) = \sqrt{x+1}; a = 0, n = 0, 1, 2 \quad - \quad ١٣ \quad f(x) = 1/(x^2 - 1); a = \sqrt{2}, n = 0, 1, 2 \quad - \quad ١٢$$

$$f(x) = \sqrt{x+2}; a = 2, n = 0, 1, 2 \quad - \quad ١٤$$

١٥ - متسلسلة مكلاورين للدالة $\cos x$ هي

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

خطط الشكل البياني لـ $\cos x$ ولكثيرة الحدود المقربة $T_2(x) = 1 - x^2/2$. استخدم الأجزاء المقطوعة من $T_2(x)$ بالمحور السيني لإيجاد تقريب لـ π . كثرة الحدود $T_4(x) = 1 - x^2/2 + x^4/4!$ تكون تقريباً أفضل للدالة $\cos x$. استخدم أجزاءها المقطوعة بالمحور x لإيجاد تقريب أفضل لـ π .

١٦ - أثبت أنه في الفترة $[0, 0.5]$ تختلف $\sin x$ في القيمة المطلقة عن تقريبيها x الذي من الدرجة الأولى بما لا يزيد عن 0.13 . أثبت أنه في نفس الفترة تختلف $\sin x$ في القيمة المطلقة عن تقريبيها $x - x^3/3!$ الذي من الدرجة الثالثة بما لا يزيد عن 0.003 .

١٧ - أوجد حداً أعلى للقيمة المطلقة للفرق بين $\sin x$ وتقريبيها التكعيبي $x - x^3/3!$ في الفترة $[0, \pi/2]$.

١٨ - أوجد حداً للخطأ إذا كانت $\cos x$ لـ $0.1 \leq x \leq 0.1$ - استبدل بـ (أ) التقريب من الدرجة الثانية $1 - x^2/2!$ ، (ب) التقريب من الدرجة الرابعة .

١٩ - إذا كانت $|x| < 0.2$ ، أوجد حداً للخطأ إذا كانت $\sqrt{1+x}$ تستبدل بتقريبها الخطي $1 + x/2$.

٢٠ - لأي مدى لقيم x بين 2 و 1 يمكن أن تستبدل $\ln x$ بتقريبها الخطي $x - 1$ بخطأ يقل عن 0.2 ؟

٢١ - لأي مدى لقيم x بين 0° و 90° يمكن أن تستبدل $\sin x$ بتقريبها الخطي x بخطأ يقل عن 0.1 ؟ ما هو مدى قيم x إذا استخدم التقريب من الدرجة الثالثة $x - x^3/3!$ ؟

٢٢ - لأي مدى لقيم x بين 0° و 90° ستكون كثرة حدود مكلاورين من الدرجة الرابعة للدالة $\cos x$ تقرب $\cos x$ إلى أربعة أرقام عشرية صحيحة ؟

٢٣ - أوجد كثرة حدود من الدرجة الرابعة تعطي تقريباً جيداً للدالة $\cos x$ جوار $\pi/4$.

٢٤ - أوجد كثرة حدود تايلور من الدرجة الثالثة في $x - 1$ التي تقرب الدالة $1/(x+3)$. أثبت أن في الفترة $[0, 2]$ يختلف التقريب في القيمة المطلقة عن $1/(x+3)$ بما لا يزيد عن 0.005 .

٢٥ - كم حداً من متسلسلة مكلاورين للدالة e^x تكفي لحساب \sqrt{e} بخطأ يقل عن 0.01 ؟ بخطأ يقل عن 0.0001 ؟

٢٦ - كم حداً من متسلسلة مكلاورين للدالة $\sin x$ تكفي لحساب $\sin 0.2$ بخطأ يقل عن 10^{-6} ؟

٢٧ - كم حداً من متسلسلة تايلور عند 1 للدالة $\ln x$ تكفي لحساب $\ln 0.9$ بخطأ يقل عن 0.00001 ؟

٢٨ - إذا أردنا حساب $\sin 70^\circ$ بخطأ يقل عن 0.00001 فكم حداً من متسلسلة مكلاورين للدالة $\sin x$ تكفى لاجراء ذلك ؟ إذا استخدمنا متسلسلة تايلور عند $\pi/3$ للدالة $\sin x$ فكم حداً تكفى ؟

قرب الى ما يأتى باستخدام كثيرة حدود تايلور من درجة n عند العدد a ، للقيمتين المعطيتين n و a . اجر الحسابات الى أربعة أرقام عشرية .

$$\sqrt{e}; a=0, n=4 - ٢٩ \quad \ln 0.7; a=1, n=4 - ٣٠ \quad \tan^{-1} 0.2; a=0, n=5 - ٣١$$

$$\sin 48^\circ; a=\pi/4, n=3 - ٣٣ \quad \cos 5^\circ; a=0, n=4 - ٣٢$$

قرب الى ما يأتى باستخدام كثيرة حدود تايلور من درجة n عند العدد a ، للقيمتين المعطيتين n و a . اجر الحسابات الى أربعة أرقام عشرية . أوجد حداً للخطأ .

$$\sin 20^\circ; a=0, n=3 - ٣٦ \quad e^{1.2}; a=0, n=6 - ٣٥ \quad e^{1.2}; a=0, n=4 - ٣٤$$

$$\ln 1.05; a=0, n=3 - ٣٩ \quad \ln 1.2; a=0, n=5 - ٣٨ \quad \cos 0.2; a=0, n=4 - ٣٧$$

$$\cos 35^\circ; a=\pi/6, n=3 - ٤١ \quad \ln 1.3; a=1, n=4 - ٤٠$$

أحسب ما يأتى صحيحاً الى m رقماً عشرياً للقيمة المعطاة m .

$$\sqrt[3]{e}, m=3 - ٤٤ \quad \frac{1}{e}, m=4 - ٤٣ \quad e, m=6 - ٤٢$$

$$\tan^{-1} 0.3, m=4 - ٤٧ \quad \sin 32^\circ, m=4 - ٤٦ \quad \cos (-3^\circ), m=4 - ٤٥$$

٤٨ - الدالة $J_0(x)$ المعروفة بالمتسلسلة

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \dots + \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \dots$$

تسمى دالة بسل من رتبة صفر . احسب $J_0(1)$ صحيحة الى أربعة أرقام عشرية أوجد متسلسلة القوى لكل من المتكاملين الآتين :

$$\int_0^1 \sin \sqrt{x} dx - ٥٠ \quad \int_1^x \frac{e^{t^3}}{t} dt - ٤٩$$

أوجد التكاملات الآتية باستخدام المتسلسلات مجريا الحسابات الى أن تصبح حدود المتسلسلة أقل من 0.005 .

$$\int_{0.1}^{0.5} \frac{\cos x}{x} dx - ٥٤ \quad \int_{0.1}^{0.4} \frac{e^{-z}}{z} dz - ٥٣ \quad \int_{0.1}^{0.5} \frac{\ln(x+1)}{x} dx - ٥٢ \quad \int_0^{0.2} e^{x^2} dx - ٥١$$

أوجد التكاملات الآتية بخطأ E يقل عن العدد المعطى :

$$\int_{1/10}^1 e^{-x^2} dx; E < 0.001 - ٥٦ \quad \int_0^{0.1} e^{-x^2} dx; E < 0.000005 - ٥٥$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^{-x}-1}{x} dx; E < 0.0005 & - ٥٨ & \int_0^1 \sin t^2 dt; E < 0.0001 & - ٥٧ \\ \int_0^{0.5} \cos \sqrt{y} dy; E < 0.0001 & - ٦٠ & \int_0^{1/2} \frac{\ln(1+u)}{u} du; E < 0.005 & - ٥٩ \end{aligned}$$

أوجد النهايات الآتية باستخدام المتسلسلات

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} & - ٦٣ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} & - ٦٢ & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} & - ٦١ \\ \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\ln r}{r-1} & - ٦٦ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{3x^2} & - ٦٥ & \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \cos z - 2 + z^2}{z^4} & - ٦٤ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x} & - ٦٩ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^k} & - ٦٨ & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t - \sin t}{t^3} & - ٦٧ \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 3y}{\sin y + \sin 4y} & - ٧٢ & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) & - ٧١ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} & - ٧٠ \\ & & \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{\ln z} \int_z^1 \frac{e^x - 1}{x} dx & - ٧٤ & \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\ln u} \int_u^1 \frac{\cos z}{z} dz & - ٧٣ \end{aligned}$$

٦-١٦

نظرية ومتسلسلة ذات الحدين

مفكوك الدالة $(1+x)^n$ كمتسلسلة قوى له أهمية خاصة . لدينا

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^n, & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= n(1+x)^{n-1}, & f'(0) &= n, \\ f''(x) &= n(n-1)(1+x)^{n-2}, & f''(0) &= n(n-1), \\ f'''(x) &= n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}, & f'''(0) &= n(n-1)(n-2), \\ & \dots & & \dots \\ f^{(r)}(x) &= n(n-1)(n-2) \dots (n-[r-1])(1+x)^{n-r}, & f^{(r)}(0) &= n(n-1)(n-2) \dots (n-[r-1]). \end{aligned}$$

متسلسلة مكثورين لـ $(1+x)^n$ هي

$$\begin{aligned} (1) \quad (1+x)^n &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 \\ &+ \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-[r-1])}{r!} x^r + \dots \end{aligned}$$

المتسلسلة على اليمين تسمى متسلسلة ذات الحدين لـ $(1+x)^n$. حيث أننا أوجدنا المتسلسلة كمجرد متسلسلة مكلورين لـ $(1+x)^n$ ، فيجب علينا أن نثبت أنها تتقارب الى $(1+x)^n$ وأن نبرر علامة التساوى فى (١) . الحالان ، n عدد صحيح موجب ، n ليست عدداً صحيحاً موجباً ، تؤديان الى موقفين مختلفين تماماً .

إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً ، فإن مفكوك $(1+x)^n$ سيكون بالبديهة متعددة حدود من الدرجة n . ويكون معامل x^{n+1} فى (١) وجميع المعاملات التالية له صفراً ، وتنتهى المتتالية بالحد x^n فتصبح .

$$(٢) \quad (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 \\ + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-[r-1])}{r!} x^r \\ + \dots + x^n$$

وبالرغم من أن المعاملات تبدو وكأنها قد ازدادت تعقيدا ، فإنها فى الواقع تصبح أبسط بعد الحد الأوسط أو الحدود الوسطى (أنظر آخر سطر فى مثال ١) . ولما كان الطرف الأيمن من (٢) هو متعددة حدود مكلورين من الدرجة n للدالة $f(x) = (1+x)^n$ ، فإن (٢) تصبح معادلة صحيحة إذا أضيف حد الباقي .

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

إلى متعددة الحدود . ولما كانت $f^{(n+1)}(x) = 0$ لجميع قيم x ، فإن $R_n(x) = 0$ وتصبح متعددة الحدود فى (٢) مساوية $(1+x)^n$ لجميع قيم x .

تسمى الصيغة (٢) التى تعبر عن $(1+x)^n$ ، حيث n عدداً صحيحاً موجباً ، فى شكل متعددة حدود فى x نظرية ذات الحدين . وقد اكتشفها نيوتن . وتكون معاملات الحدود أعداداً صحيحة وتسمى معاملات ذات الحدين . ويعبر عن معاملات x^r عادة بطريقة مريحة بالصورة $\binom{n}{r}$ ، بحيث يكون :

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!}, \dots, \\ (٣) \quad \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-[r-1])}{r!}, \dots, \\ \binom{n}{n-1} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots 2}{(n-1)!} = n, \quad \binom{n}{n} = 1.$$

وبهذه الطريقة فى التدوين ، يكتب مفكوك $(1+x)^n$ المذكور فى (٧) كالآتى :

$$\begin{aligned} (٤) \quad (1+x)^n &= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{r} x^r + \dots \\ &\quad + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + \binom{n}{n} x^n. \end{aligned}$$

الصيغة المعتادة لنظرية ذات الحدين تعميم بسيط للتعبير المذكور فى (٧) :

١٦ - ٦ نظرية ذات الحدين :

لأى عددين a, b و عدد صحيح موجب n .

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \\ &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 \\ &\quad + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-[r-1])}{r!} a^{n-r} b^r \\ &\quad + \dots + nab^{n-1} + b^n. \end{aligned}$$

البرهان . ضع $x = b/a$ فى المعادلة (٤) واضرب كلا طرفى المعادلة فى a^n .

$$a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = a^n \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \frac{b^r}{a^r}$$

وهذا يعطى فوراً

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

مثال ١ . فك $(a-b)^8$

من نظرية ذات الحدين ١٦ - ٦ نحصل على

$$\begin{aligned}
(a-b)^8 &= (a+(-b))^8 = \sum_{r=0}^8 \binom{8}{r} a^{8-r} (-b)^r \\
&= a^8 + 8a^7(-b) + \frac{8 \cdot 7}{2!} a^6(-b)^2 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} a^5(-b)^3 \\
&\quad + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} a^4(-b)^4 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5!} a^3(-b)^5 \\
&\quad + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6!} a^2(-b)^6 \\
&\quad + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{7!} a(-b)^7 \\
&\quad + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8!} (-b)^8 \\
&= a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 \\
&\quad - 8ab^7 + b^8.
\end{aligned}$$

بضرب كلا من بسط ومقام الكسر الموجود في الطرف الأيمن من (٣) في $(n-r)!$ نحصل على صورة أخرى للتعبير $\binom{n}{r}$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

لقيم n و $r = 0, 1, 2, \dots$. ويتضح من هذا أن $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ لقيم n و $r = 0, 1, 2, \dots$. وبين هذا أن المعاملات الموجودة على مسافات متساوية من طرفي مفكوك ذات الحدين للتعبير $(a+b)^n$ متساوية (أنظر مثال ١).

لمعاملات ذات الحدين خواص هامة كثيرة كما تظهر في فروع أخرى من فروع الرياضات، وبصفة خاصة نظرية الاحتمالات. فمثلاً، $\binom{n}{r}$ هو عدد الطرق التي يمكن بها اختيار r أشياء من مجموعة n من الأشياء.

نعود الآن إلى الحالة التي فيها الأس n في التعبير $(1+x)^n$ ليس عدداً صحيحاً موجباً. المتتالية المذكورة في (١) لا تنتهي في هذه الحالة (إلا في الحالة التافهة عندما تكون $n = 0$) ولكن تكون لا نهائية. عندما لا تكون n عدداً صحيحاً موجباً يسمى معامل x^r ، b_r بدلاً من $\binom{n}{r}$ ، بحيث يكون $b_0 = 1$ و $b_1 = n$

$$b_r = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-[r-1])}{r!}, \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

وبهذه الطريقة فى التدوين تصبح (١) $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r$. ولما كان

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{r+1} x^{r+1}}{b_r x^r} \right| &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{n(n-1) \cdots (n-[r-1])(n-r)}{(r+1)!} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{r!}{n(n-1) \cdots (n-[r-1])} x \right| \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{n-r}{r+1} x \right| = |x|, \end{aligned}$$

فإن اختبار النسبة يظهر أن (١) تتقارب لقيم $-1 < x < 1$ وتتباعدها إذا كانت $|x| > 1$ وسنبين أن المتتالية تتقارب إلى $(1+x)^n$ إذا كانت $-1 < x < 1$. وليس من السهل بيان ذلك ببيان أن $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ كما فعلنا فى متتالية تيلور للدالة e^x ودوال أخرى . ومنستعمل طريقة أبسط وإن كانت أقل مباشرة .

لتكن الدالة التى تتقارب إليها $\sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r$ أى أن ،

$$(٥) \quad g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_r x^r + \cdots$$

لـ $-1 < x < 1$. ستثبت أن $g(x) = (1+x)^n$. داخل فترة التقارب ، متسلسلة مشتقات حدود (٥) ستقارب إلى $g'(x)$. أى أن ،

$$g'(x) = b_1 + 2b_2 x + \cdots + r b_r x^{r-1} + (r+1) b_{r+1} x^r + \cdots$$

واذن

$$x g'(x) = b_1 x + 2b_2 x^2 + \cdots + r b_r x^r + \cdots$$

بجمع هاتين المتسلسلتين ، يكون

$$(1+x)g'(x) = b_1 + (2b_2 + b_1)x + \cdots + [(r+1)b_{r+1} + r b_r]x^r + \cdots$$

الآن

$$\begin{aligned} &(r+1)b_{r+1} + r b_r \\ &= (r+1) \frac{n(n-1) \cdots (n-[r-1])(n-r)}{(r+1)!} \\ &\quad + r \frac{n(n-1) \cdots (n-[r-1])}{r!} \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-[r-1])}{r!} (n-r+r) = n b_r \end{aligned}$$

$$(1+x)g'(x) = b_1 + nb_1x + nb_2x^2 + \dots + nb_r x^r + \dots$$

$$= b_1 + n(g(x) - b_0) = ng(x),$$

إذ أن $b_1 = n$ و $b_0 = 1$. بضرب طرفي هذه المعادلة في $(1+x)^{-n-1}$ ، الذي لا يكون صفرًا أبدًا لأن $x > -1$ ، يكون لدينا

$$(1+x)^{-n}g'(x) - n(1+x)^{-n-1}g(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx} [(1+x)^{-n}g(x)] = 0 \quad \text{أي}$$

هذا يتضمن أن $(1+x)^{-n}g(x) = k$ لثابت ما k . هذه المعادلة صحيحة لجميع $-1 < x < 1$.
ال ثابت k يمكن تعيينه بتعويض $x = 0$ في المعادلة ، وهذا يعطي $k = g(0)$ لكن من (٥) :
 $g(0) = b_0 = 1$. إذن $k = 1$ وبالتالي $g(x) = (1+x)^n$ وهذا ما كنا نريد اثباته .

عندما لا تكون n عدداً صحيحاً موجباً ، رأينا أن (١) تكون صحيحة لـ $-1 < x < 1$ وأن المتسلسلة تتباعد لـ $|x| > 1$. التقارب عند النقطتين الطرفيتين ليس من السهل تحديده ويعتمد على قيمة n . يمكن اثبات أن إذا كانت $n \leq -1$ ، فإن المتسلسلة تتباعد لـ $x = \pm 1$ ولا يمكنها تمثيل $(1+x)^n$ ؛ وإذا كانت $-1 < n < 0$ ، فإن (١) تكون صحيحة عند $x = 1$ ، لكن المتسلسلة تتباعد لـ $x = -1$ ؛ وإذا كانت $n > 0$ ، فإن (١) تكون صحيحة عند $x = \pm 1$.

مثال ٢ . أوجد مفكوك $1/(\sqrt[3]{1+2x})$ كمتسلسلة .
لدينا ، باستخدام (١)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+2x}} = (1+2x)^{-1/3}$$

$$= 1 - \frac{1}{3}(2x) + \frac{-\frac{1}{3}(-\frac{4}{3})}{2!} (2x)^2$$

$$+ \frac{-\frac{1}{3}(-\frac{4}{3})(-\frac{7}{3})}{3!} (2x)^3 + \frac{-\frac{1}{3}(-\frac{4}{3})(-\frac{7}{3})(-\frac{10}{3})}{4!} (2x)^4 + \dots$$

$$= 1 - \frac{2}{3}x + \frac{8}{9}x^2 - \frac{14}{27}x^3 + \frac{80}{243}x^4 - \dots$$

المتسلسلة تتقارب وتمثل $1/(\sqrt[3]{1+2x})$ لـ $-1 < 2x < 1$ ، أي لـ $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. من ملاحظتنا في الفترة السابقة ، يمكن إمتداد الفترة لتشمل $1/2$ ولكن ليس $-1/2$.

مثال ٣ . أوجد مفكوك $\sqrt{3+u}$ كمتسلسلة .

بأخذ العامل 3 خارج الجذر يمكن استخدام متسلسلة ذات الحدين ، ويكون

$$\sqrt{3+u} = \sqrt{3} \left(1 + \frac{u}{3}\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{3} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{3}\right) + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!} \left(\frac{u}{3}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!} \left(\frac{u}{3}\right)^3 + \dots\right]$$

المتسلسلة تتقارب لـ $-3 \leq u \leq 3$.

مثال ٤ . قرب الى قيمة $\sqrt{11}$ باستخدام المتسلسلات . متسلسلة ذات الحدين للدالة $\sqrt{1+x}$ هي

$$(6) \quad (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}x^3 + \dots$$

لا يمكننا حساب $\sqrt{11}$ بوضع $x = 10$ في هذه المتسلسلة إذ أنها تتباعد هناك . لكن يمكننا كتابة

$$\sqrt{11} = \sqrt{100(\frac{11}{100})} = \frac{1}{10}\sqrt{1100}$$

واستخدام (٦) حيث $x = -\frac{1}{100}$. إذا أجرينا ذلك ، يكون

$$\begin{aligned} \sqrt{11} &= \frac{1}{10}[1 + \frac{1}{2}(-\frac{1}{100}) - \frac{1}{8}(-\frac{1}{100})^2 + \frac{1}{16}(-\frac{1}{100})^3 - \dots] \\ &= \frac{1}{10}[1 - 0.005 - 0.0000125 - 0.0625(10^{-6}) - \dots] \\ &= 3.316625. \end{aligned}$$

الحدود بعد الثالث لا تؤثر على الرقم العشري السادس ، لكن ليس لدينا ما يؤكد الدقة الى هذا العدد الكبير من الأرقام العشرية ، إذ أن المتسلسلة ليست متباعدة الاشارة ولم نفحص الحد الباقي .

مثال ٥ . أوجد متسلسلة قوى لـ $\sin^{-1}x$.

المشتقات العالية لـ $\sin^{-1}x$ ليس من السهل ايجادها . بما أن

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

سوف لا يوجد متسلسلة $\sin^{-1}x$. باستخدام نظرية تايلور بل باجراء تكامل مذكور ذات الحدين لـ $(1-x^2)^{-1/2}$. لدينا

$$\begin{aligned} (1-t^2)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2}(-t^2) + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})}{2!}(-t^2)^2 + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}(-t^2)^3 \\ &\quad + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})}{4!}(-t^2)^4 + \dots, \quad -1 < t < 1. \end{aligned}$$

واذن

$$\begin{aligned} \sin^{-1}x &= \int_0^x (1-t^2)^{-1/2} dt \\ &= x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{x^9}{9} + \dots, \\ &\quad -1 < x < 1. \end{aligned}$$

المتسلسلة أيضاً تمثل $\sin^{-1}x$ عند النقطتين الطرفيتين ± 1 ، لكن سوف لا نثبت ذلك .

مسائل

أوجد مفكوك المقادير الآتية بنظرية ذات الحدين :

$$1. (a+b)^2 - 1 \quad 2. (a+b)^3 - 1 \quad 3. (a-b)^2 - 1$$

$$4. (1+2z)^4 - 1 \quad 5. (2-c)^3 - 1 \quad 6. (2x+3y)^2 - 1$$

٧ - أوجد معامل x^{23} في مفكوك $(1+x)^{27}$.

٨ - أثبت أن $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

٩ - (أ) أثبت أن $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$. (ب) أثبت نظرية ذات الحدين ،

$$(٧) \quad (a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

حيث n عدد صحيح موجب بدون استخدام نظرية تايلور . (إرشاد : استخدام الاستنتاج الرياضي . افرض أن (٧) صحيحة عند $n=k$. أضرب طرفي المعادلة في $a+b$ وأثبت أن (٧) تكون صحيحة عند $n=k+1$.

١٠ - أثبت قاعدة القوة $Dx^n = nx^{n-1}$ حيث n عدد صحيح موجب ، من التعريف

$$Dx^n = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

استخدم متسلسلة ذات الحدين لإيجاد مفكوك كل من الدوال الآتية . كمتسلسلة قوى وأوجد فترة تقاربها :

$$-١١ \quad \frac{1}{1-x} \quad -١٢ \quad \frac{1}{x+2} \quad -١٣ \quad \frac{1}{1+x^2} \quad -١٤ \quad (1+x)^{-2} \quad -١٥ \quad \left(1+\frac{y}{3}\right)^{3/2}$$

$$-١٦ \quad (1+t)^{1/5} \quad -١٧ \quad \sqrt{1+x^3} \quad -١٨ \quad \sqrt{1-2y} \quad -١٩ \quad \frac{1}{(1+u)^{3/5}} \quad -٢٠ \quad \frac{2x}{\sqrt{1-x}}$$

$$-٢١ \quad \frac{1}{(1+3t)^3} \quad -٢٢ \quad \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \quad -٢٣ \quad \frac{(1-w^2)^{4/3}}{w} \quad -٢٤ \quad \sqrt{2+z} \quad -٢٥ \quad \sqrt[3]{y+2}$$

$$-٢٦ \quad z(8-z)^{2/3} \quad -٢٧ \quad u^2\sqrt{2+5u} \quad -٢٨ \quad \frac{1}{(2+w)^{2/4}} \quad -٢٩ \quad \frac{u+2}{u-1} \quad -٣٠ \quad \frac{1+x}{1-2x^2}$$

٣١ - أوجد مفكوك $\sqrt{3+\sin^2 x}$ بدلالة قوى $\sin x$. لأي قيم x تتقارب المتسلسلة ؟

٣٢ - أوجد مفكوك $1/(1-x)$ كمتسلسلة قوى في $1/x$. لأي قيم x تتقارب المتسلسلة ؟

٣٣ - أوجد مفكوك $\sqrt{x-3}$ كمتسلسلة قوى في $1/x$. لأي قيم x تمثل المتسلسلة $\sqrt{x-3}$ ؟

٣٤ - أوجد متسلسلة لـ $\sec^{-1}x, x>1$ في قوى $1/x$ الى الحد الذي يشتمل على $1/x^9$ باجراء تكامل المتسلسلة لمشتقة $\sec^{-1}x$ من x الى ∞ (إرشاد :

$$(\sqrt{x^2-1} = x\sqrt{1-1/x^2})$$

٣٥ - في نهاية البند ٧ - ٥ أثبتنا أن $e = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t}$. احسب قيمة e بإيجاد مفكوك $(1+t)^{1/t}$

كمتسلسلة ذات الحدين الى الحد الخامس وأخذ $t = 0.001$.

٣٦- أثبت أن

$$0 = 1 - n + \frac{n(n-1)}{2!} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \dots$$

لأي عدد $n > 0$.

٣٧- أثبت أن

$$2^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \dots$$

لأي عدد $n > -1$.

أوجد التكاملات الآتية باستخدام متسلسلة ذات الحدين . أجز الحساب الى أن تصبح حدود المتسلسلة أقل من 0.005 .

$$٣٨ - \int_0^{1/2} \frac{u}{1+u^3} du \quad ٣٩ - \int_{-0.1}^{0.5} \sqrt{1+y^3} dy \quad ٤٠ - \int_0^{0.2} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

$$٤١ - \int_0^{1/2} \sqrt{4-z^3} dz \quad ٤٢ - \int_0^{1/3} (1+2\sqrt{x})^{3/2} dx \quad ٤٣ - \int_0^{0.3} \frac{dx}{\sqrt{4-e^x}}$$

٤٤- أوجد متسلسلة للتكامل $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{a+t^3}}$, $a > 0$. لأي قيم x تكون المتسلسلة صحيحة (أحذف النقطتين الطرفيتين) ؟

٤٥- التكامل $\int_2^{10} \sqrt{1+x^4} dx$ لا يمكن إيجاد قيمته بإيجاد مفكوك $\sqrt{1+x^4}$ كمتسلسلة ذات الحدين لأي مدى التكامل خارج فترة تقارب المتسلسلة . هذه الصعوبة يمكن تجنبها بكتابة $\sqrt{1+x^4} = x^2 \sqrt{1+1/x^4}$. أوجد قيمة التكامل صحيحة الى رقمين عشريين .

٤٦- احسب قيمة $\int_0^{10} \sqrt{1+x^4} dx$ صحيحة الى رقم عشري واحد . (ارشاد : أنظر المسألة ٤٥) .

أوجد النهايات الآتية مستخدماً المتسلسلات :

$$٤٧ - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \quad ٤٨ - \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-z^2}-1}{z} \quad ٤٩ - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+t}-(1+t/2)}{t^2}$$

باستخدام متسلسلة ذات الحدين ، أوجد قيمة تقريبية للأعداد الآتية . أجز الحساب الى أن تصبح حدود المتسلسلة أقل من 0.0005 .

$$٥٠ - \frac{1}{412} \quad (\text{ارشاد : } \frac{1}{412} = \frac{1}{400+12} = \frac{1}{400} \frac{1}{1+\frac{3}{100}})$$

$$٥١ - \sqrt{98} \quad (\text{ارشاد : } \sqrt{98} = \sqrt{100-2} = 10\sqrt{1-\frac{1}{50}})$$

٥٢ - $\sqrt{2}$ (ارشاد : رغم أن $\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$ ، لتقارب أسرع اكتب $\sqrt{2} = \sqrt{\frac{49}{25}(\frac{50}{49})} = \frac{7}{5}(\frac{50}{49})^{-1/2} = \frac{7}{5}(1-\frac{1}{50})^{-1/2}$)

$$٥٣ - \sqrt[3]{130} \quad (\text{ارشاد : } \sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125+5} = 5\sqrt[3]{1+\frac{1}{25}})$$

$$. (\sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{125(\frac{100}{125})} = 5\sqrt[3]{\frac{100}{125}} = 5\sqrt[3]{1-\frac{1}{125}} \quad : \text{ارشاد} \quad \sqrt[3]{100} - 54$$

$$. \left(\frac{1}{\sqrt[4]{15}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16-1}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{1-\frac{1}{16}}} \right) : \text{ارشاد} \quad \frac{1}{\sqrt[4]{15}} - 55$$

$$\frac{1}{\sqrt{412}} - 59$$

$$124^{1/3} - 58$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}} - 57$$

$$\sqrt{\frac{11}{10}} - 56$$

$$\sqrt[3]{620} - 63$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{990}} - 62$$

$$\frac{1}{34^{1/5}} - 61$$

$$\sqrt{40} - 60$$

تذييل الهندسة التحليلية

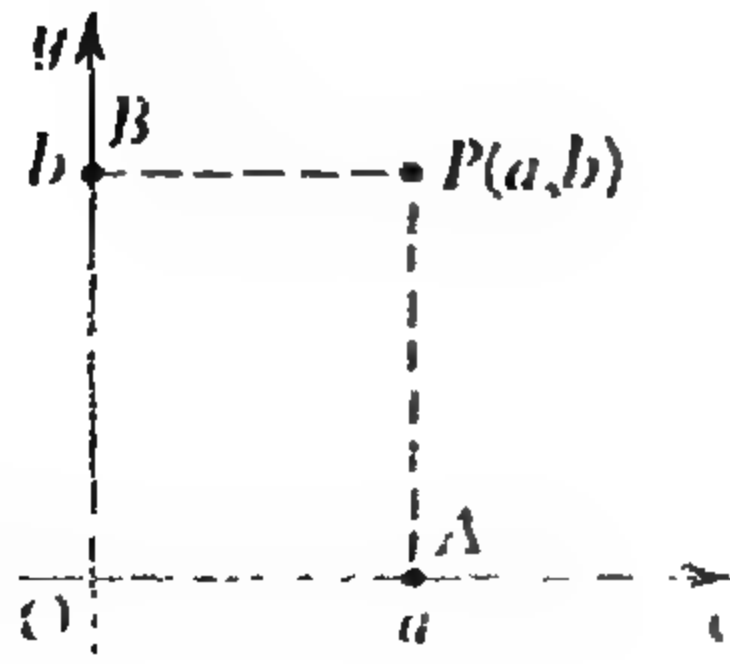
ت- ١

مستوى الاحداثيات

الهندسة التحليلية هي دراسة الهندسة بواسطة الجبر . ونظراً لأنها طريقة فعالة فقد ساهمت منذ ادخالها في أوائل القرن السابع عشر بجزء كبير من التقدم في الهندسة . ومن ناحية أخرى ، الهندسة التحليلية يمكن استخدامها في تمثيل المعادلات الجبرية هندسياً بواسطة المنحنيات وفي توضيح بعض المفاهيم في حساب التفاضل والتكامل وصفيًا .

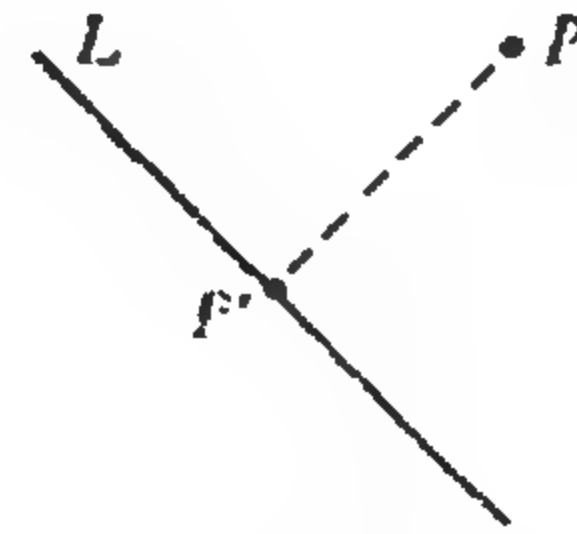
والهندسة التحليلية ، كغالبية الأفكار الرياضية العظيمة ، لم تكن من اختراع شخص واحد بل تطورت تدريجياً خلال فترة طويلة . والشخصان اللذان قاما فعلاً بتطويرها ، وأوصلها إلى صورتها الحالية هما الرياضي الفرنسي (1601-1665) Pierre de Fermat والفيلسوف والرياضي الفرنسي (1596-1650) René Descartes .

الفكرة الأساسية للهندسة التحليلية ، وابتكار ديكارت ، هي تمييز كل نقطة في المستوى بزواج من الأعداد يسمى احداثياتها . قبل وصف ذلك يجب علينا تعريف مصطلح . مسقط النقطة P على المستقيم L هو موقع العمود من P على L . هذا هو النقطة P' في الشكل ت- ١ . إذا كانت P تقع على L ، فإن مسقطها على L هو P ذاتها . نعود إلى الاحداثيات ، نختار خطي احداثيات في المستوى يتقاطعان على التعامد عند نقطة الأصل المشتركة لهما* . من المناسب أن نفترض أنهما متجهان كما في الشكل ت- ٢ . الخط الأفقي يسمى عادة المحور x والخط الرأسى يسمى المحور y .



شكل ت- ٢

احداثيات P هما احداثيات مسقط P على المحورين



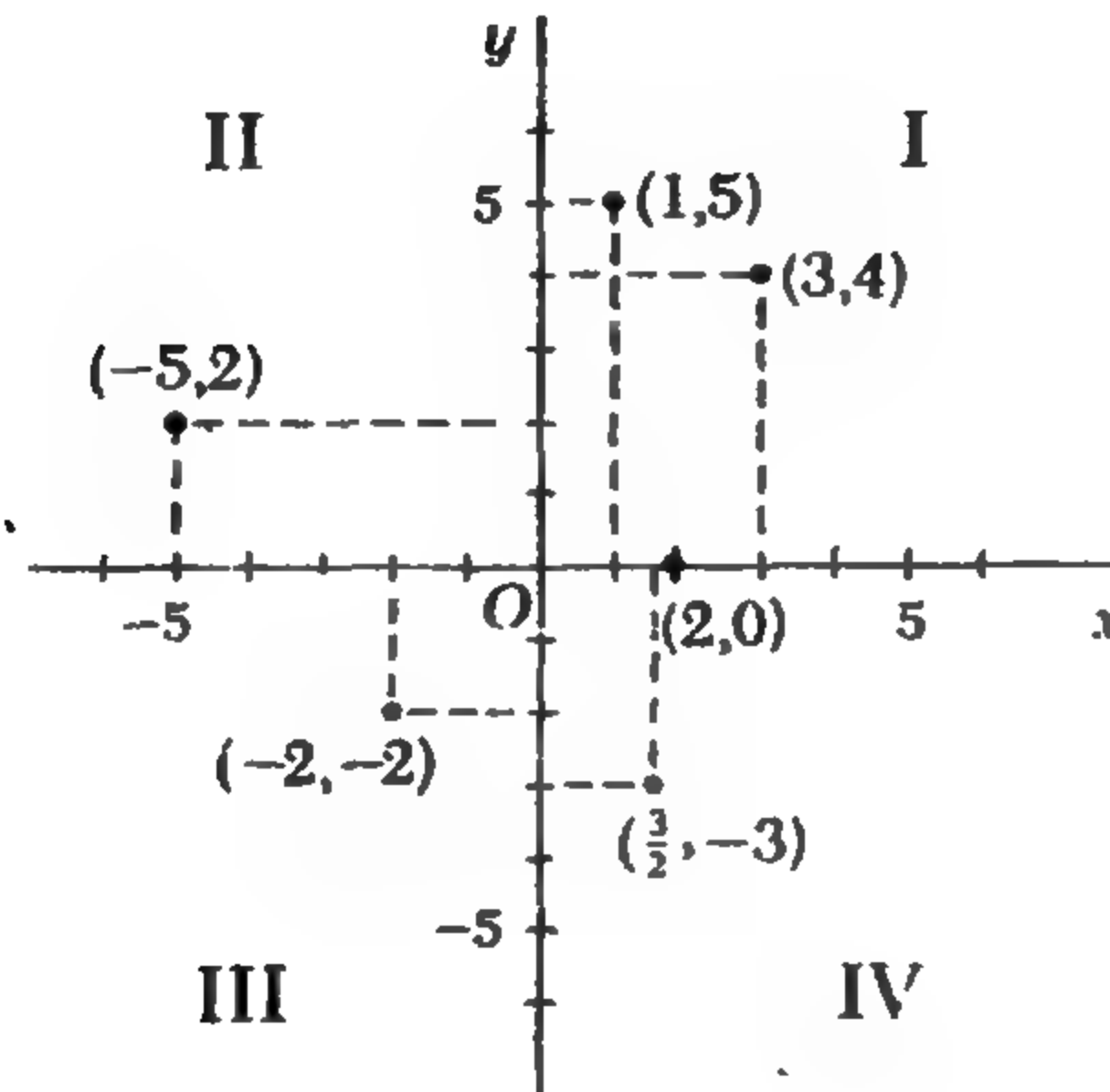
شكل ت- ١

P' هي مسقط P على L .

* خطوط الاحداثيات شرحت في البند : ٢ -

لأي نقطة P في المستوى ، لتكن A و B مسقطي P على المحورين x و y . النقطتان A و B الواقعتان على خطي الاحداثيات ، لهما عدداً a و b ، على الترتيب ، كأحداثيات . العدداً b و a ، بهذا الترتيب ، يسميان إحداثيي P ، ونكتب $P(a,b)$ للإشارة إلى ذلك العدد a هو الإحداثي x للنقطة P ، والعدد b هو الإحداثي y لها .

بهذه الطريقة ، يخص كل نقطة في المستوى زوج مرتب من الأعداد (a, b) . أيضاً ، لكل زوج مرتب من الأعداد (a, b) توجد نقطة واحدة ، وواحدة فقط ، في المستوى إحداثياتها هذان العدداً . نقصد بالزوج المرتب من الأعداد أن الترتيب الذي يكتب به العدداً له أهميته . فالزوج المرتب $(4, 7)$ يختلف عن الزوج المرتب $(7, 4)$. بعض النقط وإحداثياتها موضحة في الشكل ب-٣ . هذا الربط بين الأزواج المرتبة من الأعداد وبين النقط يسمى نظاماً من الإحداثيات المتعامدة أو الإحداثيات الكارتيذية ، كما يسمى المستوى الإحداثيات . النقطة $O(0, 0)$ تسمى نقطة الأصل لنظام الإحداثيات . للاختصار نقول عادة « النقطة (a, b) » بدلا من « النقطة التي إحداثياتها (a, b) » .



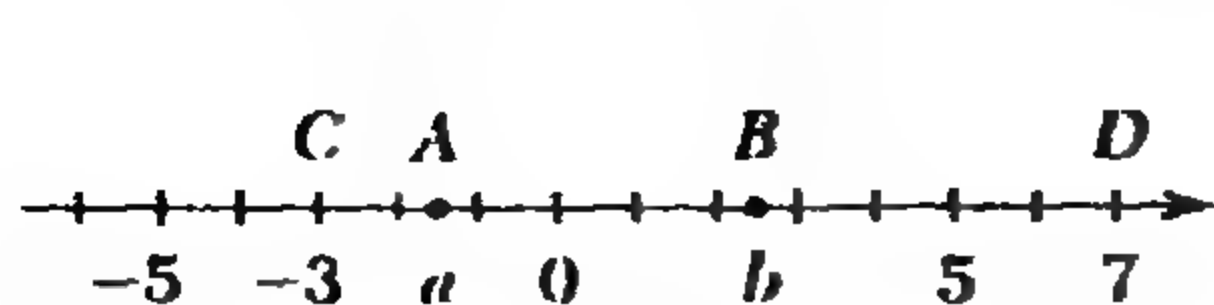
شكل ب-٣

الإحداثيان x و y لنقطة هما المسافتان الموجهتان من المحورين إلى النقطة x و y .

المحوران يقسمان المستوى إلى أربع مناطق تسمى أرباعاً ، مرقمة بأعداد رومانية كما هو موضح في الشكل ب-٣ . المحوران نفسيهما لا يقعان في أي ربع .

المسافة $|AB|$ بين نقطتين A و B على خط الإحداثيات إحداثياتهما a و b عرفت في بند ١-٥ بأنها $|AB| = |b - a|$. بالإضافة إلى هذه المسافة العادية من المناسب أن نتحدث عن المسافة الموجهة من نقطة إلى أخرى .

ت - ١ تعريف . لتكن A و B نقطتين على خط الاحداثيات احداثياتهما a و b (شكل ت - ٤) .
المسافة الموجهة من A الى B يرمز لها بالرمز \overline{AB} وتعرف بأنها $\overline{AB} = b - a$ ففى الشكل ت - ٤ .



شكل ت - ٤

$$\overline{CD} = 7 - (-3) = 10$$

لكن

$$\overline{DC} = -3 - 7 = -10$$

المسافة بين C و D هي

$$|CD| = |DC| = |7 - (-3)| = 10$$

المسافة الموجهة \overline{AB} تكون موجبة إذا كانت B تقع على يمين A وتكون سالبة إذا كانت B تقع على يسار A . الواضح أن $\overline{BA} = -\overline{AB}$ لكل نقطتين A و B . وايضاً صحيح أن لكل ثلاث نقط C و B و A على خط الاحداثيات

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$$

ت - ٢

هذا واضح إذا كانت النقطة فى الترتيب A, C, B لكن ليس واضحاً تماماً إذا اختلط الترتيب . لكن يمكن اثباته بسهولة باستخدام تعريف المسافة الموجهة . ليكن احداثى C هو c . فيكون

$$\overline{AB} = b - a, \overline{AC} = c - a \text{ و } \overline{CB} = b - c$$

وبما أن

$$b - a = (c - a) + (b - c)$$

فاننا نحصل على المتساوية ت - ٢ .

مفهوما المسافة والمسافة الموجهة يطبقان أيضاً على النقط فى مستوى الاحداثيات التى تقع على خط مستقيم يوازي محور الاحداثيات . القارئ يمكنه بسهولة اعطاء التفاصيل . فمثلاً ، المسافة الموجهة من P الى M فى الشكل ت - ٦ هي $\overline{PM} = x_2 - x_1$ ، والمسافة الموجهة من Q الى M هي $\overline{QM} = y_1 - y_2$. الاحداثى x لنقطة P فى المستوى يمكن اعتباره المسافة الموجهة من المحور x الى P ، أى المسافة الموجهة \overline{BP} فى الشكل ت - ٢ ، وبالمثل بالنسبة الى الاحداثى y .

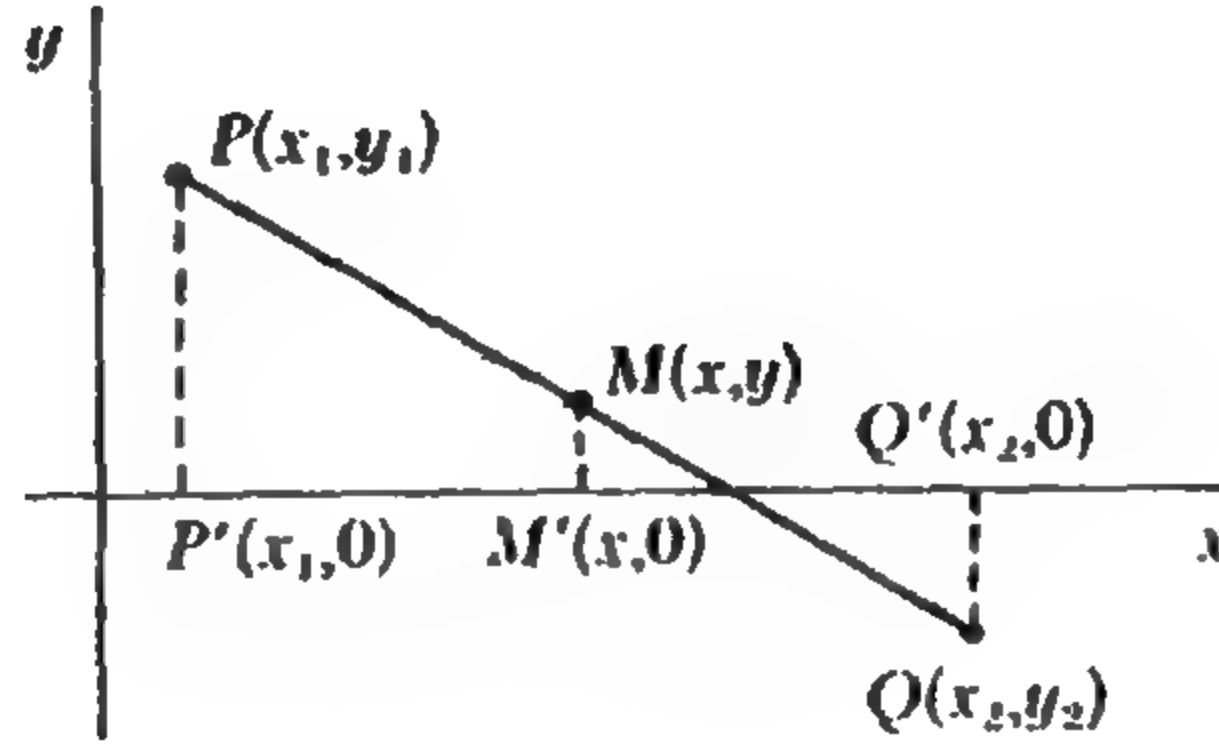
* المسافة بين خط مستقيم الى نقطة تقاس دائماً على العمودى من الخط المستقيم الى النقطة .

لتكن $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$ نقطتين في مستوى الاحداثيات . نعطي في النظرية التالية صيغة لاحداثى نقطة تنصيف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما .

ت - ٣ صيغة نقطة المنتصف . اذا كانت $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$ نقطتين في مستوى الاحداثيات ، فإن احداثى نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة PQ هما

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

البرهان . بالرجوع الى شكل ت - ٥ ، لتكن $M(x, y)$ هي نقطة منتصف PQ . المساقط على المحور x للنقط P و M و Q هي النقط $P'(x_1, 0)$ و $M'(x, 0)$ و $Q'(x_2, 0)$. من الهندسة الأولية ، $\overline{PM} = \overline{MQ}$ هي نقطة منتصف القطعة PQ . واذن $\overline{P'M'} = \overline{M'Q'}$ ، ويكون من التعريف ت - ١ ، $x - x_1 = x_2 - x$. الحل بالنسبة الى x يعطينا $x = (x_1 + x_2)/2$. بالمثل ، نوجد الاحداثى y للنقطة M بإسقاط P و M و Q على المحور y .



شكل ت - ٥

مثال ١ . أوجد احداثى منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(1, -2)$ و $(4, 6)$

لتكن $(x_1, y_1) = (1, -2)$ و $(x_2, y_2) = (4, 6)$. الصيغة ت - ٣ تعطى لاحداثى نقطة المنتصف

$$\left(\frac{1 + 4}{2}, \frac{-2 + 6}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, 2 \right)$$

نشق الآن صيغة للمسافة بين نقطتين .

ت - ٤ صيغة المسافة . المسافة $|PQ|$ بين النقطتين $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$ تعطى بالصيغة

$$(١) \quad |PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

لاثبات ذلك ، ارسم المثلث القائم PMQ بحيث أن ساقيه PM و MQ يوازيان المحورين x و y ، كما في الشكل ت - ٦ .

حيث أن يكون $|PQ| = \sqrt{|PM|^2 + |MQ|^2}$. بما أن $|MQ| = |y_2 - y_1|$ و $|PM| = |x_2 - x_1|$

فيكون

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال ٢ . أوجد المسافة بين النقطتين $P(1, -2)$ و $Q(4, 6)$.

إذا فرضنا أن $(x_1, y_1) = (1, -2)$ و $(x_2, y_2) = (4, 6)$ فيكون من (١)

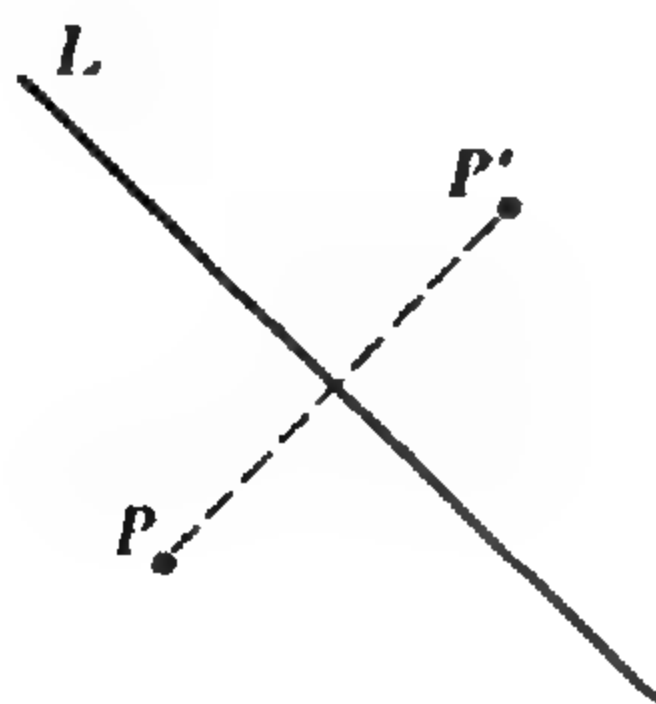
$$|PQ| = \sqrt{(4-1)^2 + [6-(-2)]^2} = \sqrt{9+64} = \sqrt{73}$$

إذا كانت P و Q على نفس الخط الأفقي ، فإن $y_1 = y_2$ وتصبح (١)

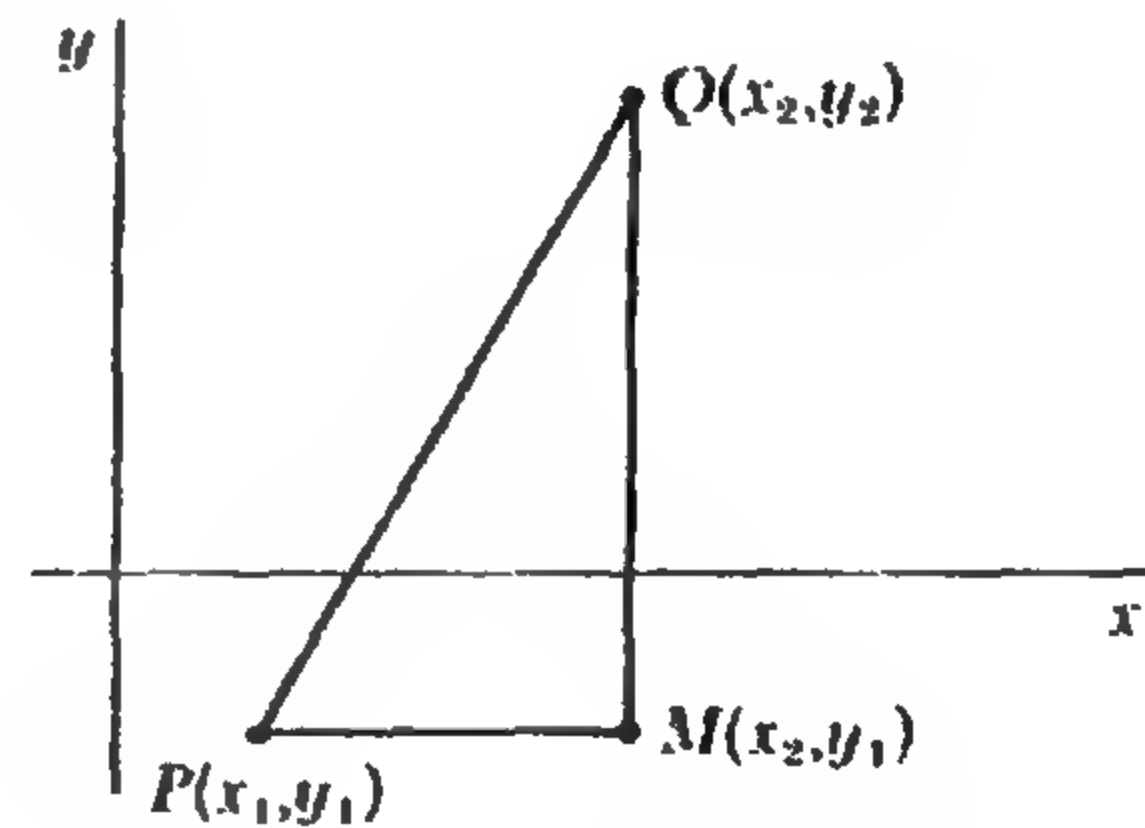
$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$$

لأن $\sqrt{a^2} = |a|$. هذا يتفق مع تعريف المسافة بين نقطتين على خط مستقيم يوازي المحور x .
ليكن L خطاً مستقيماً ، ولتكن P و P' نقطتين بحيث أن L يكون المنصف العمودي للقطعة المستقيمة PP' (شكل ت-٧) . P' تسمى انعكاس P (أو صورة P) في L ، والنقطتان P و P' يقال أنهما متماثلتان في L . بالطبع ، P هي أيضاً انعكاس P' . فمثلاً ، النقطة $(-2, 4)$ هي انعكاس النقطة $(2, 4)$ في المحور y (شكل ت-٨) .

إذا كانت P و P' نقطتين وكانت A هي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما (شكل ت-٩) ، فالتناقول أن P' هي انعكاس P (أو صورة P) في A وأن النقطتين P و P' متماثلتان في A . فمثلاً ، النقطتان $(2, -4)$ و $(-2, 4)$ في الشكل ت-٨ متماثلتان في نقطة الأصل .

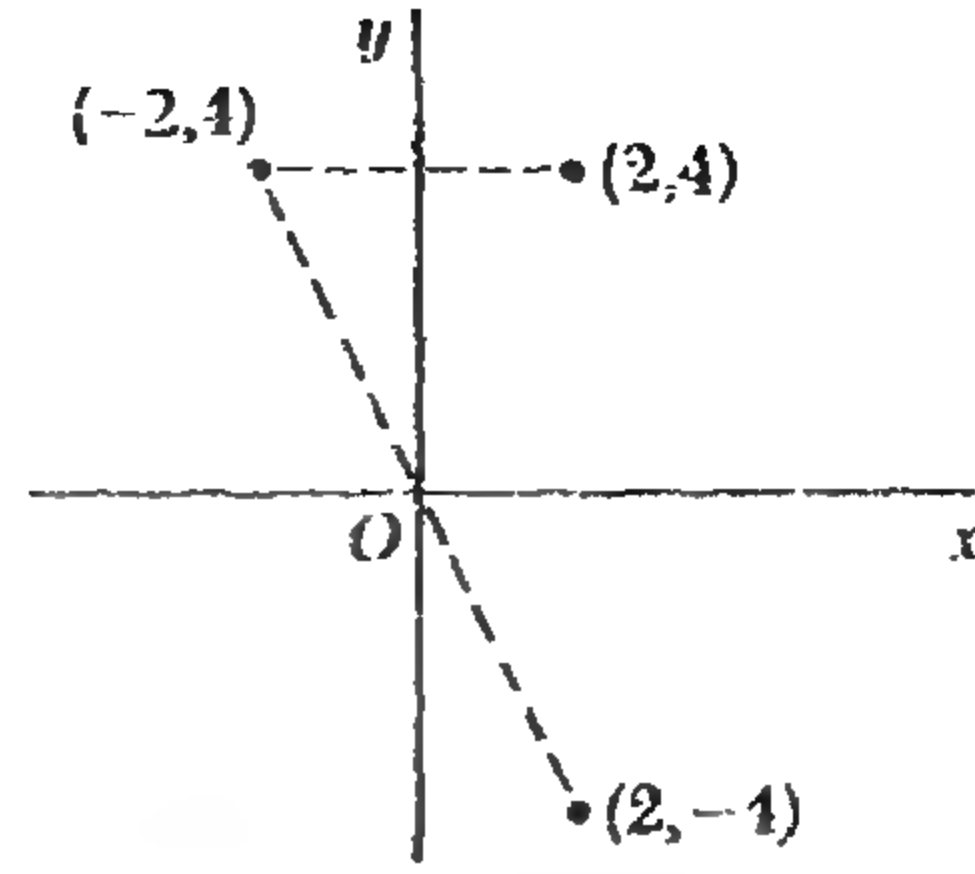


شكل ت-٧
 P' هي انعكاس P في L .



شكل ت-٦

• بما أن $(x_2 - x_1)^2$ يكون موجباً أو صفراً ، فإن علامتي القيمة المطلقة تكونان زائدتين عن الحاجة . أي أن ،
 $|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2$



شكل ت - ٨

النقطتان $(2, 4)$ و $(-2, 4)$ متماثلتان في المحور y ؛
النقطتان $(2, -4)$ و $(-2, 4)$ متماثلتان في نقطة الأصل .



شكل ت - ٩

P' هي انعكاس P في A

مسائل

وقع النقط الآتية :

١- $(0, 0)$, $(1, -4)$, $(5, -6)$, $(-2, 0)$, $(3, 1)$ ٢- $(-7, 2)$, $(0, \sqrt{5})$, $(5, \sqrt{3} - 4)$, $(-1, -\pi)$

أوجد احدائى انعكاس النقط الآتية في (أ) المحور x ، (ب) المحور y ، (ج) نقطة الأصل .

٣- $(0, -3)$, $(1, -5)$, $(2, 3)$ ٤- (a, b) , $(0, 0)$, $(-2, -2)$

٥- للنقط $A(3, 1)$, $B(5, 1)$, $C(-1, 1)$, $D(-4, 1)$, $E(3, 7)$, $F(3, -2)$ ، أوجد المسافات الموجهة

(أ) \overline{AB} , \overline{CB} , \overline{BC} , \overline{EA} , \overline{FA} (ب) \overline{DC} , \overline{CD} , \overline{AE} , \overline{FE} , \overline{AF}

٦- أوجد المسافات الآتية بين النقط في المسألة ٥ : $|AB|$, $|BA|$, $|AC|$, $|DA|$, $|EF|$, $|AE|$

٧- حقق المتساوية ت - ٢ للنقط (أ) $A(2)$, $B(5)$, $C(7)$ ، (ب) $A(3)$, $B(-2)$, $C(1)$ هل

المتساوية ت - ٢ تكون صحيحة لجميع النقط اذا كانت المسافات عادية وليست موجهة ؟

أوجد مساحات المثلثات التى رؤوسها :

٨- $(8, 5)$, $(8, -3)$, $(11, -3)$ ٩- $(-2, 1)$, $(-2, 7)$, $(3, 7)$ ١٠- (a, b) , (a, c) , (d, c)

وقع ازواج النقط الآتية وأوجد احدائى نقطة المتوسط لها :

١١- $(1, 2)$, $(5, 10)$ ١٢- $(-5, -4)$, $(0, 6)$ ١٣- $(-7, -2)$, $(-2, 7)$ ١٤- $(a, 0)$, $(0, b)$

أوجد المسافة بين أزواج النقط الآتية

١٥- $(0, 3)$, $(1, 6)$ ١٦- $(-1, 5)$, $(2, -1)$ ١٧- $(-4, -3)$, $(4, -5)$

١٨- $(a, 0)$, $(0, b)$ ١٩- $(-6, -1)$, $(-6, 4)$

٢٠- أوجد محيط كل من المثلثات فى المسائل من ٨ إلى ١٠ .

أى من ثلاثيات النقط الآتية هي رؤوس مثلث قائم

٢١- $(2, 1)$, $(3, 3)$, $(6, 1)$ ٢٢- $(-1, 1)$, $(1, -3)$, $(7, 5)$ ٢٣- $(0, 0)$, $(-3, -2)$, $(-5, 3)$

٢٤ - أوجد محيط المثلث الذى رؤوسه $(10, -1)$, $(-5, 0)$, $(-2, 4)$
 ٢٥ - حقق أن المثلث الذى رؤوسه $(3, 4)$, $(6, 2)$, $(0, -7)$ هو مثلث قائم الزاوية
 وأوجد مساحته .

اثبت أن كلا من ثلاثيات النقط الآتية هي رؤوس مثلث متساوى الساقين :

٢٦ - $(2, 3)$, $(5, 0)$, $(6, 4)$ ٢٧ - $(-4, 5)$, $(10, 2)$, $(-1, -9)$

٢٨ - أوجد طول المستقيم المتوسط المار بالنقطة A للمثلث $A(-2, -6)$, $B(6, -1)$, $C(0, 5)$

٢٩ - حقق أن النقط $A(1, 2)$, $B(-1, 6)$, $C(-4, 2)$, $D(-2, -2)$ هي رؤوس متوازي أضلاع
 باثبات أن القطرين BD و AC لهما نقطة منتصف مشتركة .

٣٠ - أثبت أن النقطة $(3, -3)$ تقع على المنصف العمودى للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين
 $(5, 6)$ و $(1, -4)$.

٣١ - أثبت أن النقط $(-4, -2)$, $(-2, 3)$, $(3, 1)$, $(1, -4)$ هي رؤوس مربع .

٣٢ - هل الشكل الرباعى المتكون بالنقط $(3, 1)$, $(0, -1)$, $(-3, 3)$, $(0, 5)$ مستطيل ؟

٣٣ - عين b بحيث تكون النقط $A(-1, 1)$, $B(12, 0)$ رؤوس مثلث قائم الزاوية عند c .

٣٤ - مربع طول ضلعه a رؤوسه على محورى الاحداثيات . أوجد احداثيات رؤوسه .

٣٥ - مثلث متساوى الأضلاع له رأسان عند النقطتين $(a, 0)$ و $(-a, 0)$ ما هما احداثيا الرأس
 الثالث .

٣٦ - أوجد علاقة بين x و y اذا كانت $P(x, y)$ على الدائرة التى نصف قطرها 5 ومركزها عند
 $(1, 2)$.

٣٧ - أوجد علاقة بين x و y اذا كانت $P(x, y)$ متساوية البعد عن النقطتين $(-2, -2)$
 و $(3, 1)$.

٣٨ - أوجد احداثيات الانعكاسات ، فى الخط المستقيم المار بنقطة الأصل ومنصفا الربع الاول
 والربع الثالث ، للنقط $(1, 2)$, $(-1, 4)$, $(-3, -3)$

٣٩ - أوجد احداثى مسقط النقطة $(3, 0)$ على الخط المستقيم المار بنقطة الأصل . منصفا الربع
 الاول والربع الثالث .

٤٠ - الخط المستقيم المار بالنقطتين $(4, 6)$ و $(-1, -3)$ يقطع المحور x عند $(a, 0)$. أوجد a
 (ارشاد : استخدم مثلثات متشابهة) .

٤١ - إذا كانت النقطتان $(4, 2)$ و $(1, -1)$ رأسين مقابلين لمربع ، أوجد إحداثيات الرأسين
 الآخرين .

٤٢ - أوجد احداثى النقطة التى على بعد ثلاثة أرباع المسافة من $(4, 6)$ إلى $(12, -8)$

٤٣ - أوجد النقطة التى احداثيها السينى 4 وعلى بعد 10 وحدات من النقطة $(5, -2)$.

٤٤ - أكمل برهان صيغة نقطة المنتصف ت- ٣ باثبات أن الاحداثى y للنقطة M هو :
 $(y_1 + y_2) / 2$.

٤٥ - اثبت أن انقطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى ضلعين فى المثلث توازى الضلع الثالث وتساوى نصف طوله (ارشاد : بسط العمل بوضع المثلث بحيث يقع ضلعه الثالث على المحور x ويكون أحد الرأسين عند نقطة الاصل . إحداثيا الرأس الآخر على الضلع الثالث سيكونان $(b, 0)$ لعدد ما b . إحداثيا الرأس الثالث سيكونان (c, d) لعددین ما (c, d) .

٤٦ - شكل رباعى رؤوسه هى $O(0,0), A(a,0), B(b,c)$. اثبت أن طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى الضلعين AB و OA يساوى طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى الضلعين BC و CO .

ت - ٢

الاشكال البيانية للمعادلات والمتباينات

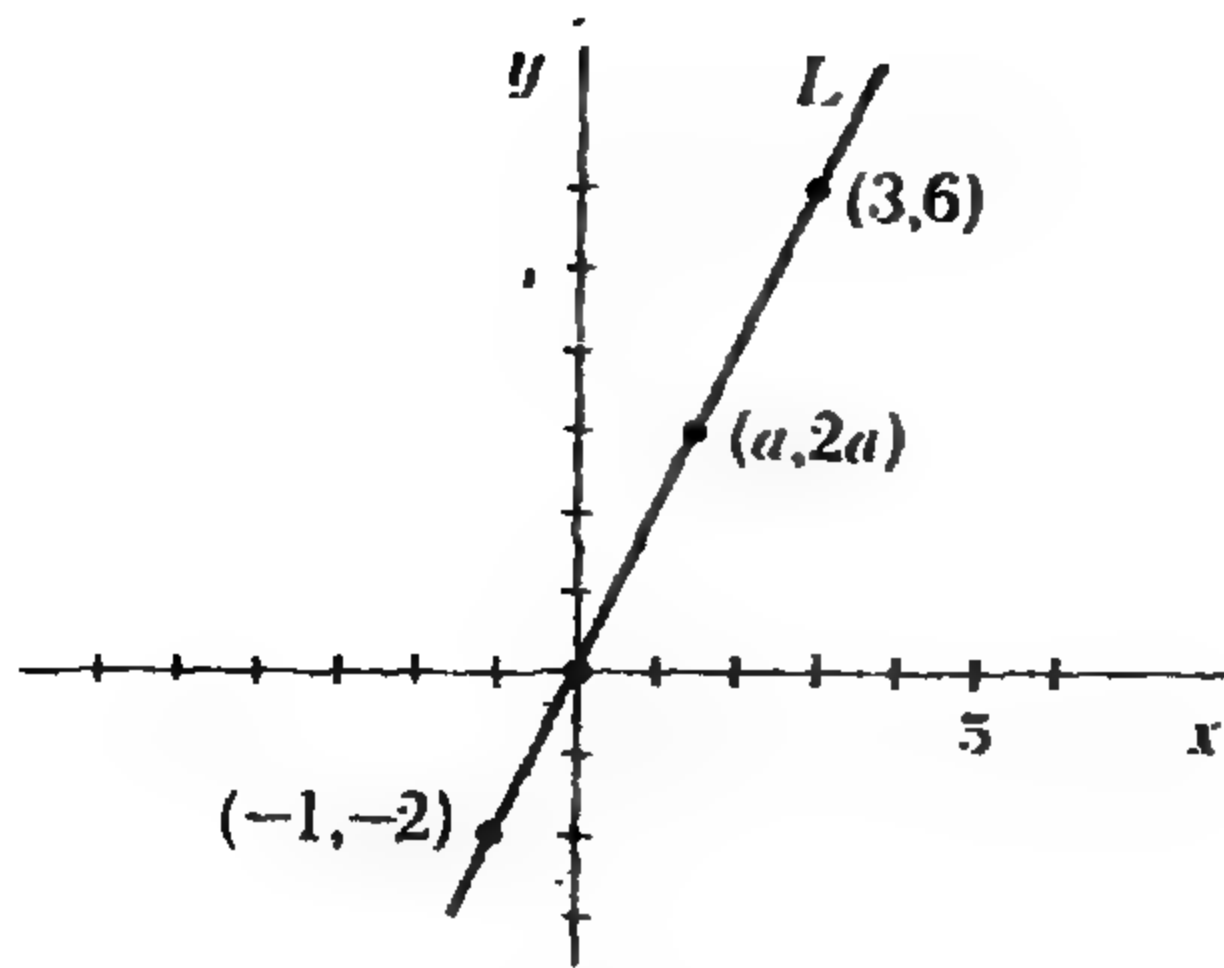
x	y	حل معادلة أو متباينة فى متغيرين ، مثلا x و y هو زوج مرتب من الاعداد (a, b)
-3	9	بحيث أن عندما نعوض x لـ a ، y لـ b ، المعادلة أو المتباينة الناتجة تكون صحيحة . الزوج $(2, 10)$ وحل للمعادلة $y = 3x^2 - 2$ لأن $10 = 3(2^2) - 2$ هي
-2	4	معادلة صحيحة . لكن الزوج $(1, 5)$ ليس حلا لأن $5 = 3(1) - 2$ ليست صحيحة .
-1	1	الزوج $(2, 1)$ حل للمتباينة $x + 2y < 6$ لأن $2 + 2(1) < 6$ متباينة صحيحة ، لكن
0	0	الزوج $(1, 3)$ ليس حلا . فئة الحل لمعادلة أو متباينة فى متغيرين هى فئة جميع حلولها .
1	1	
2	4	
3	9	

فى الجدول فى الهامش قد تونا بعض حلول المعادلة $y = x^2$. كل حل (a, b) يمكن اعتباره احداثى نقطة $P(a, b)$ فى مستوى الاحداثيات .

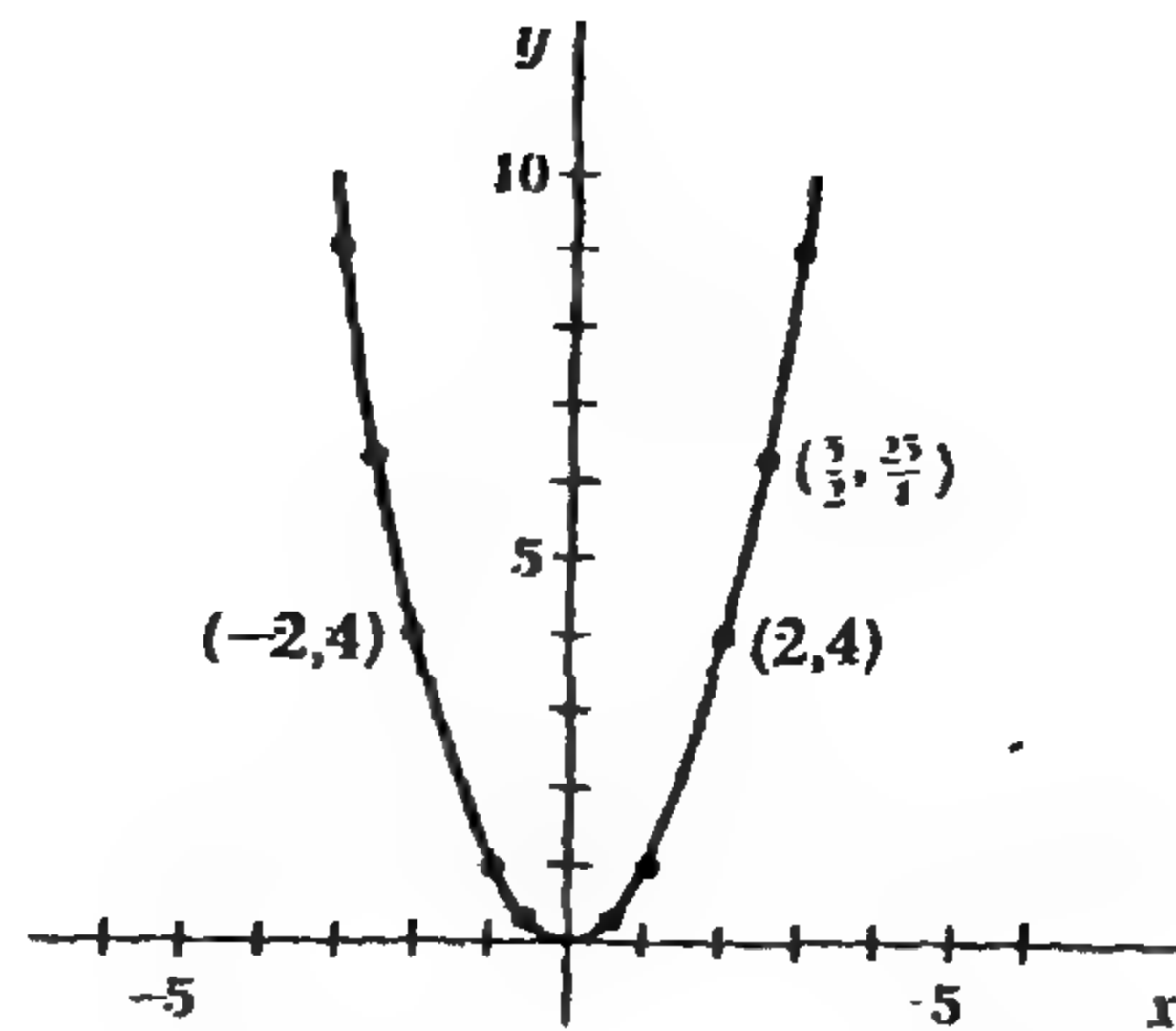
لقد وقفنا هذه النقط فى الشكل ت - ١٠ . هذه النقط فى مجموعها تكون منحنى يسمى الشكل البيانى للمعادلة ، وهو المخطط فى الشكل . عندما تكون x كبيرة موجبة أو سالبة ، تكون y كبيرة وموجبة . واذن المنحنى يستمر مفتوحا لأعلى . الشكل البيانى متماثل فى المحور y . المعادلة $y = x^2$ تظهر كثيرا فى الأمثلة التوضيحية ، والقارىء عليه أن يتذكر شكلها البيانى .

نفس الطريقة يمكن إجراؤها لى معادلة أو متباينة ، رغم أن النقط فى مجموعها قد لا تكون دائما ما يعتبر عادة أنه منحنى .

ت - ٥ تعريف . الشكل البيانى لمعادلة أو متباينة فى متغيرين هو فئة جميع النقط $P(a, b)$ حيث (a, b) هو حل للمعادلة أو المتباينة .



شكل ت - ١١
الشكل البياني لـ $y = 2x$



شكل ت - ١٠
الشكل البياني لـ $y = x^2$. لاحظ التماثل في المحور y .

وبأسلوب آخر ، النقطة تكون على الشكل البياني اذا كان احداثياتها يحققان المعادلة أو المتباينة ولا تكون عليه اذا كان احداثياتها لا يحققان المعادلة أو المتباينة .

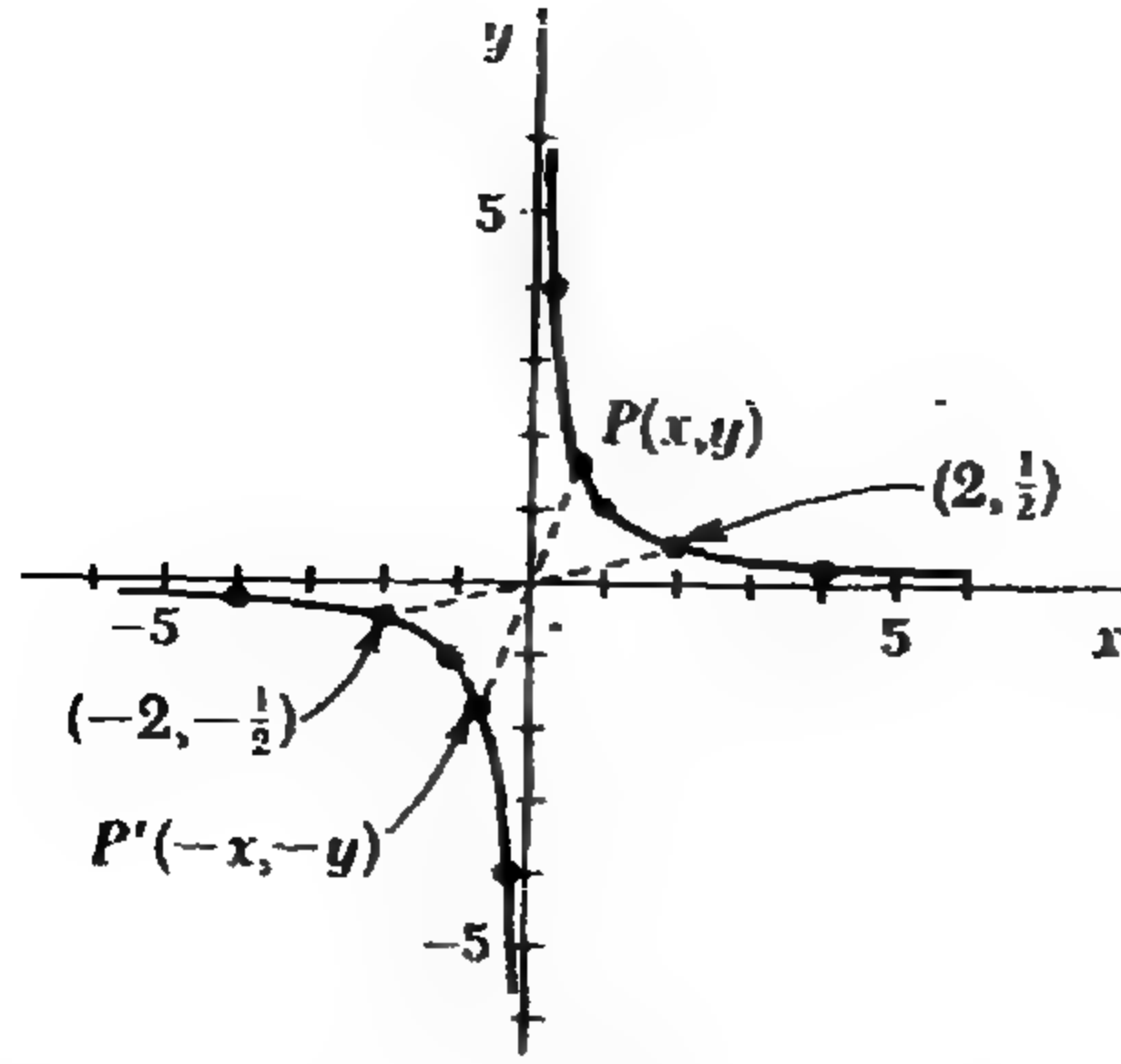
اذا كانت المعادلة أو المتباينة تشتمل على حدود في x فقط فاننا سنعرف الشكل البياني بأنه فئة جميع النقاط التي احداثياتها x تحقق المعادلة أو المتباينة . فمثلا النقاط $(3, 1)$, $(3, -2)$, $(-3, 1)$ جميعها تقع على الشكل البياني للمعادلة $x^2 - 9 = 0$. ملاحظة مماثلة تطبق اذا كانت المعادلة أو المتباينة تشتمل على حدود في y فقط .

الشكل البياني لمعادلة يسمى أيضا المنحنى المناظر للمعادلة ، ونقول عادة ، مثلا ، المنحنى $y = x^2$ بدلا من العبارة المطولة « المنحنى المناظر للمعادلة $y = x^2$ » . في الرياضيات الخط المستقيم يعتبر منحنى . التعبير خط يعني دائما خطا مستقيما .

مثال ١ . أوجد الشكل البياني للمعادلة $y = 2x$. النقاط التي احداثياتها هي $(-1, -2)$ و $(0, 0)$, $(3, 6)$ تقع على الشكل البياني اذا أن كلا من هذه الأزواج يحقق المعادلة . بصفة أعم ، الزوج (a, b) هو حل للمعادلة اذا واذا فقط كانت $b = 2a$. واذن الشكل البياني يتكون من جميع النقاط التي احداثياتها $(a, 2a)$ ويجب أن يكون الخط المستقيم ، الموضح في الشكل ت - ١١ .

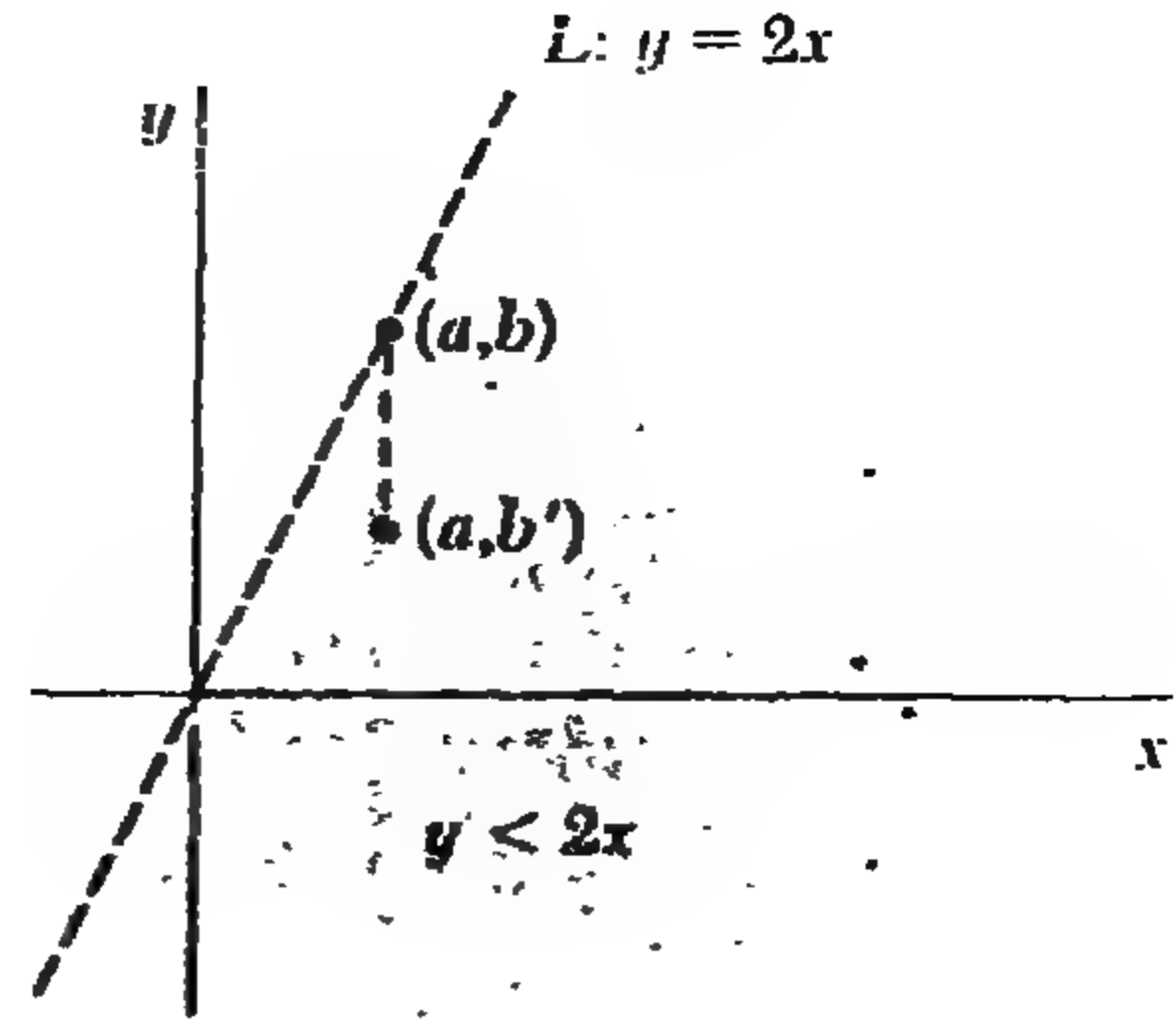
مثال ٢ . أوجد الشكل البياني للمتباينة $y < 2x$.

من الأسهل لايجاد الشكل البياني للمتباينة أن نوجد أولا الشكل البياني للمعادلة المساعدة التي نحصل عليها باستبدال رمز التباين برمز التساوي . لقد أوضحنا في مثال ١ أن الشكل البياني للمعادلة $y = 2x$ هو الخط المستقيم L في الشكل ت - ١٢ . اذا كانت (a, b) نقطة على الشكل البياني لـ $y = 2x$ فان النقطة (a, b') ستكون على الشكل البياني للمتباينة اذا واذا فقط كانت $b' < b$. اذن الشكل البياني للمتباينة $y < 2x$ هو المنطقة الواقعة تحت L ، نصف المستوى ، المظلل ، في الشكل ت - ١٢ . الخط L موضح بشرط اشارة الى أنه ليس جزءا من الشكل البياني .



شكل ت- ١٣

الشكل البياني لـ $y = 1/x$ لاحظ تماثل المنحنى في نقطة الأصل .



شكل ت- ١٢

مثال ٣ . خطط المنحنى $y = 1/x$.

نعمل جدولاً للقيم ، نوقع النقاط المناظرة ، ونرسم شكلاً سلساً ماراً بها (شكل ت- ١٣) .
عندما تكون x كبيرة وموجبة ، تكون y موجبة وقريبة من الصفر ، ويمكن جعلها قريبة من الصفر كما نريد باختيار x كبيرة كبراً كافياً . هذا يعني أن لقيم x الكبيرة ، المنحنى يقع فوق المحور x ، ويقترب منه أكثر فأكثر كلما ابتعدنا . بالمثل ، عندما تكون x كبيرة وسالبة ، y تكون سالبة وقريبة من الصفر ، ولهذه القيم لـ x المنحنى يقع تحت المحور x . عندما تكون x قريبة من الصفر وموجبة ، تكون y كبيرة وموجبة ويمكن جعلها كبيرة كما نريد باختيار x قريبة من الصفر قريباً كافياً . بالمثل ، عندما تكون x قريبة من الصفر وسالبة ، تكون y كبيرة وسالبة . لاحظ أنه لكل نقطة على المنحنى لنقطة المتماثلة معها في نقطة الأصل تكون أيضاً على المنحنى . فالمنحنى بأكمله يكون متماثلاً في نقطة الأصل . مع أن الشكل البياني على قطعتين ، إلا أنه يعتبر منحنى واحداً لأنه الشكل البياني لمعادلة واحدة .

إذا كان عندما تتحرك نقطة على المنحنى إلى ما لا نهاية ، المسافة بينها وبين خط مستقيم ثابت تقترب من الصفر ، فإن الخط المستقيم يسمى خطاً تقاربياً للمنحنى . في مثال ٣ المحوران x و y خطان تقاربيان للمنحنى $y = 1/x$. من المسموح به أن المنحنى يعبر خطه التقاربى مرة أو أكثر عندما يمتد إلى ما لا نهاية .

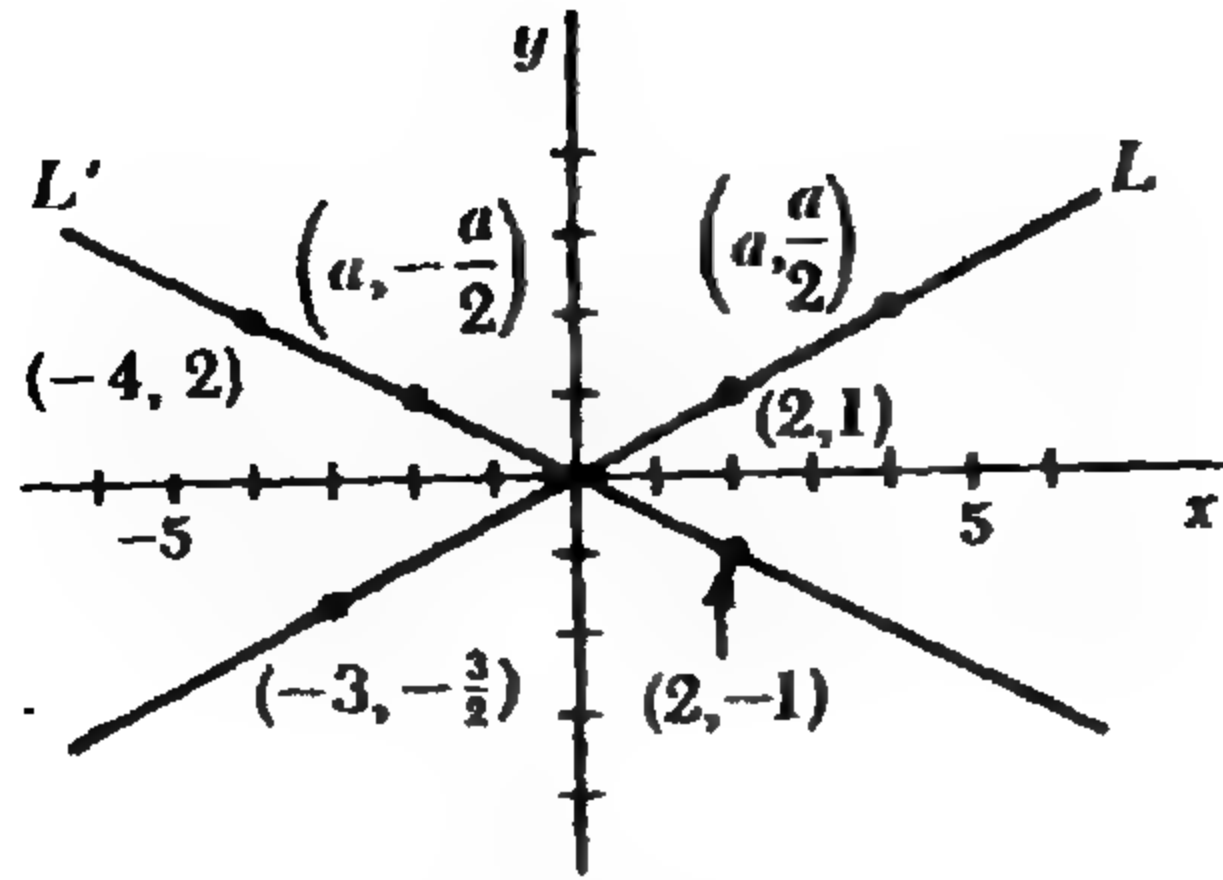
مثال ٤ . خطط الشكل البياني للمعادلة

(١)

$$x^2 - 4y^2 = 0$$

يمكننا عمل جدول للقيم ، لكن من الأسهل ملاحظة أن

$$x^2 - 4y^2 = (x - 2y)(x + 2y)$$



شكل ت- ١٤
الشكل البياني لـ $x^2 - 4y^2 = 0$ يتكون من خطين مستقيمين .

x	y
$-\frac{1}{10}$	-10
-4	$-\frac{1}{4}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$-\frac{1}{4}$	-4
$-\frac{1}{10}$	-10
$-\frac{1}{100}$	-100
$\frac{1}{10}$	10
$\frac{1}{4}$	4
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{4}$
10	$\frac{1}{10}$
100	$\frac{1}{100}$

وبالتالى الزوج (a, b) يكون حلا للمعادلة (١) اذا واذا فقط كان

$$(a - 2b)(a + 2b) = 0$$

اى اذا واذا فقط كان $a - 2b = 0$ ، وفى هذه الحالة $b = a/2$ ، او كان $a + 2b = 0$ ، وفى هذه الحالة $b = -a/2$. واذن الشكل البياني يتكون من جميع النقط التى احداثياتها هى $(a, a/2)$ او هى $(a, -a/2)$ ، حيث a أى عدد . النقط $(a, a/2)$ تقع على الخط المستقيم L فى الشكل ت- ١٤ . الحقيقة أن هذه النقط تقع على خط مستقيم نستوصبها بتوقيع بعض منها ، وستبثها فى البند ت- ٥ . النقط $(a, -a/2)$ تقع على الخط المستقيم L' فى الشكل . الشكل البياني لـ (١) يتكون من هذين المستقيمين .

كما فى حالة المعادلات فى واحد ، نقول أن معادلتين فى x و y متكافئتان اذا واذا فقط كان لهما نفس فئة الحل . فمثلا المعادلتان

$$(٢) \quad 2x + 3y - 6 = 0 \quad \text{و} \quad y = -\frac{2}{3}x + 2$$

متكافئتان . كذلك أيضا

$$x = \frac{6}{y^2 + x^2} \quad \text{و} \quad xy^2 + x^3 = 6$$

زوج من المعادلات غير المتكافئة هو

$$(٣) \quad y = x \quad \text{و} \quad y^2 = x^2$$

لان النقطة $(1, -1)$ تحقق المعادلة الثانية لكن لا تحقق الأولى. زوج آخر من المعادلات غير المتكافئة هو

$$(4) \quad y - 2 = 6(x + y - 3) \quad \text{و} \quad \frac{y-2}{x+y-3} = 6$$

هنا الزوج $(1, 2)$ حل للمعادلة الاولى لكن ليس حلا للثانية .

لان المعادلات المتكافئة لها نفس فئة الحل فهي لها نفس الشكل البياني . واذن من المسموح به لتخطيط الشكل البياني لمعادلة أن نخطط الشكل البياني لمعادلة مكافئة أكثر ملاءمة . فمثلا ، عند تخطيط الشكل البياني للمعادلة (٢) يكون من الأسهل ايجاد أزواج الحل باستخدام المعادلة الثانية بدلا من الاولى . لهذا السبب (ولأسباب أخرى) من المهم معرفة ما اذا كانت معادلتان متكافئتين .

القواعد المعطاة في النظرية ١ - ١٢ ، لتكافؤ المعادلات والمتباينات في متغير واحد صحيحة للمعادلات والمتباينات في متغيرين مع تغييرات طفيفة في الصياغة لتكيف مع حالة المتغيرين . التعبيرات في x تصبح الآن تعبيرات في y و x ، والحل الآن لايعنى عددا بل زوجا من الاعداد (x, y) يحقق المعادلة . فمثلا ، هذه القواعد تثبت أن المعادلتين

$$5x + y = 6 \quad \text{و} \quad 2x + y = 6 - 3x$$

متكافئتان ، وكذلك أيضا

$$(5) \quad x = \frac{6}{x-y} \quad \text{و} \quad x(x-y) = 6$$

من الجائز ضرب المعادلة الاولى في (٥) في $x - y$ اذ أنه لا يوجد حل (x, y) ، لاي من المعادلتين ، فيه $x = y$.

المعادلة الثانية في (٢) تكافئ الاولى لانه يمكن الحصول عليها منها بالمتابعة التالية من العمليات . نضيف 6 الى كل من طرفي المعادلة الاولى ، فنحصل على

$$2x + 3y = 6$$

بطرح $2x$ من كل من طرفي هذه المعادلة ، فنحصل على

$$3y = -2x + 6$$

نقسم كلا من طرفي هذه المعادلة على 3 ، فنحصل على

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

نحذر القارئ من تربيع طرفي معادلة أو الضرب في أو القسمة على مقادير قد تكون صفرا لبعض حلول المعادلة ، لانها قد تؤدي الى معادلات غير مكافئة . مثالان هما (٣) و (٤) أعلاه . صحيح أنه اذا كانت u و v مقدارين في y و x بحيث أن $u \geq 0$ و $v \geq 0$ لكل حل (x, y) لـ $u^2 = v^2$ ، فإن المعادلتين $u = v$ و $u^2 = v^2$ تكونان متكافئتين . برهان ذلك نتركه كتمرين (المسألة ٥٨) .

مسائل :

خطط الشكل البياني للمعادلات الآتية :

$$x^2 = 16 - ٥ \quad x + 3y - 5 = 0 - ٤ \quad y = x + 2 - ٣ \quad 2y + x = 0 - ٢ \quad y = \frac{1}{2}x - ١$$

$$y^2 = x - ١٠ \quad y = -x^2 - ٩ \quad y = \frac{1}{2}x^2 - ٨ \quad y = x^2 + 2 - ٧ \quad y = -3 - ٦$$

$$١١ - y = \sqrt{x} \quad (\text{تذكر أن } \sqrt{x} \text{ تكون دائما غير سالبة}).$$

$$١٢ - y = -\sqrt{x} \quad ١٣ - y = x^3 \quad ١٤ - x^2 + y^2 = 25 \quad ١٥ - x^2 + y^2 = 0$$

$$١٦ - x^2 + y^2 = -5 \quad ١٧ - y = -6/x \quad ١٨ - y = 1/x^2 \quad ١٩ - y^3 - y = 0$$

$$٢٠ - x^2 - 5x - 6 = 0 \quad ٢١ - x(x - y) = 0 \quad ٢٢ - y = \sqrt{x^2} \quad ٢٣ - x \leq 3$$

خطط الشكل البياني للمتباينات الآتية (ارشاد : خطط أولا الشكل البياني للمعادلة التي تحصل

عليها بامبدال رمز التباين برمز التساوى).

$$٢٤ - y > -1 \quad ٢٥ - -3 < x < 3 \quad ٢٦ - \frac{1}{2} < y \leq 4$$

$$٢٧ - x^2 < 16 \quad ٢٨ - y < -\frac{1}{4}x \quad ٢٩ - y < 2x + 2 \quad ٣٠ - y \leq x^2$$

$$٣١ - 0 < y < \sqrt{x} \quad ٣٢ - x(x + 2) > 0$$

خطط الشكل البياني للمتباينات الآتية :

$$٣٣ - 0 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 3 \quad ٣٤ - y < x, x \geq 0 \quad ٣٥ - y \leq x + 3, y \geq x - 3$$

$$٣٦ - 2x - y < 0, y < 5 \quad ٣٧ - y \geq x^2 - 1, y < x$$

٣٨ - خطط الشكل البياني لـ $y = -x/3$. وضع كيف يمكننا استخدام هذا الشكل البياني لايجاد

الشكل البياني لـ $y = -x/3 + 1$ بدون عمل جدول للقيم . خطط الاشكال البيانية لـ $y =$

$-x/3 + c$ حيث $C = 3, 5, -1$. ما الذى يمكنك قوله عن هذه الخطوط ؟ أوجد قيمة c

التي تجعل الشكل البياني لـ $y = -x/3 + c$ يمر بالنقطة $(2, 5)$.

٣٩ - لاي قيم a تكون المعادلة $x^2 + y^2 = a$ ليس لها شكل بياني ؟ أوجد معادلة اخرى ليس لها

شكل بياني .

اثبت أن المعادلتين فى كل من الأزواج الآتية متكافئتان ، بتحويل معادلة الى اخرى ، بمتابعة

من العمليات على النمطين (أولا) و (ثانيا) المماثلين لهذين المعطيين فى النظرية ١ - ١٢ . اجر

عملية واحدة فقط فى كل خطوة . ليس من الضرورى أن تعطى التفصيلات للعمليات الجبرية

الأخرى .

$$٤١ - xy = 10, x = 10/y$$

$$٤٠ - 2x - y = 0, y = 2x$$

$$٤٢ - x + \frac{y-3}{2} = 5y, 2x - 9y - 3 = 0$$

$$٤٣ - 2x + \frac{3}{y-2x} - y = \frac{3}{y-2x} - 3, y = 2x + 3$$

$$\frac{x-y-5}{\sqrt{x^2-y}}=0, y=x-5 \quad - ٤٥ \quad (x+2)^2+y^2=(x-2)^2, y^2=-8x-٤٤$$

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=3, x^2+y^2-8x+7=0-٤٧ \quad x^4+(4-y^2)x^2-4y^2=0, x^2=y^2-٤٦$$

اثبت أن المعادلات فى الأزواج الآتية غير متكافئة

$$x^3-y=x^2-xy, x^2+y=0-٤٩ \quad x^2/x=5y, x=5y-٤٨$$

$$\frac{x-y-5}{\sqrt{x^2-y^2}}=0, y=x-5-٥١ \quad y=\sqrt{x}, y^2=x-٥٠$$

عين ما اذا كان المعادلات فى الأزواج الآتية متكافئة :

$$x+y+10=0, \frac{x+y+10}{\sqrt{x+y}}=0-٥٣ \quad 2y+\frac{7x-1}{3}=4, x=-\frac{6}{7}y+\frac{13}{7}-٥٢$$

$$\sqrt{x-y}=\sqrt{3x-2y}, y=2x-٥٥ \quad \frac{2x-y-5}{x^2-y^2}=0, 2x-y-5=0-٥٤$$

$$y^3=x, y=x^{1/3}-٥٧ \quad x^2-y^2=20, y=\sqrt{x^2-20}-٥٦$$

٥٨- أثبت أنه اذا كان v و u تعبيرين فى x و y بحيث أن $v \geq 0$ و $u \geq 0$ لكل حل (x,y) لـ $u^2=v^2$ ، فان المعادلتين $u^2=v^2$ و $u=v$ تكونان متكافئتين (ارشاد : يجب اثبات أن كل حل لـ $u=v$ هو ايضا حل لـ $u^2=v^2$ ، وبالعكس . الاول سهل لاثبات العكس ، نكتب $u^2=v^2$ على الصورة $(u-v)(u+v)$. اذا كان (x,y) حلا للتعبير $u^2=v^2$ ، أثبت أنه يجب أيضا أن يكون حلا لـ $u-v=0$.

ت - ٣

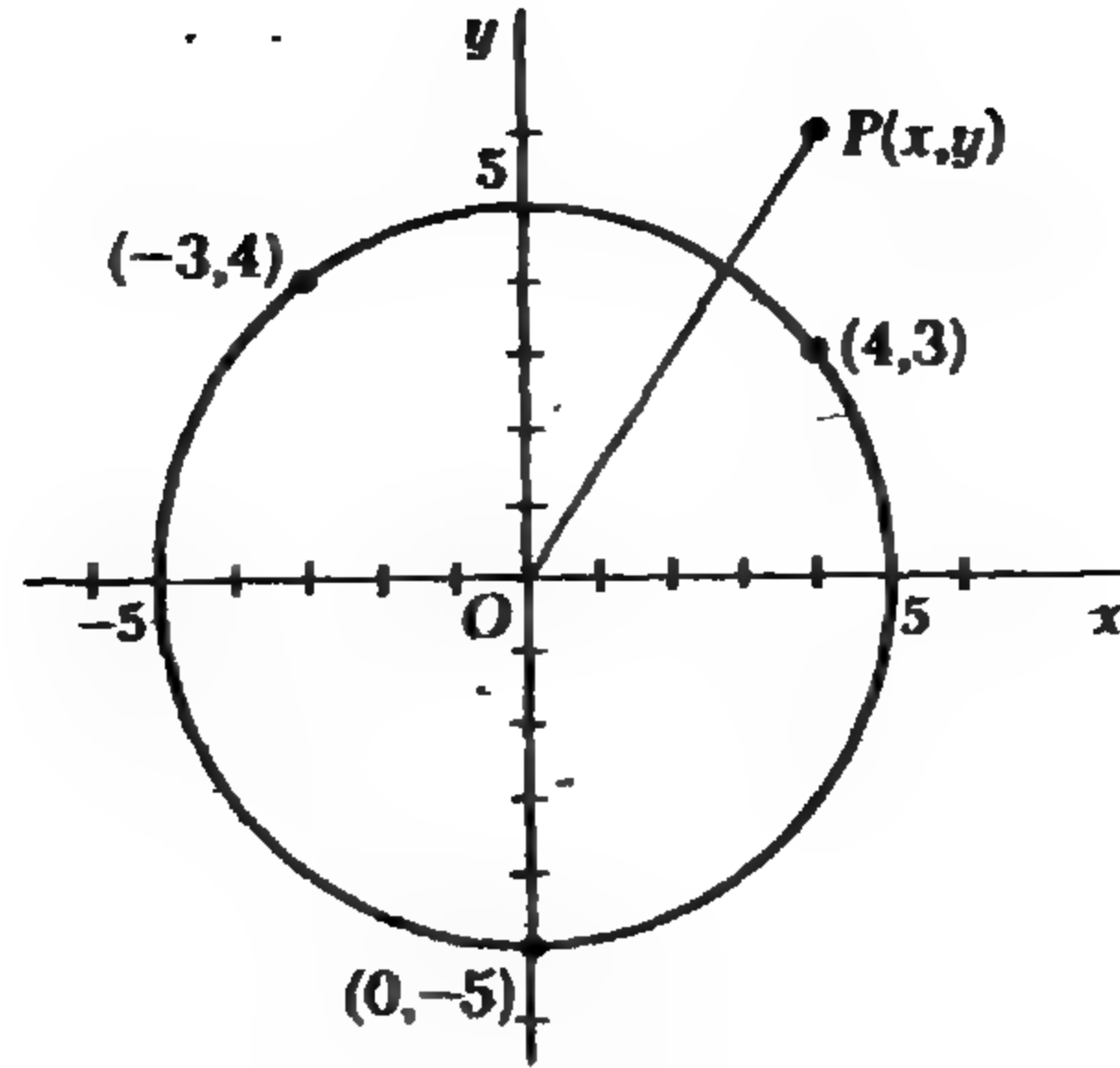
الدوائر

فى بند ت - ٢ قد وضعنا كيف نخطط الشكل البيانى لمعادلة . المسألة العكسية هى ايجاد معادلة منحنى معطى .

ت - ٦ تعريف . معادلة منحنى هى معادلة فى x و y بحيث أن النقطة $P(x,y)$ تكون على المنحنى اذا واذا فقط كان (x,y) حلا للمعادلة .

فى هذا البند سنوجد معادلة دائرة . للحصول على معادلة منحنى ، يجب وصف المنحنى هندسيا . الدائرة هى فئة جميع النقط فى المستوى التى على بعد معطى من نقطة ما ثابتة تسمى مركزها . نستخدم هذا التعريف لايجاد معادلة الدائرة التى نصف قطرها r ومركزها عند نقطة الأصل .

لتكن $P(x,y)$ أى نقطة فى المستوى (انظر شكل ت - ١٥) . المسافة $|OP|$ بين النقطة P ونقطة الاصل O هى ، بصيغة المسافة ، $|OP| = \sqrt{x^2+y^2}$. النقطة P تكون على الدائرة اذا واذا فقط



شكل ت - ١٥

النقطة P تكون على الدائرة اذا واذا فقط كان $|OP| = 5$
ومن ثم اذا واذا فقط كان $x^2 + y^2 = 25$

كان $|OP| = 5$ ، أى اذا واذا فقط كان x و y عددين يجعلان المعادلة

$$(١) \quad \sqrt{x^2 + y^2} = 5$$

صحيحة ، أى اذا واذا فقط كان (x,y) حلا لهذه المعادلة . اذن (١) هي معادلة للدائرة . معادلة مكافئة ، أى معادلة لها نفس فئة الحل ، هي

$$(٢) \quad x^2 + y^2 = 25$$

ربما منحنى له معادلات كثيرة علاوة على (٢) معادلة أخرى مكافئة لـ (١) هي

$$2x^2 + 2y^2 - 50 = 0$$

ت - ٧ . معادلة الدائرة التى مركزها عند النقطة (h,k) ونصف قطرها r هي

$$(٣) \quad (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

وبالعكس ، أى معادلة على هذه الصورة شكلها البيانى هو دائرة مركزها عند (h, k) ونصف قطر r .

لأثبت ذلك نفرض أن $P(x,y)$ أى نقطة فى المستوى (شكل ت - ١٦) . المسافة $|CP|$ بين المركز $C(h,k)$ والنقطة P هي $|CP| = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$ النقطة P تكون على الدائرة اذا واذا فقط كان $|CP| = r$ ، أى ، اذا واذا فقط كان (x,y) حلا للمعادلة

$$(٤) \quad \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

اذن هذه هي معادلة للدائرة . الجذر يكون حقيقيا وغير سالبا لجميع x,y وبناء على ذلك ، اذا كتبنا مربع كل من طرفى (٤) نحصل على معادلة مكافئة ،

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

التي هي أيضا يجب أن تكون معادلة الدائرة .

حالة هامة من (٣) هي الدائرة التي مركزها عند نقطة الاصل ونصف قطر r . معادلتها هي

$$x^2 + y^2 = r^2$$

مثال ١ . أوجد معادلة الدائرة التي مركزها عند النقطة $(-\frac{5}{3}, -4)$ ونصف قطرها 3 .

هنا $r=3$ و $h=-\frac{5}{3}$, $k=-4$ بتعويض هذه في (٣) يكون لدينا

$$(x - \frac{5}{3})^2 + [y - (-4)]^2 = 3^2$$

أي

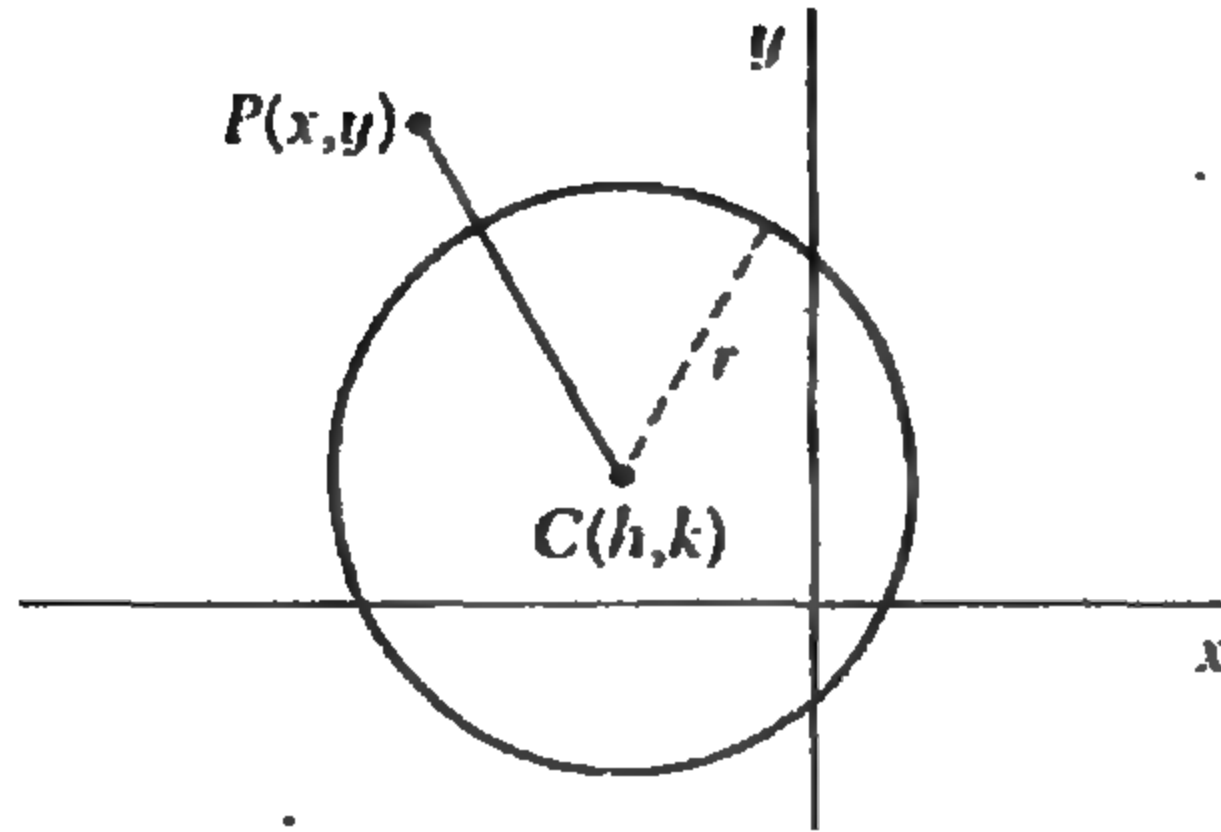
$$(5) \quad (x - \frac{5}{3})^2 + (y + 4)^2 = 9$$

كمعادلة للدائرة . صورة مكافئة وأحيانا أكثر ملاءمة ، يمكن الحصول عليها بفك الحدود المربعة في (٥) والاختصار ،

$$x^2 + y^2 - \frac{10}{3}x + 8y + \frac{88}{9} = 0$$

أوبالضرب في 9 ،

$$9x^2 + 9y^2 - 30x + 72y + 88 = 0$$



شكل ت-١٦

P تكون على الدائرة اذا واذا فقط كان $|CP| = r$ واذن اذا
واذا فقط كان $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

إذا فككنا الحدود المربعة في معادلة الدائرة (٣) ، فالتا نحصل على المعادلة

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

كما فعلنا في الجزء الأخير من مثال ١ ، يمكننا ضرب طرفي هذه المعادلة في ثابت غير صفري A ،
فنحصل على المعادلة

$$(٦) \quad Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad A \neq 0,$$

$$D = -2hA, \quad E = -2kA, \quad F = (h^2 + k^2 - r^2)A. \quad \text{حيث}$$

هذا يثبت أن كل دائرة لها معادلة في x و y من الدرجة الثانية بمعامل x^2 و y^2 متساويين ولا يوجد حد xy .

العكس أيضا صحيح . كل معادلة في x و y من الدرجة الثانية بمعامل x^2 و y^2 متساويين ولا يوجد حد xy شكلها البياني دائرة ، اذا كان لها شكل بياني . الشكل البياني قد يكون نقطة واحدة ، التي يمكن اعتبارها دائرة نصف قطرها صفر . مشترك برهان العكس للقارىء (المسألة ٤٢) . الطريقة موضحة بالمثال الآتي .

مثال ٢ . عين وخطط المنحنى الذي معادلته هي

$$(٧) \quad 4x^2 + 4y^2 - 32x + 12y + 21 = 0$$

بما أن المعادلة من الدرجة الثانية بمعامل x^2 و y^2 متساويين ولا يوجد حد xy ، فشكلها البياني هو دائرة . نوجد المركز ونصف القطر بكتابة المعادلة على الصورة (٣) . لإجراء ذلك نعكس الخطوات في مثال ١ . أولا نقسم (٧) على ٤ بحيث أن x^2 و y^2 يصبح معامل كل منهما الواحد الصحيح ، ونكتب معا الحدود التي تحتوى على x وبالمثل الحدود التي تحتوى على y . النتيجة هي

$$(x^2 - 8x) + (y^2 + 3y) = -\frac{21}{4}$$

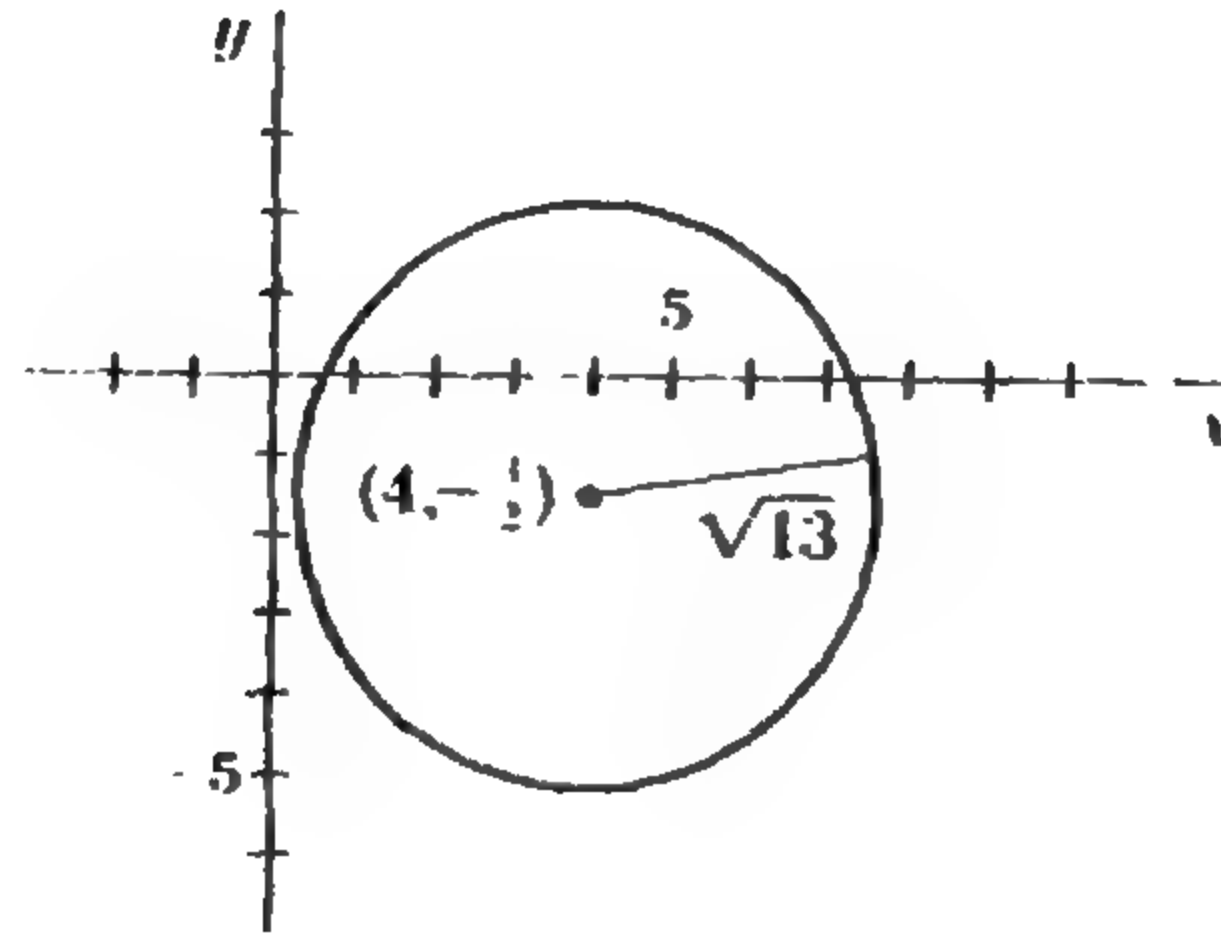
الآن نكمل مربعي المقدارين بين القوسين بإضافة $\frac{16}{4}$ و $\frac{9}{4}$ لكل طرف من هذه المعادلة

$$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 3y + \frac{9}{4}) = -\frac{21}{4} + 16 + \frac{9}{4}$$

وهذه تكافئ

$$(x - 4)^2 + (y + \frac{3}{4})^2 = 13$$

التي هي على الصورة (٣) حيث $r = \sqrt{13}$ و $k = \frac{3}{4}$ ، $h = 4$. إذن مركز الدائرة هو $(4, -\frac{3}{4})$ ونصف القطر هو $\sqrt{13}$. بهذه المعلومات يمكن تخطيط الشكل البياني بسرعة (شكل ت - ١٧) .



شكل ت - ١٧

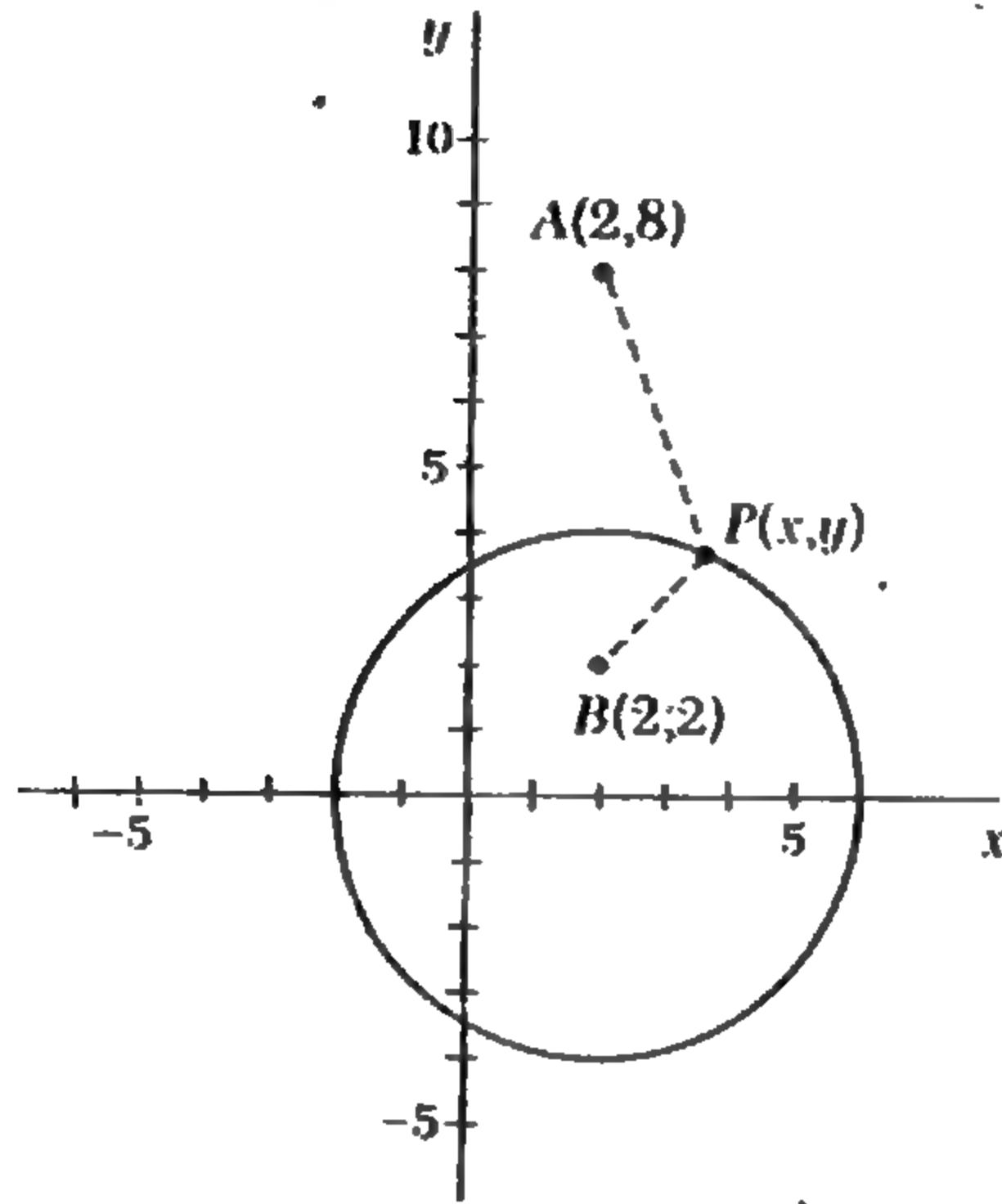
الشكل البياني للمنحنى $4x^2 + 4y^2 - 32x + 12y + 21 = 0$.

بسبب معرفتنا أن الشكل البياني لـ (٧) هو دائرة وأوجدنا المركز ونصف القطر ، كنا قادرين على تخطيط الشكل البياني بسهولة ودقة أكثر كثيرا عما كنا نستطيعه بمجرد توقيع بعض النقط .

مثال ٣ . صف الفئة S لجميع النقط P في مستوى الاحداثيات حيث المسافة بين P والنقطة $A(2,8)$ ضعف المسافة بين P والنقطة $B(2,2)$.

الفئة S تسمى أحياناً المحل الهندسى للنقطة P . لتكن P إحداثياتها $P(x,y)$ تكون على S اذا واذا فقط كان $|PA| = 2|PB|$ (شكل ت - ١٨) . أى إذا وإذا فقط كان (x,y) حلاً للمعادلة

$$(A) \quad \sqrt{(x-2)^2 + (y-8)^2} = 2\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$$



شكل ت - ١٨ .
 P تتحرك بحيث أن $|PA| = 2|PB|$ محلها الهندسى هو دائرة .

واذن هذه هي معادلة لـ S . لايجاد معادلة ابسط ، نكتب مربع كل من طرفى (A) ، فنحصل على المعادلة المكافئة

$$(x-2)^2 + (y-8)^2 = 4[(x-2)^2 + (y-2)^2]$$

وهذه تختصر الى

$$3x^2 + 3y^2 - 12x - 36 = 0$$

وبالتالى الى

$$(9) \quad x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$$

نعرف أن (9) المكافئة لـ (A) ، هي معادلة دائرة ونستمر لايجاد المركز . ونصف القطر . باكمال المربع يكون لدينا

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 + y^2 &= 12 + 4 \\ (x-2)^2 + y^2 &= 16 \end{aligned}$$

المركز عند $(2,0)$ ، ونصف القطر 4 .

الفكرة الاساسية لايجاد معادلة المنحنى هي تحويل الوصف الهندسى للمنحنى الى لغة جبرية . رغم أننا أكثر اهتماماً بالهندسة التحليلية كوسيلة لفهم حساب التفاضل عن أنها وسيلة للدراسة الهندسة ، فان الأخيرة لها أهميتها ونعطى مثالا لاستخدامها .

مثال ٤ . اثبت تحليليا أن المستقيمين المتوسطين الواصلين الى الضلعين المتساويين في مثلث متساوي الساقين يتساويان في الطول .

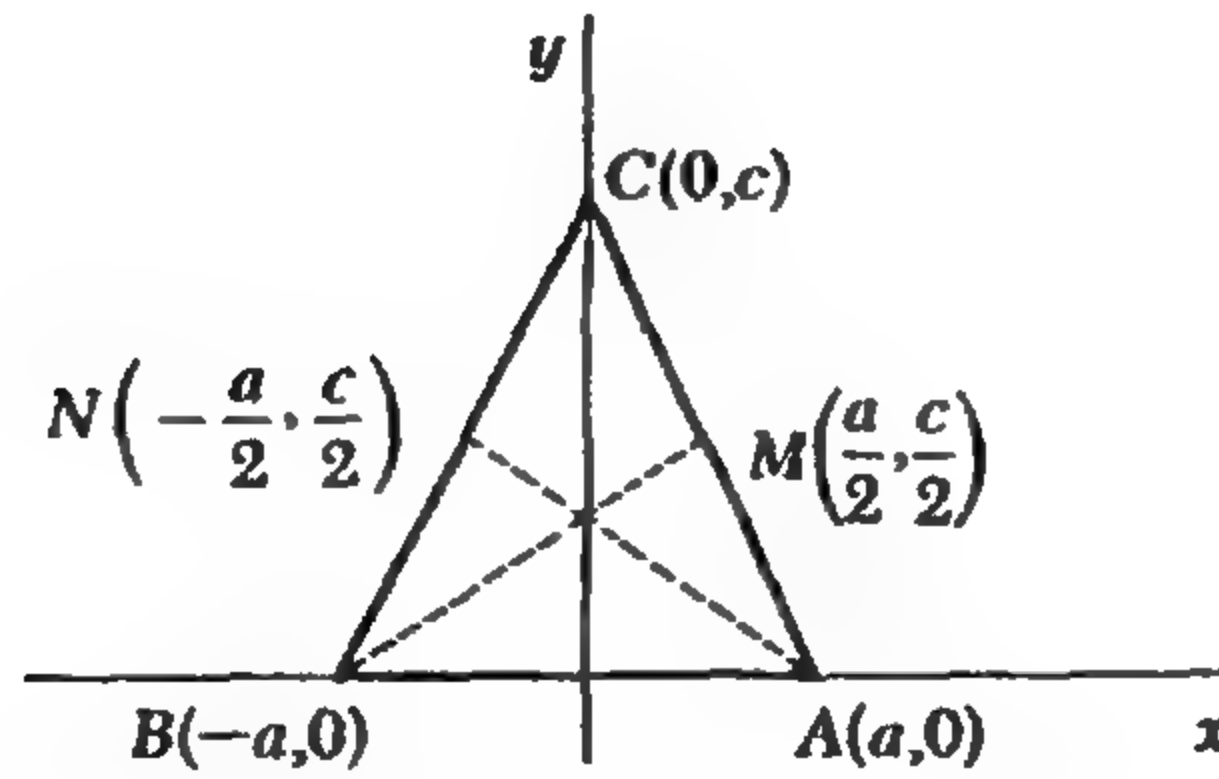
أى شكل هندسى يمكن تحريكه بدون تغيير خواصه الهندسية طالما لا يتشوه الشكل . لذلك من المسموح به وضع الشكل على مستوى الاحداثيات بأى كيفية نريدها . أملا في تبسيط العمل ، نضع المثلث بقاعدته AB على المحور x والرأس المقابل c على المحور الموجب y ، كما في الشكل ت - ١٩ .

الآن نخصص إحداثيات للرؤوس . حيث أن الرأس A يمكن أن يكون فى أى مكان على المحور الموجب x ، كل ما يمكن قوله عن إحداثيه هو أنها $(a, 0)$ لعدد ما $a > 0$. بما أن المثلث متساوي الساقين وموضوع كما بالشكل ، فأحداثيا B يجب أن يكونا $(-a, 0)$. النقطة C يمكن أن تكون فى أى مكان على المحور الموجب y ، وإذن إحداثياها يكونان $(0, c)$ لعدد ما $c > 0$. يجب أن نكون حريصين ألا نختار حالة خاصة للشكل كاختيار $(0, 7)$ ، $(-5, 0)$ ، $(5, 0)$ كإحداثيات A, B, C لانه عندئذ يكون برهان النظرية للمثلث المتساوي الساقين الخاص هذا ، وليس للمثلثات متساوية الساقين بوجه عام . منتصفا BC و AC هما $M(a/2, c/2)$ و $N(-a/2, c/2)$ وطولا المستقيمين المتوسطين AN و BM هما

$$|BM| = \sqrt{\left(\frac{a}{2} + a\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} + \frac{c^2}{4}}$$

$$|AN| = \sqrt{\left(-\frac{a}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} + \frac{c^2}{4}}$$

هذا يثبت أن $|BM| = |AN|$



شكل ت - ١٩

• المستقيمان المتوسط في مثلث هو القطعة المستقيمة الواصلتة من رأس الى منتصف الضلع المقابل .

مسائل :

فى كل مما يأتى أوجد معادلتين على الصورتين (٣) و (٦) للدائرة التى مركزها عند C ونصف قطرها r :

$$\begin{array}{lll} ١ - C(0,0), r=7 & ٢ - C(1,3), r=2 & ٣ - C(-6,-1), r=1 \\ ٤ - C(-5,0), r=\frac{3}{2} & ٥ - C(a,6), r=a \end{array}$$

أوجد معادلة للدائرة التى تحقق الشروط المعطاة وخطط الشكل البيانى :

- ٦ - المركز عند $(0, -6)$ وتمر بنقطة الأصل .
- ٧ - المركز عند نقطة الأصل وتمر بالنقطة $(4, 8)$.
- ٨ - المركز عند $(4, 0)$ وتمر بالنقطة $(1, 3)$.
- ٩ - نهايتا قطر عند النقطتين $(3, 8)$ و $(1, 0)$.
- ١٠ - نهايتا قطر عند النقطتين $(0, -b)$ و $(b, 0)$.
- ١١ - المركز فى الربع الثانى ونصف القطر 3 وتمس كلا من المحورين .
- ١٢ - المركز عند $(0, 3)$ وتمس الخط المنصف للربيعين الثانى والرابع .
- ١٣ - أوجد معادلة للدائرة التى تمر بالنقط $(0,0)$ $(0,2)$ $(4,0)$.

أوجد مركز ونصف قطر كل من الدائرة الآتية وخطط شكلها البيانى :

$$\begin{array}{lll} ١٤ - x^2 + y^2 - 2x - 6y - 26 = 0 & ١٥ - x^2 + y^2 - 10y = 0 & ١٦ - x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 = 0 \\ ١٧ - x^2 + y^2 + 2x - 2y + 11 = 0 & ١٨ - 4x^2 + 4y^2 + 4x + 24y + 9 = 0 & ١٩ - 9x^2 + 9y^2 + 24y - 38 = 0 \\ ٢٠ - x^2 + y^2 + ax + ay = 0 \end{array}$$

خطط الشكل البيانى للمتباينات الآتية :

$$\begin{array}{lll} ٢١ - x^2 + y^2 \leq 36 & ٢٢ - x^2 + y^2 > 20 & ٢٣ - (x-1)^2 + (y-2)^2 < 16 \\ ٢٤ - x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 \leq 0 & ٢٥ - 4x^2 + 4y^2 + 20y \geq 11 \end{array}$$

أوجد نقط تقاطع الدوائر الآتية مع المحور x

$$\begin{array}{lll} ٢٦ - x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0 & ٢٧ - x^2 + y^2 + 8x + 12y + 16 = 0 & ٢٨ - x^2 + y^2 + 4x - 14y + 30 = 0 \end{array}$$

٢٩ - أثبت أن الدائرتين $x^2 + y^2 = 5$ و $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 15$ متماستان عند النقطة $(2, -1)$

أوجد أقصر مسافة من النقطة المعطاة الى الدائرة المناظرة :

$$\begin{array}{ll} ٣٠ - x^2 + y^2 = 16, (-5, 12) & ٣١ - x^2 + y^2 - 10x + 6y - 16 = 0, (-3, -9) \\ ٣٢ - x^2 + y^2 - 6x - 10y - 47 = 0, (10, 0) \end{array}$$

٣٣ - أوجد معادلتى الدائرتين اللتين مركز كل منهما عند النقطة $(-2, 2)$ وتمسان الدائرة $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 5 = 0$

أوجد طول المماس من النقطة المعطاة للدائرة المناظرة :

٣٤ - $x^2 + y^2 = 20, (-3, 6)$. ٣٥ - $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 14 = 0, (2, 4)$

٣٦ - صف فئة جميع النقط P بحيث أن المسافة بين $A(-2, 0)$ و P تكون ثلاثة أمثال المسافة بين P و $B(6, 0)$.

٣٧ - أوجد المحل الهندسى لنقطة تتحرك بحيث أن حاصل جمع مربعى بعديها عن $B(5, -4)$ و $A(0, 2)$ هو 91 .

٣٨ - لتكن $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$ ، n من النقط فى المستوى . صف فئة جميع النقط P حيث حاصل جمع مربعات المسافات بين P والنقط الـ n يساوى ثابتاً معطى .

٣٩ - من أحد طرفى قطر فى دائرة نصف قطرها r ، رسمت أوتار ومدت مسافة تساوى طول الوتر . صف الفئة المكونة من نهايات هذه الخطوط . (ارشاد : ضع الدائرة بحيث يكون مركزها عند نقطة الأصل ونهاية القطر عند $(-r, 0)$. لتكن (x, y) هى إحداثيات الطرف الآخر للوتر الممتد . أوجد علاقة بين x و y .

٤٠ - قطعة مستقيمة طولها a تتحرك بحيث أن نهايتيها تكونان على خطين متعامدين . صف المحل الهندسى لمنتصفها (ارشاد : افرض أن الخطين المتعامدين هما المحوران وأن (x, y) إحداثياً المنتصف) .

٤١ - لآى قيم k تكون المعادلة $x^2 + y^2 + ky + 8 = 0$ لها شكل بيانى ؟

٤٢ - اثبت أنه عندما $A \neq 0$ المعادلة (٦) يكون شكلها البيانى دائرة ، اذا كان لها شكل بيانى ، وذلك بكتابتها فى الصورة (٣) . أوجد نصف قطر هذه الدائرة وعين الشرط على A, D, E, F بحيث لا يوجد شكل بيانى . متى يكون الشكل البيانى مجرد نقطة ؟

٤٣ - أوجد معادلة للدائرة التى تمر بالنقطتين $(7, 0)$ و $(1, 0)$ وتمس المحور y .

٤٤ - أوجد معادلة للدائرة التى تمس الدائرة $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(3, 4)$ ونصف قطرها 12 . (اجابتان) .

٤٥ - أوجد معادلة الدائرة التى تمس كلا من محورى الاحداثيات وتمر بالنقطة $(8, 9)$. (ارشاد : على أى خط مستقيم يجب أن يقع المركز ؟)

٤٦ - اثبت أن طول المماس للدائرة $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ من النقطة (x_1, y_1) هو $\sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}$. أوجد أطوال المماسات للدائرة :

$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 27 = 0$ من النقط $(2, -1)$ و $(-1, -4)$ ، $(10, 3)$.

٤٧ - صف فئة جميع النقط $P(x, y)$ حيث طول المماس من P للدائرة $x^2 + y^2 = 9$ يساوى ضعف طول المماس من P للدائرة $x^2 + y^2 + 3x - 6y = 0$ (ارشاد : انظر المسألة ٤٦) .

٤٨ - أثبت أن معادلة المماس للدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ عند النقطة (x_1, y_1) على الدائرة هي $x_1x + y_1y = a^2$.

في كل ممايأتى أوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقط الثلاث (ارشاد : المعادلة ستكون على الصورة

$$x^2 + y^2 + D'x + E'y + F' = 0$$

التي نحصل عليها من (٦) بالقسمة على A . عوض احداثيات كل نقطة ، كل فى دورها فى هذه المعادلة ، فنحصل على ثلاث معادلات فى F' و E' و D' . بما أن النقط تقع على الدائرة ، F' و E' و D' يجب أن تكون أعدادا بحيث هذه المعادلات تكون صحيحة . حل المعادلات آنيا لـ $(D, E, F,$

$$\begin{array}{ll} \text{٤٩ - } (-3,0), (0,-3), (0,0) & \text{٥٠ - } (0,0), (1,-1), (4,0) \\ \text{٥١ - } (0,1), (2,0), (0,-3) & \text{٥٢ - } (1,0), (6,0), (0,4) \end{array}$$

٥٣ - اثبت أن حاصل جمع مربعات أطوال المستقيمات المتوسطة لمثلث تساوى ثلاثة أرباع حاصل جمع أطوال الاضلاع الثلاثة .

٥٤ - اثبت تحليليا ان قطرى شبه المنحرف المتساوى الساقين متساويان فى الطول .

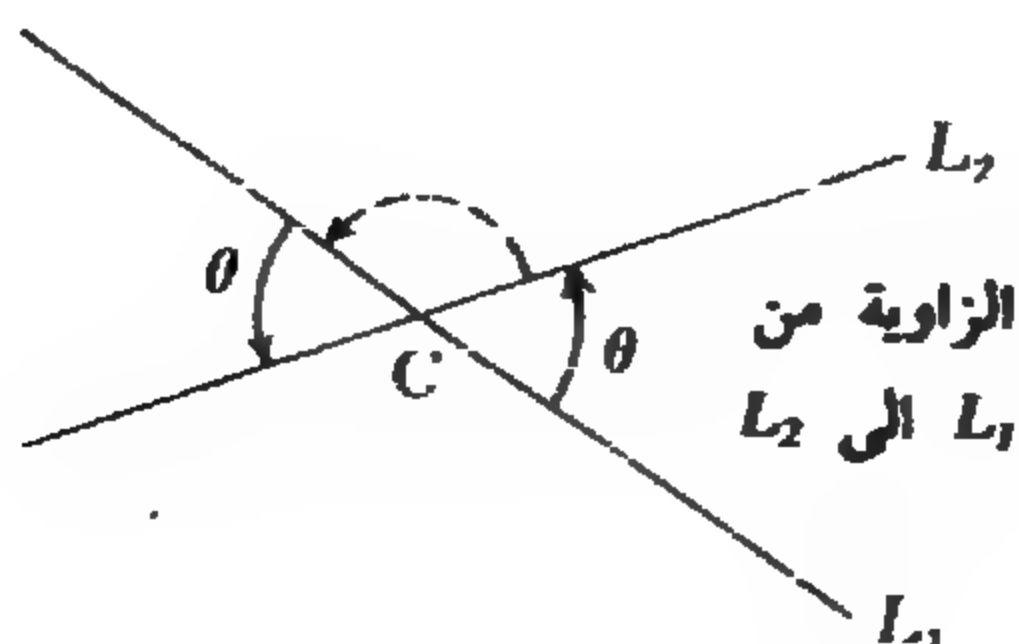
٥٥ - اثبت أن المثلث المرسوم داخل نصف دائرة هو مثلث قائم . (ارشاد : لتكن $P(a, b)$ هو الرأس الذى ليس على القطر . حيث (a, b) تحقق معادلة الدائرة .)

٢٦ - اثبت تحليليا ان الخطين الواصلين بين منتصفى كل ضلعين مقابلين فى الشكل الرباعى ينصف كل منهما الآخر .

ت - ٤

ميل الخط المستقيم

ليكن L_1 و L_2 خطين مستقيمين متقاطعين عند C (شكل ت - ٢٠) . اذا دار L_1 فى اتجاه مضاد لعقرب الساعة الى أن انطبق لأول مرة على L_2 ، فان الزاوية الموجبة التى دارها تسمى الزاوية من L_1 الى L_2 . فى الشكل ت - ٢٠ أى من الزاويتين المشار اليهما بقوس متصل هى الزاوية من L_1 الى L_2 . الزاوية المشار اليها بقوس مشروط هى الزاوية من L_2 الى L_1 . واضح أنه اذا كانت θ هى مقدار الزاوية



شكل ت - ٢٠

من L_1 الى L_2 فان θ تكون بين 180° و 0° . اذا كان المستقيمان متوازيين أو منطبقين فمن المعتاد أن نقول أن الزاوية من خط الى الآخر مقدارها 0° . واذن في كل حالة $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$.

ت - ٩ تعريف . زاوية ميل خط مستقيم في مستوى الاحداثيات هي الزاوية من المحور x الى الخط المستقيم .

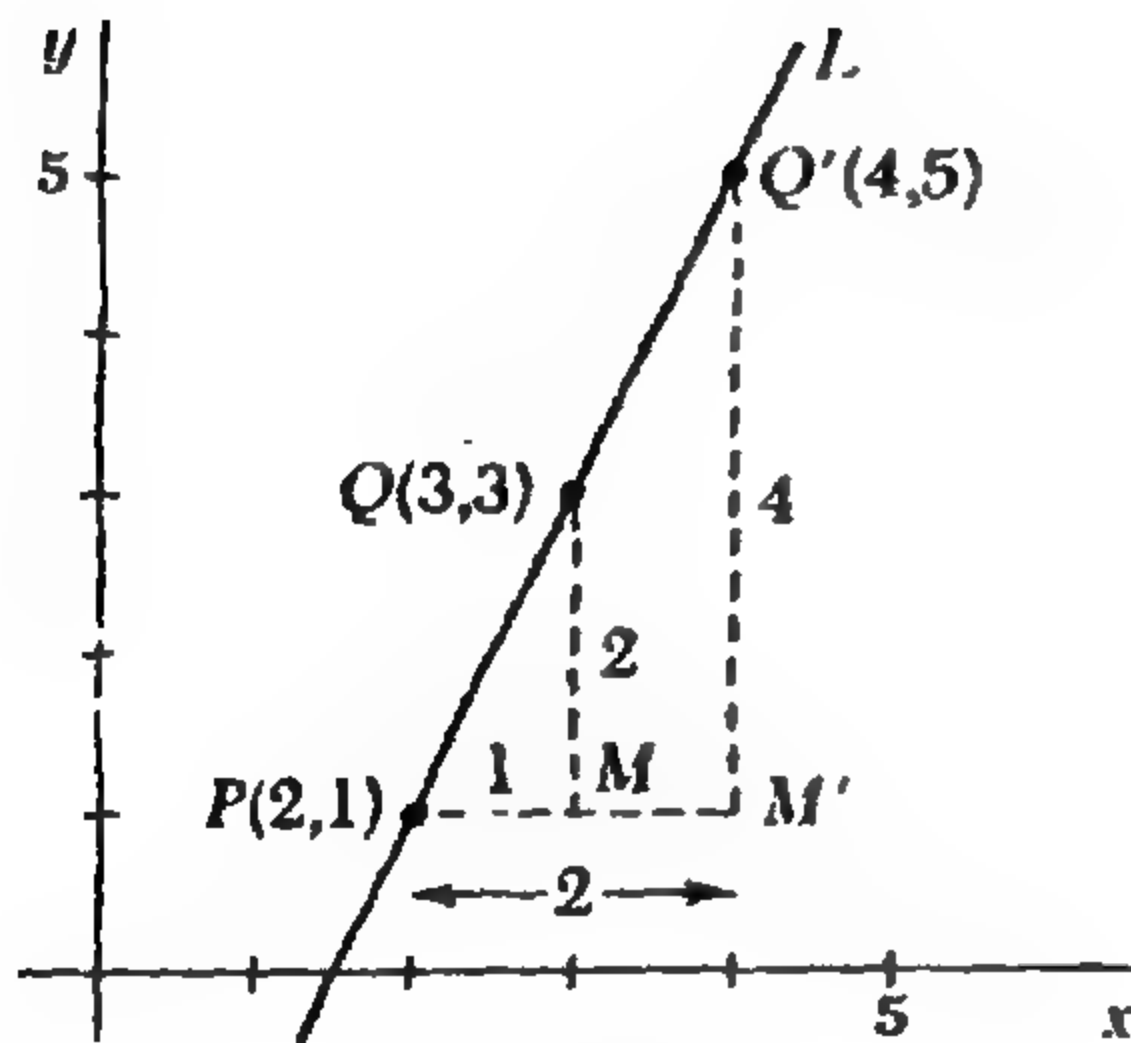
في الشكل ت - ٢١ زاويتا الميل للمستقيمين L و L' مقدارهما 150° و 45° . زاوية الميل المستقيم هي مقياس لانحدار المستقيم ، لكن مقياس افضل هو ميل الخط المستقيم .

خذ في الاعتبار الخط المستقيم L في الشكل ت - ٢٢ المار بالنقطتين $P(2, 1)$ و $Q(3, 3)$. لدينا $\overline{PM} = 1$ و $\overline{MQ} = 2$. عندما تتحرك نقطة على L من P الى Q ، النقطة ترتفع رأسياً وحدتين لكل وحدة تغير في المسافة الأفقية . النسبة بين هاتين المسافتين الموجهتين

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{PM}} = \frac{2}{1} = 2$$

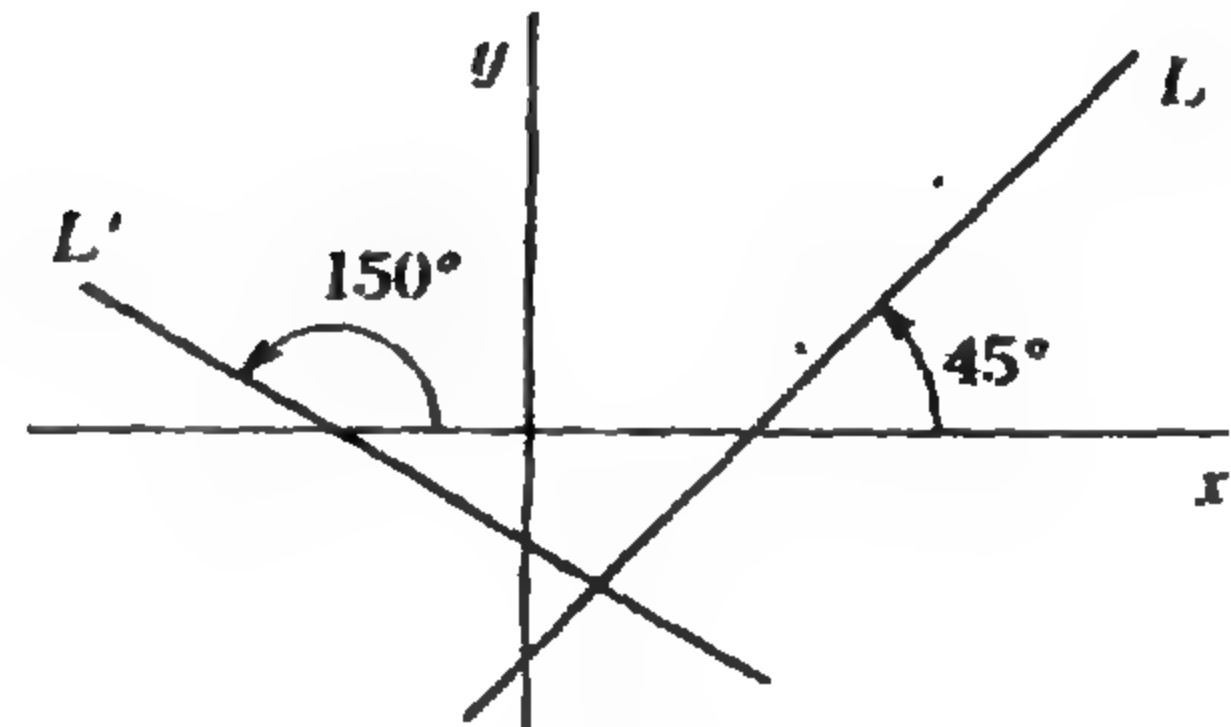
هي مقياس لانحدار الخط المستقيم L ، يسمى ميله . طبعا ، نحصل على نفس النتيجة اذا قيست النسبة بين التغيرين الأفقي والرأسي عندما تتحرك نقطة من P الى نقطة اخرى على الخط المستقيم ، وليكن الى $Q'(4, 5)$ في هذه الحالة النسبة تكون

$$\frac{\overline{M'Q'}}{\overline{PM'}} = \frac{4}{2} = 2$$



شكل ت - ٢٢

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير في الاحداثي } y}{\text{التغير في الاحداثي } x} = 2$$



شكل ت - ٢١

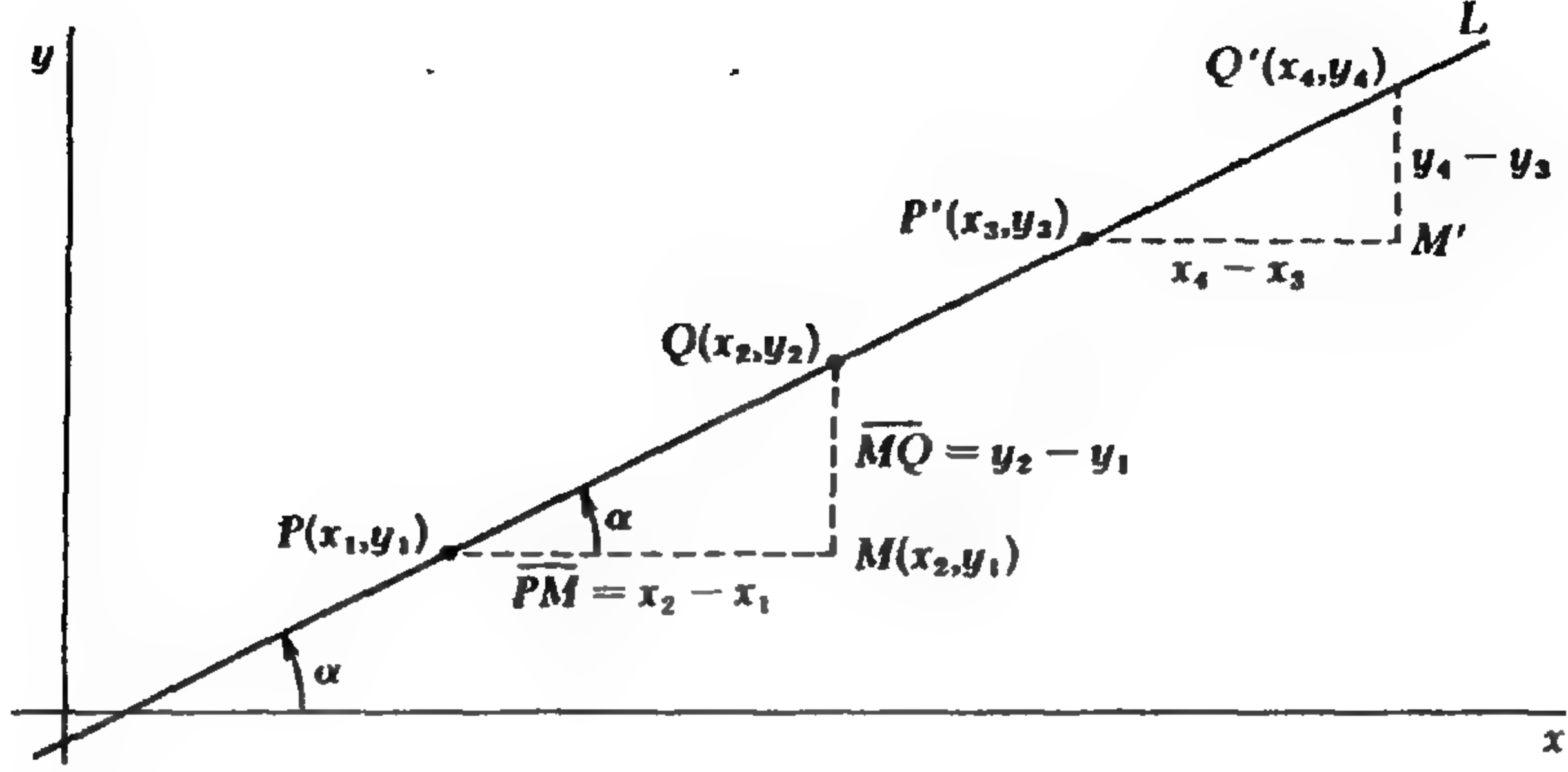
زاويتا الميل للمستقيمين L و L' مقدارهما 150° و 45° .

أي خط غير رأسي له مقياس مماثل للاتحدار . لتكن $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$ أي نقطتين على الخط المستقيم L (شكل ت - ٢٣) . التغيران في الاحداثيين x و y عندما تتحرك نقطة من P الى Q هما المسافتان الموجهتان $\overline{PM} = x_2 - x_1$ و $\overline{MQ} = y_2 - y_1$. النسبة بينهما

(١)

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{PM}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

هي ميل الخط المستقيم .



شكل ت- ٢٣

$$\text{الميل} = \frac{\overline{MQ}}{\overline{PM}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \alpha$$

ت- ١٠ تعريف . ليكن L خطا مستقيما لا يوازي المحور y ولتكن $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$ أي نقطتين مختلفتين على الميل m للخط المستقيم L هو النسبة

(٢)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

الخطوط الموازية للمحور y ليس لها ميل .

سيعلم القارئ من (١) ان ميل L هو ظل زاوية الميل α لـ L ،

$$m = \tan \alpha$$

لايجاد ميل الخط المستقيم L المار بالنقطتين $(4, 6)$ و $(-1, 3)$ في الشكل ت- ٢٤ ، ندع $P(x_1, y_1) = (-1, 3)$ و $Q(x_2, y_2) = (4, 6)$ فيكون من (٢) ميل L هو

$$m = \frac{6 - 3}{4 - (-1)} = \frac{3}{5}$$

الميل m' للخط المستقيم L' المار بالنقطتين $(1, -1)$ و $(-1, 3)$ في نفس الشكل هو

$$m' = \frac{-1 - 3}{1 - (-1)} = -2$$

إذا كان الخط L في الشكل ت - ٢٣ هابطاً وكانت النقطة Q على يمين P ، فإن \overline{MQ} يكون سالبا وكذلك يكون الميل* يمكننا أن نرى من (١) أن الخط المستقيم يكون صاعداً أو هابطاً تبعاً لكون ميله موجباً أو سالبا . الخطوط الموازية للمحور x لها الميل صفر . الخطوط التي تكاد تكون أفقية ميلها قريب من الصفر ، بينما الخطوط المنحدرة بشدة ميلها يكون كبيراً موجباً أو سالبا . إذا أعطينا أي عدد حقيقي r ، يوجد على الأقل خط واحد ميله r ، هو الخط الذي يمر بنقطة الأصل والنقطة $(1, r)$. أي توجد خطوط ميلها أي عدد معطى . الخطوط الرأسية هي فقط التي ليس لها ميل .

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

لا يهم أي من النقطتين في التعريف ت - ١٠ تسمى P وأي تسمى Q . فمثلاً في الشكل ت - ٢٤ إذا افترضنا أن $Q(x_2, y_2) = (-1, 3)$ and $P(x_1, y_1) = (4, 6)$ فإننا نحصل لميل L على

$$m = \frac{3 - 6}{-1 - 4} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$

وهي نفس النتيجة السابقة . أيضاً الميل يكون مستقلاً عن النقط المختارة على الخط المستقيم . لنرى ذلك ، نفرض أن $Q'(x_4, y_4)$ و $P'(x_3, y_3)$ أي زوج آخر من النقط على L في الشكل ت - ٢٣ المثلثان PMQ و $P'M'Q'$ متشابهان ، فأضلاعهما متناسبة ، واذن

$$\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

وبالتالي ، فالميل محسوباً من Q' و P' هو نفسه المحسوب من Q و P . فمثلاً ، الخط L في الشكل ت - ٢٤ يمر أيضاً بالنقطة $(-6, 0)$. الميل محسوباً من النقطتين $(4, 6)$ و $(-6, 0)$ هو

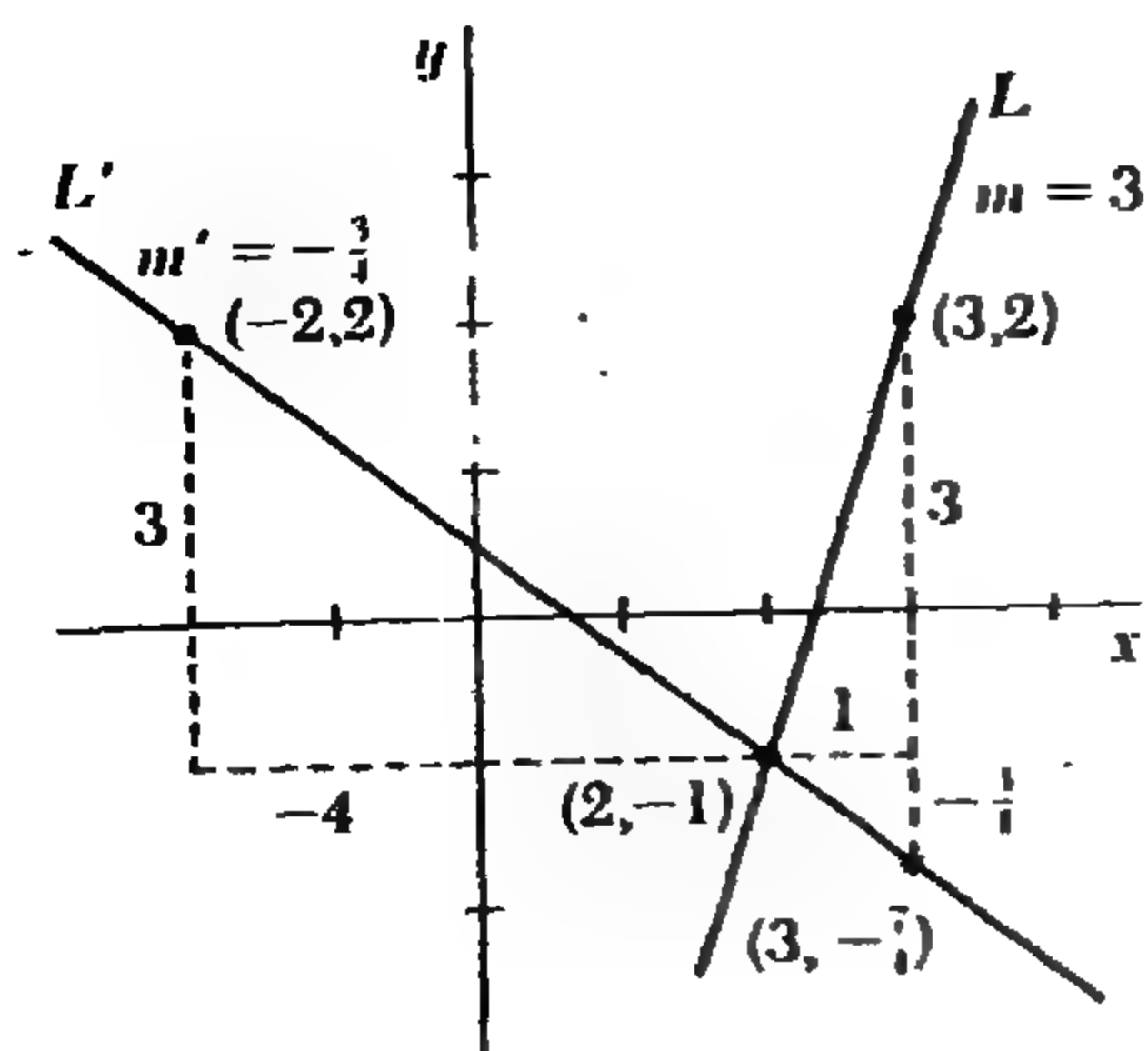
$$m = \frac{6 - 0}{4 - (-6)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

وهي نفس النتيجة السابقة .

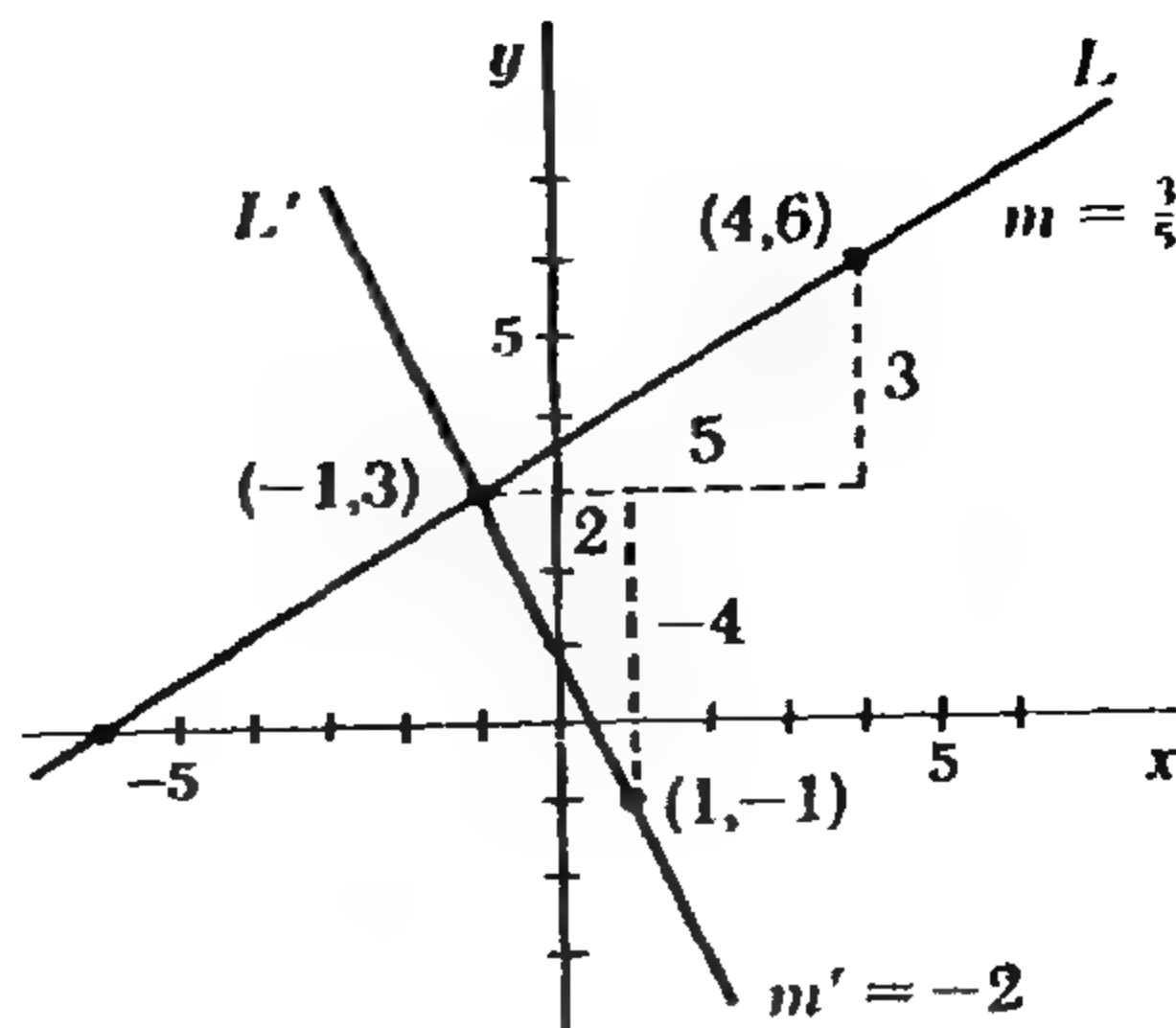
مثال ١ . كون المستقيمين المارين بالنقطة $(2, -1)$ وميلاهما $\frac{3}{4}$ و $-\frac{3}{4}$.

الخط المار بالنقطة $(2, -1)$ وميله 3 يكون صاعداً (شكل ت - ٢٥) وعندما تتحرك نقطة عليه من اليسار إلى اليمين الاحداثي y يزيد 3 وحدات لكل وحدة زيارة في الاحداثي x . لتكوين الخط المستقيم ، نبدأ من النقطة $(2, -1)$ ، نتحرك إلى اليمين وحدة واحدة إلى النقطة $(3, -1)$ ، ثم إلى أعلى 3 وحدات إلى النقطة $(3, 2)$. الخط L المار بالنقطتين $(3, 2)$ و $(2, -1)$ هو الخط المطلوب . الخط المار بالنقطة $(2, -1)$ وميله $-\frac{3}{4}$ يكون هابطاً وعندما تتحرك نقطة عليه ، الاحداثي y يتناقص $\frac{3}{4}$ وحدة لكل وحدة زيادة في الاحداثي x لتكوين الخط ، نبدأ من النقطة $(2, -1)$ ، نتحرك إلى اليمين وحدة واحدة ، ثم إلى أسفل $\frac{3}{4}$ وحدة فنصل إلى النقطة $(3, -\frac{7}{4})$. الخط المستقيم L' المار بالنقطتين $(3, -\frac{7}{4})$ و $(2, -1)$ هو الخط المطلوب . بدلاً من

* التعبيران يرتفع ويهبط يشيران دائماً إلى الحركة على الخط المستقيم من اليسار إلى اليمين .



شكل ت- ٢٥



شكل ت- ٢٤

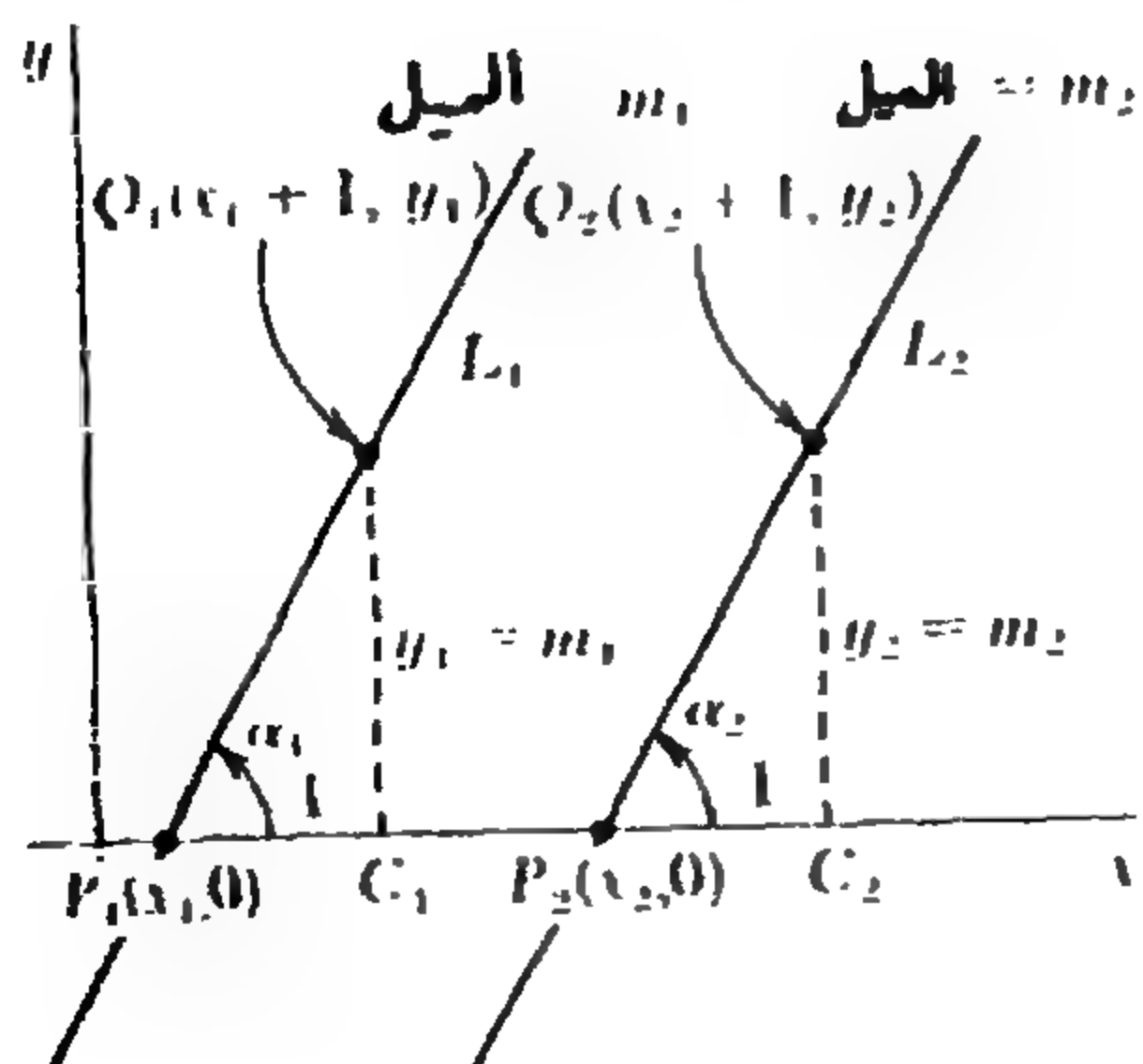
ذلك ، يمكننا أيضاً الابتداء من النقطة $(2, -1)$ ، نتحرك الى اليسار 4 وحدات ، ثم الى أعلى 3 وحدات لنصل إلى النقطة $(-2, 2)$.

من الواضح جدا أن الخطوط المتوازية لها نفس الميل . أيضا الدليل لتعامد مستقيمين بسيط جدا . الأمران معطيان في النظرية الآتية .

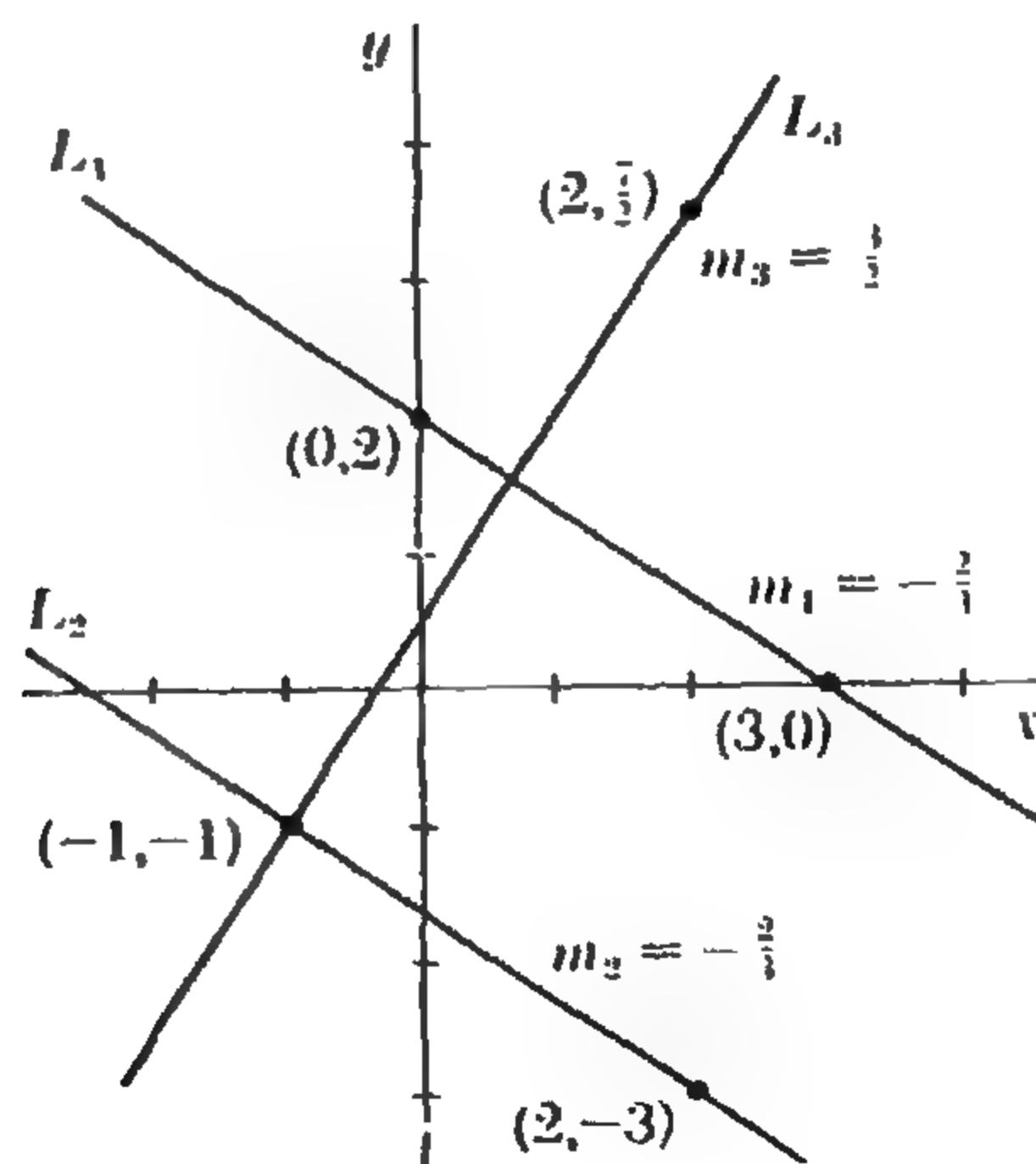
ت- ١١ نظرية . ليكن L_1 و L_2 خطين مستقيمين ميلاهما m_1 و m_2 .

(أولا) L_1 و L_2 يكونان متوازيين اذا واذا فقط كان $m_1 = m_2$.

(ثانيا) L_1 و L_2 يكونان متعامدين اذا واذا فقط كان $m_1 = -1/m_2$.



شكل ت- ٢٧



شكل ت- ٢٦

L_1 و L_2 ميلاهما متساويان فهما متوازيان L_1 و L_3 فهما متعامدان .

فمثلا ، فى الشكل ت - ٢٦ الخط L_1 الذى يمر بالنقطتين $(3, 0)$ و $(0, 2)$ يوازي الخط L_2 الذى يمر بالنقطتين $(2, -3)$ و $(-1, -1)$ لأن

$$m_1 = \frac{2-0}{0-3} = -\frac{2}{3} \quad \text{و} \quad m_2 = \frac{-1+3}{-1-2} = -\frac{2}{3}$$

الخط L_3 الذى يمر بالنقطتين $(2, \frac{1}{2})$ و $(-1, -1)$ عمودى على الخط L_1 لأن

$$m_3 = \frac{\frac{1}{2}+1}{2+1} = \frac{3}{2} = -\frac{1}{m_1}$$

البرهان . (أولا) لتكن النقطتان $P_1(x_1, 0)$ و $P_2(x_2, 0)$ هما نقطتا تقاطع المحور x مع المستقيمين L_1 و L_2 ، ولتكن زاويتا الميل هما α_1 و α_2 (شكل ت - ٧) . اختر نقطتين Q_1, Q_2 على المستقيمين L_1, L_2 احداثياتهما السينية $x_1 + 1$ و $x_2 + 1$. لتكن احداثياتهما الصادية y_1 و y_2 . ميلا المستقيمين L_1 و L_2 ، محسوبين من النقط P_1, Q_1 و P_2, Q_2 و هما y_1 و y_2 . واذن

$$m_1 = y_1 = \overline{C_1 Q_1} \quad \text{و} \quad m_2 = y_2 = \overline{C_2 Q_2}$$

حيث C_1 و C_2 هما النقطتان الموضحتان فى الشكل . اذا كانت $m_1 = m_2$ ، فان $\overline{C_1 Q_1} = \overline{C_2 Q_2}$ ، المثلثان $P_1 C_1 Q_1$ و $P_2 C_2 Q_2$ يتطابقان ، $\alpha_1 = \alpha_2$ ، والمستقيم L_1 يوازي L_2 وبالعكس ، اذا كان L_1 و L_2 متوازيين ، فان $\alpha_1 = \alpha_2$ ، المثلثان يتطابقان ، $\overline{C_1 Q_1} = \overline{C_2 Q_2}$ و $m_1 = m_2$. اذا كان أى الخطين موازيا للمحور x ، فانه لا يوجد جزء مقطوع من المحور x ويجب تعديل البرهان . نترك هذا للقارئ (المسألة ٤٨) .

(ثانيا) ليكن (a, b) احداثيا نقطة التقاطع M للمستقيمين L_1 و L_2 (شكل ت - ٢٨) . اختر نقطتين $P_1(c, d_1)$ و $P_2(c, d_2)$ ، الواحدة مباشرة فوق الاخرى ، على L_1 و L_2 . بما أن الخطين لهما ميلان ، فكل منهما لا يكون موازيا للمحور y ، ومثل هذا الاختيار ممكن . المستقيمان L_1 و L_2 يتعامدان اذا واذا فقط كان المثلث MP_1P_2 له زاوية قائمة عند M ، اى اذا واذا فقط كان

$$|MP_1|^2 + |MP_2|^2 = |P_2P_1|^2$$

هذه المعادلة تكافىء

$$(c-a)^2 + (d_1-b)^2 + (c-a)^2 + (d_2-b)^2 = (d_1-d_2)^2$$

التي تختزل الى

$$2d_1d_2 - 2d_1b - 2d_2b + 2b^2 = -2(c-a)^2,$$

$$(d_1-b)(d_2-b) = -(c-a)^2. \quad \text{أى}$$

$$\frac{d_1-b}{c-a} \frac{d_2-b}{c-a} = -1 \quad \text{ومن ثم}$$

بما أن ميلي الخطين L_1 و L_2 هما $m_1 = (d_1-b)/(c-a)$ و $m_2 = (d_2-b)/(c-a)$

هذه المعادلة الاخيرة تصبح

ونكون قد أثبتنا (ثانيا) $m_1 m_2 = -1$ (٣)

هذه النظرية تقول أن الخطين يكونان متعامدين إذا وإذا فقط كان ميل كل منهما سالب مقلوب ميل الآخر ، وذلك بفرض أن كلا من المستقيمين لا يكون موازيا لأي من المحورين . المعادلة (٣) هي صورة أخرى لهذا الشرط ، كثيرا ما تستخدم .

مثال ٢ . أثبت أن النقط $A(-2,4)$, $B(2,2)$ و $C(8,-1)$ تقع على خط مستقيم .
الميل m_1 للمستقيم AB هو

$$m_1 = \frac{4-2}{-2-2} = -\frac{1}{2}$$

والميل m_2 للمستقيم BC هو

$$m_2 = \frac{2+1}{2-8} = -\frac{1}{2}$$

اذن المستقيمان متوازيان ، وبما أن لهما النقطة B مشتركة ، اذن يتحتم انطباقهما .

مثال ٣ . أثبت تحليليا أن المثلث المرسوم داخل نصف دائرة يكون قائم الزاوية .

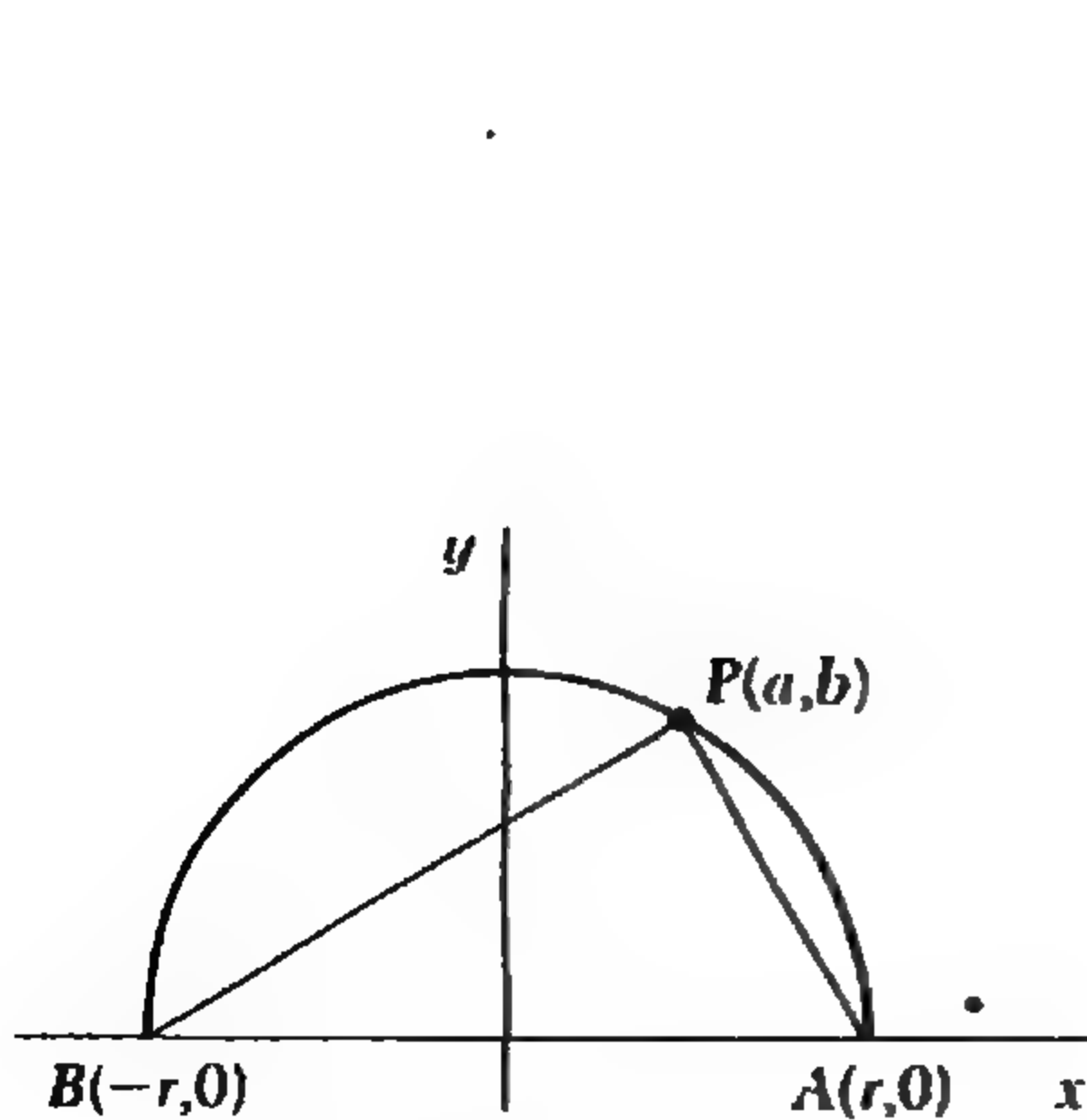
ضع نصف الدائرة مع مثلثها المرسوم داخلها على مستوى الاحداثيات بحيث يكون مركزها عند نقطة الاصل والقطر على المحور x ، كما في الشكل ت - ٢٩ . اذا فرضنا أن نصف قطر الدائرة ، فان نهايتي القطر A و B لهما الاحداثيات $A(r, 0)$ و $B(-r, 0)$. ليكن (a, b) احدائى الرأس الثالث P للمثلث . اذا رمزنا لميلى AP و BP بالرمزين m_{AP} و m_{BP} فانه يكون

$$m_{AP} = \frac{b}{a-r}, \quad m_{BP} = \frac{b}{a+r}, \quad \text{و} \quad m_{AP} m_{BP} = \frac{b^2}{a^2 - r^2}$$

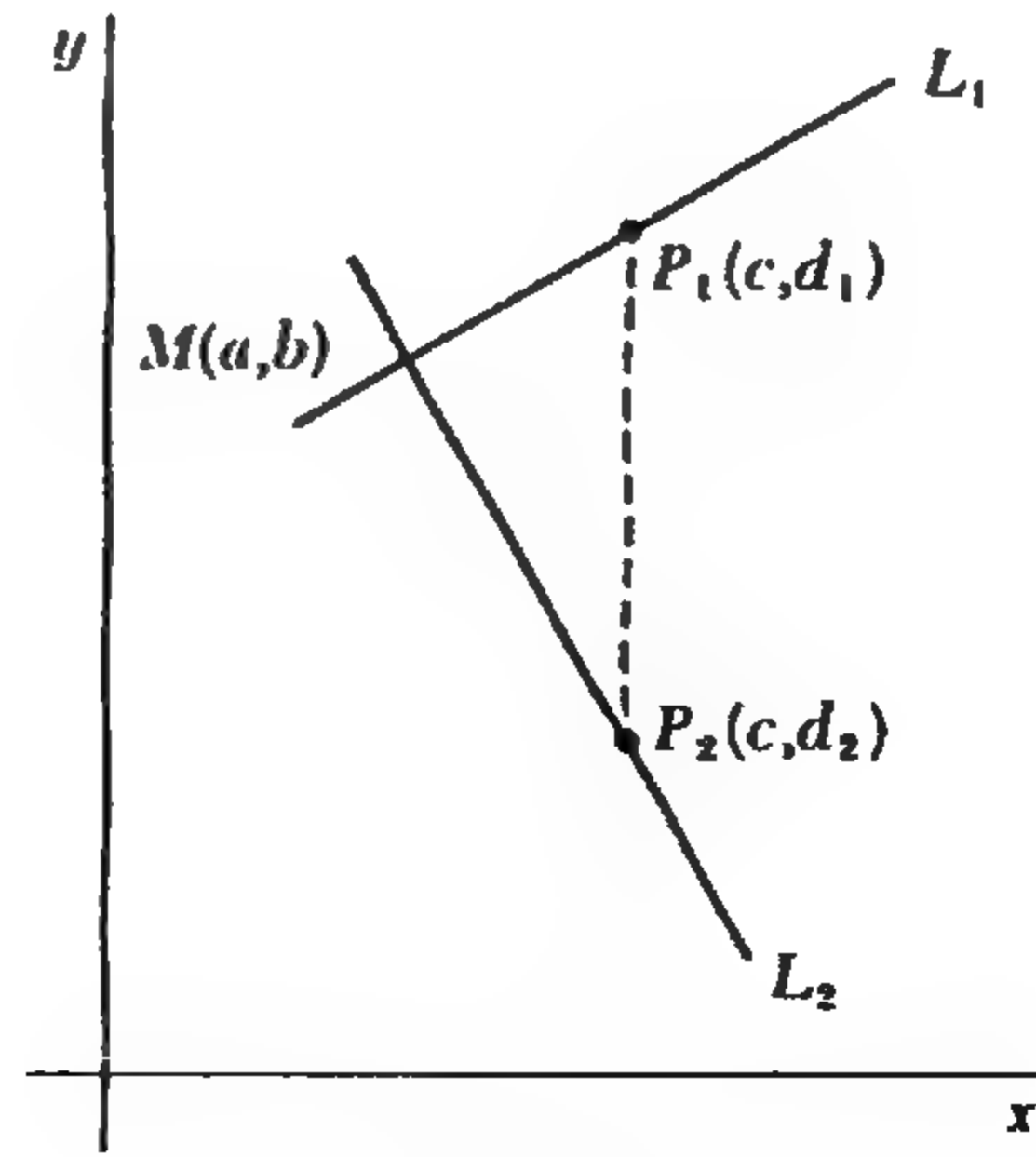
بما أن P على نصف الدائرة ، احداثياها (a, b) يحققان معادلة الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$. أى أن ،
 $b^2 = r^2 - a^2$ اذن

$$m_{AP} m_{BP} = \frac{r^2 - a^2}{a^2 - r^2} = -1$$

فميلا المستقيمين AP و BP كل منهما سالب مقلوب الآخر ، واذن P زاوية قائمة .



شكل ت - ٢٩



شكل ت - ٢٨

مسائل :

وقع أزواج النقط الآتية وأوجد ميل وزاوية ميل الخط المستقيم الذى يصل بينهما :

- ١ - $(2,1), (5,4)$ ٢ - $(0,-3), (4,-3)$ ٣ - $(1,-1), (-5,5)$
 ٤ - $(-2,-1), (-2,7)$ ٥ - $(2,2), (2-3\sqrt{3}, -1)$ ٦ - $(u, v+w), (u+v, w)$

وقع أزواج النقط الآتية وأوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين وميل الخط العمودى :

- ٧ - $(-2,0), (1,4)$ ٨ - $(6,5), (8,-3)$ ٩ - $(b,0), (0,c)$
 ١٠ - $(-1,-1), (4,-1)$ ١١ - $(2,5), (2,-8)$ ١٢ - $(0,3), (a,b)$

أثبت أن الخط المستقيم الواصل بين النقطتين الأولى والثانية عمودى على الخط المستقيم الواصل بين النقطتين الثالثة والرابعة .

- ١٣ - $(-3,6), (8,2), (0,0), (4,11)$ ١٤ - $(7,8), (5,-5), (4,1), (-9,3)$
 ١٥ - $(-r,0), (a, \sqrt{r^2-a^2}), (a, \sqrt{r^2-a^2}), (r,0)$

أثبت بواسطة الميل أن النقط الثلاث تقع على خط مستقيم :

- ١٦ - $(0,1), (2,5), (6,13)$ ١٧ - $(6,3), (-3,0), (12,5)$
 ١٨ - $(4,2), (1,1), (-6,7)$ ١٩ - $(a, 2-a), (3b, 2-3b), (-c, c+2)$

عين ما اذا كانت النقط الأربع فى المجموعات الآتية تقع على خط مستقيم :

- ٢٠ - $(0,-2), (2,-1), (6,1), (-4,-4)$ ٢١ - $(-6,5), (3,-1), (9,-5), (0,1)$
 ٢٢ - $(0,3), (4,5), (6,6), (-2,1)$

أثبت أن النقط هى رؤوس متوازي أضلاع وعين ما اذا كان متوازي الاضلاع مستطيلا :

- ٢٣ - $(-2,3), (1,4), (2,1), (-1,0)$ ٢٤ - $(2,2), (-2,10), (4,3), (0,11)$
 ٢٥ - $(5,-4), (-11,16), (-1,4), (-5,8)$

أى من ثلاثيات النقط الآتية تكون رؤوسا لمثلث قائم الزاوية ؟

- ٢٦ - $(0,0), (5,3), (7,0)$ ٢٧ - $(-1,1), (1,-3), (7,5)$
 ٢٨ - $(0,-5), (6,1), (-4,-2)$ ٢٩ - $(a, \frac{3a-11}{2}), (\frac{3(1-b)}{2}, b), (3,-1)$

٣٠ - أثبت أن $(-4,-2)$ و $(1,-4), (3,1), (-2,3)$ هى رؤوس مربع .

٣١ - كون خطوطا مستقيمة تمر بالنقطة $(3, 1)$ وميلها كالاتى :

$-\frac{1}{4}, -1, -2, -10$ ولا يوجد ميل $10, 2, 1, \frac{1}{4}, 0$.

كون خطا مستقيما يمر بكل من النقط الآتية وميله هو العدد المعطى :

- ٣٢ - $(3,0), \frac{1}{2}, (2,-2), -\frac{7}{5}, (1,2), -\sqrt{2}, (0,0)$

٣٦ - اثبت أن النقطة $(3, -2)$ تقع على المنصف العمودى للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(6, 5)$ و $(-4, 1)$.

٣٧ - عين قيمة b بحيث أن النقطة $(b, 3)$ تقع على المستقيم الواصل بين النقطتين $(-2, -1)$ و $(1, 3)$.

٣٨ - عين قيمة a بحيث أن النقط $(a, -1)$, $(2, 5)$, $(-4, -2)$ تكون رؤوس مثلث قائم الزاوية وزاويته القائمة عند $(2, 5)$.

٣٩ - بفرض أن (كما مستبث في البند التالي) الشكل البياني لـ $y = 2x + 3$ هو خط مستقيم ، أوجد ميله .

٤٠ - أوجد إحداثي نقطة P بحيث أن ميل الخط المستقيم المار بالنقطة P ونقطة الاصل يساوى -2 وميل الخط المستقيم المار بالنقطة P والنقطة $(3, 0)$ يساوى $\frac{3}{2}$.

النقط الثلاث المعطاة ، بالترتيب ، هي رؤوس متوازي أضلاع .

أوجد الرأس الرابع :

٤١ - $(1, 3)$, $(2, 0)$, $(-7, 0)$ ٤٢ - $(-2, -2)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$

٤٣ - إذا كانت النقطتان $(3, 4)$ و $(-3, 0)$ رأسين متجاورين لمربع ، أوجد الرأسين الآخرين ، بفرض أنهما يقعان تحت الرأسين المعطيين .

٤٤ - النقط $A(-3, 0)$, $B(7, -6)$, $C(4, 2)$ هي رؤوس مثلث . أثبت أن الخط المستقيم الواصل بين منتصفى الضلعين BC و AC يوازي الضلع الثالث AB .

٤٥ - أثبت أن الخطوط الواصلة بين منتصفات اضلاع المستطيل تكون معين .

٤٦ - اثبت أن القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى الضلعين غير المتوازيين لشبه منحرف توازي الضلعين المتوازيين وأن طولها هو المتوسط الحسابي لطولى الضلعين المتوازيين .

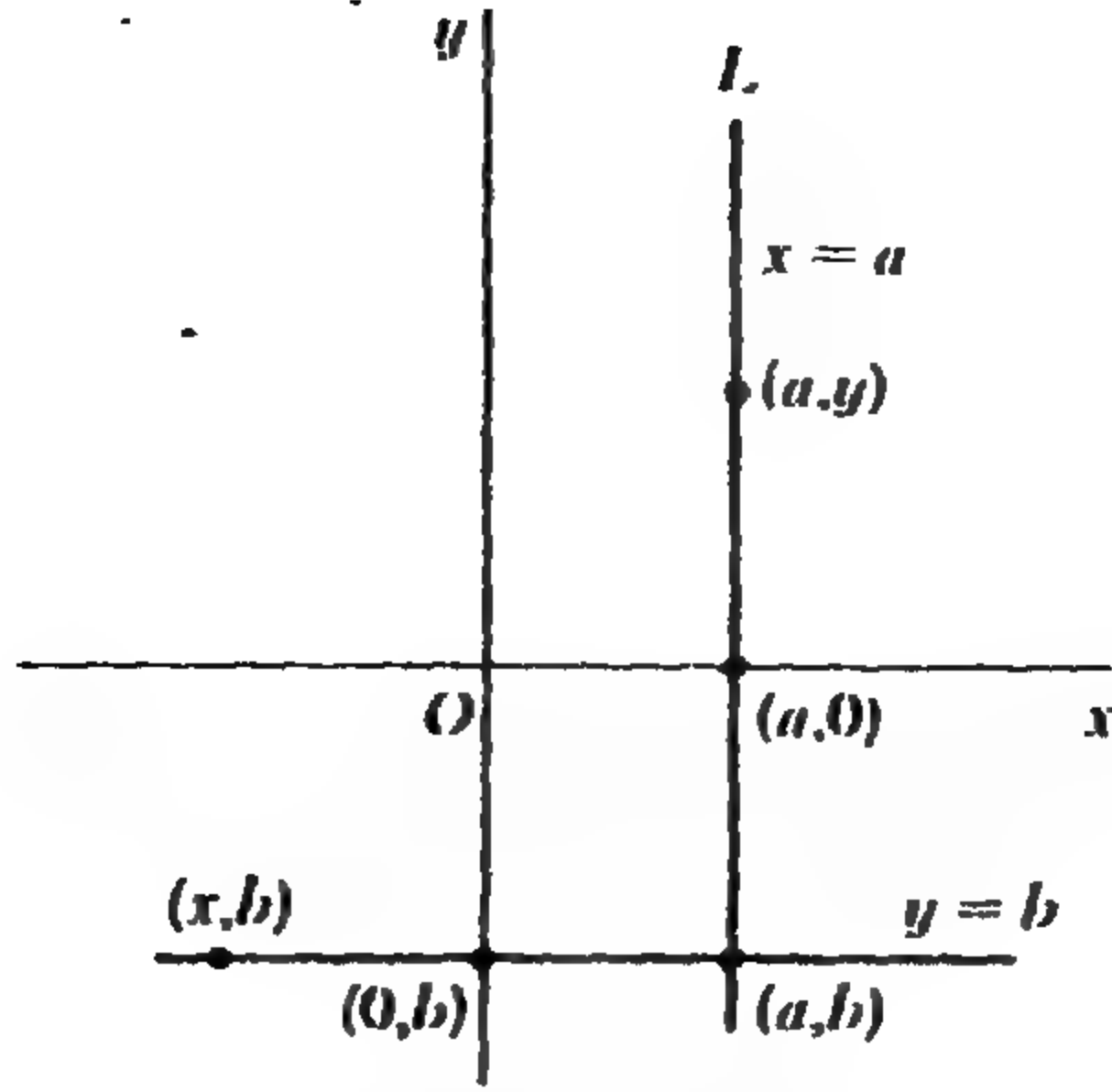
٤٧ - أثبت تحليليا أن الخطوط الواصلة بالترتيب بين منتصفات اضلاع شكل رباعي تكون متوازي أضلاع .

٤٨ - اثبت النظرية ت - ١١ (أولا) للحالة التي فيها أحد المستقيمين يوازي المحور x .

ت - ٥

معادلات المستقيمات

في هذا البند سنستمر في دراستنا للمستقيمات وسنشق معادلاتها من السهل ايجاد معادلة خط مستقيم يوازي المحور y . لتكن (a, b) أى نقطة على الخط المستقيم (شكل ت - ٣٠) . حينئذ ، جميع النقط على الخط المستقيم ، وليس غيرها ، تكون إحداثياتها السينية هي a . معادلة الخط المستقيم هي $x = a$ ، لان النقطة تكون على الخط المستقيم اذا واذا فقط كان إحداثيتها السينية يحقق هذه المعادلة . بالمثل ، الخط الذى يوازي المحور x معادلته تكون على الصورة $y = b$ ، حيث b هي الاحداثى الصادى المشترك لجميع النقط التى على الخط . فمثلا معادلة الخط الذى يمر بالنقطة $(2, -4)$ ويوازي المحور x هي $y = -4$. الحالتان الخاصتان المهمتان لما سبق هما المحوران ، x و y نفسيهما . المعادلتان لها هما $y = 0$ و $x = 0$ على الترتيب .



شكل ت - ٣٠

النقطة تكون على الخط L الذي يوازي المحور y اذا واذا فقط كان احدائها السيني يحقق المعادلة $x = a$.

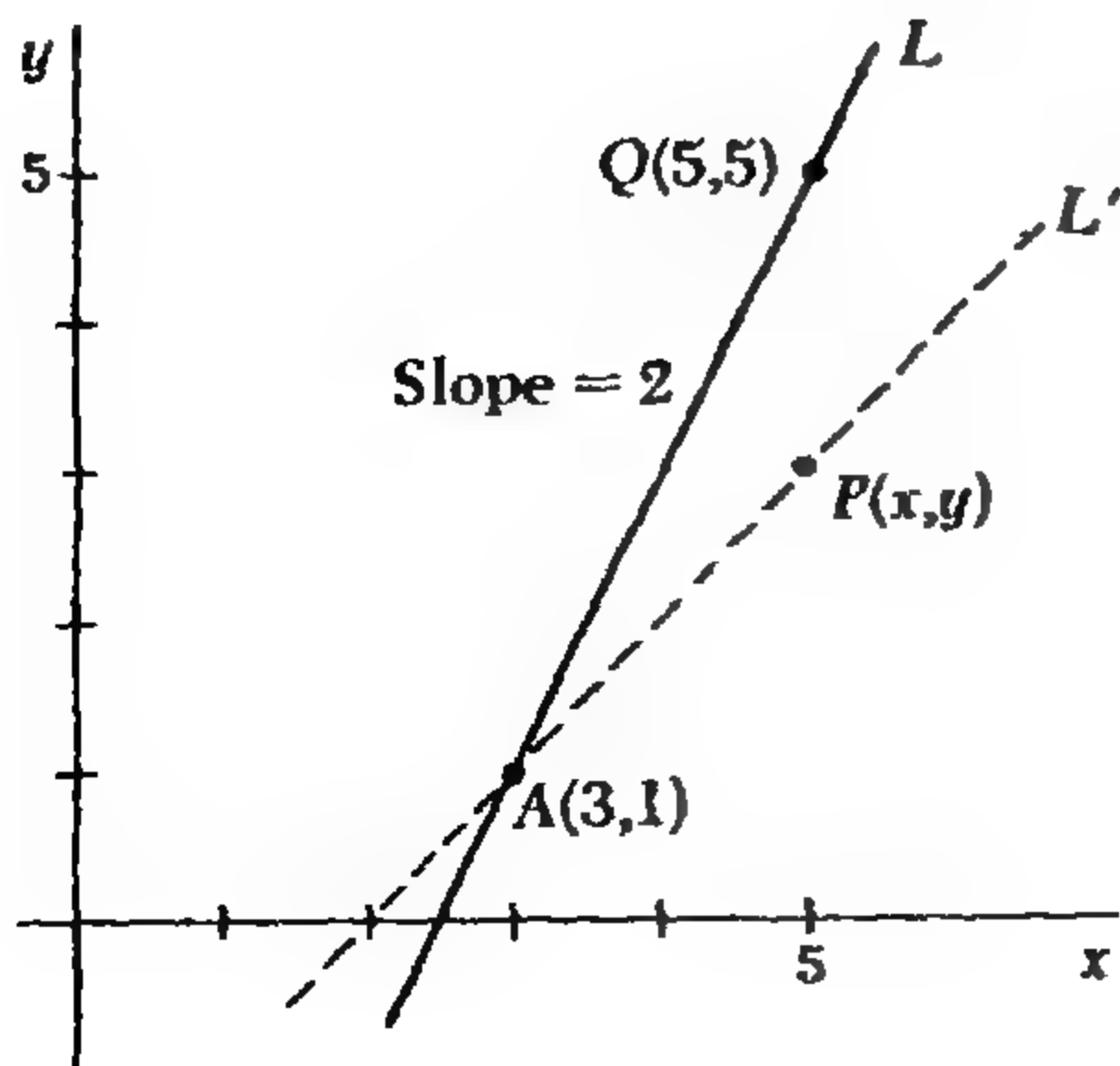
نعود الآن إلى الخطوط غير الموازية لمحور. النظرة المميزة للخط هي استقامته. هندسيا هذا يعنى أنه اذا حسب الميل من نقطتين على الخط، فاننا نحصل على نفس النتيجة مهما كان اختيار النقطتين. نستخدم هذه الخاصية لاشتقاق معادلة للخط المستقيم الذى يمر بنقطة معطاة وميله معطى، لكن نوضح أولا الطريقة بمثال خاص.

نعتبر خطا L ميله 2 ويمر بالنقطة $A(3, 1)$ (شكل ت - ٣١). لتكن $P(x, y)$ أى نقطة فى المستوى غير A ميل الخط L' الواصل بين P, A هو $(y-1)/(x-3)$. النقطة P ستكون على L اذا واذا فقط كان ميل L' هو نفسه ميل L ، أى اذا واذا فقط كان x, y عديدين بحيث أن المعادلة

$$\frac{y-1}{x-3} = 2$$

تكون صحيحة، أى اذا واذا فقط كان (x, y) حلا لهذه المعادلة أو تكافئيا، للمعادلة

$$(1) \quad y - 1 = 2(x - 3)$$



شكل ت - ٣١

P تقع على L اذا واذا فقط كان ميل PA هو 2 ومن ثم اذا واذا فقط كان $(y-1)/(x-3) = 2$.

بما أن (3, 1) هي أيضا حل للمعادلة (١) ، كل نقطة على L بدون استثناء ، وليس نقطة أخرى ، تحقق هذه المعادلة ، وهذا يثبت أن (١) معادلة للخط . كتوضيح للمناقشة ، نرى أن النقطة $Q(5, 5)$ تكون على L إذا أن ميل الخط الواصل بين A و Q هو 2 لاحظ أن إحداثي Q يحققان (١) .

الحالة العامة تماثل هذا المثال . ليكن L أي خط لا يوازي المحور y . حيث يجب أن يكون له ميل . نسميه m . خذ أي نقطة $A(x_1, y_1)$ على L (شكل ت - ٣٢) . لتكن $P(x, y)$ أي نقطة في المستوى غير النقطة A . ميل الخط L' المار بالنقطتين A و P هو $(y - y_1) / (x - x_1)$. النقطة P ستكون على L إذا وإذا فقط كان L' له نفس الميل مثل L أي إذا وإذا فقط كانت x, y عديدين بحيث أن المعادلة

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

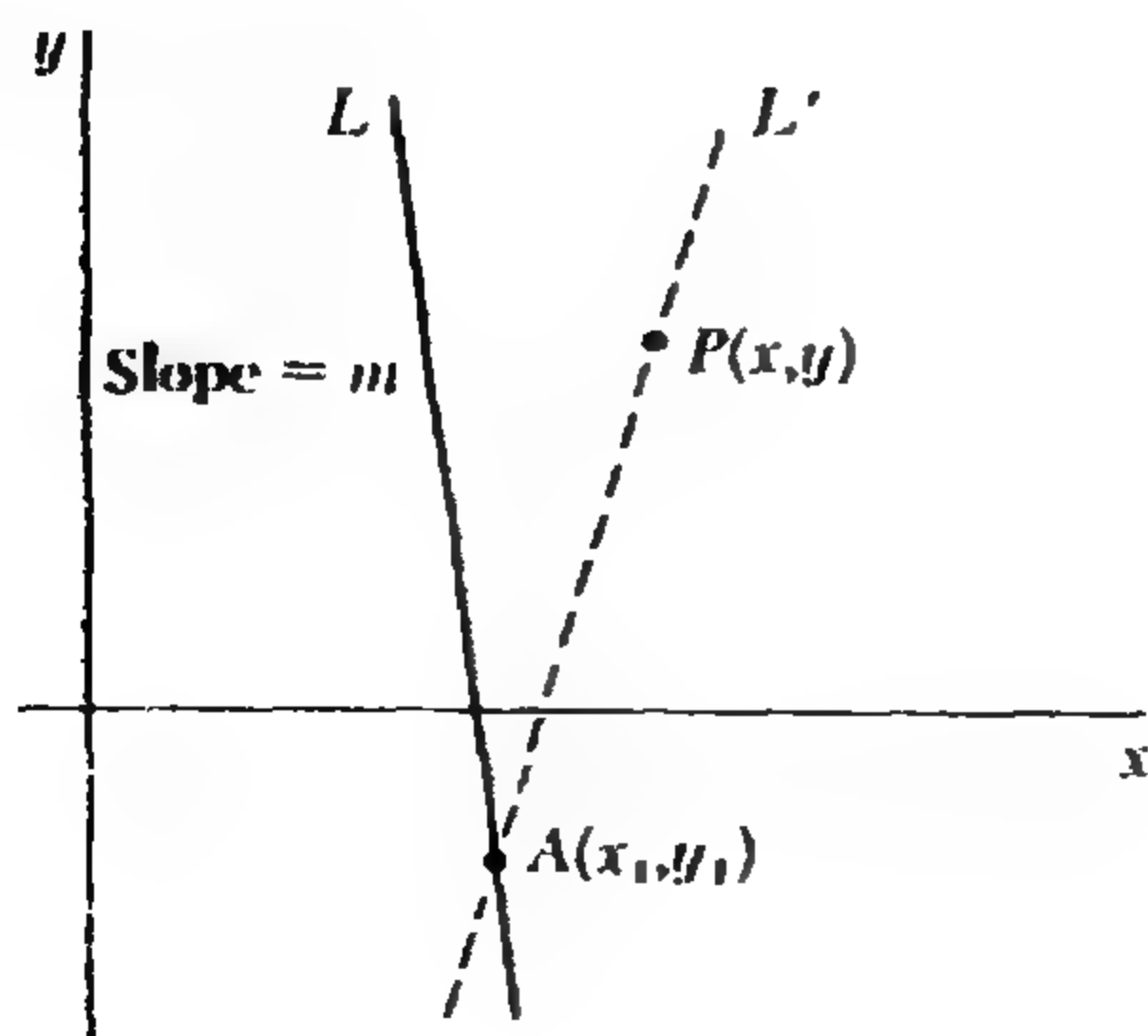
تكون صحيحة ، أي إذا وإذا فقط كان (x, y) حلا لهذه المعادلة أو ، تكافيا ، للمعادلة .

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{ت - ١٢}$$

بما أن (x, y) أيضا حل للمعادلة ت - ١٢ ، كل نقطة على L ، وليس أي نقطة أخرى ، تحقق هذه المعادلة ، وهذا يثبت أن ت - ١٢ هي معادلة لـ L .

بما أن الشكل البياني لمعادلة منحنى هو المنحنى الأصلي ، فإننا نرى أن ، بالعكس ، كل معادلة على هذه الصورة شكلها البياني هو خط مستقيم . الخط يمر بالنقطة (x_1, y_1) وميله m . فمثلا ، $y - 5 = -3(x - 2)$ يجب أن تكون معادلة خط . الخط يمر بالنقطة $(2, 5)$ وميله - 3 .

المعادلة ت - ١٢ تسمى صورة الميل ونقطة لمعادلة الخط . عند إيجاد معادلة خط معطى ، عادة نحاول إيجاد ميل الخط وإحداثي نقطة ما عليه ، لأنه حيث يمكن كتابة المعادلة مباشرة باستخدام المعادلة ت - ١٢ .



شكل ت - ٣٢

P تكون على L إذا وإذا فقط كان ميل PA هو m ومن ثم
إذا وإذا فقط كان $(y - y_1) / (x - x_1) = m$.

مثال ١ . أوجد معادلة الخط L المار بالنقطتين $(3, -4)$ و $(-6, 2)$ (شكل ت - ٣٣) .
 يمكننا أخذ $(x_1, y_1) = (-6, 2)$. ميل الخط يمكن إيجاده من النقطتين المعطيتين ، وهو

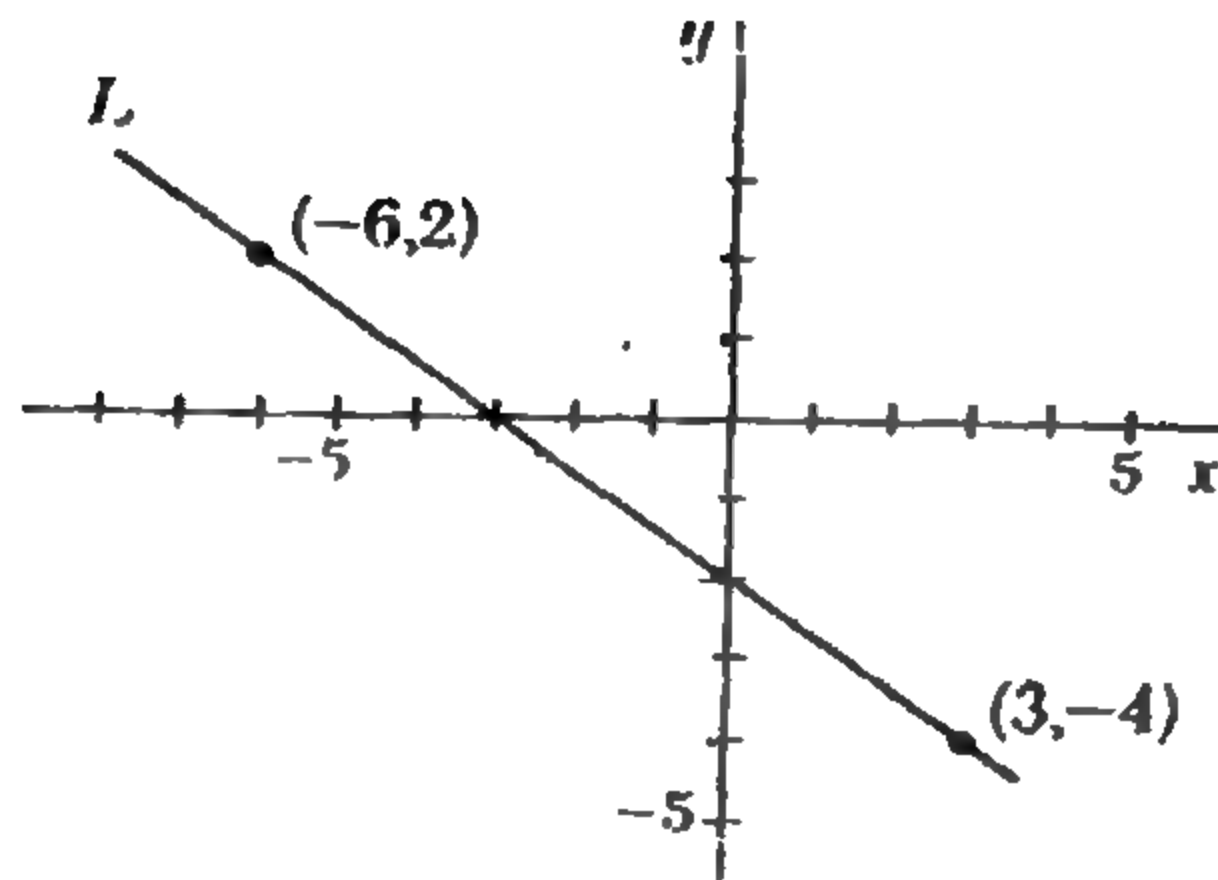
$$m = \frac{2 + 4}{-6 - 3} = -\frac{2}{3}$$

بتعويض هذه الأعداد في المعادلة ت - ١٢ ، يكون لدينا

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x + 6)$$

كمعادلة للخط . إذا أجرينا الحل لـ y ، نحصل على معادلة مكافئة هي

$$(٢) \quad y = -\frac{2}{3}x - 2$$



شكل ت - ٣٣

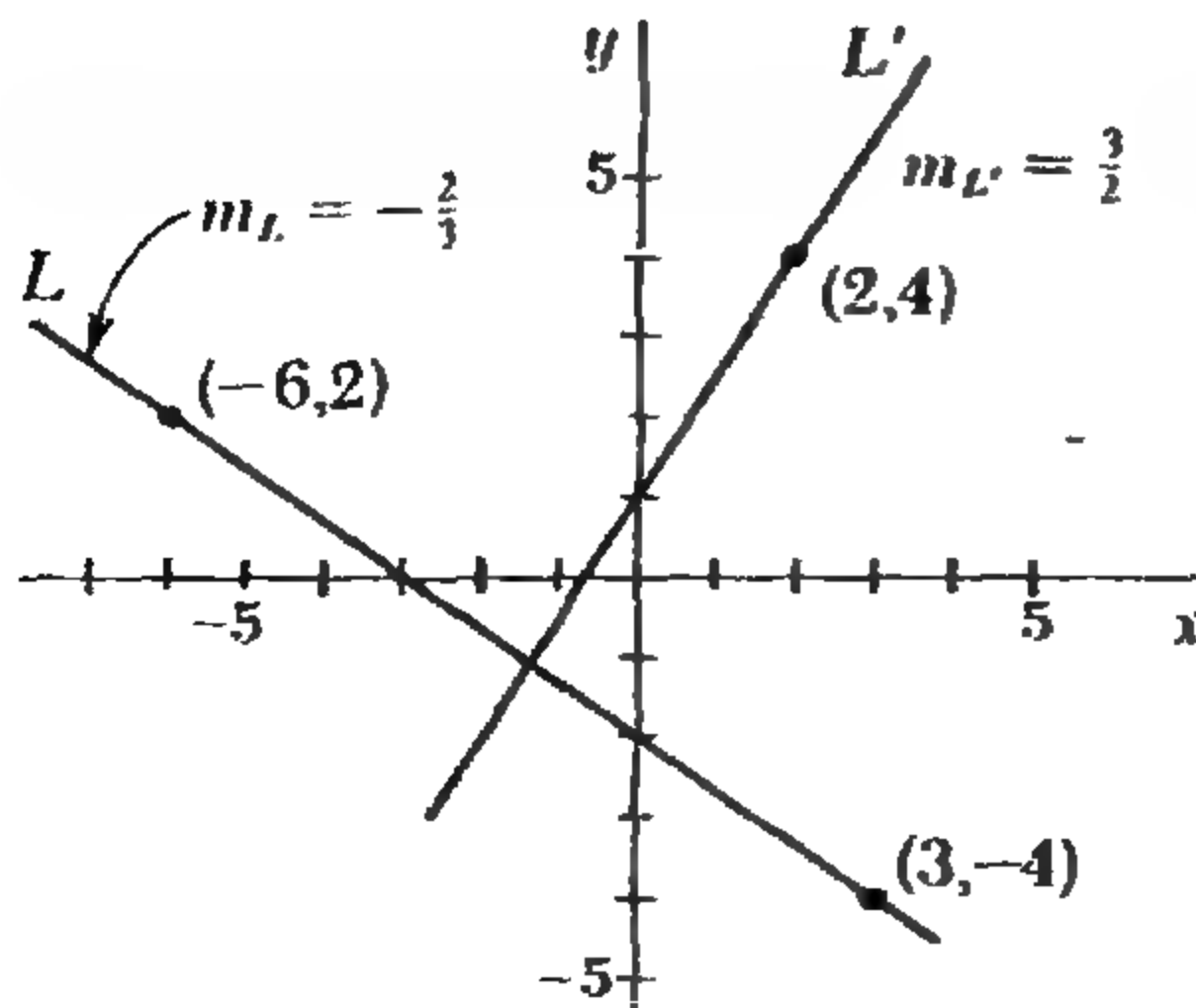
صورة ثالثة مكافئة هي

$$(٣) \quad 2x + 3y + 6 = 0$$

جميع هذه الصور صحيحة ، لكن قد تكون إحداها أكثر ملاءمة عن الأخرى ، وفقاً للاستخدام الذي ستوضع فيه المعادلة . كاختبار ، نلاحظ أن كلتا النقطتين المعطيتين تحققان (٣) .

كان في إمكاننا إيجاد معادلة L بأخذ $(x_1, y_1) = (3, -4)$ ، وبذلك نحصل على :
 $(x - 3) = -\frac{3}{2}(y + 4)$. إذ أجرينا حل هذه المعادلة لـ y ، فإنها تختزل أيضاً إلى (٢) .

مثال ٢ . أوجد معادلة للخط L' المار بالنقطة $(2, 4)$ وعمودي على الخط L في مثال ١ (شكل ت - ٣٤) .



شكل ت - ٣٤

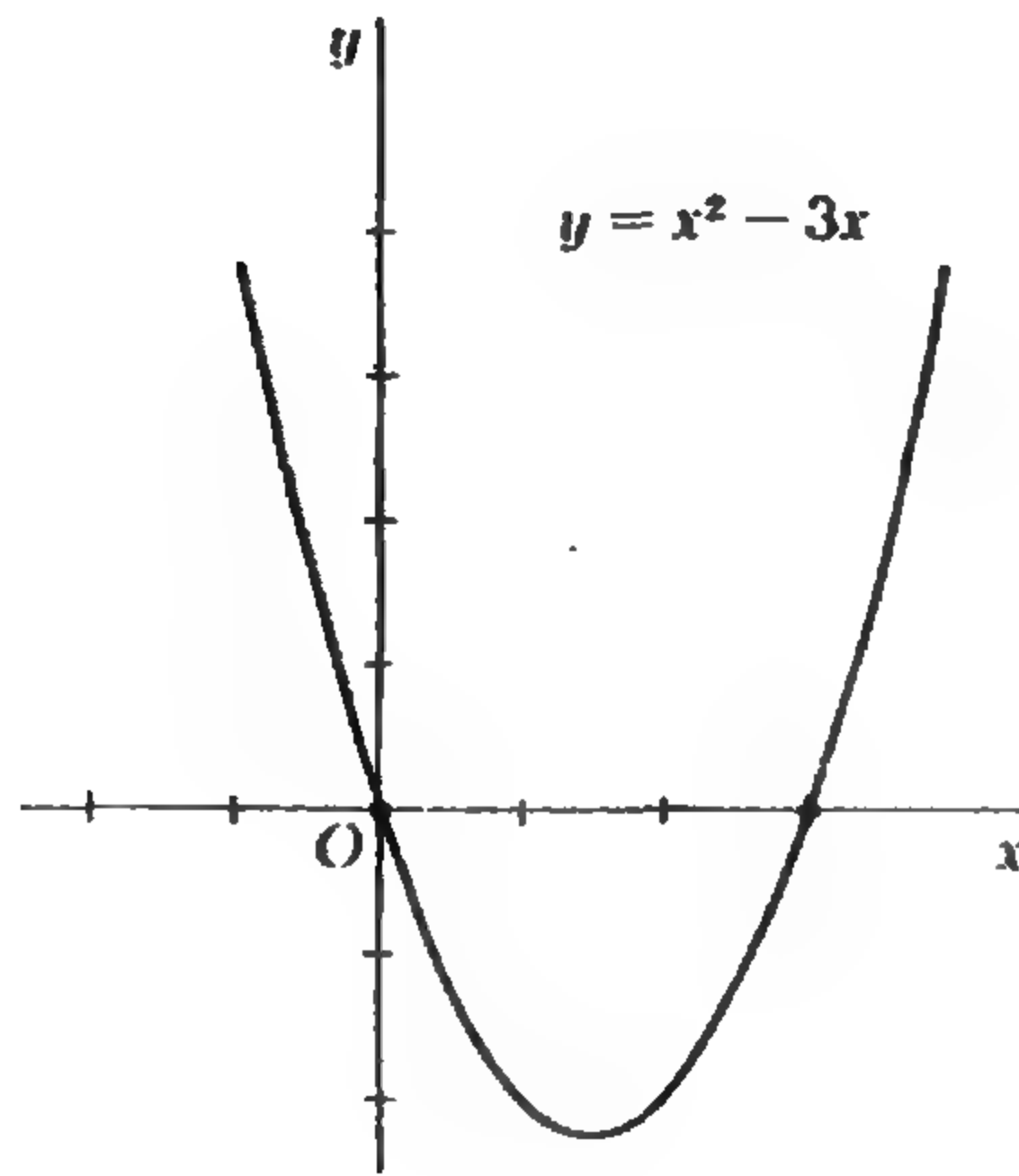
ميل L' هو سالب مقلوب ميل L ، الذي وجدنا أنه $-\frac{3}{2}$ ، وبالتالي هو $\frac{2}{3}$. يمكننا إيجاد معادلة L' باستخدام المعادلة ت- ١٢ حيث $(x_1, y_1) = (2, 4)$. هذه المعادلة هي

$$y - 4 = \frac{2}{3}(x - 2)$$

أو ، تكافئياً $3x - 2y + 2 = 0$. كاختبار جزئي ، نلاحظ أن $(2, 4)$ تحقق هذه المعادلة الأخيرة .

الاحداثيات السينية للنقط حيث المنحنى يقطع أو يمس المحور x تسمى الاجزاء المقطوعة من المحور x بالمنحنى . بالمثل ، الاحداثيات الصادية للنقط حيث المنحنى يقطع أو يمس المحور y تسمى الاجزاء المقطوعة من المحور y . الاجزاء المقطوعة من المحور x بالمنحنى توجد بوضع $y = 0$ وحل المعادلة الناتجة لـ x . الاجزاء المقطوعة من المحور y توجد بوضع $x = 0$ والحل لـ y . فمثلاً الاجزاء المقطوعة من المحور x بالمنحنى $y = x^2 - 3x$ هي جذور المعادلة $x^2 - 3x = 0$ أي $x = 0$ و $x = 3$. الجزء المقطوع من المحور y هو $y = 0$. الشكل البياني مخطط في الشكل ت- ٣٥ . الخط L' في مثال ٢ الذي معادلته $3x - 2y + 2 = 0$ يقطع المحورين عند $(0, 1)$ و $(-\frac{2}{3}, 0)$. الجزء المقطوع من المحور x هو $-\frac{2}{3}$ والجزء المقطوع من المحور y هو 1 .

الخط الذي ميله m ويقطع الجزء b من المحور y يمر بالنقطة $(0, b)$ واذن باستخدام المعادلة ت- ١٢ يكون له المعادلة $y - b = m(x - 0)$ ، وهذه تختصر الى



شكل ت- ٣٥

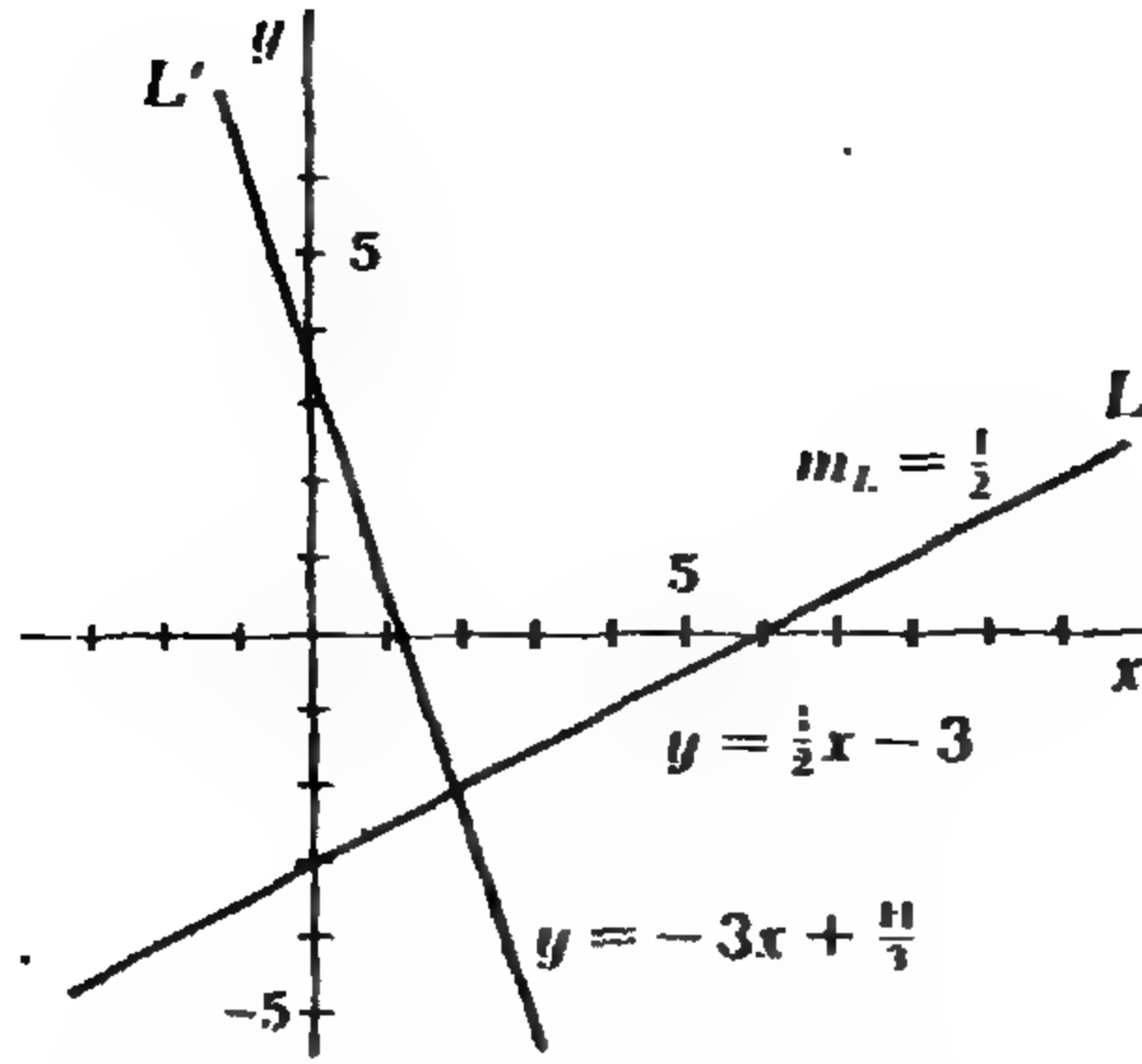
الجزءان المقطوعان من المحور x بالمنحنى هما ٣ و ٠ . الجزء المقطوع من المحور y هو صفر .

$$y = mx + b$$

ت- ١٣

المعادلة ت- ١٣ تعرف بصورة الميل والجزء المقطوع لمعادلة الخط . لاحظ أن هنا المصطلح الجزء المقطوع يعنى الجزء المقطوع من المحور y . فمثلاً ، معادلة الخط L الذي ميله $\frac{1}{2}$ ويقطع الجزء 3 من المحور y (شكل ت- ٣٦) هي $y = \frac{1}{2}x - 3$.

• المصطلح الجزء المقطوع يستخدم أيضاً ليعنى نقطة التقاطع نفسها .



شكل ت- ٣٦

كل خط لا يوازي المحور y يقطع جزءا من المحور y ومن ثم له معادلة على الصورة ت- ١٣ .
بالعكس وهذا أهم ، كل معادلة على هذه الصورة شكلها البياني خط مستقيم . معامل x هو ميل
الخط ، والحد المطلق هو الجزء المقطوع من المحور y . لنرى ذلك ، نكتب المعادلة ت- ١٣
على الصورة

$$y - b = m(x - 0)$$

هذه على الصورة ت- ١٢ حيث $y_1 = b$ و $x_1 = 0$ ، ومن ثم هي معادلة للخط الذي يمر بالنقطة
(0, b) وميله m . فمثلا ، المعادلة

$$(٤) \quad 9x + 3y - 11 = 0$$

تكافئ المعادلة

$$(٥) \quad y = -3x + \frac{11}{3}$$

التي هي على الصورة ت- ١٣ . اذن المعادلة (٥) ، وبالتالي (٤) يجب أن تكون معادلة خط ميله
- 3 ويقطع من المحور y الجزء $\frac{11}{3}$. هو الخط L' المخطط في الشكل ت- ٣٦ .
المعادلة التي على الصورة

$$(٦) \quad Ax + By + C = 0$$

حيث A, B, C ثوابت ، وحيث A و B ليس كلاهما صفرا ، تسمى معادلة من الدرجة الاولى في
 x و y . المعادلة ت- ١٣ يمكن كتابتها على الصورة $mx + (-1)y + b = 0$. حيث أن هذه على
الصورة (٦) حيث $C = b$ و $B = -1$ و $A = m$ ، فانتا نرى أن كل خط لا يوازي المحور y يكون
له معادلة من الدرجة الاولى . علاوة على ذلك ، كل خط يوازي المحور y يكون له معادلة على
الصورة $x - a = 0$ ، التي هي ايضا من الدرجة الاولى . لقد أثبتنا الجزء الأول من النظرية الآتية .

ت- ١٤ . نظرية كل خط له معادلة من الدرجة الاولى ، وبالعكس ، كل معادلة من الدرجة الاولى
شكلها البياني خط مستقيم .

لهذا السبب المعادلة من الدرجة الاولى تسمى أيضاً معادلة خطية . لاثبات عكس النظرية ،
ندرس المعادلة العامة من الدرجة الاولى

(٧)

$$Ax + By + C = 0$$

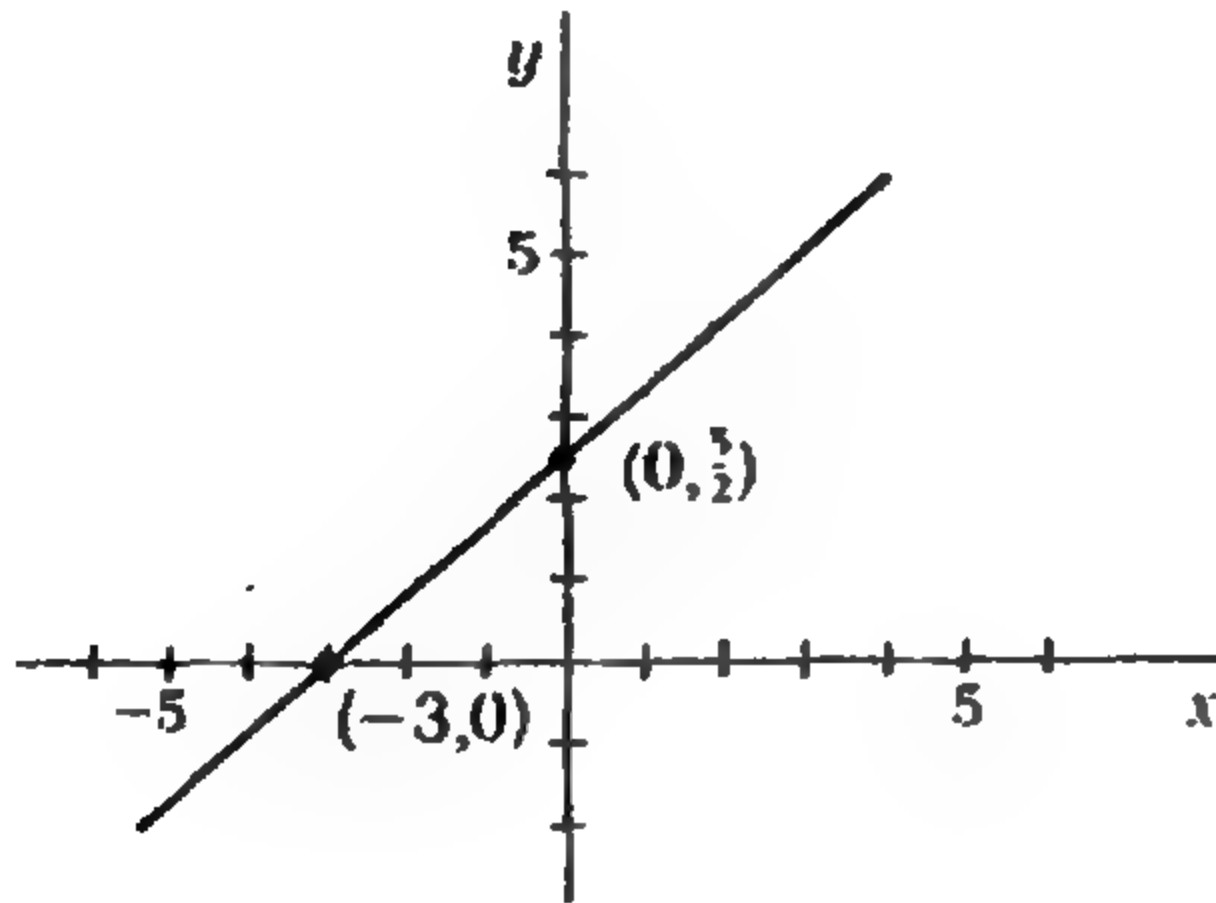
حيث B و A ليس كلاهما صفرا . توجد حالتان للدراسة تبعا لكون B تساوى أو لا تساوى صفرا .
إذا كانت $B = 0$ ، يمكننا حل (٧) لـ y ، ونحصل على

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

هذه على الصورة ت- ١٣ وتثبت أنه عندما $B \neq 0$ الشكل البياني للمعادلة (٧) يكون خطا مستقيما . علاوة على ذلك ، المقدار $-A/B$ هو ميل الخط والمقدار $-C/B$ هو الجزء المقطوع من المحور y . إذا كانت $B = 0$ فإن $A \neq 0$ ويمكننا حل (٧) لـ x ونحصل على :
 $x = -C/A$ وهذه معادلة خط يوازي المحور y . إذن في الحالتين الشكل البياني للمعادلة (٧) هو خط مستقيم .

مثال ٣ . خطط الشكل البياني للمعادلة $5x - 6y + 15 = 0$.

بما أن المعادلة من الدرجة الاولى ، فشكلها البياني يجب أن يكون خطا مستقيما ، ونقطتان ستكونان كافيتين لتعيينه . أسهل نقطتين في ايجاده هما الجزءان المقطوعان من المحورين . إذا وضعنا $y = 0$ في المعادلة واجرينا حلها لـ x ، نحصل على -3 وهو الجزء المقطوع من محور x . بالمثل ، بوضع $x = 0$ نجد أن الجزء المقطوع من المحور y هو $\frac{5}{2}$. بتوقيع النقطتين $(0, \frac{5}{2})$ و $(-3, 0)$ ورسم الخط المار بهما ، نكون قد خططنا الشكل (شكل ت- ٣٧) .



شكل ت- ٣٧

الشكل البياني للمعادلة $5x - 6y + 15 = 0$ يخطط بسهولة بتوقيع الأجزاء المقطوعة .

طريقة أخرى هي أن نحل المعادلة المعطاة لـ y ،

$$y = \frac{5}{6}x + \frac{5}{2}$$

معامل x هو الميل والحد الثابت هو الجزء المقطوع من المحور y . حينئذ نخطط الخط المستقيم المار بالنقطة $(0, \frac{5}{2})$ ، وميله $\frac{5}{6}$.

مثال ٤ . أوجد معادلة الخط المستقيم L المار بالنقطة $(\frac{1}{2}, 0)$ ويوازي الخط L' الذي معادلته

$$2x - 7y + 21 = 0$$

بحل معادلة L' لـ y ، يكون

$$y = \frac{2}{3}x + 3$$

ي أن ميل L' ، وبالتالي ميل L ، هو $\frac{2}{3}$. واذن معادلة L هي

$$y - 0 = \frac{2}{3}(x - \frac{4}{3})$$

، $6x - 21y - 8 = 0$ كاختبار ، نلاحظ أن النقطة المعطاة تحقق هذه المعادلة وأنه إذا حلت معادلة لـ y ، معامل x هو الميل $\frac{2}{3}$.

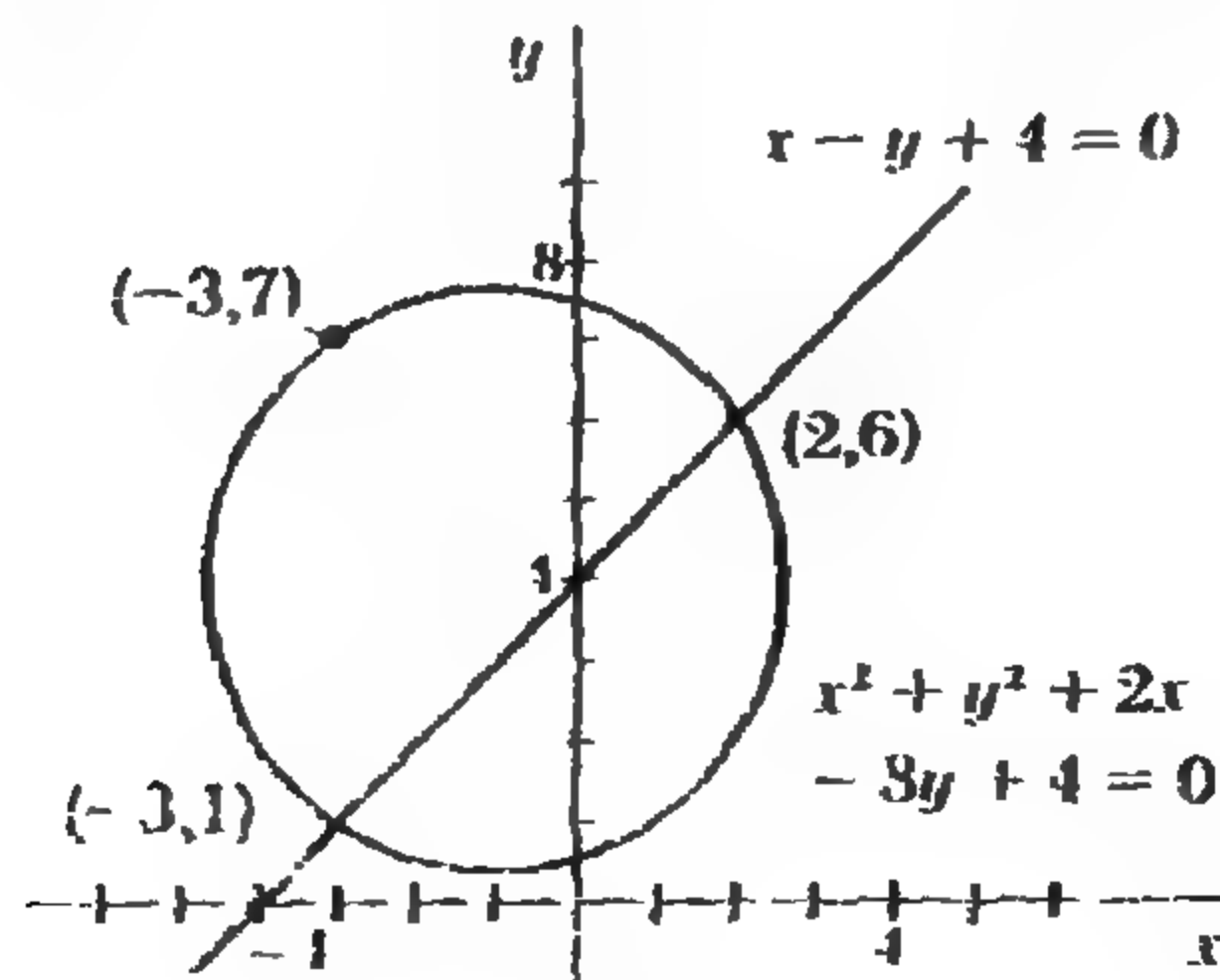
مثال ٥ . أوجد تقاطع الدائرة $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 4 = 0$ والخط $x - y + 4 = 0$.

المنحنيان مخططان في الشكل ت-٣٨ . نقطة التقاطع ، ان وجدت ، للمنحنيين هي حل مشترك لمعادتيهما . هذا الحل المشترك يمكن ايجاده بحل المعادلتين آنيا . احدي الطرق لاجراء ذلك هي كما يأتي . حل معادلة واحدة ، مثلا الثانية ، لـ y ، فنحصل على $y = x + 4$ ، وعوض هذه القيمة لـ y في المعادلة الاخرى :

$$(A) \quad x^2 + (x + 4)^2 + 2x - 8(x + 4) + 4 = 0$$

عمليا ، نحن نبحث عن x التي تجعل قيمة y التي نحصل عليها من معادلة الدائرة هي نفسها التي حصل عليها من الخط . المعادلة (A) تبسط الى $x^2 + x - 6 = 0$ أي $(x + 3)(x - 2) = 0$. واذن لاحداثيات x لنقطتي التقاطع هي $x = 2$ و $x = -3$. هنا يجب أن نكون حريصين . اذا حاولنا إيجاد الاحداثي y لنقطة التقاطع التي احداثيتها x هو -3 ، بتعويض -3 لـ x في معادلة الدائرة ، اننا نحصل على قيمتين لـ y هما 1 ، 7 . هذا لا يدعو للدهشة ، لأننا في الواقع نوجد النقط ، على لدائرة ، التي احداثيتها x هو -3 وتوجد نقطتان . نحن نريد النقطة على الخط المستقيم التي احداثيتها x هو -3 ، ولذلك يجب تعويض -3 في معادلة الخط . اذا فعلنا ذلك ، نحصل على $y = 1$. بالمثل ، عندما $y = 6$ و $x = 2$ واذن نقطتا التقاطع هما $(2, 6)$ و $(-3, 1)$.

عند إيجاد حلول آنية لمعادلات درجاتها أعلى من الأولى ، من الحكمة التأكد ، بالتعويض المباشر في المعادلات الاصلية ، من الحلول المشتركة المعينة .



شكل ت-٣٨

مسائل

أوجد معادلة الخط الذى يحقق الشروط الآتية :

- ١ - الميل 2 ويمر بالنقطة $(-4, -4)$.
- ٢ - الميل $-\frac{3}{2}$ ويمر بالنقطة $(2, \frac{3}{2})$.
- ٣ - الميل $\frac{1}{2}$ والجزء المقطوع من المحور y يساوى 2
- ٤ - الميل -1 والجزء المقطوع من المحور x يساوى 3 -.
- ٥ - الجزء المقطوع من المحور x يساوى α والميل m .
- ٦ - يمر بالنقطة $(6, 1)$ ويوازي المحور x .
- ٧ - يمر بالنقطة $(-6, 1)$ ويوازي المحور y .
- ٨ - يمر بالنقطتين $(-3, -5)$ و $(5, 0)$.
- ٩ - يمر بالنقطتين $(2, 6)$ و $(2, -3)$.
- ١٠ - يمر بالنقطتين $(-4, -3)$ و $(1, -3)$.
- ١١ - يمر بالنقطتين $(r, 0)$ و $(0, h)$.
- ١٢ - الجزء المقطوع من المحور x يساوى 2 والجزء المقطوع من المحور y يساوى 4 -.
- ١٣ - زاوية الميل 135° ويمر بالنقطة $(\frac{1}{2}, 0)$.

أوجد معادلات الخطوط المارة بالنقطة المعطاة والتي تكون على الترتيب موازية وعمودية على الخط المعطى :

- ١٤ - $(-7, 0), y = x$ ١٥ - $(3, 0), 2x - 5y + 10 = 0$ ١٦ - $(6, -2), 7x + 8y + 28 = 0$
- ١٧ - $(0, 0), x - 4 = 0$ ١٨ - $(-3, -\frac{3}{2}), 5y + 11 = 0$ ١٩ - $(0, 5), ax + by + c = 0$

أوجد الميل والجزئين المقطوعين من المحور x والمحور y للخطوط المستقيمة الآتية وخطط الخط المستقيم :

- ٢٠ - $x + 2y = 6$ ٢١ - $3x - 4y - 12 = 0$ ٢٢ - $12x - 5y = 17$ ٢٣ - $y - 2 = \frac{1}{3}(x + 5)$
- ٢٤ - $7x + \frac{3}{2}y = 4 + c$ ٢٥ - $3y - 2 = 0$ ٢٦ - $6x + 13 = 0$ ٢٧ - $ax + by + c = 0$
- ٢٨ - $x/a + y/h = 1$ ٢٩ - $x = my + b$

أوجد نقطة ، غير نقطة جزء مقطوع ، على المنحنيات الآتية :

- ٣٠ - $2x + 2y + 3 = 0$ ٣١ - $3y + 5 = 0$ ٣٢ - $x^3 + x + y = 0$
- ٣٣ - $x(y + 2) = 8$ ٣٤ - $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 42 = 0$

خطط الشكل البياني للمتباينات الآتية أو أزواج المتباينات :

- ٣٥ - $4x + y - 10 > 0$ ٣٦ - $x + 2y = -1, x \geq 2$
- ٣٧ - $3x - y \geq 4, -3x - y \geq 4$ ٣٨ - $x^2 + y^2 + 6x < 0, y \geq x + 6$

٣٩- رؤوس مثلث هي $C(3,-2)$ و $B(-1,0)$ و $A(1,5)$ أوجد معادلة (أ) الضلع AB ، (ب) المنصف العمودي لـ AB ، (ج) المستقيم المتوسط من A (د) العمودي من A على الضلع BC .

أوجد نقط تقاطع الأزواج الآتية من الخطوط المستقيمة :

٤٠- $x - 2y - 2 = 0, 3x - y - 11 = 0$ - ٤١ $2x - 3y + 18 = 0, x + 3 = 0$

٤٢- $x + 2y = 5, 4x - y = -20$ - ٤٣ $3x + 15y - 9 = 0, 2x + 10y - 5 = 0$

٤٤- $11x + 2y - 15 = 0, 5x - 6y - 3 = 0$ - ٤٥ $5x + 4y = -20, x + \frac{1}{3}y + 4 = 0$

٤٦- $bx - ay = 0, bx + cy = bc$

٤٧- أوجد معادلة الخط الذي يمر بنقطة تقاطع الخطين $x - 3y - 1 = 0$ و $4x - y + 18 = 0$ ويكون

(أ) موازيا للخط $2x - y - 6 = 0$ ، (ب) عموديا على الخط $2x - y - 6 = 0$.

٤٨- أوجد معادلة الخط الذي يمر بنقطة تقاطع الخطين $2x + 3y + 2 = 0$ و $3x + 2y - 7 = 0$ ومركز الدائرة $4x^2 + 4y^2 + 20x - 16y - 157 = 0$

٤٩- أوجد الشرط على معاملات المعادلة $A'x + B'y + C' = 0$ لكي يكون شكلها البياني موازيا للخط $Ax + By + C = 0$. إذا كان الخطان متوازيين ، ماذا يحدث جبريا عندما نحاول حل المعادلتين آنيا ؟

خطط المستقيمات والدوائر الآتية وأوجد نقط تقاطعها :

٥٠- $3x - 4y = 0, x^2 + y^2 = 25$ - ٥١ $x - y - 8 = 0, x^2 + y^2 - 12x + 8y = 0$

٥٢- $3x + 4y + 10 = 0, x^2 + y^2 - 10x = 0$ - ٥٣ $2x - y - 10 = 0, x^2 + y^2 + 6x + 4y - 23 = 0$

أوجد معادلة المماس لكل من الدوائر الآتية عند النقطة المعطاة :

٥٤- $x^2 + y^2 = 34, (3,5)$ - ٥٥ $x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0, (0,0)$

٥٦- $x^2 + y^2 - 8y - 84 = 0, (-6,12)$

٥٧- أوجد معادلتى المماسين اللذين ميلاهما -1 ، للدائرة التي مركزها عند نقطة الاصل ونصف قطرها 10 .

٥٨- أوجد نقطة تقاطع المماسين للدائرة و $x^2 + y^2 + 16x + 30y = 0$ عند $(0, 0)$ وعند $(-16, 0)$.

٥٩- أوجد معادلة الخط الذي يوازي الخطين المتوازيين $2x - 3y + 12 = 0$ و $2x - 3y - 3 = 0$ وفي $\frac{1}{3}$ المسافة بين الخطين وأقرب الى الخط الاول .

٦٠- أثبت أن الخط الذي يقطع من المحور x جزءا قدره a ويقطع من المحور y جزءا قدره b له معادلة على الصورة $x/a + y/b = 1$.

٦١- أوجد معادلة الخط الذي يمر بالنقطة (x_1, y_1) ويوازي الخط $Ax + By + C = 0$

٦٢- أوجد معادلة الخط المار بالنقطة (x_1, y_1) وعمودي على الخط $Ax + By + C = 0$

٦٣- خطط الشكل البياني للمنحنيين $y = mx$ و $y = x^3 + x$. لاي قيم m توجد نقطة تقاطع واحدة ؟

أوجد المسافة من كل من النقط الآتية الى الخط المعطى (ارشاد : أوجد معادلة الخط المار بالنقطة وعمودى على الخط) .

٦٥ - $(2,1), 3x - 4y = 10$

٦٤ - $(0,0), 12x + 5y = 15$

٦٦ - اثبت أن المسافة من النقطة (x_1, y_1) الى الخط $Ax + By + C = 0$ تعطى بالصيغة

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(انظر الارشاد فى المسألة ٦٤)

٦٧ - أوجد المسافة العمودية بين الخطين المتوازيين $x + 2y + 10 = 0$ و $x + 2y + 4 = 0$ (ارشاد : انظر المسألة ٦٦) .

٦٨ - أوجد معادلة الدائرة التى مركزها عند النقطة $(3, -4)$ (وتمس الخط $4x + 3y + 20 = 0$) .

(ارشاد : انظر المسألة ٦٦) .

٦٩ - اوجد مساحة المثلث الذى رؤوسه النقط $(4,4), (8,-12),$ and $(12,10)$ (ارشاد : انظر المسألة ٦٦) .

٧٠ - النقطة $(7, -4)$ تنصف وتر فى الدائرة $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ أوجد معادلة الوتر وطول الوتر .

٧١ - اوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقط $(1,4), (-3,-2),$ and $(7,0)$.

بايجاد نقطة تقاطع المنصفات العمودية للقطع المستقيمة الواصلة بين النقط .

٧٢ - أوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقطة $(-8, 1)$ ومركزها يقع على الخطين

$3x - 5y + 18 = 0$ و $2x + 3y - 26 = 0$.

٧٣ - اوجد معادلة الدائرة التى مركزها على المحور x وتمر بالنقطتين $(-2, 1)$ و $(3, 2)$.

٧٤ - اوجد معادلة الدائرة التى مركزها عند النقطة $(1, 4)$ وتمس الخط $3x - 4y = -3$.

٧٥ - اوجد معادلة الدائرة التى تمس الخط $8x - 9y = -20$ عند النقطة $(2, 4)$ وتمر بنقطة

الاصل . [ارشاد : خذ فى الاعتبار القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة

الاصل والنقطة $(2, 4)$]

٧٦ - اوجد معادلتى المماسين للدائرة $x^2 + y^2 = 10$ من النقطة $(5, 5)$. (ارشاد : أوجد معادلة

خط اختيارى ميله m ويمر بالنقطة المعطاة . ثم اختر m بحيث أن الخط يقابل الدائرة فى

نقطة واحدة فقط) .

٧٧ - اوجد معادلة الخط المار بالنقطة $(3, 5)$ ويقطع من المحورين جزئين متساويين .

٧٨ - اوجد معادلة الخط الذى يمر بالنقطة $(1, 3)$ ويكون مع المحورين x و y الموجبين مثلثا

مساحته ٨ .

٧٩ - اوجد المحل الهندسى لنقطة تتحرك بحيث أن الفرق بين مربعى بعديها عن نقطتين ثابتين

يساوى مقدارا ثابتا .

٨٠ - مثلث اثنان من رؤوسه عند $A(a, 0)$ و $B(-a, 0)$. أوجد المحل الهندسى للرأس الثالث C اذا كان ميل الخط AC ضعف ميل الخط BC .

٨١ - اثبت أن لكل قيمة لـ m المعادلة $mx - y - 2 - 4m = 0$ شكلها البيانى خط مستقيم .
اثبت أن جميع هذه الخطوط تمر بنقطة مشتركة وأوجد احداثيتها . أوجد الخط من بين هذه الخطوط الذى يمر بالنقطة $(5, 2)$.

٨٢ - اثبت أن المستقيمات المتوسطة للمثلث تتقابل فى نقطة تقسم كل مستقيم متوسط بنسبة ١ : ٢ من منتصف الضلع المناظر الى الرأس المقابل .

ت - ٦

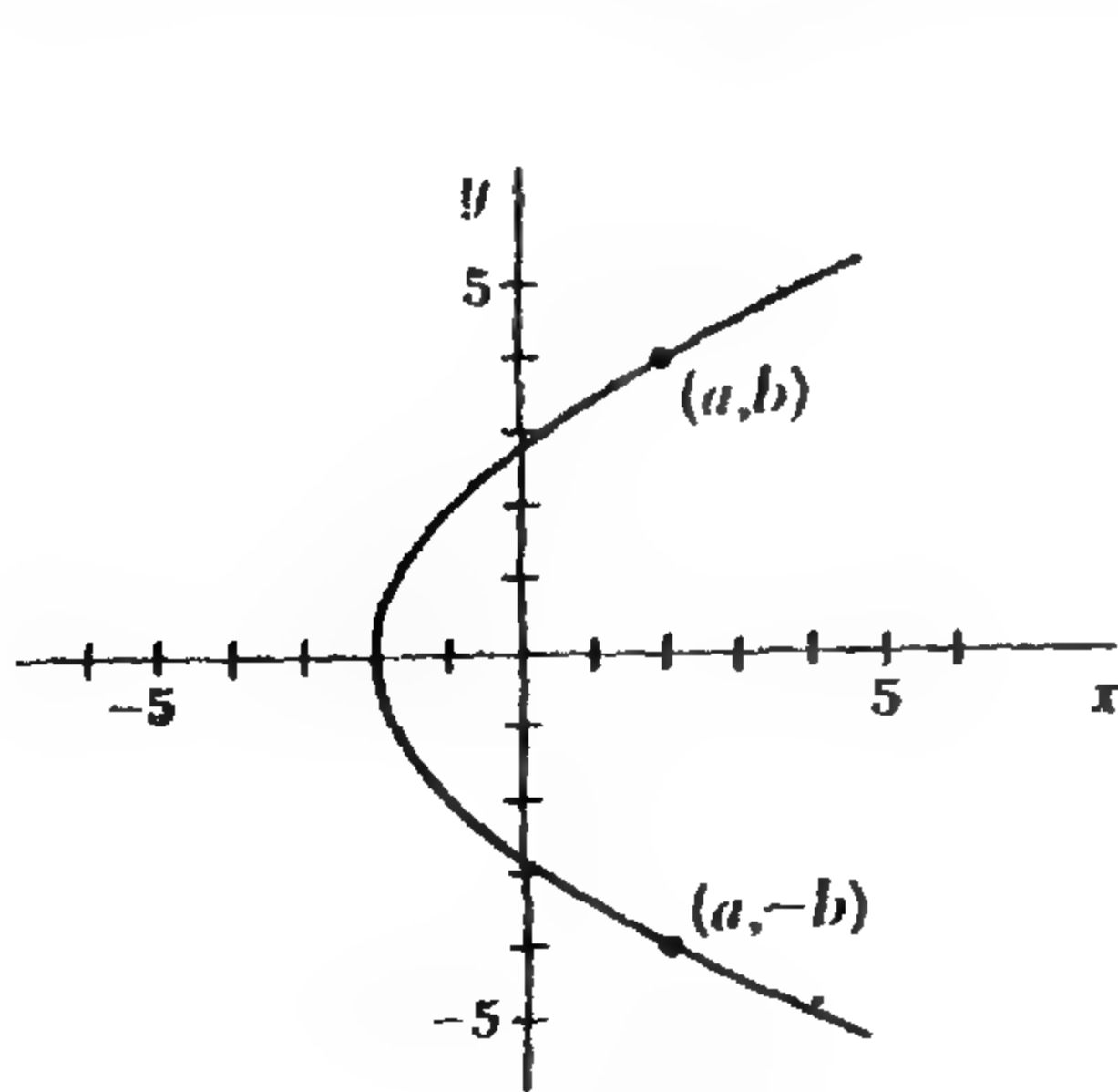
الانعكاسات والتماثل

فى البند ت - ١ شرحنا ماذا يقصد بالانعكاس نقطة فى مستقيم . هنا ندرس انعكاسات المنحنيات .

لتكن S فئة مستوية من النقط ، التى لغرضنا ستكون عادة منحنى ، وليكن L خطا معطى فى المستوى . الفئة S' المتكونة من الانعكاسات فى L لنقطة الفئة S تسمى انعكاس S فى L .

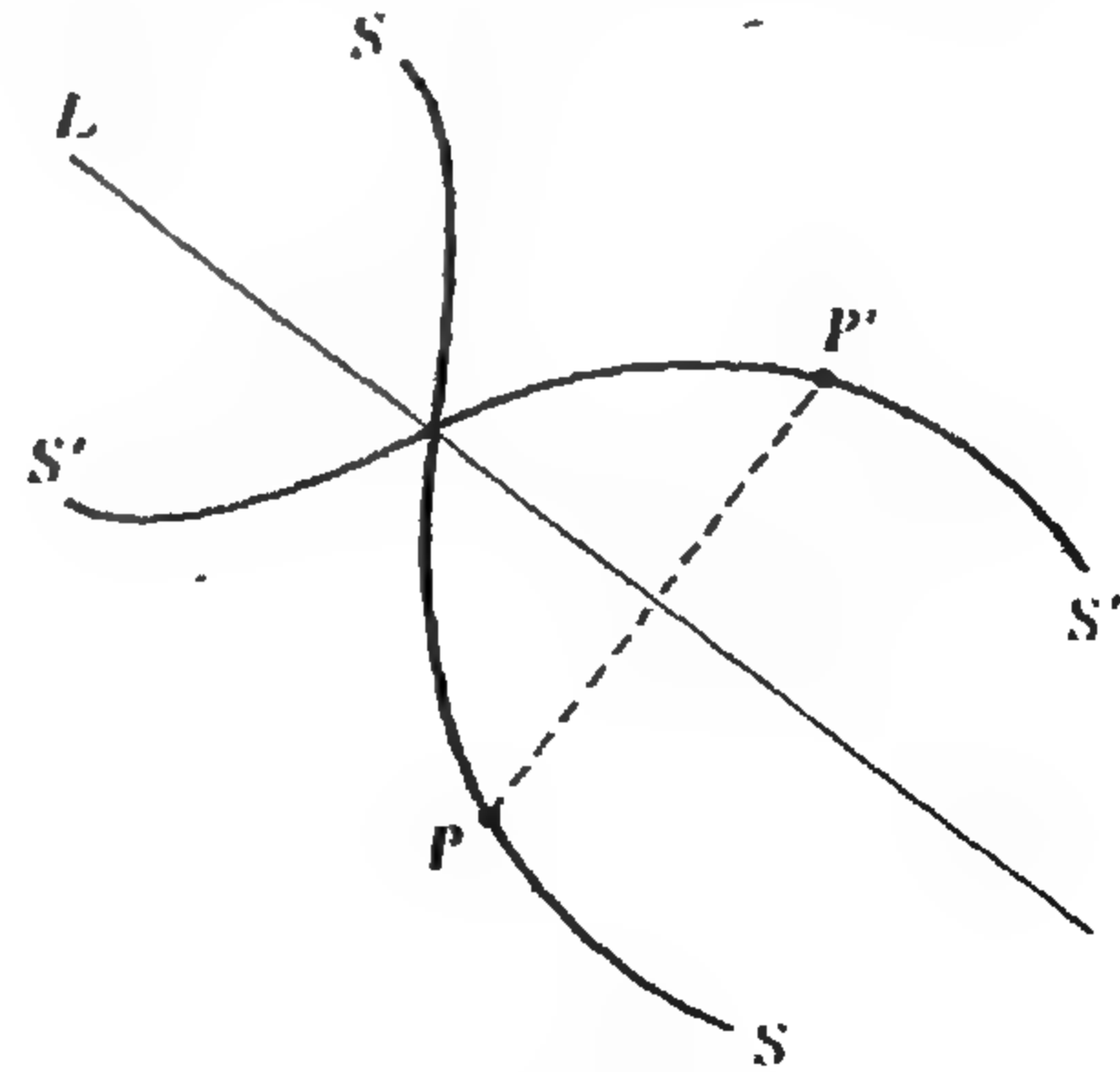
فى الشكل ت - ٣٩ المنحنى S' هو انعكاس المنحنى S فى الخط المستقيم L . بالطبع ، S ايضا انعكاس المنحنى S' . إذا كانت فئة الانعكاسات تنطبق على الفئة الاصلية ، فان الفئة الاصلية يقال انها متماثلة فى L . فمثلا الدائرة متماثلة فى كل قطر من أقطارها . القطع المكافئ $y^2 = 4(x + 2)$ (2) ، المخطط فى الشكل ت - ٤٠ ، متماثل فى المحور x . إذا تصورنا أننا نطوى المستوى على طول خط التماثل للشكل المتماثل ، فان نصفى الشكل سينطبقان .

إذا كانت الانعكاسات فى نقطة A بدلا من فى خط مستقيم ، فان الفئة S' تسمى انعكاس S فى A ، وإذا كانت S' تنطبق على S ، فان S يقال أنها متماثلة فى النقطة A . الدائرة متماثلة فى



شكل ت - ٤٠

القطع المكافئ $y^2 = 4(x + 2)$ متماثل فى المحور x .



شكل ت - ٣٩

S' انعكاس S فى L .

مركزها . المنحنى $y = 1/x$ ، المخطط فى الشكل ت - ١٣ ، متماثل فى نقطة الاصل . القطع المكافئ بالشكل ت - ٤٠ ليس متماثلا فى نقطة الاصل ، ولا فى أى نقطة .
التمائل فى المحورين وفى نقطة الاصل هام بوجه خاص .

ت - ١٥ نظرية

(أولا) المنحنى يكون متماثلا فى المحور y اذا كان لكل نقطة (x, y) على المنحنى النقطة $(-x, y)$ أيضا تكون على المنحنى .
(ثانيا) المنحنى يكون متماثلا فى المحور x اذا كان لكل نقطة (x, y) على المنحنى النقطة $(x, -y)$ أيضا تكون على المنحنى .
(ثالثا) المنحنى يكون متماثلا فى نقطة الاصل اذا كان لكل نقطة (x, y) على المنحنى النقطة $(-x, -y)$ أيضا تكون على المنحنى .

النظرية هى مجرد اعادة نص تعريف التماثل عندما يكون الخط المستقيم محورا .
يمكن الحصول على معادلة انعكاس المنحنى فى المحور y باستبدال x بـ $-x$ فى معادلة المنحنى . فمثلا ، اذا كان C المنحنى

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 11x + 24)$$

فان معادلة انعكاسه C' فى المحور y هى

$$y = \frac{1}{2}[(-x)^2 - 11(-x) + 24] = \frac{1}{2}(x^2 + 11x + 24)$$

(شكل ت - ٤١) . لترى لماذا يكون الامر كذلك ، دع C' الشكل البيانى للمعادلة المحولة التى تحصل عليها باستبدال x بـ $-x$. $P'(-x, y)$ تكون الانعكاس فى المحور y للنقطة $P(x, y)$. اذا كانت $P(x, y)$ على المنحنى ، فان (x, y) هى حل لمعادلة C . واذن $(-x, y)$ هى حل للمعادلة المحولة ، وتكون $P'(-x, y)$ على C' . وتبعاً لذلك ، الشكل البيانى للمعادلة المحولة هو انعكاس C . بالمثل ، اذا استبدلنا y بـ $-y$ ، فاننا نحصل على معادلة انعكاس المنحنى فى المحور x

التمائل خاصية هامة للمنحنى وعادة يمكن استخدامه لتبسيط تخطيطه . من السهل التحديد من معادلة المنحنى ما اذا كان متماثلا فى محور . اذا كان عندما تستبدل x بـ $-x$ المعادلة الناتجة تكافئ المعادلة الاصلية ، فان المنحنى يكون متماثلا فى المحور y لانه ينطبق على انعكاسه فى ذلك المحور . لاختبار التماثل فى المحور x ، نستبدل y بـ $-y$ ونعين ما اذا كانت المعادلة الناتجة تكافئ الاصلية . القطع المكافئ $y^2 = 4(x + 2)$ فى الشكل ت - ٤٠ متماثل فى المحور x لان المعادلة $(-y)^2 = 4(x + 2)$ تكافئ المعادلة الاصلية المنحنى $y = 1/x$ فى الشكل ت - ١٣

١٦- إذا كان المنحنى متماثلاً في نقطة الاصل ومتماثلاً في أحد محوري الاحداثيات ، هل من الضروري أن يكون متماثلاً في المحور الآخر؟

١٧- اثبت هندسيا وجبريا (أى باستخدام الاحداثيات) أن انعكاس نقطة في نقطة الاصل يمكن الحصول عليه بانعكاس النقطة في أحد محوري الاحداثيات ثم انعكاس هذه الصورة في محور الاحداثيات الآخر .

١٨- انعكس الخط $y = mx$ في المحور y ، ثم انعكست هذه الصورة في المحور x . قارن بين الوضعين الابتدائي والنهائي للخط وشرح .

خطط المنحنيات الآتية وانعكاساتها في الخط $y = x$. ما هي معادلة منحنى الانعكاس؟

$$x - y - 4 = 0 \quad - ١٩ \quad y = -x \quad - ٢٠ \quad y = \frac{1}{3}x \quad - ٢١$$

$$x^2 + y^2 = 6 \quad - ٢٢ \quad y = 0 \quad - ٢٣ \quad x - y = 0 \quad - ٢٤$$

$$y = \frac{3}{2}x - 5 \quad - ٢٥ \quad y = \frac{1}{2}x^2 \quad - ٢٦ \quad xy = 1 \quad - ٢٧$$

٢٨- كيف يمكننا الحصول على معادلة منحنى الانعكاس في الخط $y = x$ من معادلة منحنى معطى ؟ أعط دليلا لان يكون المنحنى متماثلاً في الخط $y = x$ ، بدلالة معادلته .

٢٩- ماهما ميلا الاتعكاسين في المحورين x و y لخط ميله m ؟

٣٠- ماهو ميل الانعكاس في الخط $y = x$ لخط ميله m ؟

ت - ٧

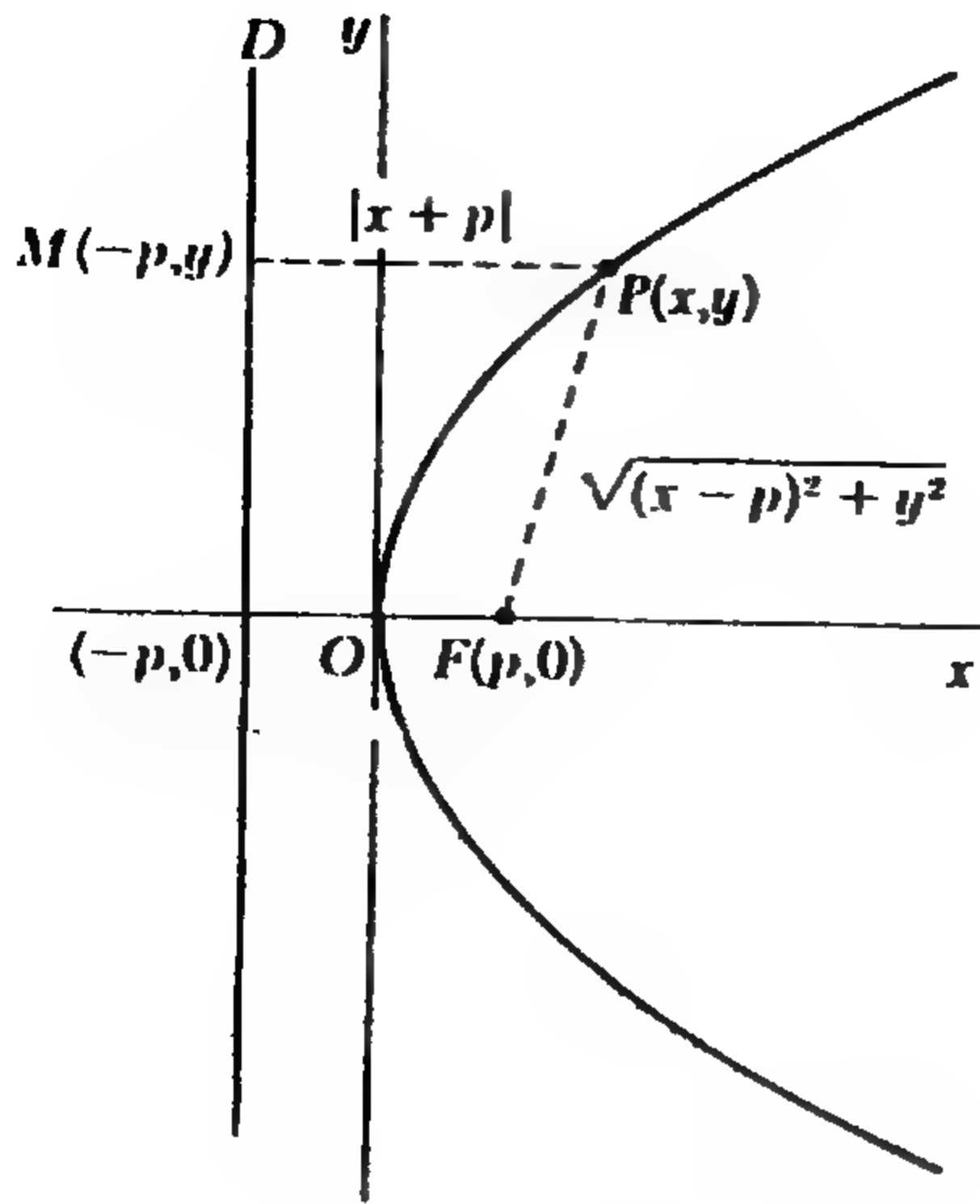
القطع المكافئ

في هذا البند والبندين الآتين سندرس ثلاثة أنواع هامة من المنحنيات ، تعرف معا بالقطع المخروطية ، لان كل منها يمكن الحصول عليه بتقاطع مخروط ومستوى . الاغريق درسوها عن هذا الطريق ، لكن سنجد أنه من الأسهل تعريفها تعريفا مختلفا .

ت - ١٦ تعريف . القطع المكافئ هو فئة جميع النقط في المستوى التى على بعدين متساويين من نقطة ثابتة ومستقيم ثابت في المستوى .

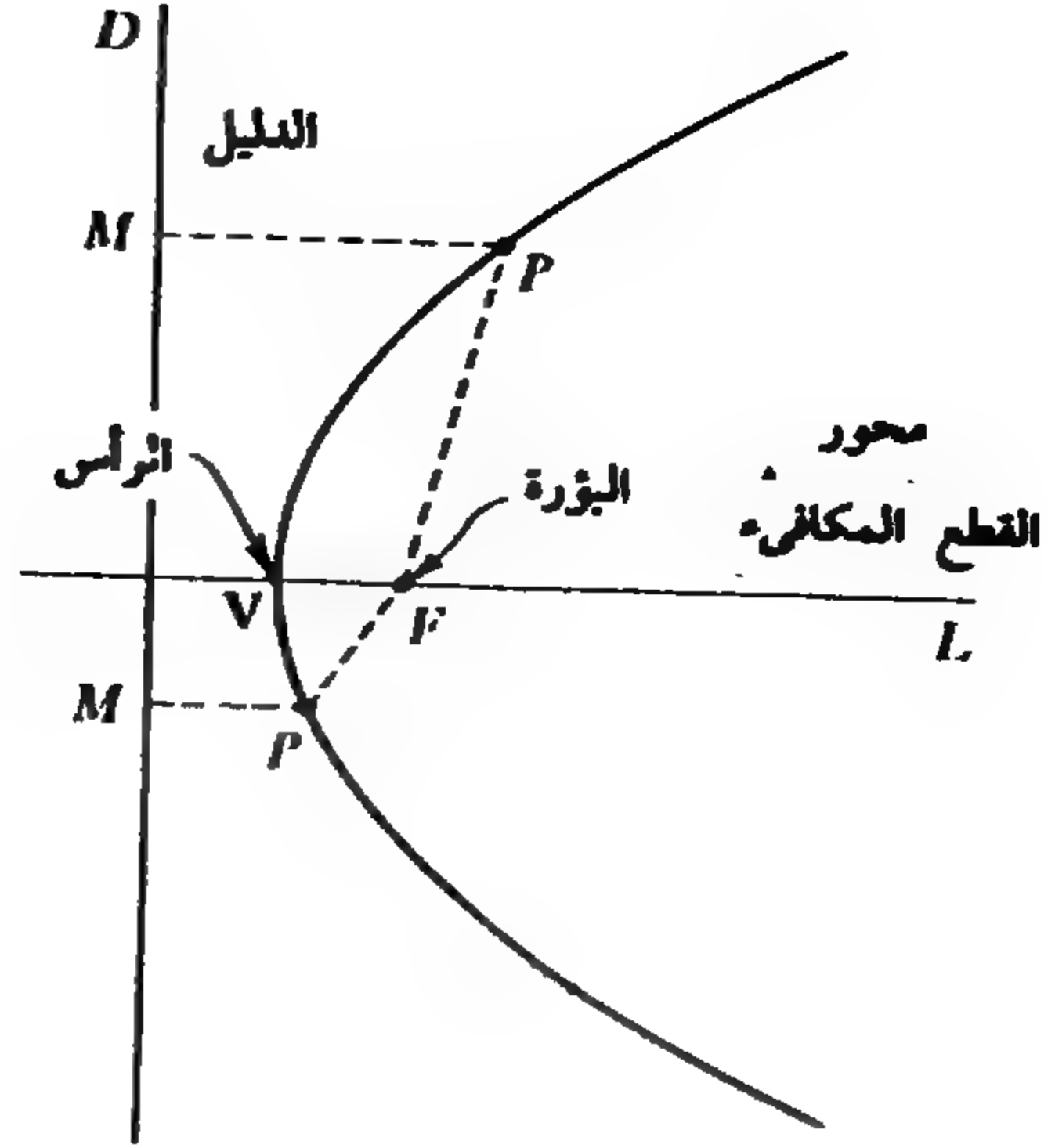
القطع المكافئ النمطى موضح في الشكل ت - ٤٢ . النقطة الثابتة F تسمى البؤرة والمستقيم الثابت D يسمى الدليل . لجميع النقط P على المنحنى ، $|PF| = |PM|$ المستقيم L المار بالبؤرة عموديا على الدليل هو محور القطع المكافئ ونقطة التقاطع V للقطع المكافئ مع محوره هي رأس القطع المكافئ . الرأس في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل . القطع المكافئ متماثل في محوره ، والبؤرة « داخل » المنحنى .

لايجاد معادلة القطع المكافئ ، يجب ادخال نظام احداثيات . أبسط معادلة نحصل عليها هي عندما نختار نظام الاحداثيات بحيث أن رأس القطع المكافئ يكون عند نقطة الاصل ومحوره ينطبق



شكل ت- ٤٣

القطع المكافئ $y^2 = 4px$.



شكل ت- ٤٢

P تكون على القطع المكافئ إذا وإذا فقط كان $|PF| = |PM|$.

على أحد محوري الإحداثيات... ضع القطع المكافئ في هذا الوضع بمحوره على المحور x ومفتوحا الى اليمين (شكل ت- ٤٣). إحداثيات البؤرة F تكون $(p, 0)$ لعند ما P ، والدليل يقطع المحور x عند النقطة $(p, 0)$. موقع العمود من أي نقطة $P(x, y)$ على الدليل هو $M(-p, y)$. ويكون $|PF| = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$ و $|PM| = |x+p|$. من تعريف القطع المكافئ $P(x, y)$ ستكون على المنحنى إذا وإذا فقط كان $|PF| + |PM|$ أي إذا وإذا فقط كان (x, y) حلا للمعادلة.

$$(1) \quad \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p|$$

هذه اذن معادلة للقطع المكافئ. معادلة مكافئة وأبسط منها يمكن ايجادها بكتابة مربعي طرفي المعادلة (١)، وهي

$$(2) \quad (x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

هذه المعادلة تكافئ المعادلة (١) لان الجذر حقيقي لجميع x, y وكل من طرفي (١) ليس سالبا. المعادلة (٢) تختصر الى

$$y^2 = 4px$$

ت- ١٧

وهي معادلة للقطع المكافئ ملائمة أكثر من (١).

إذا كان القطع المكافئ مفتوحا الى اليسار $P < 0$ ، لكن المعادلة ت- ١٧ تظل صحيحة. لقد

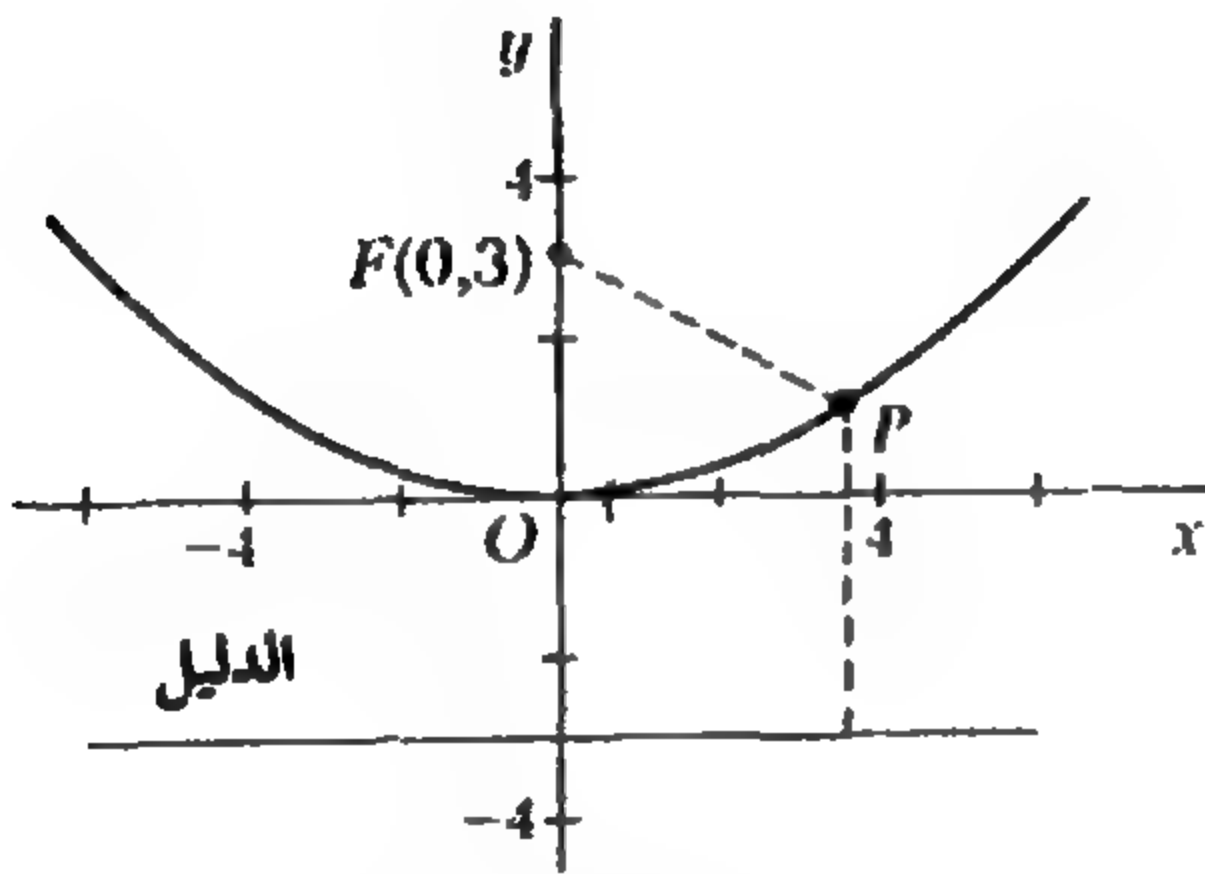
اثبتنا أيضا أن بالعكس ، كل معادلة على الصورة ت- ١٧ هي معادلة قطع مكافئ رأسه عند نقطة الأصل ، ومحوره على المحور x ، ويؤثره عند $(P, 0)$. القطع المكافئ يفتح الى اليمين أو الى اليسار تبعا لكون $P > 0$ أو $P < 0$ اذا استبدلت y بـ $-y$ في المعادلة ت- ١٧ ، فاننا نحصل على معادلة مكافئة . هذا يثبت جبريا تماثل القطع المكافئ في محوره .

الآن نضع القطع المكافئ بحيث أن رأسه يظل عند نقطة الاصل لكن محوره على المحور y (شكل ت- ٤٤) . دورا y و x الآن يتبادلان ، وبرهان مشابه لذلك الذي استخدمنا لاشتقاق المعادلة ت- ١٧ سيثبت أن معادلة للقطع المكافئ في هذا الوضع هي

$$x^2 = 4py \quad \text{ت- ١٨}$$

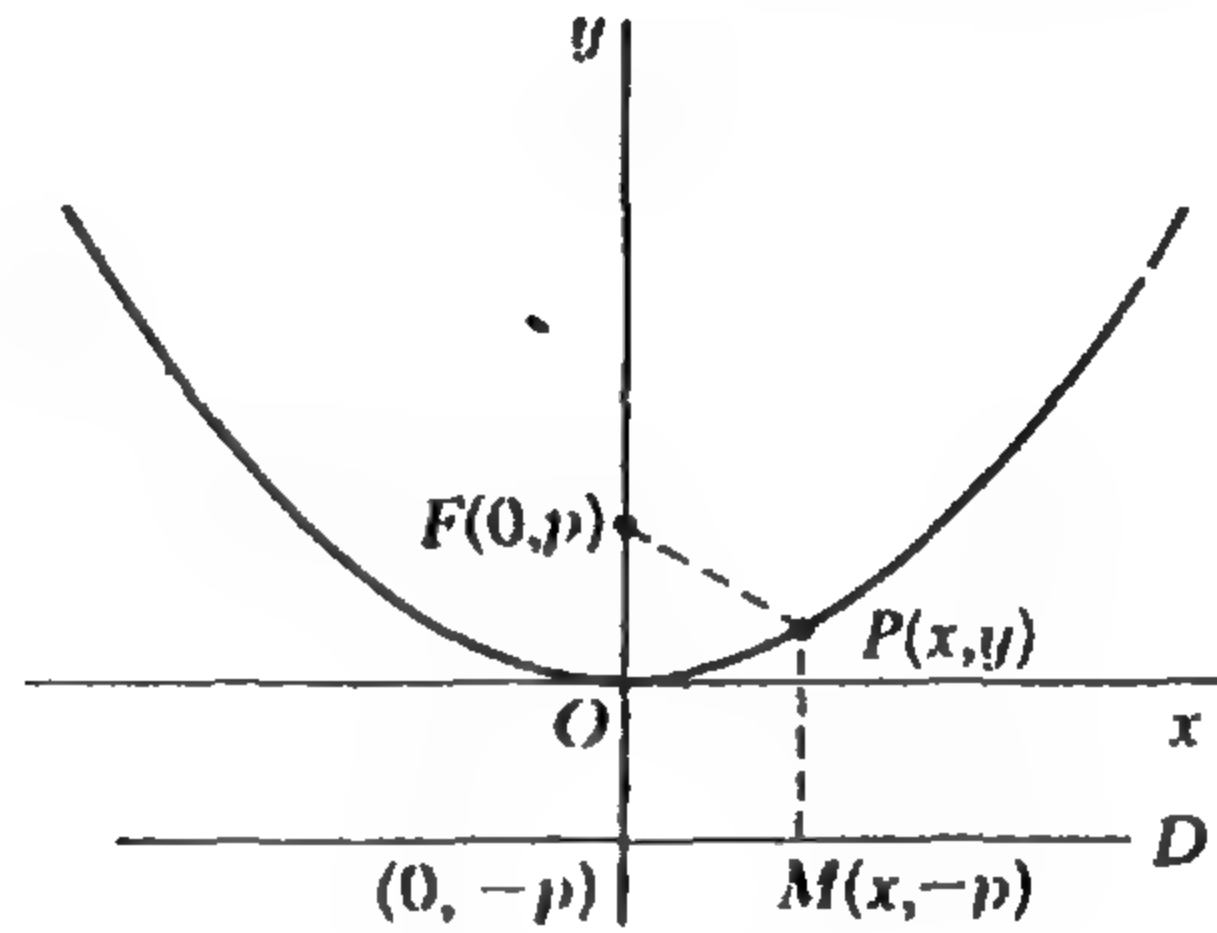
القطع المكافئ يفتح لأعلى أو لأسفل تبعا لكون العدد $P > 0$ أو $P < 0$.

مثال ١ . أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه عند نقطة الاصل ويؤثره عند $(0, 3)$ (شكل ت- ٤٥) .



شكل ت- ٤٥

القطع المكافئ $x^2 = 12y$.



شكل ت- ٤٤

القطع المكافئ $x^2 = 4py$.

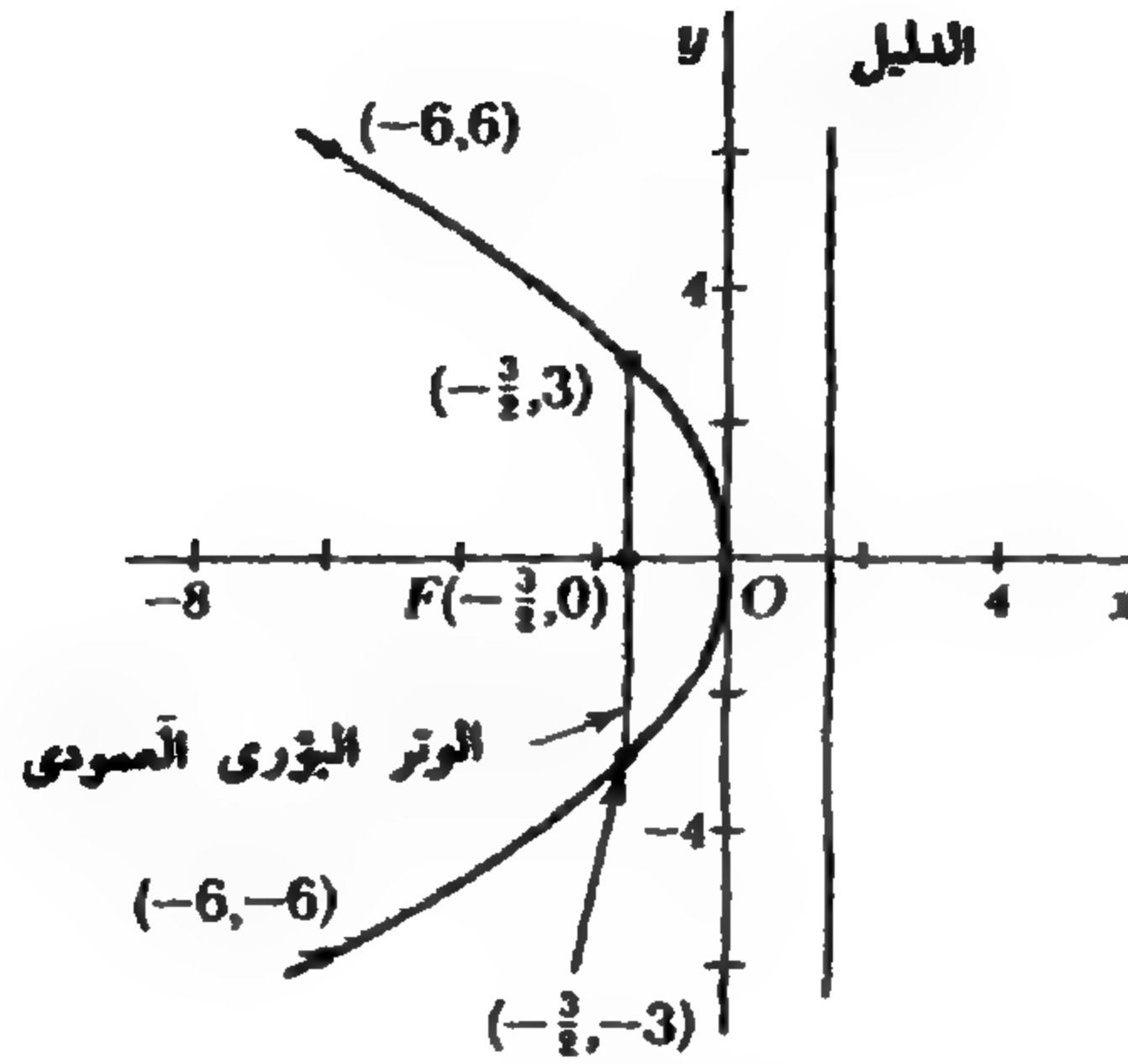
القطع المكافئ يفتح لأعلى وله معادلة على الصورة ت- ١٨ . هنا $p = 3$ واذن المعادلة هي $x^2 = 12y$. كل نقطة على هذا القطع المكافئ تكون على بعدين متساويين من البؤرة $F(0,3)$ والدليل $y = -3$.

الوتر المار بالبؤرة وعمودي على محور القطع المكافئ يسمى الوتر البؤري العمودي . طرفا الوتر البؤري العمودي عادة يوجدان بسهولة من المعادلة ، ويفيد أن في تخطيط المنحنى .

مثال ٢ . ميز وخطط المنحنى الذي معادلته هي $y^2 = -6x$.

اذا كتبنا المعادلة هكذا $y^2 = 4(-\frac{3}{2})x$ ، نرى أنها على الصورة ت- ١٧ حيث $p = -\frac{3}{2}$. واذن المنحنى يجب أن يكون قطعاً مكافئاً رأسه عند نقطة الأصل ، ومحوره على المحور x ، ولأن P سالبة ، القطع يفتح الى اليسار . البؤرة تكون عند النقطة $(-\frac{3}{2}, 0)$. بما أن جميع القطوع

المكافئة متشابهه ، وتختلف فقط في الاتساع ، المعلومات السابقة مع ثلاث أو أربع نقاط إضافية توجد من المعادلة ، مثلا طرفا الوتر البؤري العمودي والنقطتان $(-6, \pm 6)$ تكفى لأن نستطيع عمل تخطيط تقريبي للمنحنى (شكل ت - ٤٦) . نهايتا الوتر البؤري توجدان بتعويض الاحداثى x للبؤرة ، الذى هو $-\frac{3}{2}$ ، عن x فى المعادلة $y^2 = -6x$ للقطع المكافئ ، ثم الحل لـ y : هذا يعطى $y = \pm 3$ ، وتكون احداثيات طرفى الوتر البؤري العمودى هى $(-\frac{3}{2}, \pm 3)$. الدليل هو الخط المستقيم $x = -\frac{3}{2}$



شكل ت - ٤٦
القطع المكافئ $y^2 = -6x$

إذا اجرينا حل المعادلة ت - ١٨ لـ y ، فالتنا نحصل على $y = ax^2$ ، حيث $a = 1/4p$. واذن المعادلة التى على هذه الصورة هى قطع مكافئ رأسه عند نقطة الاصل ومحوره على المحور y ، ومفتوح لاعلى أو لاسفل تبعا لكون a موجبة أو سالبة بالمثل ، المعادلة $x = ay^2$ هى قطع مكافئ على الصورة ت - ١٧ .

فى بند ت - ١٠ سنثبت أن القطع المكافئ الذى محوره يوازى أحد محورى الاحداثيات لكن رأسه ليس بالضرورة عند نقطة الاصل معادلته تكون على الصورة

$$(٣) \quad y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

أو

$$(٤) \quad x = ay^2 + by + c, \quad a \neq 0.$$

تبعا لكون محور القطع المكافئ يوازى المحور y أو المحور x . برهان آخر مخطط فى المسألة ٣٧ . العكس أيضا صحيح : كل معادله فى y و x من الدرجة الثانية ، فيها متغير واحد مربع ولا يوجد حد xy ، تكون معادلة قطع مكافئ محوره يوازى أحد محورى الاحداثيات . القطع المكافئ فى (٣) يفتح لاعلى إذا كانت $a > 0$ إذ أن المعادلة توضح أن y تكون كبيرة وموجبة عندما تكون x كبيرة . القطع المكافئ يفتح لاسفل إذا كانت $a < 0$ ، إذ أن y تكون كبيرة وسالبة عندما

تكون x كبيرة . لأسباب مماثلة القطع المكافئ في (٤) يفتح الى اليمين أو الى اليسار تبعا لكون $a > 0$ أو $a < 0$.

المعادلات التي على الصورة (٣) أو (٤) يمكن تخطيطها بسرعة . بما أننا نعرف الشكل والوضع العامين لهذه القطوع المكافئة فالتا نحتاج فقط الى توقيع عدد قليل من النقط . عادة تكفى الاجزاء المقطوعة والرأس . باستخدام التفاضل أو المسألة ٣٨ ، ليس من الصعب اثبات أن الاحداثي x للرأس للمعادلة (٣) هو $-b/2a$. الاحداثي y يمكن حيثذ . ايجاده من المعادلة .

مثال ٣ . خطط المنحنى $y = -x^2 + 3x + 10$

نعرف أن المنحنى قطع مكافئ لان المعادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد فقط . محوره يوازي المحور y ، وبما أن y تكون كبيرة وسالبه عندما تكون x كبيرة ، فالقطع المكافئ يجب أن يفتح لأسفل . بوضع $y = 0$ في المعادلة والحل لـ x نوجد الجزئين المقطوعين من المحور x وهما 5 و -2 . بالمثل ، بوضع $x = 0$ نوجد الجزء المقطوع من المحور y وهو 10 . الاحداثي x للرأس هو $3/2$ والاحداثي y ، كما يوجد من المعادلة ، هو $49/4$. من هذه المعلومات نخطط الشكل البياني (شكل ت - ٤٧) .

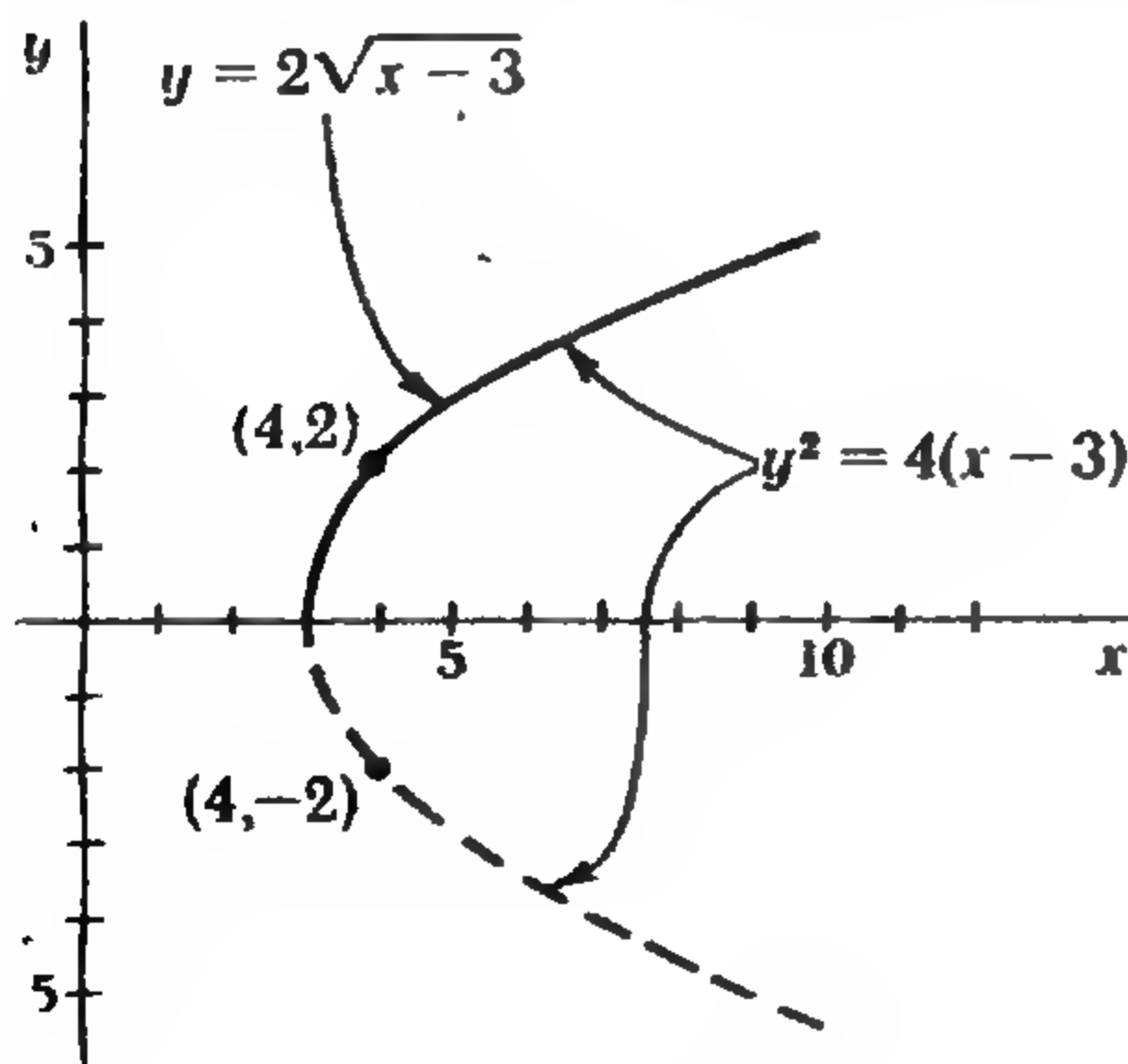
مثال ٤ . خطط المنحنى

$$(٥) \quad y = 2\sqrt{x-3}$$

رغم أن المعادلة

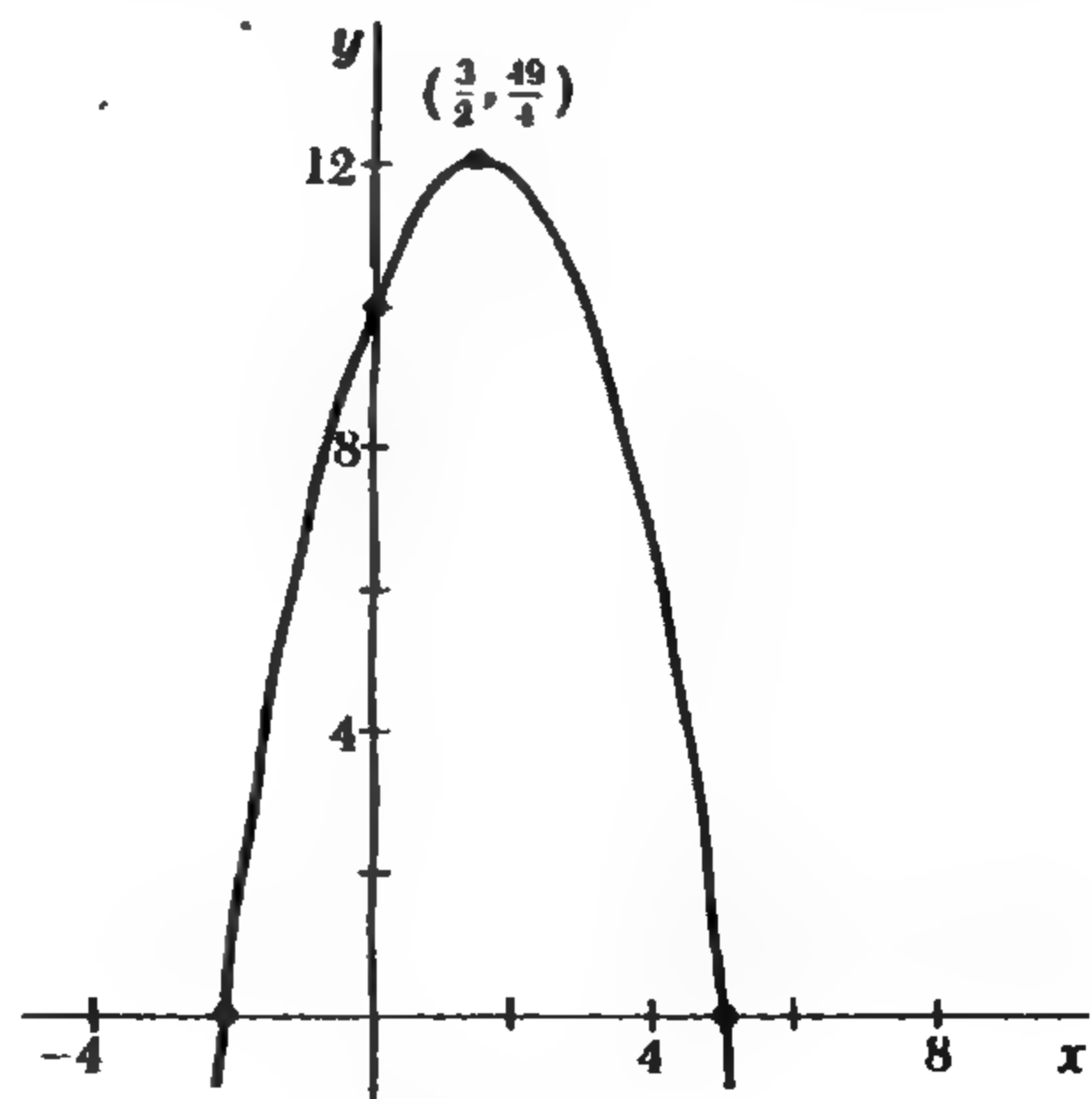
$$(٦) \quad y^2 = 4(x-3)$$

التي نحصل عليها بكتابة مربع كل من طرفي المعادلة (٥) لاتكون مكافئة للمعادلة (٥) ، الا أن كل نقطة على (٥) تكون ايضا على (٦) ، وبالتالي الشكل البياني لـ (٥) سيكون جزءا من الشكل البياني لـ (٦) ، الشكل البياني لـ (٦) هو قطع مكافئ رأسه عند (3, 0) ويفتح الى اليمين .



شكل ت - ٤٨

الشكل البياني للمنحنى $y = 2\sqrt{x-3}$ هو النصف الأعلى للقطع المكافئ $y^2 = 4(x-3)$.



شكل ت - ٤٧

القطع المكافئ $y = -x^2 + 3x + 10$.

هو المنحنى الكامل فى الشكل ت - ٤٨ . أى نقطة (x, y) حيث $y \geq 0$ تحقق (٦) ايضا تحقق (٥) ، واذن الشكل البيانى ل - (٥) هو النصف الأعلى للقطع المكافئ .

معادلة القطع المكافئ الذى محوره لايوازي أحد محورى الاحداثيات توجد بسهولة بطريقة دوران السحاور وهذه سندرسها فى البند ت - ١١ .

القطع المكافئ منحنى له خواص هندسية كثيرة . وله أيضا استخدامات عملية . مسير القذيفة يقترب من قطع مكافئ ويكون قطعاً مكافئاً حقيقياً إذا لم توجد مقاومة هواء . التقوسات المكافئة تستخدم كدعامات للكبارى . الكابل الدعامى الرئيسى لكوبرى معلق هو قوس قطع مكافئ . عاكسات الأضواء الكاشفة والمرايا العاكسة فى التليسكوبات هى عادة سطوح مكافئة مكونة من دوران قطع مكافئ حول محوره . الأضواء الكاشفة حيث يكون العاكس هكذا وحيث يكون مصدر الضوء عند البؤرة تصدر أشعة متوازية ، والتليسكوب العاكس يعمل العكس بأن يركز أكبر كمية من الضوء القادم من نجم ، عند عين الراصد ، الموضوعه عند البؤرة . هذه تسمى الخاصية البؤرية للقطع المكافئ .

مسائل

أوجد معادلة القطع المكافئ الذى يحقق الشروط الآتية :

- ١ - الرأس $(0, 0)$ والبؤرة $(6, 0)$.
- ٢ - الرأس $(0, 0)$ والبؤرة $(0, -3)$.
- ٣ - البؤرة $(0, -\frac{3}{2})$ والدليل $x = \frac{3}{2}$.
- ٤ - الرأس $(0, 0)$ والدليل $y = c$.
- ٥ - البؤرة $(a, 0)$ والدليل $x = -a$.

أوجد احداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل للقطوع المكافئة الآتية . خطط المنحنى

$$4y^2 + ax = 0 \quad ١٠ - y = cx^2 - 9x^2 - \sqrt{3}y = 0 \quad ٧ - 8x^2 = -10y \quad ٦ - y^2 = 24x$$

استخدم تعريف القطع المكافئ لاييجاد معادلة القطع المكافئ الذى يحقق الشروط الآتية :

- ١١ - الرأس $(2, 0)$ والبؤرة $(5, 0)$ ١٢ - البؤرة $(2, 4)$ والدليل $y = -5$
 - ١٣ - الرأس $(-4, -4)$ والدليل $x = 0$
 - ١٤ - الرأس $(0, k)$ والبؤرة $(0, k - p)$
- خطط الأشكال البيانية للمعادلات الآتية :

- | | | |
|-----------------------------|------------------------------|--------------------------|
| ١٥ - $y = \frac{1}{2}x^2$ | ١٦ - $y^2 = -30x$ | ١٧ - $y = 3 - x^2$ |
| ١٨ - $y = x^2 + 8$ | ١٩ - $x^2 - 8x + 2y = 0$ | ٢٠ - $y^2 = 36 - x$ |
| ٢١ - $2y^2 - x - 10 = 0$ | ٢٢ - $y = x^2 - ax, a > 0$ | ٢٣ - $y = -x^2 + 4x - 4$ |
| ٢٤ - $3x^2 + x - y + 4 = 0$ | ٢٥ - $4y^2 + 4x - 20y = -25$ | ٢٦ - $y = -7 + 5x - x^2$ |
| ٢٧ - $2y^2 + x + 10y = 0$ | ٢٨ - $y^2 = x^2 - 4x + 4$ | ٢٩ - $y = \sqrt{x}$ |

$$y = -\sqrt{x+4} \quad ٣١ \quad y = \sqrt{-x} \quad ٣٠$$

٣٢ - أوجد معادلة الوتر الواصل بين النقطتين على القطع المكافئ $x^2 = -12y$ اللتين إحداثيهما x هما 4,8 .

٣٣ - أوجد المسافة من بؤرة القطع المكافئ $ky^2 = kx$ إلى نقطة على القطع المكافئ إحداثيها x هو a .

٣٤ - أوجد معادلة القطع المكافئ الذى رأسه عند نقطة الأصل ومحوره على المحور y ويمر بالنقطة (4, 3) .

٣٥ - النقط الثلاث (1, 2) و (1, -1) , (2, -1) لاتقع على خط مستقيم . (أ) أوجد معادلة القطع المكافئ الذى يمر بالنقط الثلاث ومحوره يوازى المحور y [ارشاد : أوجد معادلة على الصورة (٣)] . (ب) أوجد معادلة القطع المكافئ الذى يمر بالنقط الثلاث ومحوره يوازى المحور x .

٣٦ - مذنب يتحرك فى مدار على شكل قطع مكافئ بؤرته الشمس . عندما يكون على بعد d miles من الشمس ، الزاوية من محور القطع المكافئ الى الخط المستقيم الواصل بين الشمس والمذنب هى 60° . ما هو أقرب بعد للمذنب عن الشمس ؟

٣٧ - اثبت أن القطع المكافئ الذى رأسه عند النقطة (h, k) ومحوره يوازى المحور x له المعادلة $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ ، حيث p هى المسافة الموجهة من الرأس إلى البؤرة . (ارشاد : أوجد إحداثى البؤرة واستخدم تعريف القطع المكافئ .) اثبت ان هذه المعادلة على الصورة (٤) .

٣٨ - بفرض أن القطع المكافئ الذى محوره يوازى المحور y له معادلة على الصورة $a \neq 0$ و $y = ax^2 + bx + c$ اثبت أن الاحداثى x للرأس هو $-b/2a$ (ارشاد : أوجد الاحداثين x لنقطتى تقاطع القطع المكافئ مع خط مستقيم أفقى مناسب) .

٣٩ - لتكن N نقطة تقاطع دليل القطع المكافئ ومحوره . أثبت أن المستقيمين المارين بالنقطة N وطرفى الوتر البؤرى العمودى يتعامدان . (ارشاد : ادخل نظاما للاحداثيات يختار بحيث أن القطع المكافئ تكون له معادلة بسيطة .)

٤٠ - اثبت أن لاي نقطة على القطع المكافئ ، النقطه ومسقط النقطة على الدليل ، والبؤرة تكون رؤوس مثلث متساوى الساقين .

٤١ - أوجد المحل الهندسى لنقطة تتحرك بحيث أن بعدها عن النقطة (8, 0) يزيد اربع وحدات عن بعدها عن الخط المستقيم $y + 4 = 0$.

٤٢ - رأسان من مثلث هما $A(c, 0)$ و $B(-c, 0)$. أوجد المحل الهندسى للرأس الثالث P اذا كان ميل PB يقل بواحد صحيح عن ميل PA .

٤٣ - رسمت قطع مستقيمة من نقطة الاصل الى القطع المكافئ $y^2 = 4Px$. صف فئة منتصفات هذه الأوتار .

أوجد نقط التقاطع لأزواج المنحنيات الآتية وافحص نتائجك بتخطيط أشكالها البيانية :

٤٤ - $x - y = 0, x^2 + 6y = 0$ ٤٥ - $x + y - 8 = 0, y^2 - 4x + 2 = 0$

٤٦ - $y = 2x^2 + 8x, 2y = x^2 + 4x - 15$ ٤٧ - $y^2 = 4px, x^2 = 4py$

٤٨ - $y = x^3, y = 2x^2 + 3x$ ٤٩ - $x^2 + y^2 - 25 = 0, x^2 + 3y - 21 = 0$

٥٠ - أثبت أن الدائرة $x^2 - 2ax + y^2 = 0$ والقطع المكافئ $y^2 = 4px$ حيث $p > 0$ و $a > 0$ يتقاطعان في نقطة واحدة فقط ما لم يكن $a > 2p$.

٥١ - خطط الشكل البياني للمعادلة $y = |x^2 - 3|$

٥٢ - خطط الشكل البياني للمعادلة $y = x|x - 2|$

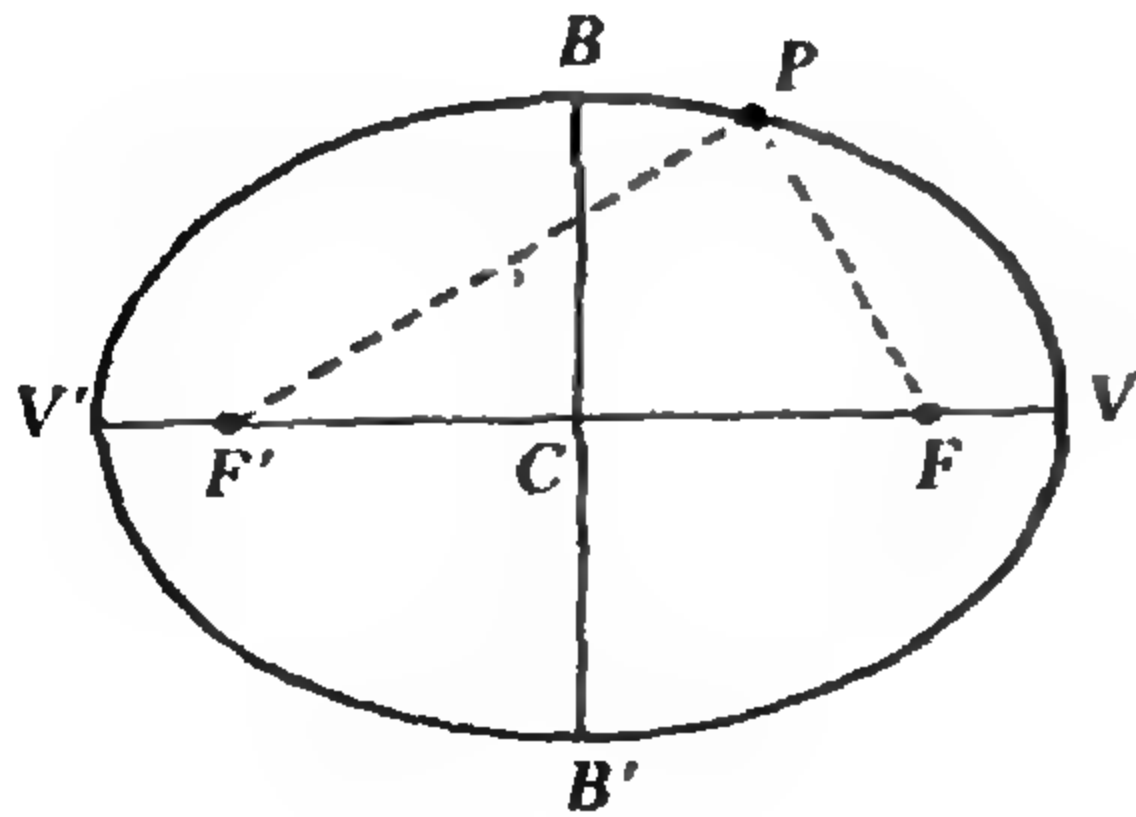
٥٣ - المماس لقطع مكافئ $y = x^2$ عند نقطة P يمكن تعريفه بأنه الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة P ولا يوازي محوره ولا يقطع القطع المكافئ في أى نقطة أخرى . أوجد معادلة المماس للقطع المكافئ $y = x^2$ عند النقطة $P(a, a^2)$ (ارشاد : أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله m ويمر بالنقطة P ، ثم اختر m بحيث أن الخط يكون له نقطة تقاطع واحدة فقط مع القطع المكافئ) .

ت - ٨

القطع الناقص

ت - ١٩ تعريف . القطع الناقص هو فئة جميع النقط في المستوى التي حاصل جمع بعديها عن نقطتين ثابتتين في المستوى مقدار ثابت .

القطع الناقص النمطي موضح في الشكل ت - ٤٩ . النقطتان الثابتتان F و F' تسميان بؤرتي القطع الناقص . لجميع النقط P على المنحنى . $|PF| + |PF'| = 2a$ ، حيث $2a$ هو الثابت المعطى* . النقطة C التي في منتصف المسافة بين البؤرتين هي المركز ، والنقطتان V و V' في



شكل ت - ٤٩

P تكون على القطع ناقص اذا واذا فقط كان

$$|PF| + |PF'| = 2a$$

* معادلة القطع الناقص تكون أبسط اذا رمزنا للثابت بالرمز $2a$ وليس بالرمز a .

الشكل مما الرأسان . القطعتان المستقيمتان BB' و VV' هما المحور الأكبر والمحور الأصغر للقطع الناقص .

القطع الناقص يمكن رسمه آلياً . ضع مسامرين صغيرين عند البؤرتين واربط طرفاً واحداً من خيط طوله $2a$ بأحد المسامرين والطرف الآخر بالمسمار الآخر . إذا تحرك قلم رصاص P ، مسنوداً على الخيط ، بحيث يحفظ الخيط دائماً مشدوداً ، فإن $|PF| + |PF'|$ يكون مقداراً ثابتاً ، والقلم الرصاص يرسم قطعاً ناقصاً . إذا كانت F و F' منطقتين ، القطع الناقص يكون دائرة .

لإيجاد معادلة القطع الناقص ، نحتاج إلى نظام للاحداثيات . المعادلة تكون أبسط ما يمكن إذا وضع القطع الناقص على مستوى الاحداثيات بحيث أن البؤرتين تكونان على المحور x والمركز يكون عند نقطة الأصل (شكل ت - ٥٠) . إذا كانت $2c$ هي المسافة بين البؤرتين ، فإن البؤرتين هما $F(c,0)$ و $F'(-c,0)$ ، $c \geq 0$. النقطة $P(x,y)$ تكون على المنحنى إذا وإذا فقط كان $|PF| + |PF'| = 2a$ حيث $2a$ هو الثابت المعطى أى إذا وإذا فقط كان (x, y) حلاً للمعادلة

$$(1) \quad \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

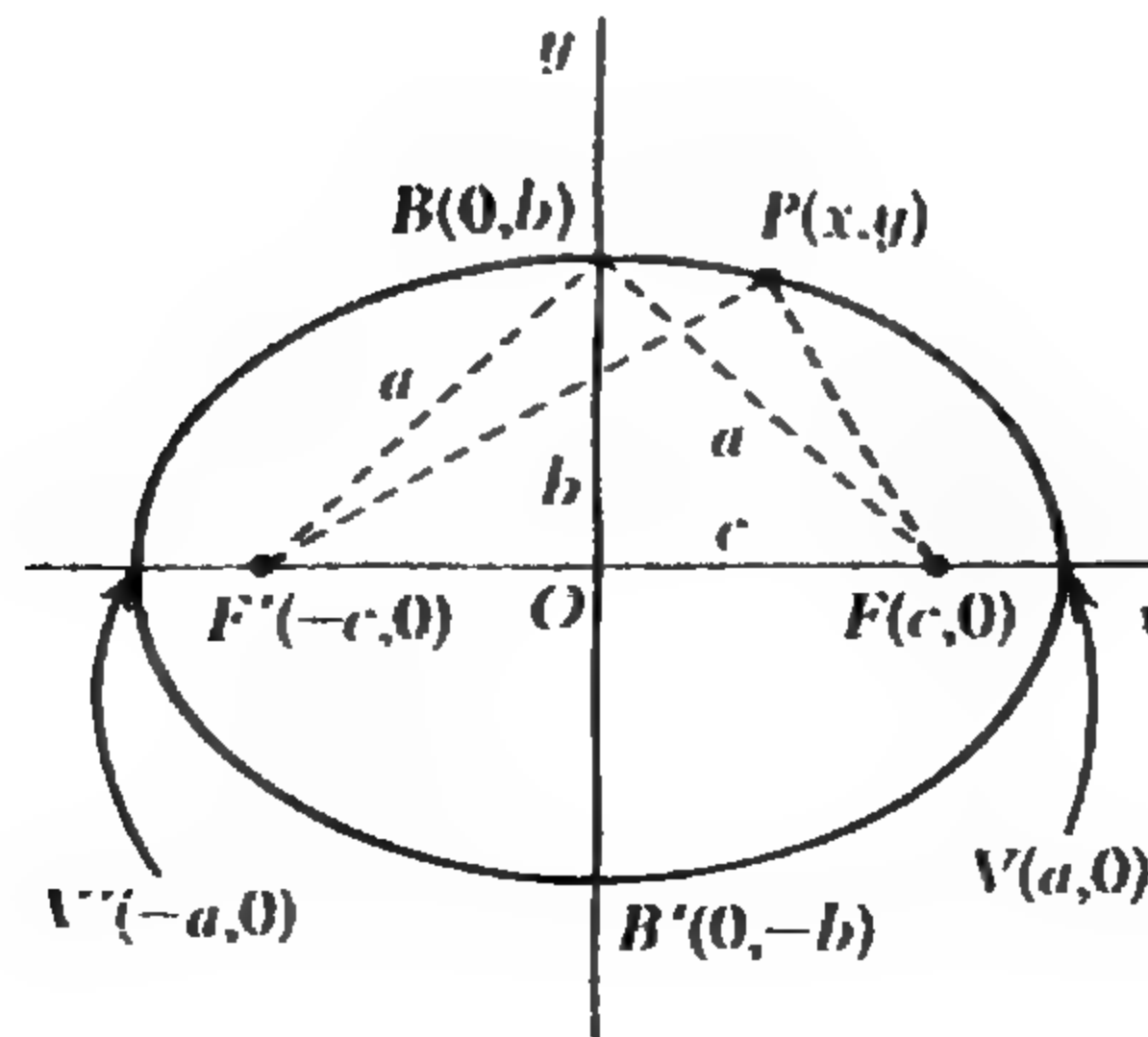
هذه إذن معادلة للقطع الناقص عندما يوضع حسب الوصف السابق .

هذه المعادلة يمكن تبسيطها إلى حد كبير . إذا نقلنا الحد الثاني في (١) إلى الطرف الايمن ثم كتبنا مربعي طرفي المعادلة الناتجة ، فإننا نحصل بعد الاختصار والترتيب على

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

بكتابة مربعي الطرفين مرة أخرى ، والاختصار وإعادة الترتيب نحصل على

$$(2) \quad (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$



شكل ت - ٥٠

القطع الناقص $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ البؤرتان على المحور x .

حاصل الجمع $|PF| + |PF'| = 2a$ لطولى ضلعين من المثلث PFF' فى الشكل ت - ٥٠ يكون أكبر من الطول $|FF'| = 2c$ للضلع الثالث . واذن $a > c \geq 0$ وحيث أن $a^2 - c^2$ موجب فهو يساوى مربع عدد موجب ما وليكن b :

$$(٣) \quad a^2 - c^2 = b^2$$

بتعويض b^2 لـ $a^2 - c^2$ فى (٢) ، يكون لدينا

$$(٤) \quad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

وبالقسمة على a^2b^2 يكون

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ت - ٢٠}$$

المعادلة ت - ٢٠ أبسط من (١) ، لكن ليس واضحاً بحال من الاحوال أن المعادلتين متكافئتان . كتابة مربع مـادلة عادة لا يعطينا معادلة مكافئة ، وقد فعلنا ذلك مرتين فى اشتقاق المعادلة ت - ٢٠ . الا أنه يمكننا اثبات أن أى حل للمعادلة ت - ٢٠ هو حل لـ (١) ، وبالتالي المعادلتان متكافئتان (المسألة ٣٢) . نتيجة لذلك ، المعادلة ت - ٢٠ هى معادلة للقطع الناقص .

من المعادلة ت - ٢٠ نرى أن القطع الناقص متماثل فى كلا المحورين وفى نقطة الاصل (شكل ت - ٥٠) . الجزءان المقطوعان من المحور x هما $(\pm a, 0)$ والجزءان المقطوعان من المحور y هما

$(0, \pm b)$. المعادلة (٣) من السهل تذكرها . النقطة B فى الشكل ت - ٥٠ هى احدى أوضاع P ، واذن $|BF| + |BF'| = 2a$ وبما أن $|BF| = |BF'|$ اذن $|BF| = a$ والمعادلة (٣) هى مجرد نظرية فيثاغورث للمثلث OBF . إذا أجرينا حل (٤) لـ y ، فإننا نحصل على

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

بما أن y تكون تخيلية لـ $|x| > a$ ، فالمنحنى يقع بين المستقيمين $x = a$ و $x = -a$. بالمثل ، بالحل لـ x نرى أن المنحنى يقع بين الخطين الأفقيين $y = b$ و $y = -b$.

مثال ١ . أوجد معادلة القطع الناقص الذى بؤرتاه $(\pm 3, 0)$ وطول محوره الأكبر 12 .

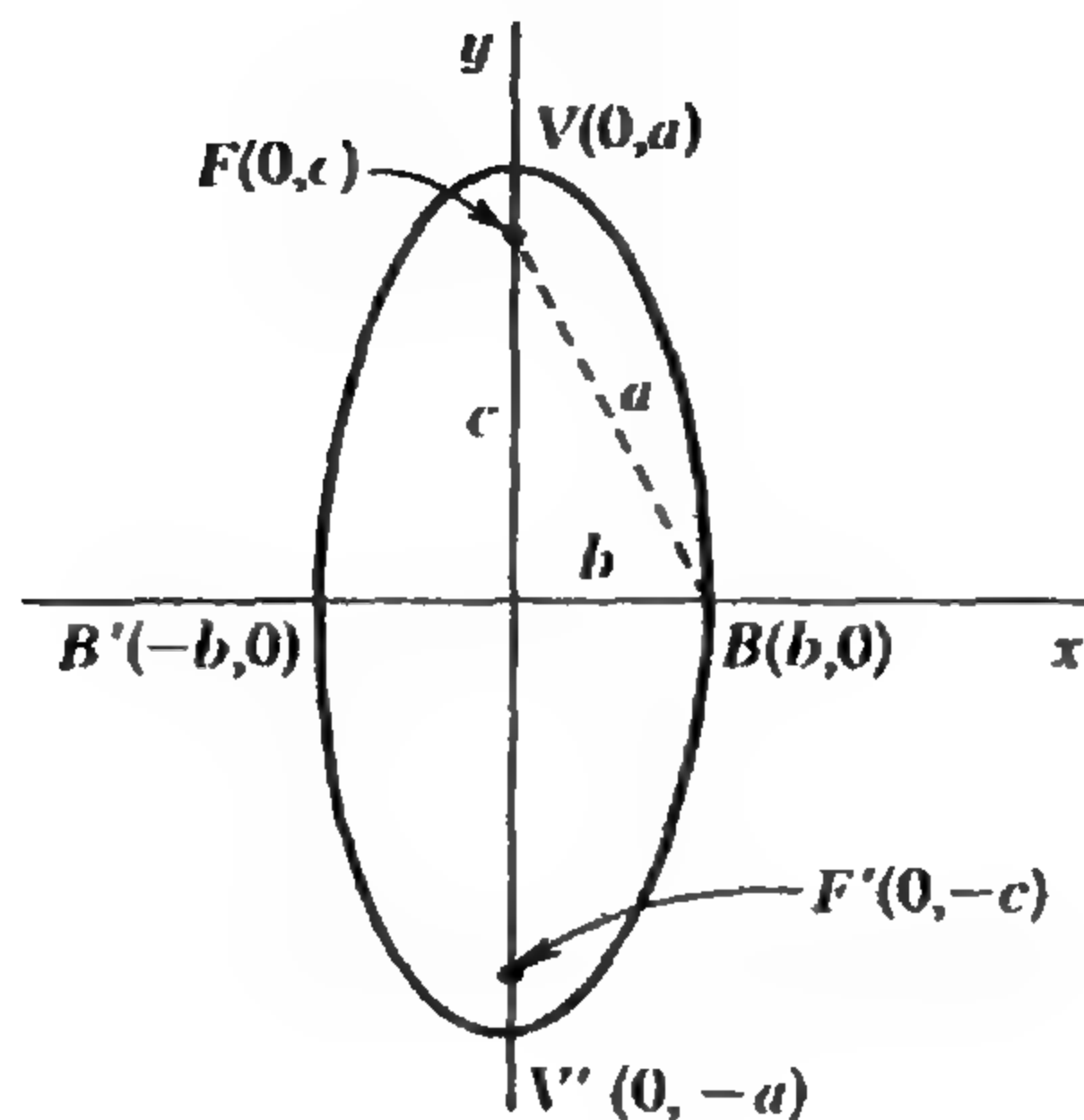
بما أن بؤرتى القطع الناقص على المحور x ومركزه عند نقطة الاصل ، فمعادلته تكون على الصورة ت - ٢٠ . يجب أن نوجد b^2 و a^2 . طول المحور الأكبر هو $2a$ ، اذن $a = 6$. موقع البؤرتين يتضمن أن $c = 3$ ، ومن ثم ، من (٣) ، $b^2 = 27$. بتعويض هاتين القيمتين لـ b و a فى المعادلة ت - ٢٠ ، يكون لدينا

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$$

كمعادلة للقطع الناقص .

إذا كانت البؤرتان على المحور y عند النقطتين $(0 \pm c)$ (شكل ت - ٥١) ، فإن دورى x, y يتبادلان ، ومعادلة القطع الناقص تكون

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{ت - ٢١}$$



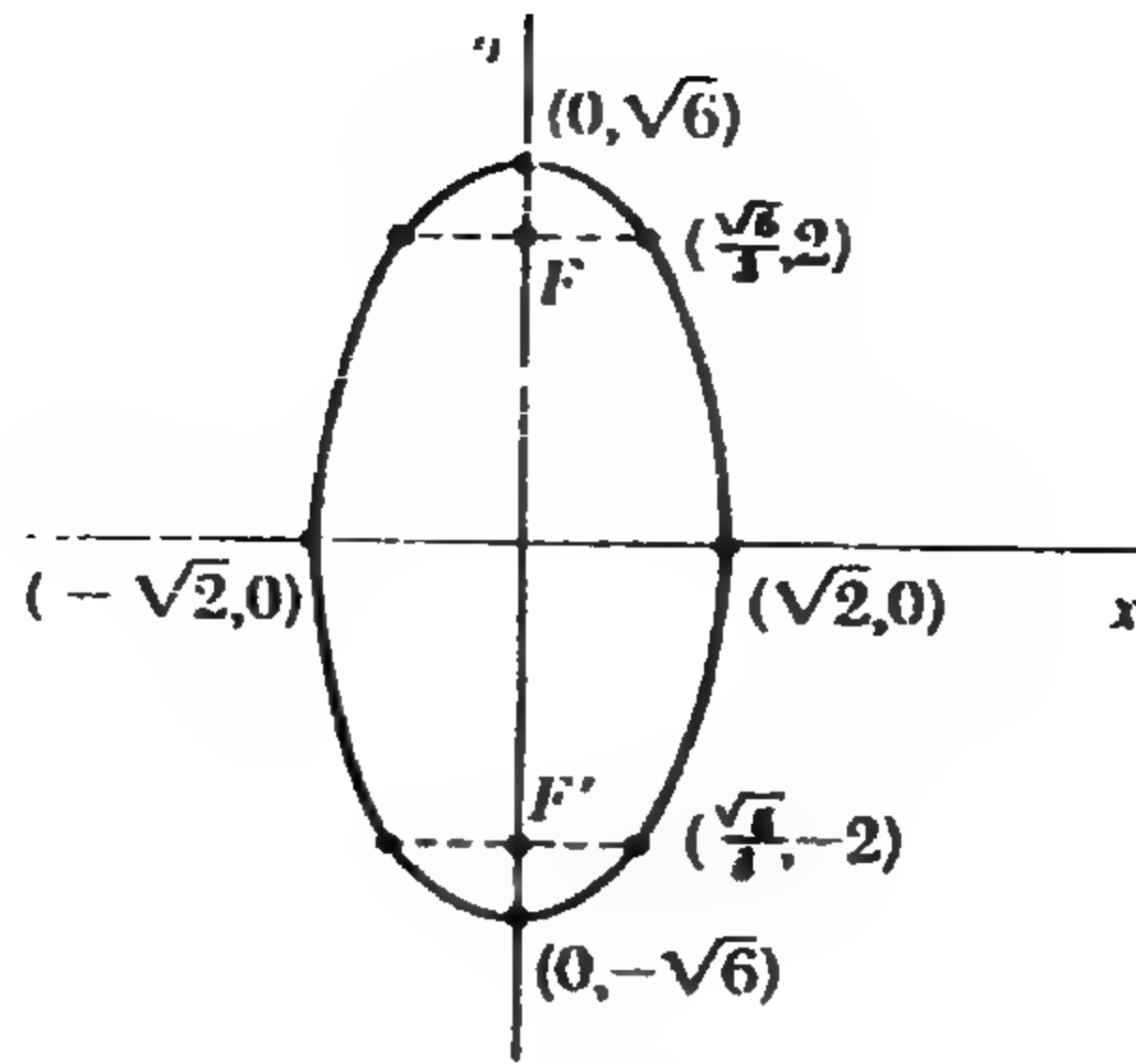
شكل ت - ٥١

القطع الناقص $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ البؤرتان على المحور y .

المعادلتان ت - ٢٠ ، ت - ٢١ تسميان الصورتين القياسيتين لمعادلة القطع الناقص . أى معادلة على إحدى هاتين الصورتين أو على الصورة (٤) ، شكلها البياني قطع ناقص . أكبر المقامين هو a^2 والاصغر b^2 . من السهل التحديد من المعادلة ما إذا كان المحور الأكبر على المحور x أو على المحور y بإيجاد الأجزاء المقطوعة . البؤرتان تكونان دائماً على المحور الأكبر . طول المحور الأكبر والمحور الأصغر هما $2a$ و $2b$ ، والاول دائماً أطول من الثانى مالم يكن القطع الناقص دائرة .

مثال ٢ خط المنحنى $3x^2 + y^2 = 6$

المعادلة على الصورة (٤) فهي قطع ناقص مركزه عند نقطة الأصل ومحواره على محورى الاحداثيات . الجزءان المقطوعان من المحور x هما $(\pm \sqrt{2}, 0)$ والجزءان المقطوعان من المحور y هما $(0, \pm \sqrt{6})$. فالقطع الناقص محوره الأكبر على المحور y . النقط الأربع تكفى لتخطيط تقريبي . لتخطيط أفضل ، نقط أطراف الوترين البؤريين العموديين ، اللذين هما الوتران الماران بالبؤرتين وعموديان على المحور الأكبر ، تكون مفيدة . بما أن $a = \sqrt{6}$ (الأكبر بين $\sqrt{6}, \sqrt{2}$) ، $b = \sqrt{2}$ ، فإن $c = 2$ والبؤرتان هما $(0, \pm 2)$ ؛ (a, b, c) دائماً موجبة . احداثيات أطراف الوترين البؤريين العموديين يمكن ايجادها بتعويض $c = 2$ فى معادلة القطع الناقص والحل لـ x . وهى $(\pm \sqrt{6}/3, \pm 2)$. المنحنى مخطط فى الشكل ت - ٥٢ .



شكل ت- ٢٠

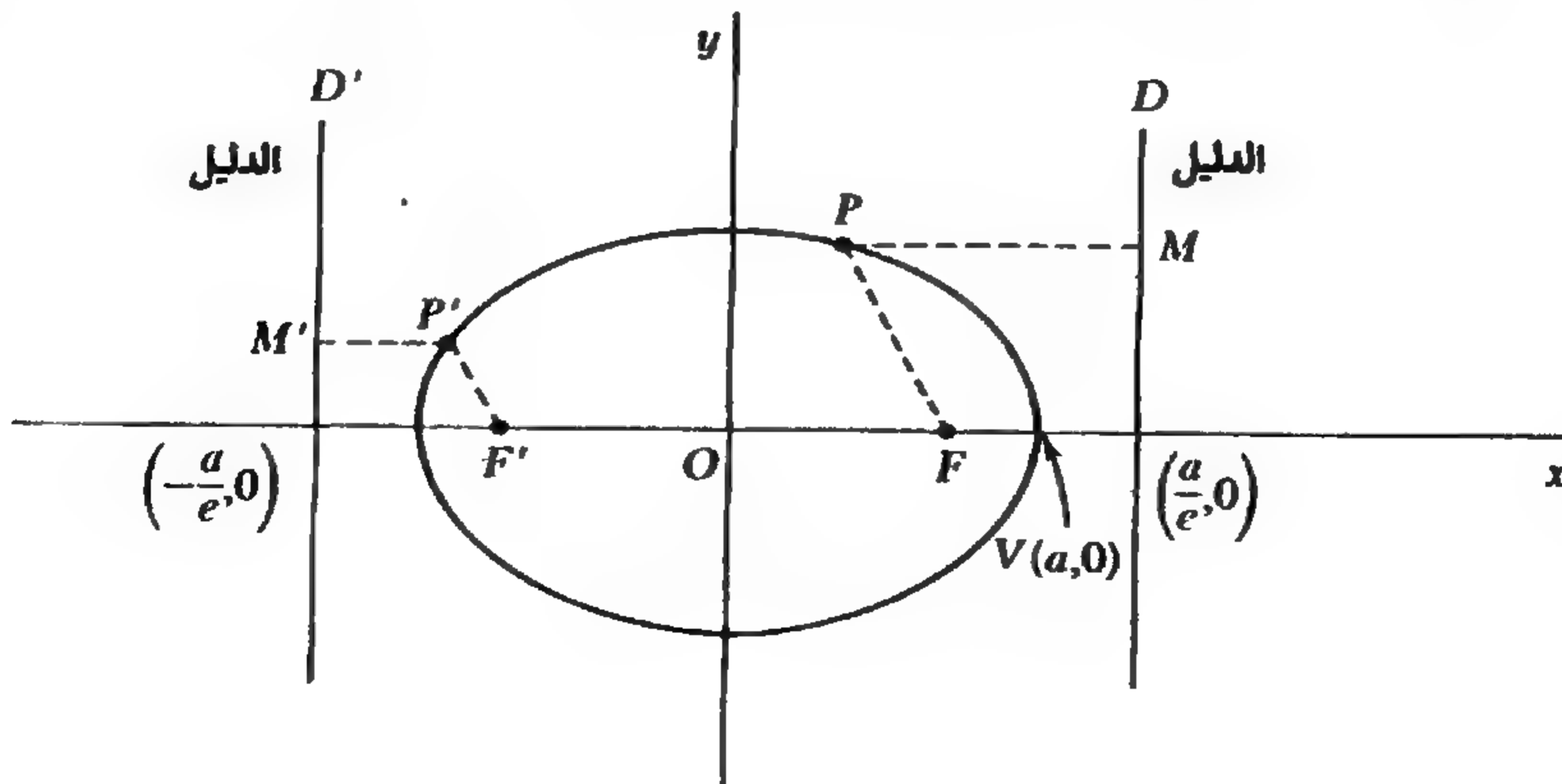
القطع الناقص $3x^2 + y^2 = 6$.

النسبة a الى b تحدد تدوير أو فلتحة القطع الناقص ، لكن مقياساً أكثر شيوعاً هو النسبة c/a ، ويسمى الاختلاف المركزي للقطع الناقص ويرمز له بالرمز e :

$$e = \frac{c}{a}$$

بما أن $0 \leq c < a$ فإن $0 \leq e < 1$. إذا كانت $e = 0$ ، فحينئذ $c = 0$ ، البؤرتان تنطبقان ، ويصبح القطع الناقص دائرة . المعادلة ت- ٢٠ تعكس ذلك لأنه عندئذ يكون $b = a$. إذا كانت e قريبة من 1 ، فإن c تكاد تكون مساوية لـ b و a تكاد تكون صفراً ، والقطع الناقص يكون طويلاً ونحيفاً ، والبؤرتان تكونان قريبتين من الطرفين .

إذا لم يكن القطع الناقص دائرة ، أي كانت $e \neq 0$ فإن الخط المستقيم D الذي معادلته هي $x = a/e$ يكون موجوداً ويقطع المحور x على يمين (لماذا ؟) الرأس $V(a, 0)$ للقطع الناقص ت- ٢٠ (شكل ت- ٥٣) له خاصية متميزة هي أنه لأي نقطة P على القطع الناقص يكون



شكل ت- ٥٣

لجميع النقط P على القطع الناقص ، $|PF|/|PM| = e < 1$.

$|PF|/|PM| = e$ ، حيث M هي مسقط P على D وحيث F البؤرة الأقرب إلى D . من التماثل ، الخط المستقيم D' الذي معادلته هي $x = -a/e$ والبؤرة الأخرى F' لهما دور مماثل . بالتناظر مع القطع المكافئ ، D و D' يسميان الدليلين للقطع الناقص . نترك برهان هذه الحقائق للطالب (المسألة ٣٠)

معادلات القطوع الناقصة التي مراكزها ليست عند نقطة الأصل أو التي محاورها ليست موازية لمحاور الأحداثيات ستناقش في البندين ت - ١٠ ، ت - ١١ .

الكواكب تتحرك في مدارات على شكل قطع ناقص بؤرته الشمس . الاختلاف المركزي لمدار الأرض هو بالتقريب 0.017 ، لذلك مسارها يكاد يكون دائرة . المدار التابع للأرض يكون على شكل قطع ناقص له بؤرة عند مركز الأرض .

مسائل

أوجد معادلة القطع الناقص الذي يحقق الشروط الآتية :

- ١ - البؤرتان $(\pm 4, 0)$ والرأسان $(\pm 6, 0)$.
- ٢ - البؤرتان $(0, \pm 3)$ والرأسان $(0, \pm 5)$.
- ٣ - البؤرتان $(0, \pm \sqrt{20})$ وطرفا المحور الأصغر $(\pm 3, 0)$.
- ٤ - البؤرتان $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$ والرأسان $(\pm 4, 0)$.
- ٥ - الرأسان $(\pm 4, 0)$ والاختلاف المركزي $\frac{1}{2}$.
- ٦ - الرأسان $(0, \pm 5)$ ويمر بالنقطة $(-2, 1)$.
- ٧ - البؤرتان $(\pm 2, 0)$ ويمر بالنقطة $(4, 4/\sqrt{5})$.

خطط الشكل البياني للقطوع الناقصة الآتية . أوجد أحداثيات الرأسين ، والبؤرتين ، وطرفي المحور الأصغر .

$x^2/5 + y^2/4 = 1$ - ١٠	$x^2 + y^2/9 = 1$ - ٩	$x^2/9 + y^2/4 = 1$ - ٨
$4x^2 + 4y^2 = 9$ - ١٣	$25x^2 + 16y^2 = 400$ - ١٢	$9x^2 + 25y^2 = 225$ - ١١
$2x^2 + 3y^2 = 10$ - ١٦	$2x^2 + y^2 = 1$ - ١٥	$x^2 + 4y^2 = 1$ - ١٤

أوجد الاختلاف المركزي ومعادلتى الدليلين لكل من المقطوع الناقصة الآتية :

$4x^2 + 5y^2 = 20$ - ١٩	$25x^2 + 9y^2 = 225$ - ١٨	$x^2/16 + y^2/25 = 1$ - ١٧
$x^2 + y^2 = 10$ - ٢١	$x^2 + 27y^2 = 3$ - ٢٠	

٢٢ - أوجد المحل الهندسي لنقطة حاصل جمع بعديها عن $(0, 6)$ و $(0, 0)$ يساوى 10 .

٢٣ - أوجد معادلة القطع الناقص الذي يمر بنقطة الأصل وبؤرتاه عند النقطتين $(2, -2)$ و $(-2, 2)$.

٢٤ - اوجد معادلة القطع الناقص الذى مركزه عند نقطة الاصل ، وله بؤرة عند $(-3, 0)$ والدليل المناظر هو $y = -6$.

٢٥ - خطط الشكل البياني للمتباينة $x^2 + 4y^2 < 36$

٢٦ - خطط الشكل البياني للمتباينة $(4x^2 + 25y^2 - 100)(25x^2 + y^2 - 25) < 0$

٢٧ - اثبت أن طول الوتر البؤرى العمودى للقطع الناقص $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ is $2b^2/a$ هو $2b^2/a$.

٢٨ - اوجد مساحة المربع المرسوم داخل القطع الناقص $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

٢٩ - اوجد معادلة القطع الناقص الذى مركزه عند نقطة الاصل ، ومحوره الاصغر على المحور x ، ويمر بالنقطتين $(3, \sqrt{6}/2)$ و $(-2, 2)$.

٣٠ - اثبت أن الدليل D الذى معادلته $x = a/e$ للقطع الناقص غير الدائرى $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

يقطع المحور x على يمين الرأس $V(a, 0)$ وأن لاي نقطة P على القطع

الناقص $|PF|/|PM| = e$ ، حيث F هى البؤرة $M(c, 0)$ هى مسقط P على D .

٣١ - قطعة مستقيمة طولها 12 in طرفاها على محورى 'احداثيات' . اوجد المحل الهندسى لنقطة

على القطعة بحيث تكون 4 in من الطرف على المحور x . (ارشاد : لتكن θ هى الزاوية

مقيسة فى اتجاه عقرب الساعة من المحور x الى الخط المستقيم . عبر عن احداثى النقطة

بدلالة θ)

٣٢ - فى اشتقاق المعادلة ت - ٢٠ ، عمليا أثبتنا أن كل حل للمعادلة (١) هو حل ل - ت - ٢٠ .

اكمل برهان تكافؤ (١) ، ت - ٢٠ بملىء تفصيلات البرهان الاتى للعكس وهو أن كل حل ل -

ت - ٢٠ هو حل للمعادلة (١) : لتكن (x, y) حلا للمعادلة ت - ٢٠ . حل ت - ٢٠ ل

y^2 : $y^2 = (a^2 - c^2)(1 - x^2/a^2)$ وعوض الطرف الأيمن من هذه ل - ٢ فى التعبير

$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$. هذا يختزل الى $|a - (c/a)x| + |a + (c/a)x|$

اثبت أن $-a \leq x \leq a$ يتضمن أن $a - (c/a)x > 0$ $-a \leq x \leq a$ implies ومن ثم

تكون (x, y) حلا للمعادلة (١) .

ت - ٩

القطع الزائد

ت - ٢٢ تعريف . القطع الزائد هو فئة جميع النقط فى المستوى التى فرق مسافتيها عن نقطتين

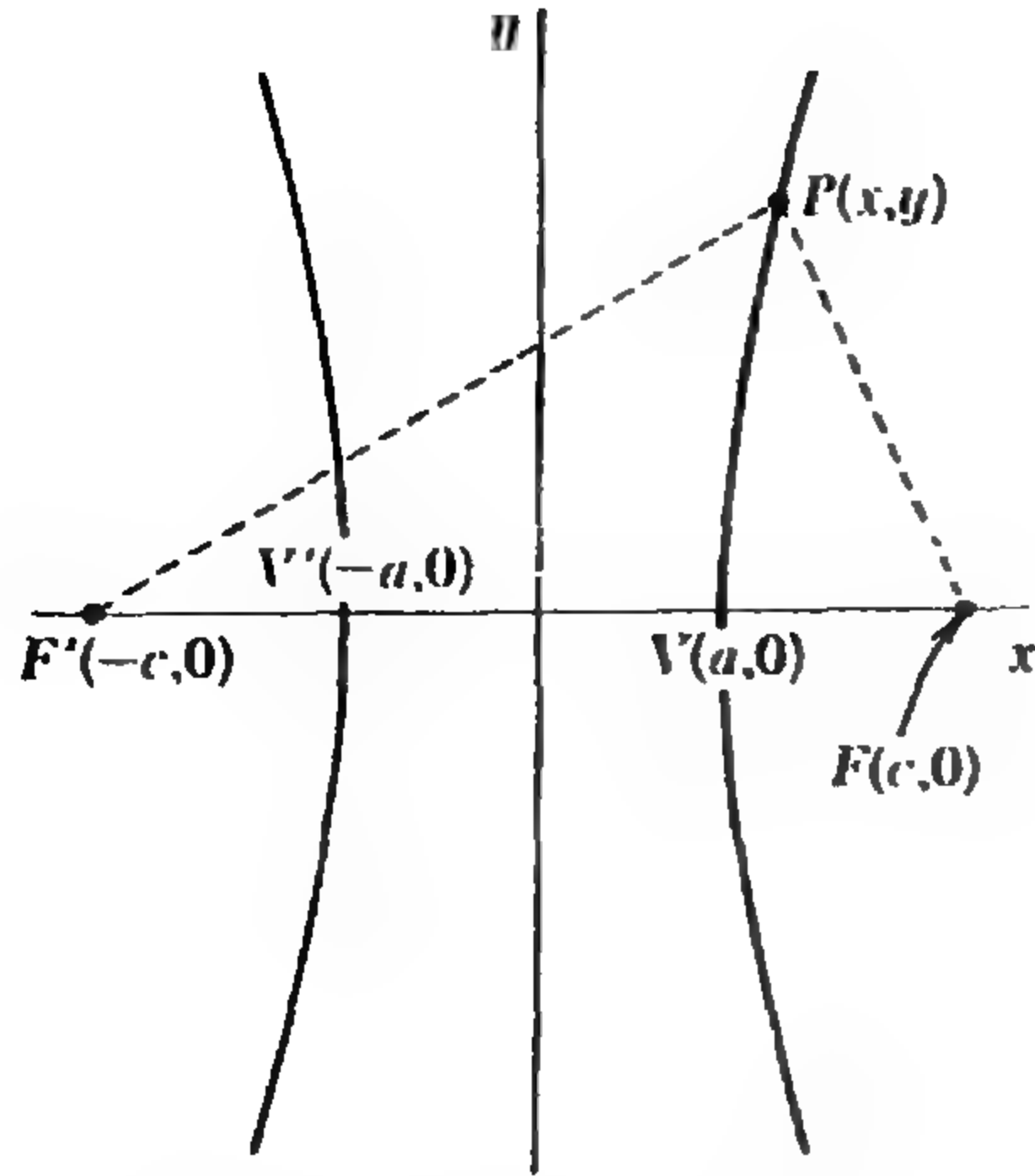
ثابتين فى المستوى يكون مقدارا ثابتا موجبا .

قطع زائد نمطى موضح فى الشكل ت - ٥٤ . النقطتان الثابتان F و F' هما البؤرتان ، النقطتان

V و V' هما الرأسان ، النقطة C هى المركز ، والقطعة المستقيمة VV' هى المحور القاطع

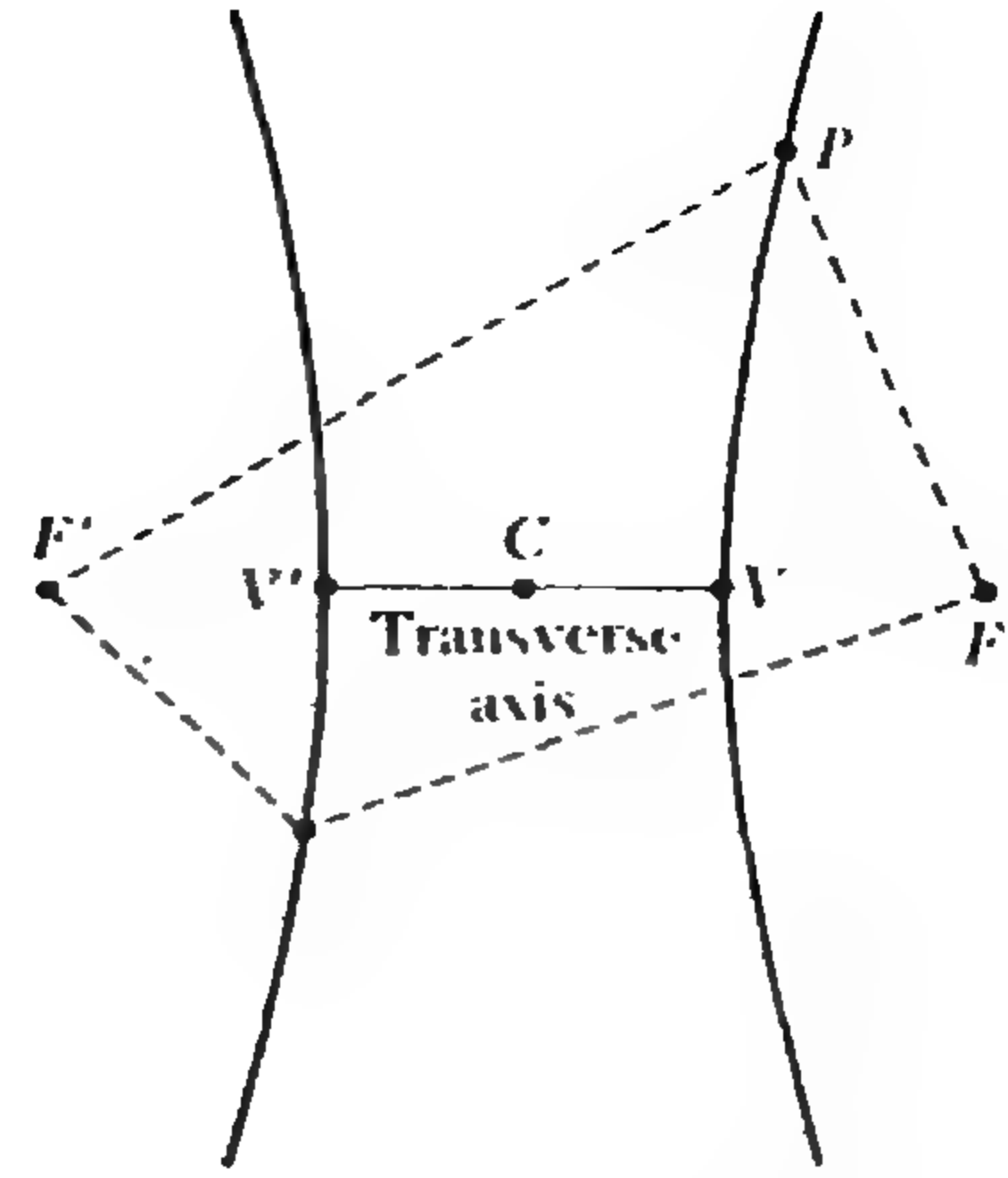
للقطع الزائد . النقطة P تكون على القطع الزائد اذا واذا فقط كان

(١) $|PF| - |PF'| = 2a$ أو كان $|PF'| - |PF| = 2a$



شكل ت - ٥٥

انقطع الزائد $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$
البؤرتان على المحور x .



شكل ت - ٥٦

P على القطع الزائد اذا واذا فقط كان
 $|PF| - |PF'| = \pm 2a$.

حيث $2a$ هو الثابت المعطى . هاتان المعادلتان يمكن الجمع بينهما في معادلة واحدة

$$(٢) \quad |PF| - |PF'| = \pm 2a$$

القطع الزائد على جزئين يسميان فرعين . الفرع الأيسر يظهر من الاشارة زائده في (٢) والفرع الأيمن من الاشارة ناقص .

لايجاد معادلة للقطع الزائد ، نضعه ، مثل القطع الناقص ، على نظام الاحداثيات بحيث يكون مركزه عند نقطة الأصل وبؤرتاه على المحور x (شكل ت - ٥٥) . اذا كانت المسافة بين البؤرتين $2c$ فان احداثيات البؤرتين هما $F(c, 0)$ و $F'(-c, 0)$ ، $c > 0$. من النقطة $P(x, y)$ تكون على المنحنى اذا واذا فقط كانت (x, y) حلا للمعادلة .

$$(٣) \quad \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

باتباع الطريقة التى اتبعناها للقطع الناقص هذه يمكن اختزالها

$$(٤) \quad (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

هذه تبدو أنها تطابق المعادلة التى حصلنا عليها للقطع الناقص عند هذه المرحلة ، لكن يوجد فرق خفى . الطرف الأيسر لاي المعادلتين في (١) هو الفرق $2a$ بين طولى ضلعين من المثلث PFF' فى الشكل ت - ٥٥ وذلك يكون أقل من الطول $2c$ للضلع الثالث FF' . هنا $0 < a < c$ فيكون الآن $a^2 - c^2$ سالبا . واذن $a^2 - c^2 = -b^2$ لعدد ما $b > 0$ أو تكافئيا ، $b^2 = c^2 - a^2$. بتعويض $-b^2$ لـ $a^2 - c^2$ فى (٤) ، يكون لدينا

$$(٥) \quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

وبالقسمة على a^2b^2 ، يكون

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ت - ٢٣

بالعكس يمكن اثبات أن كل حل للمعادلة ت - ٢٣ هو حل لـ (٣) (المسألة ٣٨) . أى أن المعادلتين متكافئتان ، ت - ٢٣ معادلة للقطع الزائد . القطع الزائد ت - ٢٣ متماثل فى كلا المحورين . الجزءان المقطوعان من المحور x هما $\pm a$. المنحنى لا يقطع المحور y . اذا أجرينا (٥) لـ y ، فالتنا نحصل على

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

ولأن y تخيلية لـ $|x| < a$ ، المنحنى يقع على يمين الخط المستقيم $x = a$ وعلى يسار الخط المستقيم $x = -a$ ومن جهة أخرى ، من التعبير لـ x

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2}$$

نرى أن y يمكن أن تكون أى عدد ، والمنحنى يكون غير محدود من أعلى أو أسفل .

مثال ١ . أوجد معادلة القطع الزائد الذى رأساه $(\pm 5, 0)$ وبؤرتاه $(\pm 6, 0)$.
القطع الزائد ستكون له معادلة على الصورة ت - ٢٣ ، اذ أن مركزه عند نقطة الاصل والبؤرتان على المحور x . يجب أن نوجد a, b موقع الرأسين والبؤرتين يتضمن أن $c = 6$ و $a = 5$. بما أن $b^2 = c^2 - a^2$ ، اذن $b^2 = 11$. بتعويض هاتين القيمتين لـ b و a فى المعادلة ت - ٢٣ ، نحصل على $x^2/25 - y^2/11 = 1$ كمعادلة للقطع الزائد .

الخطان المستقيمان الماران بنقطة الاصل

$$L': y = -\frac{b}{a}x \quad \text{و} \quad L: y = \frac{b}{a}x$$

هما خطان تقاربان للقطع الزائد $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ ، (شكل ت - ٥٦) . ثبت ذلك باثبات أن المسافة الرأسية $|PP'|$ بين نقطة P على النصف العلوى للفرع الايمن للقطع الزائد والنقطة P' على الخط المستقيم L فوق P مباشرة تقترب من الصفر عندما تتحرك P بعيدا الى مالا نهاية . بما أن المسافة العمودية من P الى L اقل من $|PP'|$ ، هذا سيثبت أن P تقترب قريبا شديدا من L . النصف الأسفل للفرع الأيمن والفرع الايسر يجب أن يسلكوا بالمثل ، لتكن احداثيات P و P' هي $P(x, y)$ و $P'(x', y')$. بما أن P' على L ، P على النصف العلوى للقطع الزائد ، يكون

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{و} \quad y' = \frac{b}{a} x$$

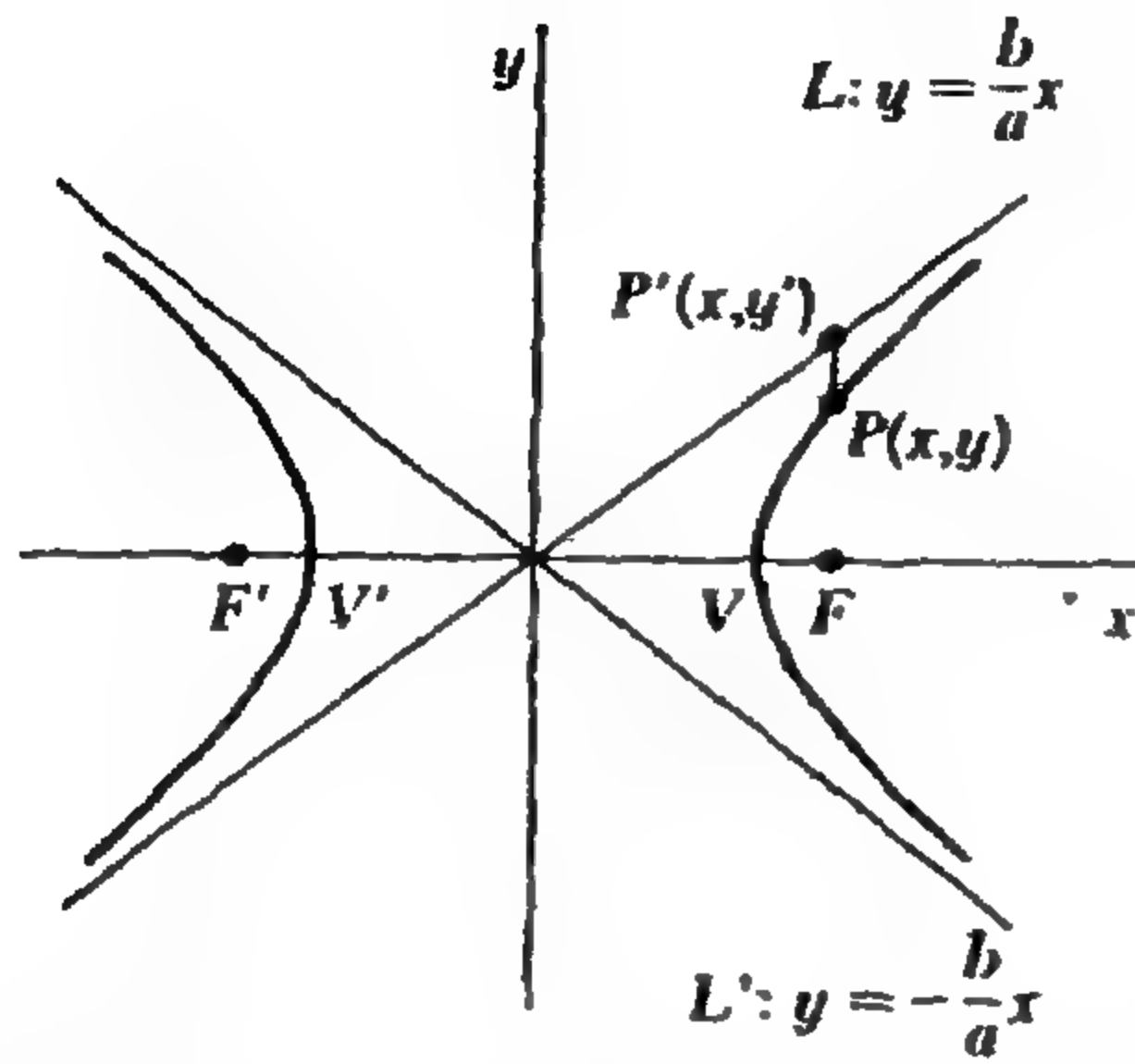
المسافة $|PP'|$ هي

$$|PP'| = y' - y = \frac{b}{a} (x - \sqrt{x^2 - a^2})$$

إذا ضربنا البسط والمقام للمقدار الأخير في $x + \sqrt{x^2 - a^2}$ فإتانا نحصل على

$$|PP'| = \frac{b}{a} \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

عندما تسير P الى ما لانهاية على المنحنى ، x تصبح كبيرة والتعبير الأخير يوضح أن المسافة $|PP'|$ تقترب من الصفر . المنحنى $xy = 1$ ، الذي خططنا في الشكل ت - ١٣ ، يندت - ٢ ، هو قطع زائد أدير بحيث يكون محورا الاحداثيات خطيه التقاربين .



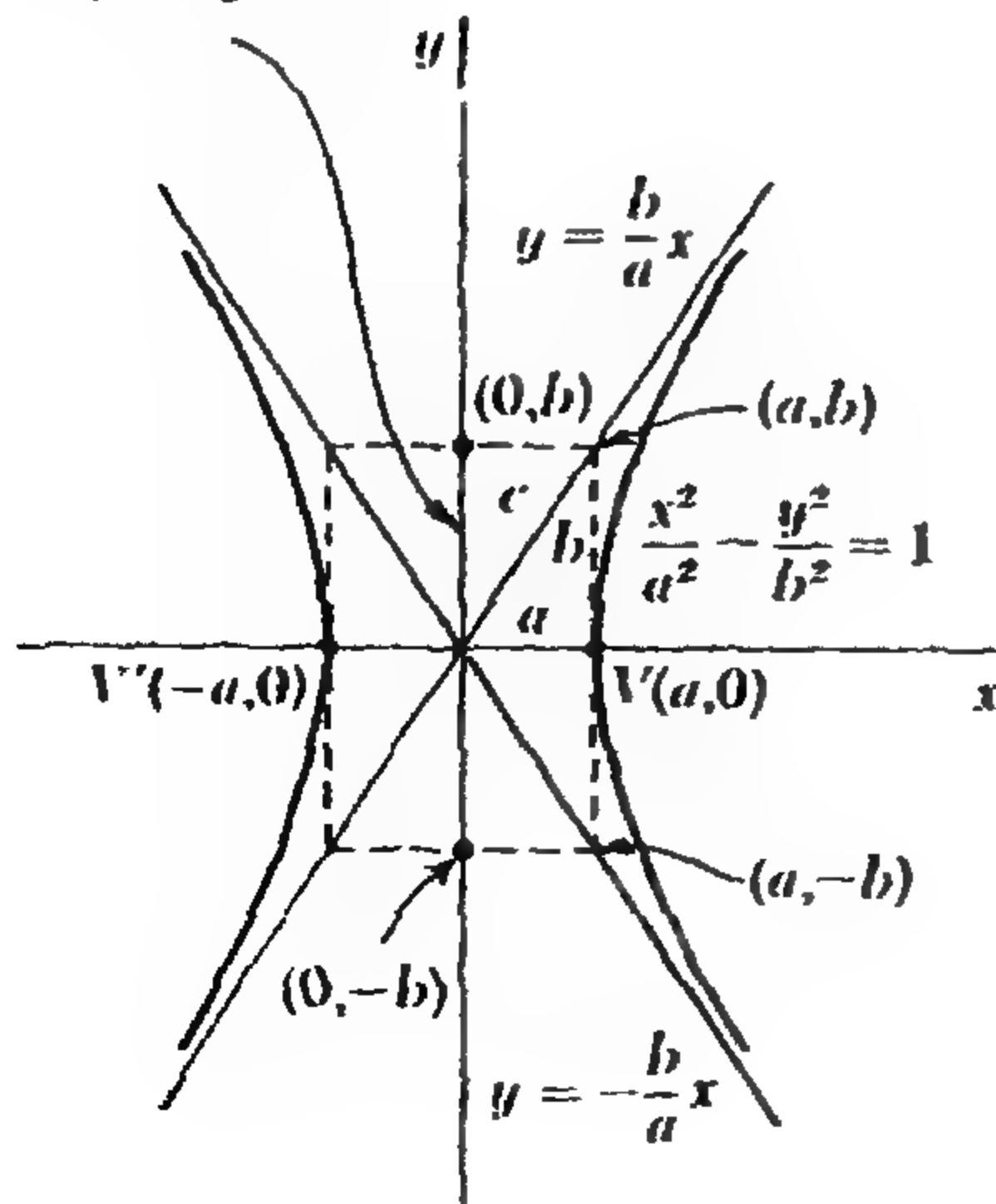
شكل ت - ٥٦

عندما تسير P الى ما لانهاية على المنحنى ، $|PP'|$ تقترب من الصفر . واذن L هو خط تقارب.

الخطان التقاربين يساعدان في تخطيط القطع الزائد . لرسم الخطين التقاربين ، نوقع النقط $(0, \pm b)$ و $V(a, 0)$ و $V'(-a, 0)$ على المحورين ونكون المستطيل الذي أضلاعه تمر بهذه النقط الأربع وتوازي المحورين ، كما هو موضح في الشكل ت - ٥٧ . قطرا المستطيل ميلهما $\pm b/a$ ، ولذلك ، عند مدهما يكونان الخطين التقاربين . برسم الخطين التقاربين وتوقع الرأسين ، يمكن تخطيط القطع الزائد بسرعة ودقة . القطعة المستقيمة من $(0, b)$ الى $(0, -b)$ تسمى المحور المرافق للقطع الزائد . اذا كانت بؤرتنا القطع الزائد على المحور y ، فان دورى y و x يتبادلان معادلته تكون

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \text{ت - ٢٤}$$

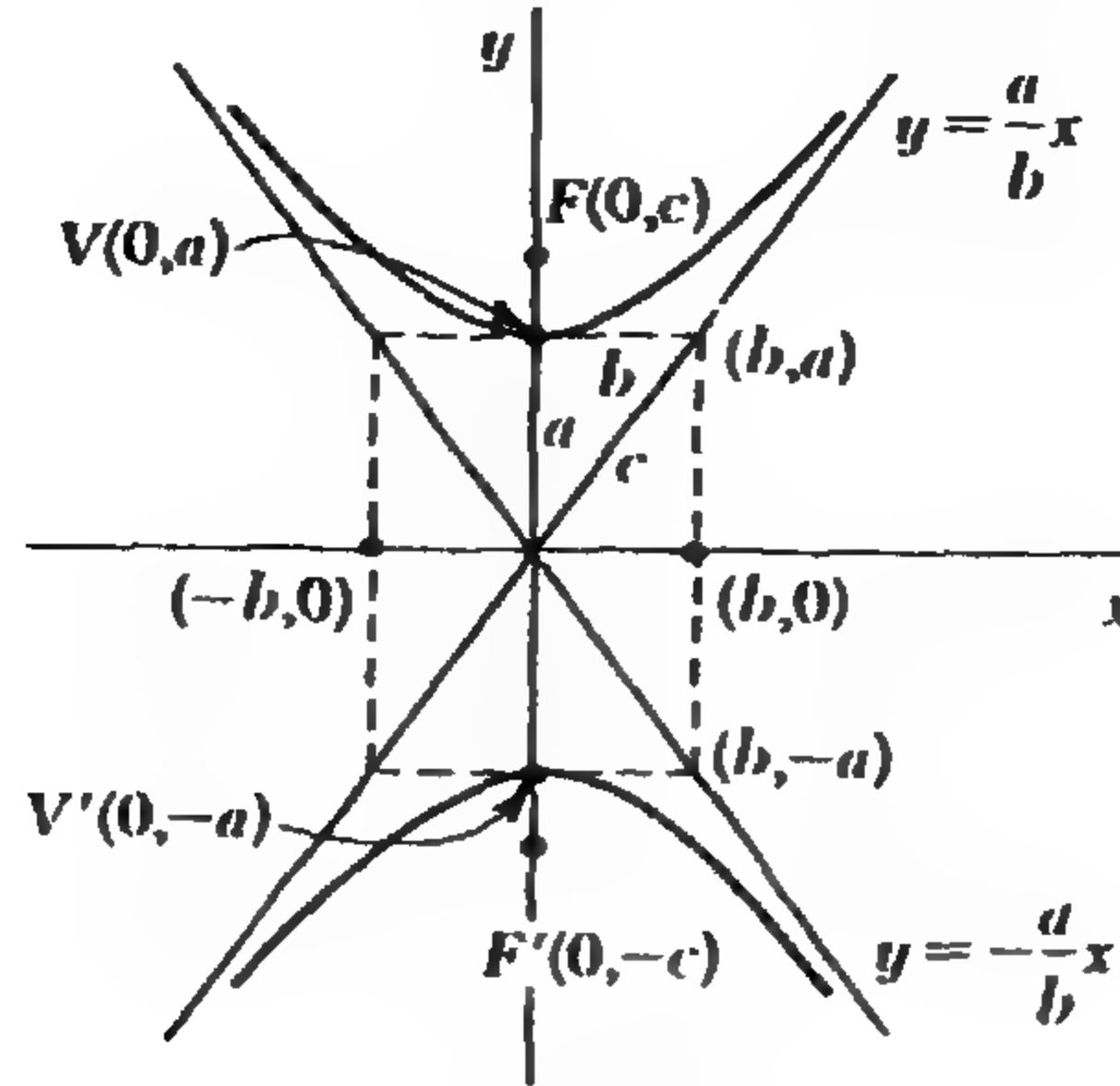
المحور المرافق



شكل ت - ٥٧

الخطان التقاربين هما قطر المستطيل .

والخطان التقاربان هما المستقيمان $y = \pm a x / b$ (شكل ت - ٥٨) .



شكل ت - ٥٨

القطع الزائد $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$ البؤرتان على المحور y .

المعادلتان ت - ٢٣ ، ت - ٢٤ هما الصورتان القياسيتان لمعادلة القطع الزائد . فى أى مسألة من السهل تحديد فى أى اتجاه يفتح القطع الزائد بإيجاد الأجزاء المقطوعة . معادلتا الخطين التقاربين توجدان ليس بتذكر الصيغ بل برسم المستطيل وإيجاد إحداثى أحد رؤوسه .

شكل القطع الزائد يقاس بالاختلاف المركزى $e = c/a$. حيث أن $c > a$ فإن $e > 1$.

مثال ٢ . خطط المنحنى $25y^2 - 9x^2 = 225$

المعادلة على الصورة ت - ٢٤ . إذن المنحنى قطع زائد مركزه عند نقطة الأصل ومحوره القاطع على أحد محورى الإحداثيات . بما أن الجزءين المقطوعين من المحور y هما ± 3 ولا توجد أجزاء مقطوعة من المحور x ، فالقطع الزائد يفتح لأعلى وأسفل . من الصورة القياسية

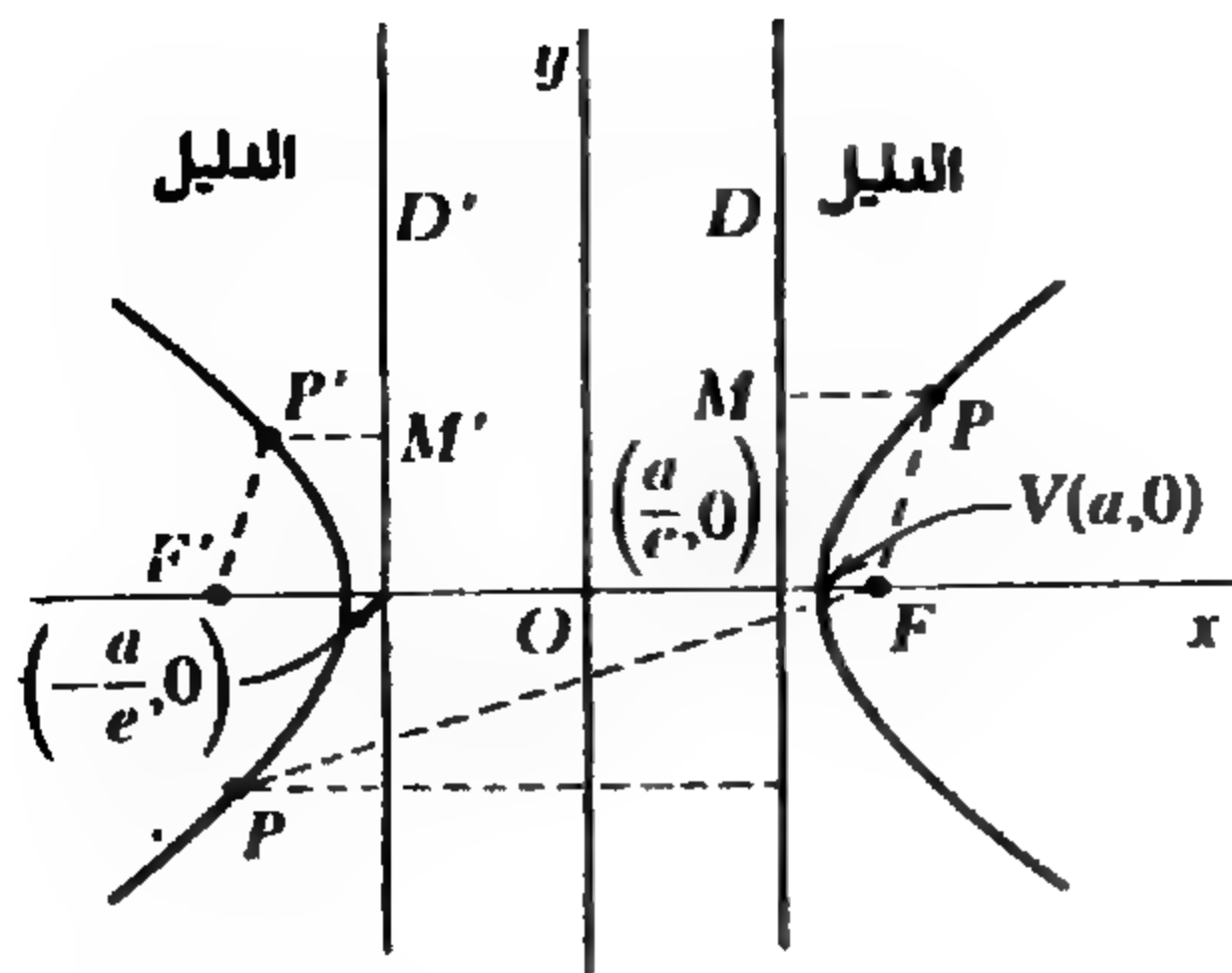
$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$$

نرى أن $a^2 = 9$ (وجدت من قبل) وأن $b^2 = 25$. نرسم المستطيل وقطريه اللذين هما الخطان التقاربين (شكل ت - ٥٩) ، ونخطط المنحنى . بما أن $c^2 = a^2 + b^2 = 34$ ، البؤرتان هما $F(0, \sqrt{34})$ و $F'(0, -\sqrt{34})$. الاختلاف المركزى هو $\sqrt{34}/3 \approx 1.9$. معادلتا الخطين التقاربين هما $y = \pm 3x/5$.

الخط المستقيم D الذى معادلته هي $x = a/e$ يسمى دليلا للقطع الزائد ت - ٢٣ (شكل ت -

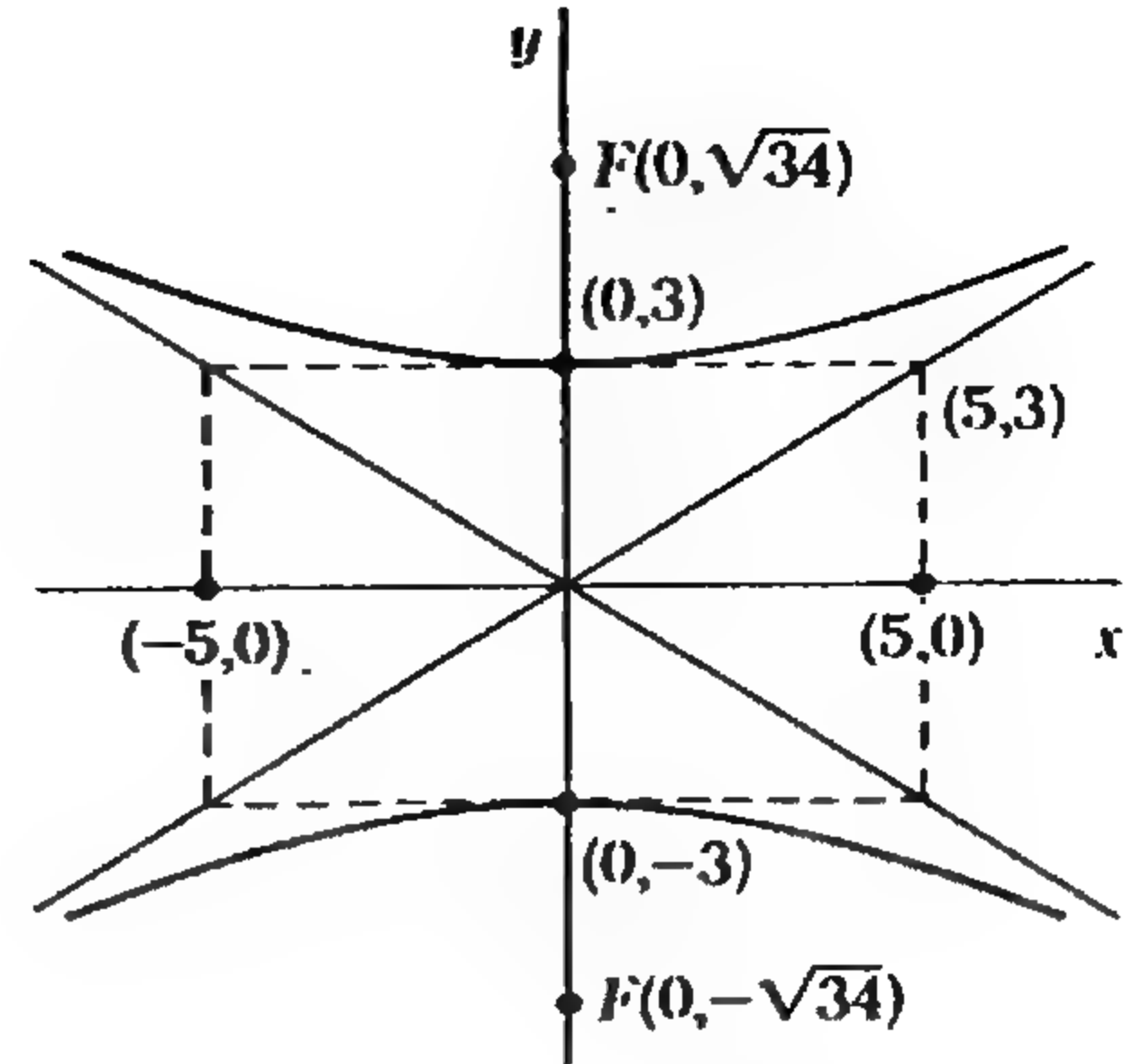
٦٠) . وهو يقطع المحور x بين المركز والرأس $V(a, 0)$ (لماذا ؟) . مثل القطع الناقص ، لاي

نقطة P على القطع الزائد $|PF|/|PM| = e$ حيث M هي مسقط P على D وحيث F



شكل ت - ٦٠

لجميع النقط P على القطع الزائد ، يكون
 $|PF|/|PM| = e > 1$



شكل ت - ٥٩

القطع الزائد $25y^2 - 9x^2 = 225$

البؤرة الأقرب الى D . الخط المستقيم D' المتماثل الوضع ومعادلته $x = -a/e$ ، هو أيضا دليل وله نفس الخاصية بالنسبة الى البؤرة الثانية F' . نترك البرهان للقارئ (المسألة ٣٧)

رغم أن القطع المكافئ والقطع الناقص والقطع الزائد قد عرفوا كمسائل محل هندسي مختلفة ، إلا أن لهم خاصية مشتركة هي خاصية البؤرة - الدليل : $|PF|/|PM| = e$ ، حيث $e = 1$ في حالة القطع المكافئ . هذه الخاصية أيضا تميز هذه المنحنيات الثلاثية بمعنى أن ، ماعدا في حالة الدائرة ، كل يمكن تعريفه كمسألة محل هندسي : إذا كان D خطا مستقيما معطى وكانت F نقطة ليست على الخط ، فإن فئة جميع النقط P التي تجعل $|PF|/|PM| = e$ حيث M هي مسقط P على D وحيث e ثابت موجب ، هي قطع مخروطي له بؤرة عند F وله دليل D . القطع المخروطي هو ناقص إذا كانت $0 < e < 1$ ، و قطع مكافئ إذا كانت $e = 1$ ، و قطع زائد إذا كانت $e > 1$. نترك البرهان كتمرين (المسألة ٥٠ ، بالبند ت - ١٠) . من الطبيعي أن نعرف الاختلاف المركزي للقطع المكافئ بأن يكون الواحد الصحيح .

نتيجة لقانون نيوتن للجاذبية جميع الاجسام في المجموعة الشمسية تتحرك تحت قوة جاذبية الشمس في مسيرات هي قطوع مخروطية لها الشمس كبؤرة . إذا كان المسير تابع قطع ناقص فان التابع سيعود في فترات منتظمة ، لكن إذا كان المسير قطع زائد أو قطع مكافئ فان التابع سوف لايعود . خمس مشاهدات تكفى لتحديد المسير ، ومنها يمكن حساب الزمن الذي يلزم لعودة التابع إذا كان المسير على شكل قطع ناقص .

مسائل

أوجد معادلة القطع الزائد الذى يحقق الشروط الآتية :

- ١ - البؤرتان $(\pm 6, 0)$ والرأسان $(\pm 4, 0)$.
- ٢ - البؤرتان $(\pm 13, 0)$ والرأسان $(\pm 5, 0)$.
- ٣ - البؤرتان $(0, \pm 10)$ والرأسان $(0, \pm 6)$.
- ٤ - الرأسان $(\pm 4, 0)$ والخطان التقاربان $y = \pm \frac{3}{4}x$.
- ٥ - الرأسان $(0, \pm 2\sqrt{2})$ ويمر بالنقطة $(-1, 3)$.
- ٦ - البؤرتان $(0, \pm \sqrt{3})$ وميل خط تقاربى 2 .
- ٧ - الرأسان $(\pm a, 0)$ والاختلاف المركزى $\sqrt{2}$.
- ٨ - البؤرتان $(\pm \sqrt{15}, 0)$ ويمر بالنقطة $(4, \sqrt{3})$.

خطط الشكل البيانى للقطوع الزائدة الآتية . أوجد إحداثيات الرأسين والبؤرتين ومعادلتى الخطين التقاربين .

- | | | |
|----------------------------|--------------------------|---------------------------|
| ٩ - $x^2/9 - y^2/4 = 1$ | ١٠ - $x^2/2 - y^2/6 = 1$ | ١١ - $y^2/12 - x^2/2 = 1$ |
| ١٢ - $25y^2 - 16x^2 = 400$ | ١٣ - $4x^2 - 10y^2 = 20$ | ١٤ - $x^2/8 - y^2/3 = -1$ |
| ١٥ - $9x^2 - 9y^2 = -4$ | ١٦ - $20x^2 - 5y^2 = 1$ | ١٧ - $x^2 - y^2 = a^2$ |
| ١٨ - $mx^2 - y^2 = mn$ | | |

أوجد الاختلاف المركزى ومعادلتى الدليلين للقطوع الزائدة الآتية :

- | | | |
|---|--------------------------|-------------------------|
| ١٩ - $x^2/16 - y^2/25 = 1$ | ٢٠ - $y^2/2 - x^2/8 = 1$ | ٢١ - $4y^2 - 9y^2 = 36$ |
| ٢٢ - $15x^2 - y^2 = 15$ | ٢٣ - $2x^2 - 3y^2 = 12$ | ٢٤ - $x^2 - y^2 = a^2$ |
| ٢٥ - خطط الشكل البيانى للمعادلة $x^2/4 - y^2/9 = 0$ | | |

٢٦ - أوجد المحل الهندسى للنقطة التى الفرق بين بعديها عن النقطتين $(-10, 0)$ و $(0, 0)$ يساوى 8 .

٢٧ - أوجد معادلة القطع الزائدة الذى بؤرتاه عند $(5, 0)$ و $(1, 0)$ ويمر بالنقطة $(10, 12)$.

٢٨ - أوجد معادلة القطع الزائد الذى مركزه عند نقطة الاصل ، وله بؤرة عند $(3, 0)$ ، والدليل المناظر هو $x = 2$.

٢٩ - أوجد معادلة القطع الزائد الذى بؤرتاه على المحور y وله نفس الخطين التقاربين مثل القطع الزائد $x^2/2 - y^2/5 = 1$

٣٠ - خطط الشكل البيانى للمتباينة $3x^2 - 5y^2 \geq 30$

٣١ - اثبت أن طول الوتر البؤرى العمودى للقطع الزائد $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ هو $2b^2 / a$

٣٢ - أوجد معادلة القطع الزائد الذى مركزه عند نقطة الاصل ، وبؤرتاه على المحور y ، ويمر بالنقطتين $(4, -\sqrt{13})$ و $(2, 2)$.

٣٣ - صف شكل القطع الزائد لقيم e القريبة من 1 . أى هل هو طويل وضيق أم واسع ومنفرطح ؟ كيف يتغير الشكل عندما تتزايد e ؟

٣٤ - اثبت أن القطوع المخروطية $x^2/(15-\alpha) + y^2/(6-\alpha) = 1$ لها بؤرة مشتركة لجميع قيم α ادرس وخطط المنحنيات لقيم α المختلفة .

٣٥ - خطط الشكل البياني للمعادلة $x^4 - (y^2 - 16)^2 = 0$

٣٦ - رجل يسمع فى آن واحد طقطقة ماسورة البندقية وصوت رصاصة تصيب الهدف . أثبت أن جميع المواضع الممكنة له تقع على قطع زائد .

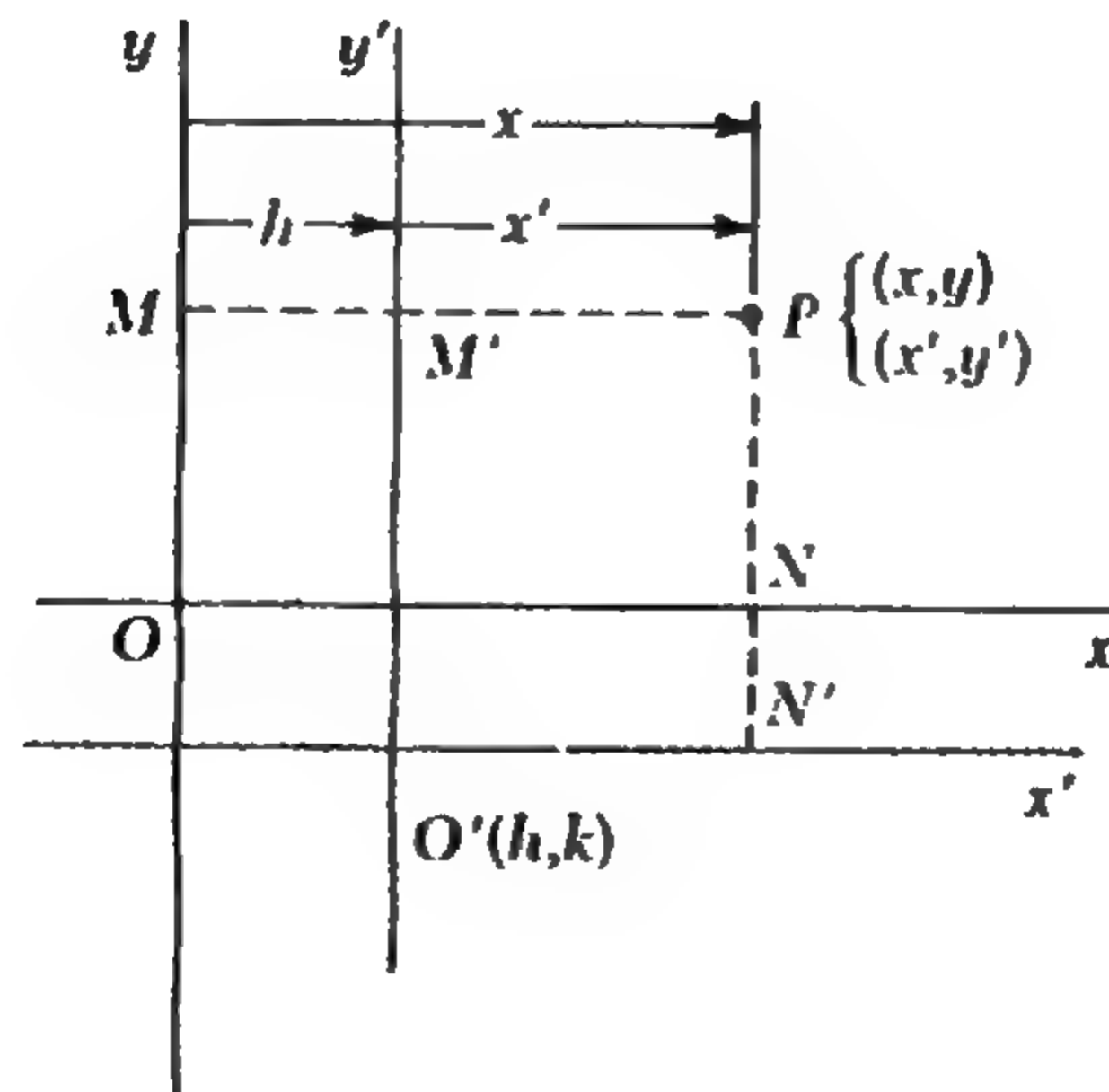
٣٧ - اثبت أن الدليل D الذى معادلته $x = a/e$ للقطع الزائد $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ يقطع المحور x بين المركز والرأس $V(a, 0)$ وأن لاي نقطة P على القطع الزائد ، $|PF|/|PM| = e$ حيث F هي البؤرة $(c, 0)$ وحيث M هي مسقط P على D .

٣٨ - اكمل برهان تكافؤ المعادلة ت - ٢٣ والمعادلة (٣) باثبات أن كل حل لـ ت - ٢٣ هو حل لـ (٣) . (ارشاد : انظر المسألة ٣٢ ، بند ت - ٨) .

ت - ١٠

نقل المحاور

احداثيا نقطة فى المستوى يعتمدان على موضعى المحورين . النقطة P فى الشكل ت - ٦١ التى احداثياها هما (x, y) بالنسبة الى المحورين x, y لها الاحداثيان (x', y') بالنسبة الى المحورين x', y' اذا كان ، كما هنا ، المحوران x', y' موازيين للمحورين x, y وفى نفس الاتجاه ، فاننا نقول أنه حدث نقل للمحورين فى المستوى .



شكل ت - ٦١

احداثيا النقطة P يعتمدان على موضعى المحورين .

العلاقة بين فتي احداثيات P بسيطة في هذه الحالة . بوجه خاص . ليكن احداثيا نقطة الاصل الجديدة O' هما (h, k) بالنسبة الى المحورين x و y ، ولتكن M و M' كما هو موضح في الشكل . بدلالة المسافات الموجهة .

$$h = \overline{MM'} \quad \text{و} \quad x = \overline{MP}, \quad x' = \overline{M'P}$$

بالمعادلة ت - ٢ ، $\overline{MP} = \overline{MM'} + \overline{M'P}$ ، ف النظر عن موقع M' على الخط المستقيم الواصل بين M و P . اذن $x = h + x'$. بالمثل ، $y = \overline{NP} = \overline{NN'} + \overline{N'P} = k + y'$ ، بالمعادلتان

$$x' = x - h, \quad y' = y - k \quad \text{ت - ٢٥}$$

اللتان نحصل عليهما بالحل لـ x' و y' ، تعطيان احداثي P في النظام $x'y'$ بدلالة احداثيها في النظام xy . فمثلا ، اذا كانت O' احداثياها $(3, -2)$ في النظام xy ، فان المعادلتين ت - ٢٥ تصبحان $y' = y + 2$ و $x' = x - 3$ ، والنقطة P التي احداثياها $(8, 4)$ في النظام xy لها الاحداثيات $(5, 6)$ في النظام $x'y'$. المعادلتان ت - ٢٥ ، والفئة الملازمة .

$$x = x' + h, \quad y = y' + k \quad \text{ت - ٢٦}$$

التي تعطى احداثي P في النظام xy بدلالة احداثيها في النظام $x'y'$ ، تسميان معادلات النقل . من الطبيعي أن المنحنى سيكون معادلتان مختلفتان بالنسبة الى نظامي الاحداثيات . القطع المكافئ في الشكل ت - ٦٢ له المعادلة

$$y^2 = 8x \quad (١)$$

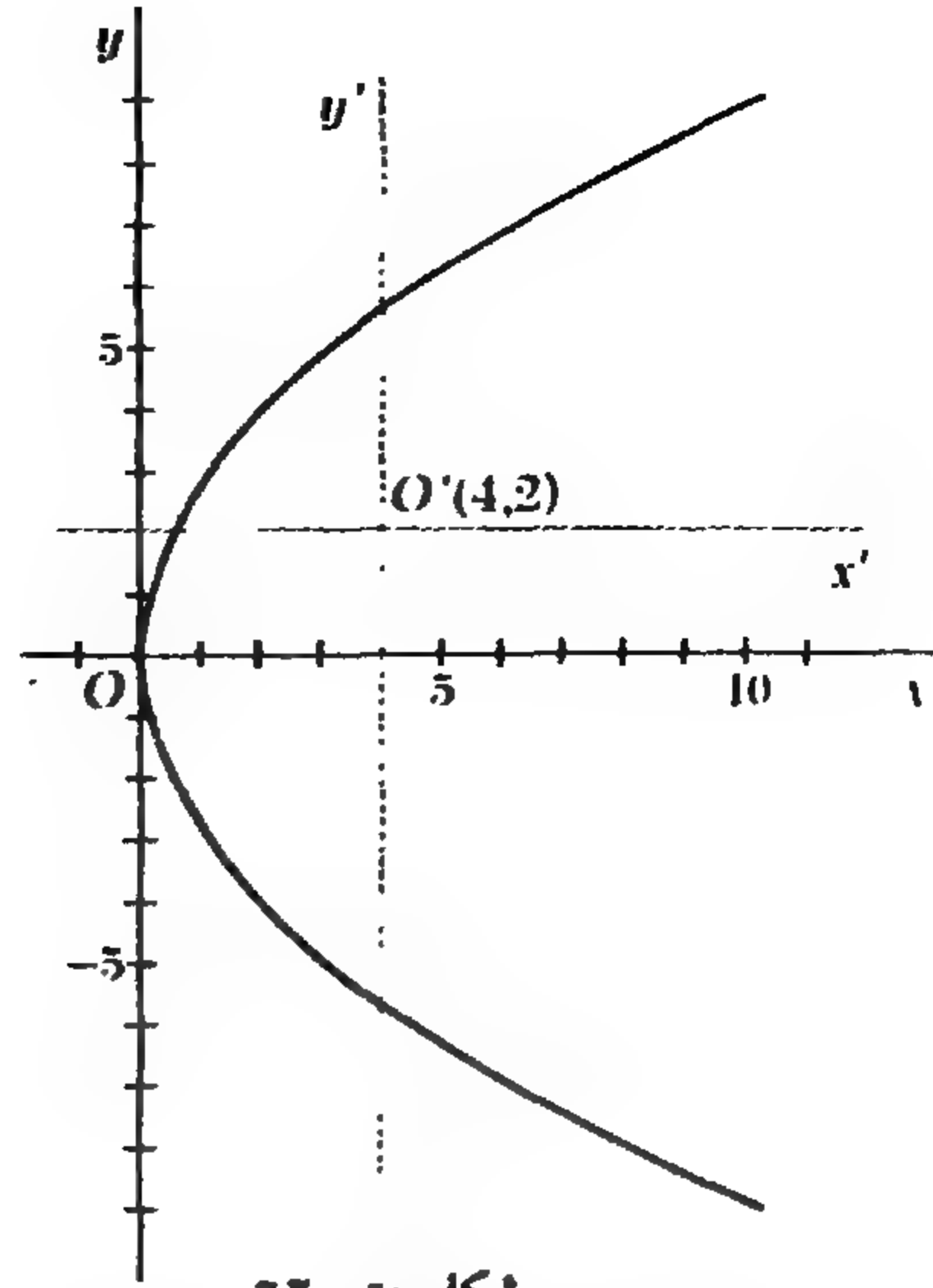
في النظام xy . اذا أدخل نظام احداثيات جديد حيث نقطة الاصل عند $(4, 2)$ ، فان معادلتى النقل ، من المعادلتين ت - ٢٦ هما

$$x = x' + 4, \quad y = y' + 2 \quad (٢)$$

اذا عوضنا $x' + 4, y' + 2$ لـ x و y في (١) ، فاننا نحصل على

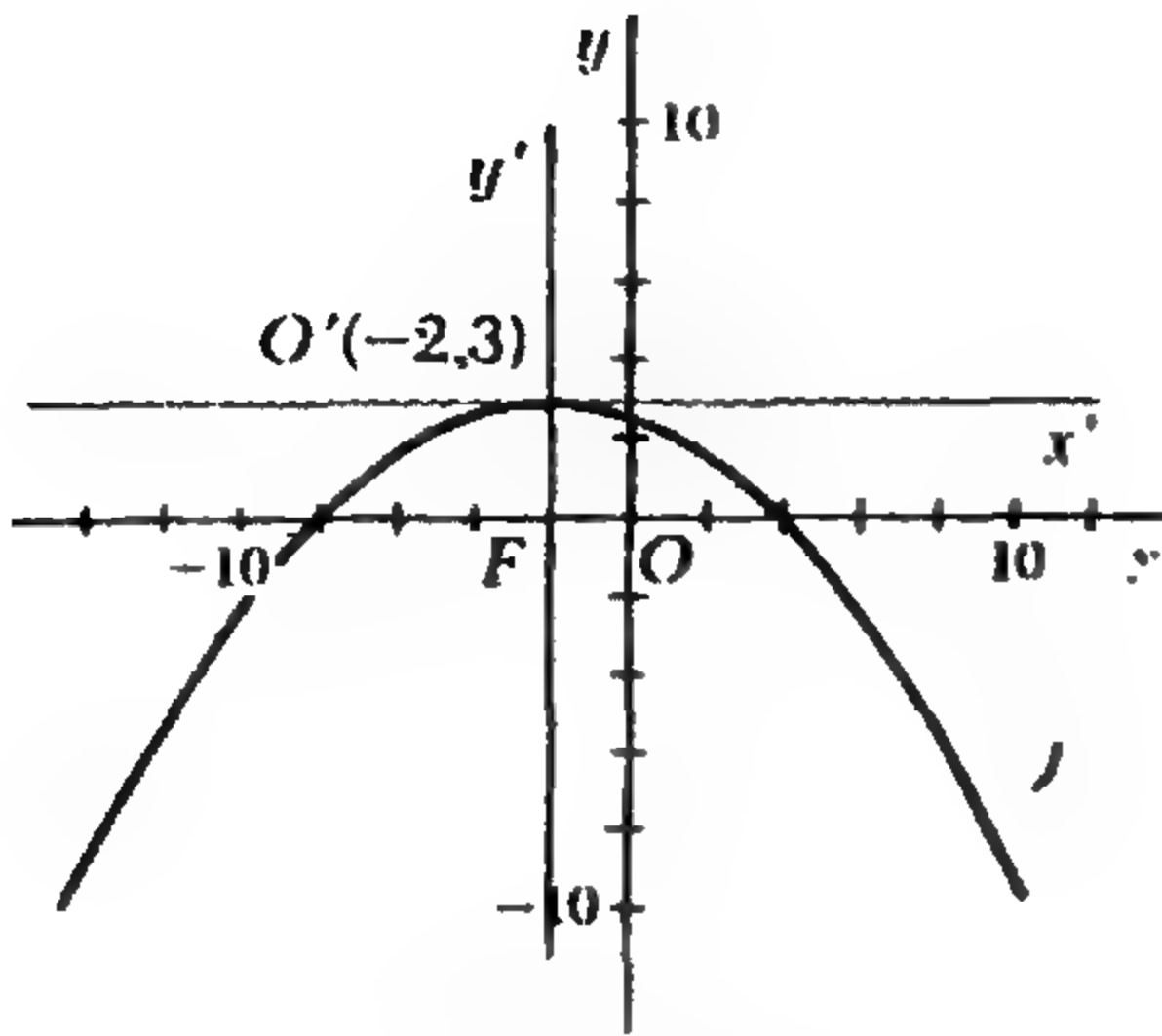
$$(y' + 2)^2 = 8(x' + 4) \quad (٣)$$

النقطة P تكون على المنحنى اذا واذا فقط كان احداثياها (x, y) يحققان المعادلة $y^2 = 8x$. لكن هذا يحدث اذا واذا فقط كان احداثياها (x', y') ، المحسوبان من (٢) ، يحققان (٣) . ومن ثم (٣) هي معادلة القطع الزائد في النظام $x'y'$.



شكل ت- ٦٢

القطع المكافئ له المعادلة
 $(y' + 2)^2 = 8(x' + 4)$
 في النظام $x'y'$.



شكل ت- ٦٣

القطع المكافئ له المعادلة
 $(x + 2)^2 = -12(y - 3)$

هذا المثال يقترح طريقة لايجاد معادلات القطوع المخروطية التي محاورها توازي محوري الاحداثيات لكن مراكزها لا تكون عند نقطة الاصل .

مثال ١ . أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه عند النقطة $(-2, 3)$ وبؤرته عند $(-2, 0)$.

المنحنى موضح في الشكل ت- ٦٣ . ندخل نظام احداثيات جديد حيث نقطة الاصل O' عند رأس القطع المكافئ وحيث المحوران y' و x' يوازيان المحورين y و x . بالنسبة الى هذا النظام القطع المكافئ يكون في وضع قياسى حيث $p = -3$ وبالتالي له المعادلة

$$(4) \quad x'^2 = -12y'$$

معادلتا النقل هما $x' = x + 2$, $y' = y - 3$. تعويض $x + 2$ و $y - 3$ لـ x' و y' في (٤) يعطى معادلة القطع المكافئ في النظام xy وهي $(x + 2)^2 = -12(y - 3)$ أو ، بالحل لـ y هي

$$y = -\frac{1}{12}(x^2 + 4x - 32)$$

القطع الناقص في الشكل ت- ٦٤ مركزه عند (h, k) . لايجاد معادلته ، ادخل نظام احداثيات جديد $x'y'$ حيث نقطة الاصل عند مركز القطع الناقص وحيث المحوران يوازيان المحورين y و x . بالنسبة الى هذا النظام القطع الناقص له المعادلة

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

معادلتا النقل هما $x' = x - h$ و $y' = y - k$. ومن ثم معادلة القطع الناقص فى النظام xy هى

$$(5) \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

بطريقة مماثلة ، يمكننا اثبات أن القطع الزائد الذى مركزه عند (h, k) ومحوره القاطع يوازى المحور x ، له المعادلة

$$(6) \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

وأن القطع المكافئ الذى رأسه عند (h, k) ومحوره يوازى المحور x له المعادلة

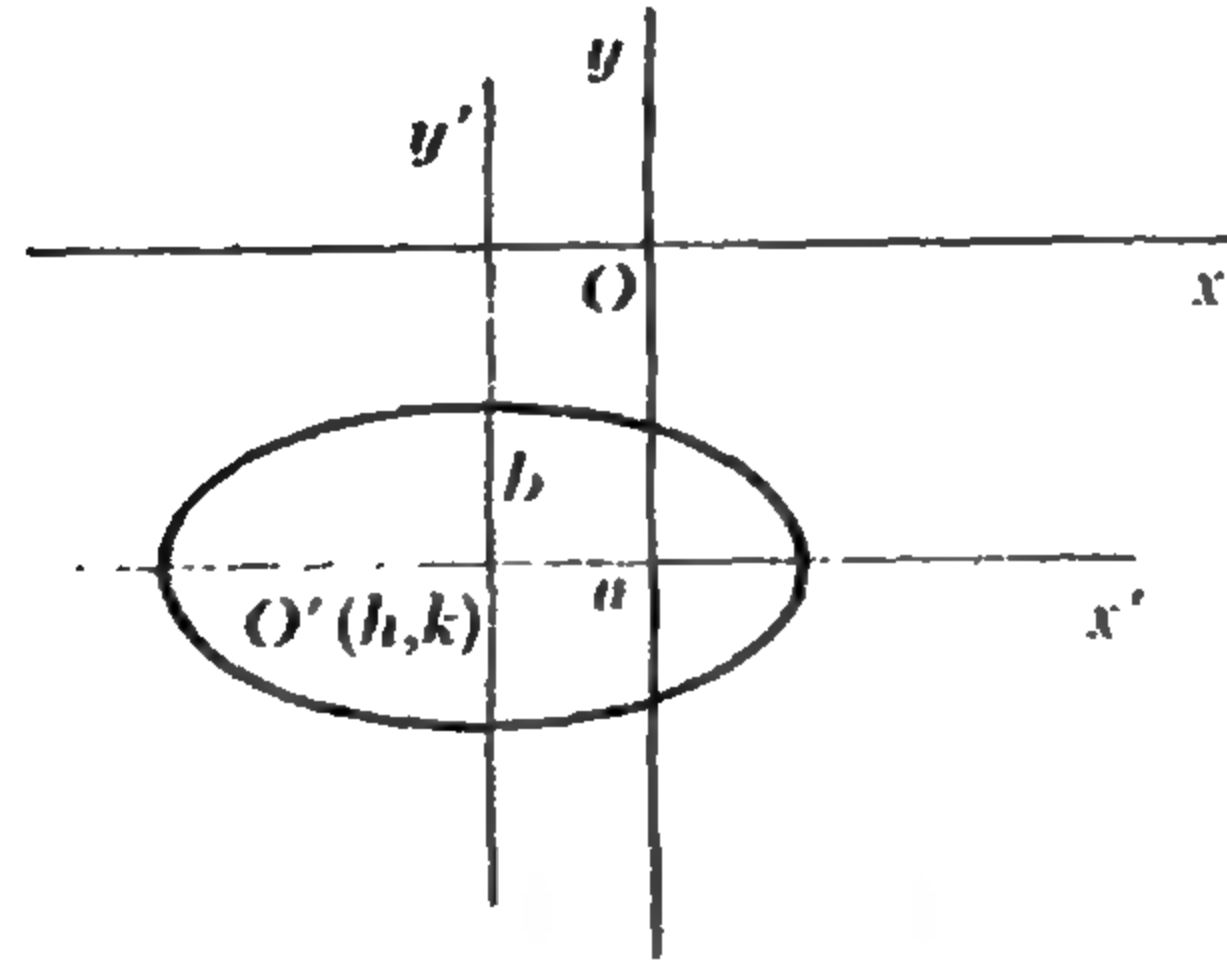
$$(7) \quad (y-k)^2 = 4p(x-h)$$

نحصل على معادلات مماثلة اذا دارت القطوع المخروطية زاوية 90° .

عندما تجرى عمليات الضرب فى (5) و (6) و (7) ، نحصل فى كل حالة ، بعد جمع الحدود المتشابهة على معادلة على الصورة

$$(8) \quad Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

هذه معادلة من الدرجة الثانية فى x و y لكن بدون حد xy . كل قطع مخروطى له محور يوازى محورا للاحداثيات معادلته تكون على هذه الصورة . مع استثناءات بسيطة ، العكس أيضا صحيح . نوضح بأمثلة .



شكل ت - ٦٤

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{القطع الناقص}$$

مثال ٢ . أثبت أن $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$ هى معادلة قطع زائد وخطط

شكله البيانى . نحاول اعادة كتابة المعادلة فى احدى الصورتين

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{أو} \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

لأجراء ذلك ، نكمل المربعين على حدود x و y ، كما سبق أن فعلنا لإيجاد مركز دائرة من معادلتها . لدينا

$$9(x^2 - 6x) - 4(y^2 - 2y) = -113.$$

$$9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) = -113 + 81 - 4,$$

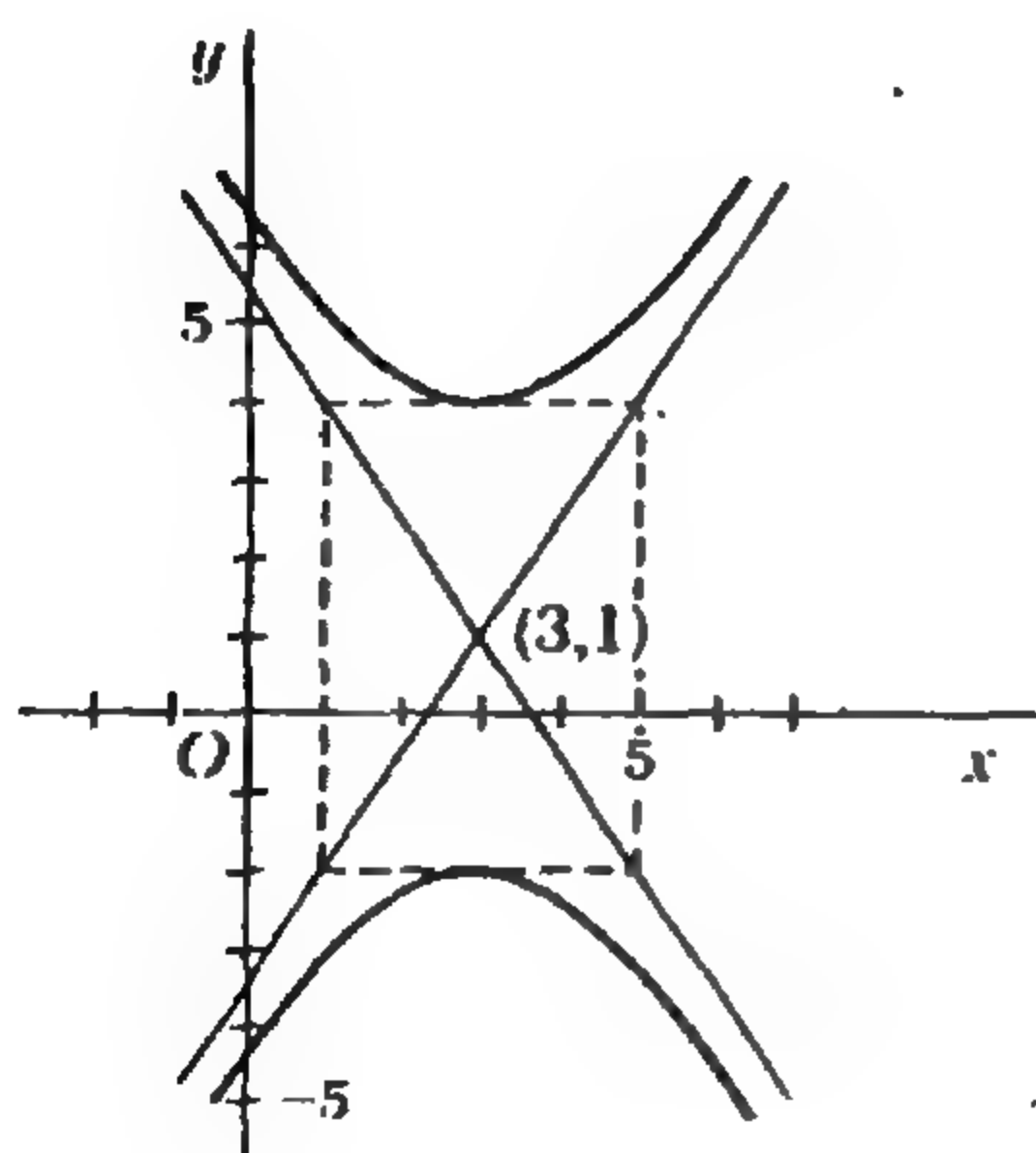
$$9(x - 3)^2 - 4(y - 1)^2 = -36,$$

$$\frac{(y - 1)^2}{9} - \frac{(x - 3)^2}{4} = 1.$$

إذا وضعنا $y' = y - 1$ و $x' = x - 3$ ، فإن المعادلة الأخيرة تصبح

$$\frac{y'^2}{9} - \frac{x'^2}{4} = 1$$

لقد نقلنا المحورين إلى النقطة $(3, 1)$ واختزلنا المعادلة إلى الصورة القياسية لقطع زائد مفتوح لأعلى ولأسفل . مركزه هو $(3, 1)$ في النظام xy . بما أن $a = 3$ ، الرأسان هما $(3, -2)$ و $(3, 4)$. الخطان التقاربان يتقاطعان عند المركز وميلهما $\pm \frac{3}{4}$. المنحنى مخطط في الشكل ت - ٦٥ .



شكل ت - ٦٥

القطع الزائد

$$(y - 1)^2 / 9 - (x - 3)^2 / 4 = 1$$

مثال ٣ . ميز وخطط المنحنى $y^2 - 6x + 6y - 6 = 0$ بما أنه لا يوجد حد x^2 ، نكمل المربع على حدود y فقط :

$$y^2 + 6y + 9 = 6x + 6 + 9,$$

$$(y + 3)^2 = 6x + 15 = 6(x + \frac{5}{2}).$$

إذا وضعنا $y' = y + 3$ و $x' = x + \frac{5}{2}$ ، المعادلة تختزل إلى $y'^2 = 6x'$ وهي قطع مكافئ في الصورة القياسية رأسه عند $(-\frac{5}{2}, -3)$ في النظام xy ومفتوح إلى اليمين . بما أن $p = \frac{3}{2}$ ، البؤرة تكون عند النقطة $(-1, -3)$. المنحنى مخطط في الشكل ت - ٦٦ .

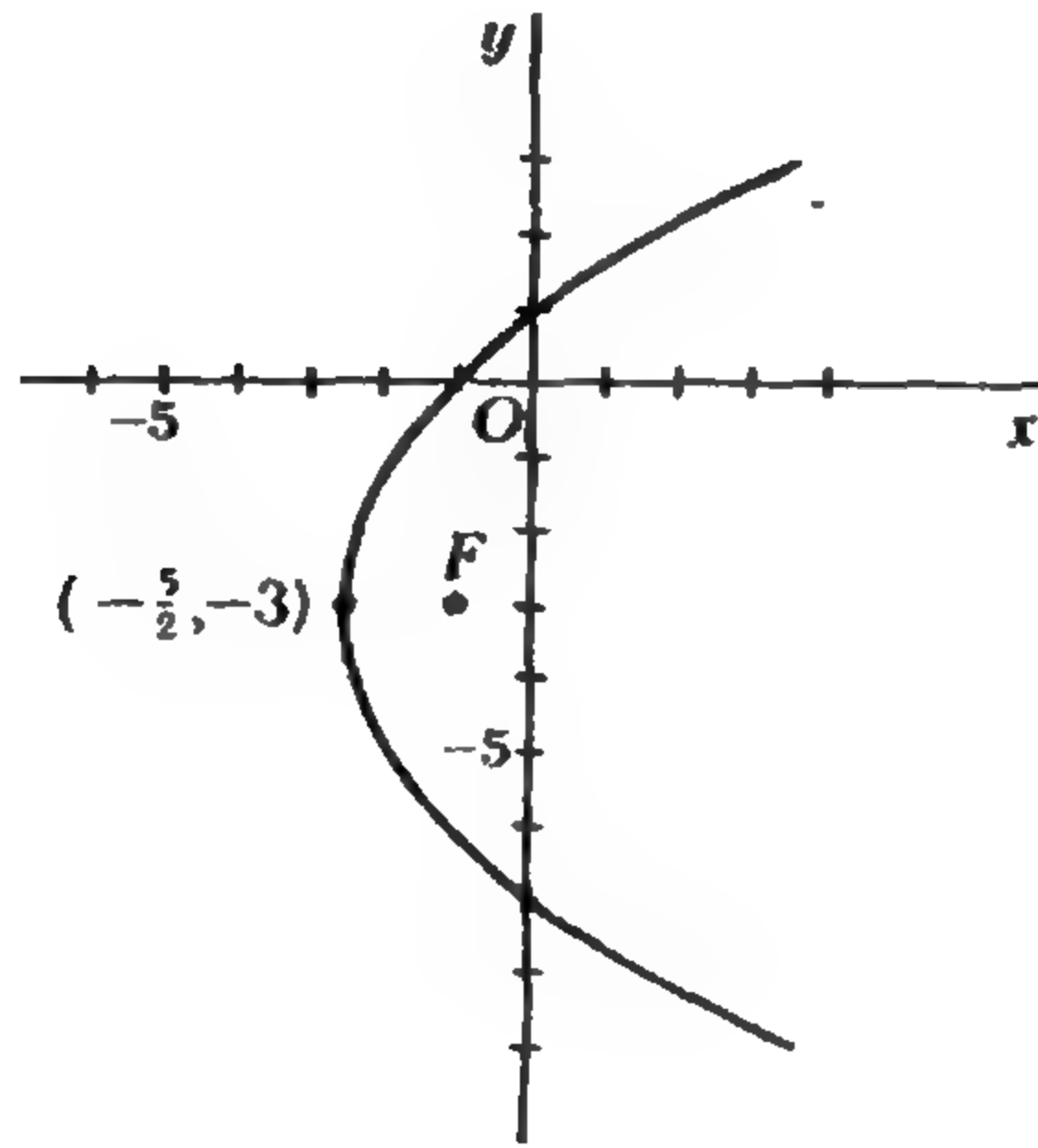
مثال ٤ . خطط الشكل البياني للمعادلة $x^2 - 4y^2 + 4x -$ باكمال المربعين ، يمكن اثبات أن هذه المعادلة تكافئ المعادلة

$$(x + 2)^2 - 4(y + 5)^2 = 0$$

أو ، بنقل المحورين ، تكافئ المعادلة $x'^2 - 4y'^2 = 0$. هذه تكتب كحاصل ضرب عاملين

$$(x' - 2y')(x' + 2y') = 0$$

اذن الشكل البياني يتكون من خطين مستقيمين ميلهما $\pm \frac{1}{2}$ ويتقاطعان عند $(-2, -5)$ في النظام xy .



شكل ت-٦٦
القطع المكافئ
 $(y + 3)^2 = 6(x + \frac{5}{2})$

كما يوضح هذا المثال ليست كل معادلة من الدرجة الثانية تمثل قطعاً مخروطياً . إلا أن معظم المعادلات تمثل قطعاً مخروطياً والقطع المخروطي يمكن تمييزه وتخطيطه باكمال المربع . الحالات الشاذة ، أشكالها البيانية خط مستقيم أو خطان مستقيمان أو نقطة واحدة ، وقد لا يكون لها شكل بياني . إذا كان الشكل البياني قطعاً مخروطياً فيمكن معرفة نوعه مباشرة من (٨) . الشكل البياني يكون قطعاً ناقصاً أو قطعاً زائداً تبعاً لكون C و A لهما نفس الإشارة أولهما إشارتان مختلفتان ، ويكون قطعاً مكافئاً ، إذا كان أحدهما ، لكن ليس كلاهما ، صفراً . نترك البرهان للقارئ (المسألة ٤٠) .

مسائل :

- أوجد معادلة كل من القطوع المخروطية الآتية :
- ١ - قطع مكافئ ، رأسه $(0, 1)$ وبؤرته $(0, \frac{3}{2})$.
- ٢ - قطع مكافئ ، رأسه $(-2, -2)$ وبؤرته $(2, -2)$.
- ٣ - قطع مكافئ ، رأسه $(5, 3)$ ودليله $y = 5$.

- ٤ - قطع مكافئ ، رأسه $(2, -3)$ ويمر بنقطة الاصل .
- ٥ - قطع مكافئ ، رأسه $(0, b)$ ودليله $x = a$
- ٦ - قطع ناقص ، رأساه $(3, 4)$ و $(-1, 4)$ وطرفا المحور الأصغر $(1, 5)$ و $(1, 3)$.
- ٧ - قطع ناقص ، رأساه $(2, 0)$ و $(-8, 0)$ وبؤرتاه $(0, 0)$ و $(-6, 0)$.
- ٨ - قطع ناقص ، رأساه $(-2, -4)$ و $(-2, 2)$ ويمس المحور y .
- ٩ - قطع ناقص ، رأساه $(3, -4)$ و $(3, 2)$ ويمر بالنقطة $(\frac{1}{2}, 2\sqrt{2}-1)$.
- ١٠ - قطع زائد ، رأساه $(6, 2)$ و $(0, 2)$ وبؤرتاه $(7, 2)$ و $(-1, 2)$.
- ١١ - قطع زائد ، بؤرتاه $(-3, -5)$ و $(-3, 1)$ واختلافه المركزي $\frac{3}{2}$.
- ١٢ - قطع زائد ، رأساه $(-2, -4)$ و $(0, -4)$ وميلا خطيه التقاربين ± 3 .
- ١٣ - قطع زائد ، بؤرتاه $(-2, 2 - \sqrt{13})$ و $(-2, 2 + \sqrt{13})$ وخطاه التقاربين $2x + 3y - 2 = 0$ و $2x - 3y + 10 = 0$.
- ١٤ - قطع زائد ، بؤرتاه $(-2, 2)$ و $(2, 2)$ ويمر بالنقطة $(2, -1)$.
- ١٥ - قطع زائد ، مركزه (h, k) ومحوره القاطع يوازي المحور y
- ١٦ - اوجد احداثيات بؤرتي القطع الناقص الذي رأساه عند $(-1, -3)$ و $(5, -3)$ ، وطرفا محوره الأصغر عند $(2, -5)$ و $(2, -1)$.

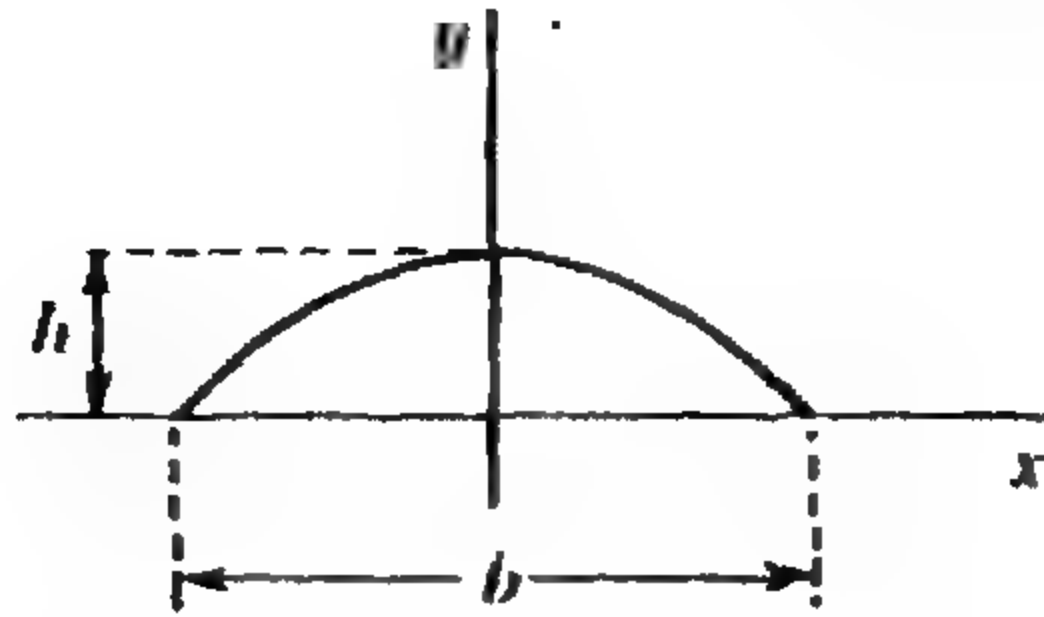
لكل من المعادلات الاتية (أ) ميز وخطط الشكل البياني ، (ب) اوجد احداثيات الرؤوس ، (ج) اوجد احداثيات البؤر ، (د) اوجد معادلات الخطوط التقاربية أن وجدت .

- | | | | |
|--------------------------------------|------|--|------|
| $\frac{(x+2)^2}{10} + (y+3)^2 = 1$ | - ١٨ | $y = \frac{1}{8}(x-6)^2$ | - ١٧ |
| $y^2 + x + 2y - 1 = 0$ | - ٢٠ | $\frac{(y-3)^2}{2} - \frac{(x+5)^2}{25} = 1$ | - ١٩ |
| $x^2 - y^2 + 10y = 0$ | - ٢٢ | $4x^2 + 9y^2 - 8x - 54y + 49 = 0$ | - ٢١ |
| $x^2 - 2x + 6y + 25 = 0$ | - ٢٤ | $y^2 + x + y = 0$ | - ٢٣ |
| $4x^2 + 5y^2 - 80y + 300 = 0$ | - ٢٦ | $x^2 + y^2 + 7y + 5 = 0$ | - ٢٥ |
| $4x^2 - 25y^2 + 32x + 100y + 64 = 0$ | - ٢٨ | $-x^2 + y^2 - 2x + 6y + 7 = 0$ | - ٢٧ |
| $9x^2 - 36x + 16y - 28 = 0$ | - ٣٠ | $6x^2 - 5y^2 - 12x = -21$ | - ٢٩ |
| $y^2 - 10y + 25 = 0$ | - ٣٢ | $x^2 - 2y^2 - 6x - 4y + 7 = 0$ | - ٣١ |
| $2x^2 + 3y^2 - 4x - 12y + 14 = 0$ | - ٣٤ | $x^2 - 9x = -18$ | - ٣٣ |
| | | $2x^2 + y^2 + 4x + 2y + 6 = 0$ | - ٣٥ |

٣٦ - اشتق معادلة الدائرة التي نصف قطرها r ومركزها عند (h, k) من معادلة الدائرة التي نصف قطرها r ومركزها عند نقطة الاصل .

٣٧ - من معادلة الخط المستقيم الذى يمر بنقطة الاصل وميله m اشتق معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة (x_1, y_1) وميله m .

٣٨ - اوجد معادلة قوس القطع المكافئ بشكل ت - ٦٧ الذى قاعدته طولها b وارتفاعه h .



شكل ت - ٦٧

٣٩ - اثبت أن القطع المكافئ الذى محوره يوازي محورا للاحداثيات معادلته تكون على الصورة $y = ax^2 + bx + c$ أو $x = ay^2 + by + c$ حيث $a \neq 0$. بالعكس ، أثبت أن المعادلة $y = ax^2 + bx + c$ و $a \neq 0$ هي معادلة قطع مكافئ محوره يوازي المحور y وأن الاحداثى x للرأس هو $-b/2a$.

٤٠ - اثبت أن الشكل البياني لـ (٨) يكون قطعاً ناقصاً أو قطعاً زائداً تبعاً لكون A و B لهما نفس الإشارة أو لهما إشارتان مختلفتان ، ويكون قطعاً مكافئاً إذا كانت A أو C لكن ليس كلاهما ، صفراً .

٤١ - اوجد معادلة القطع الناقص الذى له بؤرة عند $(1, 4)$ ، والدليل المناظر $x = 3$ ، والاختلاف المركزى $\frac{2}{3}$.

٤٢ - اثبت أن القطعتين المكافئتين $y^2 = 4b^2 + 4bx$ و $y^2 = 4a^2 - 4ax$ لهما بؤرة مشتركة لاي اختيار للعددين الموجبين a و b . خطط اشكالهما البيانية عندما $b = 1, 2, 5$ و $a = 1, 2, 4$. يمكن اثبات أن كل منحنى من إحدى المجموعتين يقطع كل منحنى من المجموعة الأخرى على التعامد

باجراء نقل مناسب للمحورين ، بسط معادلات كل من المنحنيات الاتية وخطط شكلها البياني :

$$y = 4/(x-2) \quad - ٤٤ \quad (x-4)^2 + (y-1)^2 = 6 \quad - ٤٣$$

$$xy - 3x + 5y = 15 \quad - ٤٦ \quad y = (x+1)^3 \quad - ٤٥$$

٤٧ - اثبت أن المنحنى $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$ متماثل فى الخط المستقيم $x = 2$

٤٨ - اوجد معادلة انعكاس القطع المكافئ $x^2 - 6x - 3y + 9 = 0$ فى الخط المستقيم $y = 3$

٤٩ - اوجد نقطة تماثل للمنحنى $y = 3/(x+4) + 1$

٥٠ - ليكن D خطاً مستقيماً معطى ، وليكن F نقطة ليست عليه . اثبت أن فئة النقط P التى

تحقق $|PF|/|PM| = e$ حيث M مسقط P على D وحيث e مقدار ثابت موجب ، تكون قطعاً

ناقصاً أو قطعاً مكافئاً أو قطعاً زائداً تبعاً لكون $e < 1$ أو $e = 1$ أو $e > 1$ [ارشاد : أدخل نظاماً

للاحداثيات حيث D يكون المحور y وحيث F تكون عند نقطة ما $(r, 0)$ و $r > 0$] .

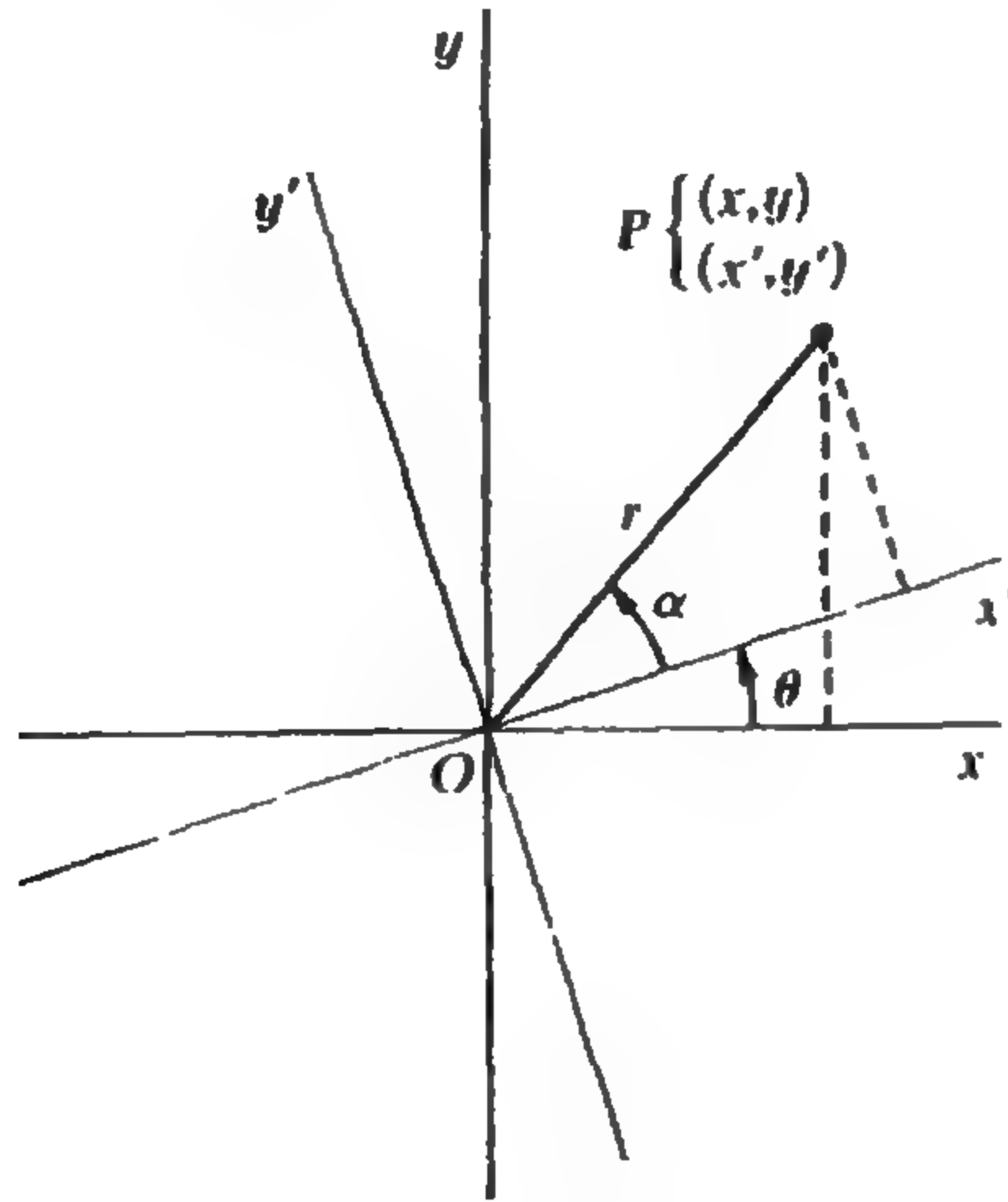
ت - ١١

دوران المحاور

إذا دار المحوران x و y حول نقطة الأصل إلى وضع y' و x' ، كما في الشكل ت - ١٨ ، فإن العلاقة بين فئتي الإحداثيات (x', y') و (x, y) لنقطة P في المستوى يمكن إيجادها كما يلي .
 لتكن زاوية دوران المحورين في اتجاه ضد عقرب الساعة ولتكن α الزاوية من المحور x' الموجب إلى الشعاع OP ، حيث $-180^\circ < \alpha \leq 180^\circ$. إذا كانت r ترمز إلى طول القطعة المستقيمة OP ، فإنه من تعريف الدوال المثلثية ، يكون $y = r \sin (\alpha + \theta)$ و $x = r \cos (\alpha + \theta)$. باستخدام صيغتي الجيب وجيب التمام لحاصل جمع زاويتين ، يكون

$$\begin{aligned} x &= r \cos (\alpha + \theta) = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta \\ y &= r \sin (\alpha + \theta) = r \cos \alpha \sin \theta + r \sin \alpha \cos \theta \end{aligned}$$

لكن $x' = r \cos \alpha$ و $y' = r \sin \alpha$ واذن



شكل ت - ١٨
دوران المحورين θ .

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \quad y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \quad \text{ت - ٢٧}$$

هاتان المعادلتان تعطيان إحداثي P في النظام xy بدلالة إحداثييهما في النظام $x'y'$. بحل المعادلتين آنيال x' و y' ، نحصل على المعادلتين اللتين تعطيان إحداثي P في النظام $x'y'$ بدلالة إحداثييهما في النظام xy :

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \quad \text{ت - ٢٨}$$

فمثلاً ، إذا كانت $\theta = 30^\circ$ ، النقطة P التي إحداثيها $(4, 2)$ في النظام xy لها ، باستخدام المعادلتين ت - ٢٨ ، الإحداثيان $(2\sqrt{3} + 1, -2 + \sqrt{3})$ في النظام $x'y'$. المعادلات ت -

٢٧ ، ت - ٢٨ تسمى معادلات الدوران . خلافا لنقل المحورين ، يلزم أن نعرف كلا الاحداثيين y و x للنقطة لتعيين احداثيتها x' .

مثال ١ . أوجد معادلة القطع الناقص

$$(١) \quad 2x^2 + 4y^2 = 1$$

إذا دار المحوران زاوية 45° .

معادلتا الدوران ، باستخدام المعادلتين ت - ٢٧ ، هما

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} (x' - y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} (x' + y')$$

بتعويض الطرفين اليمينين من هاتين ، لـ y و x في (١) ، يكون لدينا

$$(x' - y')^2 + 2(x' + y')^2 = 1$$

أى

$$3x'^2 + 2x'y' + 3y'^2 = 1$$

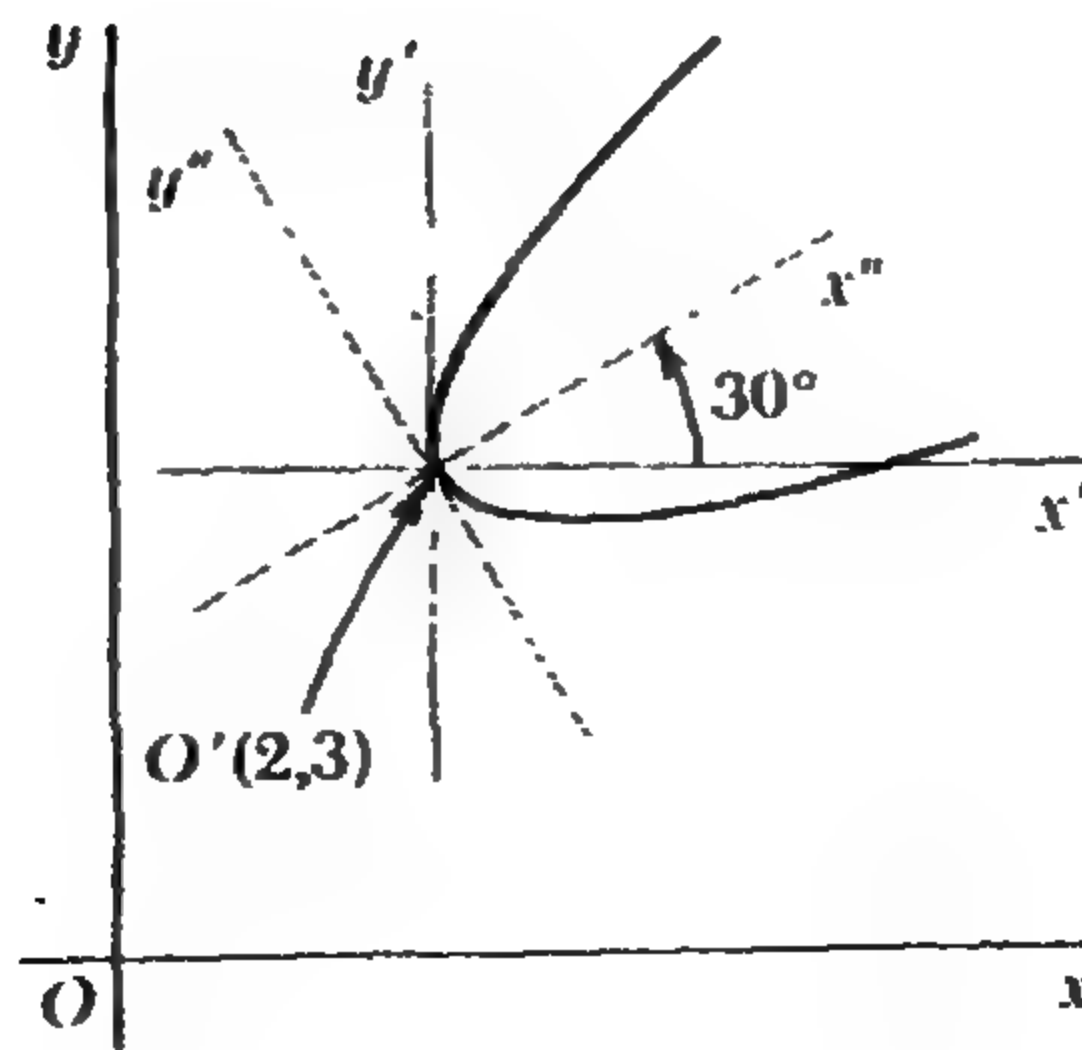
(٢)

كمعادلة للقطع الناقص فى النظام $x' y'$.

المعادلة (٢) من الدرجة الثانية وتشتمل على حد $x' y'$. سنرى بعد قليل أن الحد xy فى معادلة من الدرجة الثانية يشير الى أن محورى القطع المخروطى لا يوازيان محورى الاحداثيات .

بالجمع بين النقل والدوران يمكننا إيجاد معادلة قطع مخروطى موضوع فى أى مكان فى المستوى . نفرض أننا نريد إيجاد معادلة قطع مكافئ رأسه عند (٣ , ٢) ، ومحوره يميل بزاوية 30° على المحور x ، وحيث $p = \frac{1}{2}$ (شكل ت - ٦٩) . ندخل نظامين جديدين للاحداثيات . الاول له نقطة الاصل O' عند رأس القطع المكافئ والمحوران y' و x' يوازيان المحورين y و x . النظام الثانى له نفس نقطة الاصل O' لكن المحورين y'' و x'' يميلان بزاوية 30° على المحورين y' و x' . بالنسبة الى المحورين y'' و x'' القطع المكافئ يكون فى الوضع القياسى ومعادلته هى

$$(٣) \quad y''^2 = x''$$



شكل ت - ٦٩

معادلتا دوران المحورين y' و x' الى المحورين y'' و x'' هما ، باستخدام المعادلتين ت - ٢٨ ،

$$x'' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' + y'), \quad y'' = \frac{1}{2}(-x' + \sqrt{3}y')$$

بتعويض الطرفين اليمين لـ y'' و x'' فى (٣) نحصل على معادلة القطع المكافئ فى النظام x', y'

$$\frac{1}{4}(-x' + \sqrt{3}y')^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' + y')$$

أى

$$x'^2 - 2\sqrt{3}x'y' + 3y'^2 - 2\sqrt{3}x' - 2y' = 0$$

معادلتا نقل المحورين y و x الى المحورين y' و x' هما $y' = y - 3$ و $x' = x - 2$. واذن معادلة القطع المكافئ فى النظام xy هى

$$(x - 2)^2 - 2\sqrt{3}(x - 2)(y - 3) + 3(y - 3)^2 - 2\sqrt{3}(x - 2) - 2(y - 3) = 0$$

أى

$$(4) \quad x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 4(-1 + \sqrt{3})x + 4(\sqrt{3} - 5)y + 37 - 8\sqrt{3} = 0$$

يمكن بالمثل الحصول على معادلة أى قطع مخروطى بالبدء بقطع مخروطى مناسب ، فى وضع قياسى ، ثم اجراء دوران ونقل المحورين .

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ت - ٢٩

تسمى المعادلة العامة من الدرجة الثانية فى x و y . المعادلتان (١) و (٤) على هذه الصورة . كل قطع مخروطى فى وضع قياسى له معادلة من الدرجة الثانية فى x و y . التعويضات المستخدمة فى دوران المحورين لا تؤثر على الدرجة لكن توصل الى معادلة على الصورة ت - ٢٩ . أى أن كل قطع مخروطى له معادلة على الصورة ت - ٢٩ ، بصرف النظر عن وضعه ماعدا عندما يكون الشكل البيانى لوجود له ، أو يكون نقطة ، أو خطا مستقيما أو مستقيمين ، العكس أيضا صحيح : كل معادلة على الصورة ت - ٢٩ شكلها البيانى قطع مخروطى ثبت ذلك الآن .

بدوران المحورين ، بند ت - ٢٧ ، المعادلة ت - ٢٩ تتحول الى

$$(5) \quad A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

حيث

$$\begin{aligned}
 A' &= A \cos^2 \theta + B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta, \\
 B' &= B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2(C - A) \sin \theta \cos \theta, \\
 C' &= A \sin^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta, \\
 D' &= D \cos \theta + E \sin \theta, \\
 E' &= -D \sin \theta + E \cos \theta, \\
 F' &= F.
 \end{aligned}
 \tag{٦}$$

من الممكن دائما اختيار زاوية الدوران θ بحيث أن $B' = 0$. بما أن

$$\begin{aligned}
 B' &= B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2(C - A) \sin \theta \cos \theta \\
 &= B \cos 2\theta + (C - A) \sin 2\theta,
 \end{aligned}$$

هذا يمكن اجراؤه باختيار θ بحيث أن

$$\cot 2\theta = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{A - C}{B}$$

لكن اذا كانت $B' = 0$ ، فالمعادلة (٥) ، التى هى معادلة القطع المخروطى فى النظام بعد الدوران ، ليس بها حد $x'y'$ ، وقد أثبتنا فى البند السابق أن مثل هذه المعادلة هى معادلة قطع مخروطى محوره يوازيان محورى الاحداثيات x' و y' ، بفرض أنها لا تكون احدى الحالات المستثناة التى سبق الاشارة اليها . واذن المعادلة تـ ٢٩ يجب أن يكون لها نفس القطع المخروطى كشكلها البيانى . بعد دوران المحورين لتصبح $B' = 0$ ، يمكن نقل المحورين الجديدين لتندم الحدود الخطية ، ثم يخطط القطع المخروطى .

مثال ٢ . ميز وخطط القطع المخروطى $x^2 + xy + y^2 = 6$ هنا $A = B = C = 1$. لحذف الحد xy ، ندير المحورين زاوية θ بحيث أن $\cot 2\theta = (A - C) / B = 0$. لذلك تكون $\theta = 45^\circ$ و $2\theta = 90^\circ$ ، ومعادلتا الدوران تكونان

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} (x' - y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} (x' + y')$$

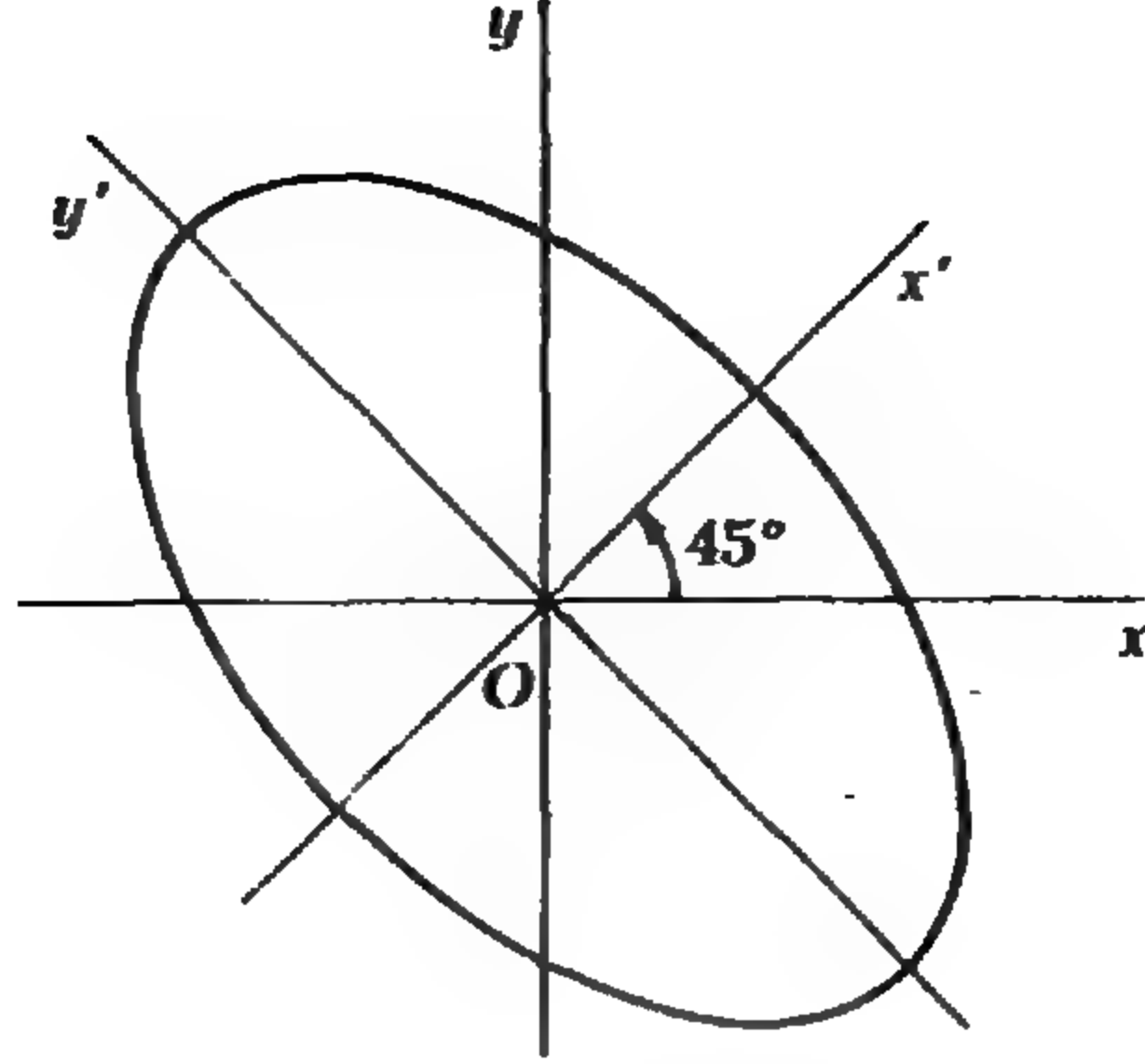
معادلة القطع المخروطى بالنسبة الى المحورين الجديدين هى

$$\frac{1}{2}(x' - y')^2 + \frac{1}{2}(x' - y')(x' + y') + \frac{1}{2}(x' + y')^2 = 6$$

أى

$$3x'^2 + y'^2 = 12$$

القطع المخروطى هو قطع ناقص محوره الاكبر على المحور y' . القطع مخطط فى الشكل تـ ٧٠ .



شكل ت - ٧٠
القطع الناقص $x^2 + xy + y^2 = 6$

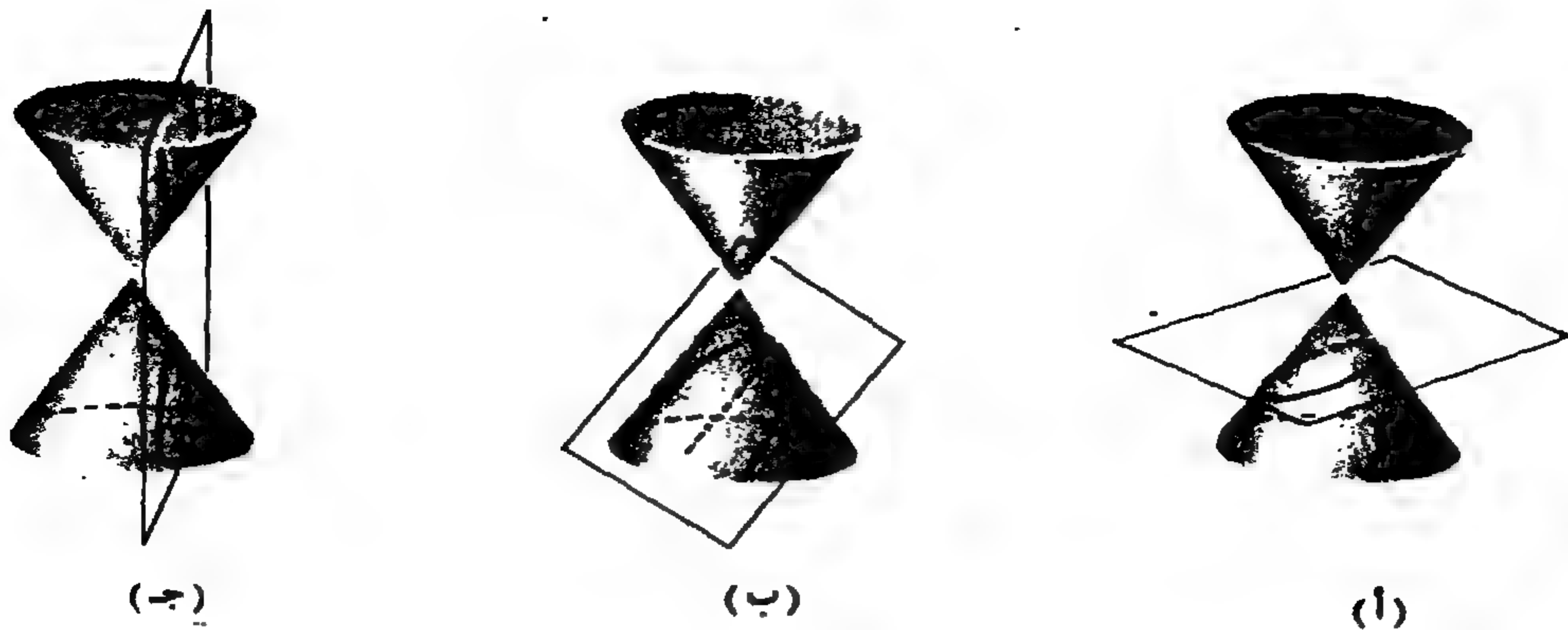
باستخدام (٦) ، ليس من الصعب ، وإن كان مملا ، اثبات أنه بدوران الممحورين أى زاوية θ ،
المعاملات ت - ٢٩ ، (٥) تحقق العلاقة

$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'$$

المقدار $B^2 - 4AC$ يسمى مميز القطع المخروطى والمعادلة السابقة توضح أنه لا يتغير بدوران المحورين ، أى أنه مقدار ثابت تحت دوران المحورين . إذا دار المحوران بحيث أصبحت $B' = 0$ فحينئذ يكون $B^2 - 4AC = -4A'C'$ فى البند السابق رأينا أن القطع المخروطى الذى معادلته على الصورة (٥) حيث $B' = 0$ هو (أ) قطع مكافئ إذا كانت $A' = 0$ أو $C' = 0$ ، أى كانت $A'C' = 0$ ، (ب) قطع ناقص إذا كانت A' و C' ولهما نفس الإشارة ، أى كان $A'C' > 0$ ، (ج) قطع زائد إذا كانت A' و C' لهما اشارتان مختلفتان ، أى كان $A'C' < 0$. هذا يثبت أن الشكل البيانى للمعادلة العامة ت - ٢٩ من الدرجة الثانية فى x و y هو (أ) قطع مكافئ إذا كان $B^2 - 4AC = 0$ (ب) قطع ناقص إذا كان $B^2 - 4AC < 0$ (ج) قطع زائد إذا كان $B^2 - 4AC > 0$ ، وذلك بفرض أن المعادلة لا تكون إحدى الحالات الشاذة التى أشرنا إليها من قبل.

المستوى الذى يقطع مخروطا دائريا قائما عموديا على محور المخروط يقطع المخروط فى دائرة . إذا مال المستوى الى حد ما فإنه يقطع المخروط فى قطع ناقص غير دائرى (شكل ت - ١٧١) .

عندما يميل المستوى أكثر ، التقاطع الذى على شكل قطع ناقص يصبح أطول وأضيق . عندما يميل المستوى بزاوية بحيث يكون موازيا للرسم المقابل للمخروط ، فإنه لا يقطع المخروط فى منحنى مقفل والتقاطع يكون قطعا مكافئا (شكل ت - ٧١ ب) . إذا زاد ميل المستوى ، فإنه يقطع



شكل ت-٧١ . مستوى يقطع المخروط في
(أ) قطع ناقص ، (ب) قطع مكافئ ، (ج) قطع زائد .

الجزئين العلوي والسفلي لامتداد المخروط والتقاطع يكون قطعاً زائداً (شكل ت - ٧١ ج) .
برهان ذلك موجود في بعض كتب الهندسة التحليلية أوفى

Thomas, "Calculus and Analytic Geometry," 4th ed.,
Addison-Wesley, 1968, p. 354.

مسائل

أوجد إحداثيات النقط الآتية إذا دارت المحاور بالزاوية المعطاة :

- ١ - $(1,0)$, 45° ٢ - $(2,-6)$, 135° ٣ - $(0,1)$, -30° ٤ - $(1,2)$, 90° .

أوجد معادلة المستقيمات الآتية إذا دارت المحاور بالزاوية المعطاة

- ٥ - $y = \frac{1}{2}x$, 60° ٦ - $y = 2x - 4$, 90° ٧ - $y = mx$, 90° ٨ - $y = -x$, -45° .

أوجد معادلة كل من القطوع المخروطية الآتية :

- ٩ - قطع زائد ، مركزه $(0, 0)$ ، $b = 6$ و $a = 4$ ، زاوية ميل المحور القاطع 45° .
١٠ - قطع ناقص ، مركزه $(0, 3)$ ، $b = 1$ و $a = 3$ ، زاوية ميل المحور الأكبر 135° .
١١ - قطع ناقص ، مركزه $(-2, -1)$ ، $b = 2$ و $a = 4$ ، زاوية ميل المحور الأكبر 30° .
١٢ - قطع مكافئ ، رأسه $(1, -1)$ ، $p = 2$ ، زاوية ميل محوره 60° - مفتوح لأعلى .

استخدم المميز لتمييز الشكل البياني للمعادلات الآتية . بسط المعادلة بالدوران او النقل ، او كليهما ، وخطط الشكل البياني .

$2x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 = 8$	- ١٤	$x^2 + xy + y^2 = 1$	- ١٣
$4x^2 + 4xy + y^2 - 3y = 6$	- ١٦	$9x^2 - 6xy + y^2 - 9 = 0$	- ١٥
$7x^2 + 8xy + y^2 = 3$	- ١٨	$x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2 = 1$	- ١٧
$3x^2 + 6xy + 3y^2 + 5x - 4y = 12$	- ٢٠	$x^2 - xy + y^2 - x - y = 3$	- ١٩
$5x^2 - 4xy - y^2 + 24x + 6y - 5 = 0$	- ٢٢	$2x^2 + 4xy - y^2 + 2x - 3y = 6$	- ٢١
$3x^2 - 4xy + 8x = 1$	- ٢٤	$5x^2 - 4xy + 2y^2 = 6$	- ٢٣
$x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 4y + 4 = 0$	- ٢٦	$x^2 + 2xy + y^2 = 3$	- ٢٥
$2x^2 + xy - y^2 - 2x + 7y - 12 = 0$	- ٢٨	$xy - 3x + 2y = 6$	- ٢٧

أوجد احداثيات رؤوس القطوع المخروطية الآتية :

$7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 20$	- ٣٠	$3y^2 - 4xy + 8y = 1$	- ٢٩
$4x^2 - 4xy + y^2 = 6$	- ٣٢	$7y^2 - 24xy + 120y + 144 = 0$	- ٣١

أوجد معادلات الخطوط التقاربية للقطوع الزائدة الآتية :

$x^2 - xy + 1 = 0$	- ٣٤	$xy = a^2$	- ٣٣
$2x^2 + 4xy - y^2 - 2x + 3y = 6$	- ٣٦	$5x^2 - 6xy - 3y^2 = -3$	- ٣٥

٣٧ - أوجد الاختلاف المركزي للقطع المخروطي $\sqrt{2}x - 2xy = 5$ وخطط شكله البياني
 ٣٨ - مساحة القطع الناقص الذي طولاً نصفى محوريه b و a هي πab . أوجد مساحة القطع الناقص $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 48$

٣٩ - أثبت أن المعادلة $y = (x+1)/(x-1)$ تمثل قطعاً زائداً وخطط شكله البياني .
 ٤٠ - أثبت أن معادلة الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ لا تتغير إذا دار المحوران زاوية θ .
 ٤١ - بدوران المحورين 180° حصل على معادلة القطع المكافئ $y^2 = -8x$ من المعادلة $y^2 = 8x$.

٤٢ - إذا دار المحوران 90° ، أثبت أن القطع الناقص الذي معادلته $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ في النظام xy يكون له المعادلة $x'^2/b^2 + y'^2/a^2 = 1$ في النظام $x' y'$.

٤٣ - أثبت أن أي معادلة على الصورة ت - ٢٩ حيث $B \neq 0$ و $A = C = 0$ هي قطع زائد .

٤٤ - احصل على معادلتى ت - ٢٨ بحل معادلتى ت - ٢٧ لـ x' و y' .

٤٥ - أثبت النص في الكتاب أن $B^2 - 4AC$ لا يتغير بدوران المحورين ، حيث C و B و A هي المعادلات في المعادلة ت - ٢٩ .

٤٦ - أثبت أن $D^2 + E^2$ و $A + C$ ، حيث E و D و C و A هي المعاملات في المعادلة ت - ٢٩ ، لا يتغيران بدوران المحورين . أي أن ، $D^2 + E^2 = D'^2 + E'^2$ و $A + C = A' + C'$

٤٧ - أثبت أن $B^2 - 4AC$ حيث C و B و A هي المعاملات في المعادلة ت - ٢٩ ، لا يتغير بنقل المحورين .

٤٨ - أثبت أن $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ هي معادلة جزء من قطع مكافئ وخطط شكله انبياني (ارشاد : أدر المحورين زاوية 45°) .

ملحق أ جدول التكاملات

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$	- ١
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	- ٢
$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$	- ٣
$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \quad n \neq -1$	- ٤
$\int x(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a^2} \left(\frac{ax+b}{n+2} - \frac{b}{n+1} \right) + C, \quad n \neq -1, -2$	- ٥
$\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{1}{a^2} (ax - b \ln ax+b) + C$	- ٦
$\int \frac{x}{(ax+b)^2} dx = \frac{1}{a^2} \left(\ln ax+b + \frac{b}{ax+b} \right) + C$	- ٧
$\int \frac{dx}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{1}{ad-bc} \ln \left \frac{ax+b}{cx+d} \right + C$	- ٨
$\int \frac{x}{(ax+b)(cx+d)} dx = \frac{1}{ad-bc} \left(-\frac{b}{a} \ln ax+b + \frac{d}{c} \ln cx+d \right) + C$	- ٩
$\int \frac{dx}{(ax+b)^2(cx+d)} = \frac{1}{ad-bc} \left(\frac{-1}{ax+b} - \frac{c}{ad-bc} \ln \left \frac{ax+b}{cx+d} \right \right) + C$	- ١٠
$\int \frac{x}{(ax+b)^2(cx+d)} dx = \frac{1}{ad-bc} \left[\frac{b}{a(ax+b)} + \frac{d}{ad-bc} \ln \left \frac{ax+b}{cx+d} \right \right] + C$	- ١١
$\int x \sqrt{ax+b} dx = \frac{-2}{15a^2} (2b-3ax)(ax+b)^{3/2} + C$	- ١٢

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x} dx = 2\sqrt{ax+b} + \sqrt{b} \ln \left| \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b}} \right| + C, \quad b > 0 \quad (\text{أ}) - ١٣$$

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x} dx = 2\sqrt{ax+b} - 2\sqrt{-b} \tan^{-1} \sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C, \quad b < 0 \quad (\text{ب})$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b}} \right| + C, \quad b > 0 \quad (\text{أ}) - ١٤$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{\sqrt{-b}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C, \quad b < 0 \quad (\text{ب})$$

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} \quad - ١٥$$

$$\int \frac{dx}{x^n \sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{(2n-2)b} \int \frac{dx}{x^{n-1} \sqrt{ax+b}} \quad - ١٦$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C \quad - ١٧$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad - ١٨$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|) + C \quad - ١٩$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right) + C \quad - ٢٠$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad - ٢١$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \quad - ٢٢$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 \pm x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 \pm x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x} \right| + C \quad - ٢٣$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \sec^{-1} \frac{x}{a} + C \quad - ٢٤$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x} \right| + C \quad - ٢٥$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{x}{a} + C \quad - ٢٦$$

$$\int x^2 \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{8} [x(2x^2 \pm a^2) \sqrt{x^2 \pm a^2} - a^4 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|] + C \quad - ٢٧$$

$$\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{8} \left[x(2x^2 - a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + a^4 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right] + C \quad - ٢٨$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x} + \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad - ٢٩$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \quad - 30$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|) + C \quad - 31$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{1}{2} \left(-x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right) + C \quad - 32$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 \pm x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 \pm x^2}}{a^2 x} + C \quad - 33$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2 x} + C \quad - 34$$

$$\int (x^2 \pm a^2)^{3/2} dx = \frac{1}{8} [x(2x^2 \pm 5a^2) \sqrt{x^2 \pm a^2} + 3a^4 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|] + C \quad - 35$$

$$\int (a^2 - x^2)^{3/2} dx = \frac{1}{8} \left[2x(a^2 - x^2)^{3/2} + 3a^2 x \sqrt{a^2 - x^2} + 3a^4 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right] + C \quad - 36$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{\pm x}{a^2 \sqrt{x^2 \pm a^2}} + C \quad - 37$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} + C \quad - 38$$

$$\int \frac{dx}{x(a^2 \pm x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^3} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} - \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x} \right| \right) + C \quad - 39$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{a^3} \left(\frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \sec^{-1} \frac{x}{a} \right) + C \quad - 40$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} dx = \frac{-x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} + \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad - 41$$

$$\int \frac{x^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \quad - 42$$

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{-(2x^2 \pm a^2)}{a^4 x \sqrt{x^2 \pm a^2}} + C \quad - 43$$

$$\int \frac{dx}{x^2(a^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{2x^2 - a^2}{a^4 x \sqrt{a^2 - x^2}} + C \quad - 44$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} \right] \quad - 45$$

$$\int \sqrt{2ax - x^2} dx = \frac{x-a}{2} \sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x-a}{a} + C \quad - 46$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x-a}{a} + C \quad - 47$$

$$\int x \sqrt{2ax - x^2} dx = \frac{1}{6}(x+a)(2x-3a) \sqrt{2ax - x^2} + C \quad - 48$$

$$\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x} dx = \sqrt{2ax - x^2} + a \sin^{-1} \frac{x-a}{a} + C \quad - 49$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = -\sqrt{2ax - x^2} + a \sin^{-1} \frac{x-a}{a} + C \quad - ٥٠$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax - x^2}} = -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{2a-x}{x}} + C \quad - ٥١$$

$$\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x^2} dx = -2 \sqrt{\frac{2a-x}{x}} - \sin^{-1} \frac{x-a}{a} + C \quad - ٥٢$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad - ٥٣ \quad \int \sin x dx = -\cos x + C \quad - ٥٤$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C \quad - ٥٥ \quad \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C \quad - ٥٦$$

$$\int \csc x dx = -\ln |\cot x + \csc x| + C \quad - ٥٧ \quad \int \sec x dx = \ln |\tan x + \sec x| + C \quad - ٥٨$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C \quad - ٥٩ \quad \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C \quad - ٦٠$$

$$\int \cot^2 x dx = -\cot x - x + C \quad - ٦١ \quad \int \tan^2 x dx = \tan x - x + C \quad - ٦٢$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C \quad - ٦٣ \quad \int \sec^2 x dx = \tan x + C \quad - ٦٤$$

$$\int \cos^3 x dx = \frac{1}{3} \sin x (2 + \cos^2 x) + C \quad - ٦٥ \quad \int \sin^3 x dx = -\frac{1}{3} \cos x (2 + \sin^2 x) + C \quad - ٦٦$$

$$\int \cot^3 x dx = -\frac{1}{2} \cot^2 x - \ln |\sin x| + C \quad - ٦٧ \quad \int \tan^3 x dx = \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C \quad - ٦٨$$

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + C \quad - ٦٩$$

$$\int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2}(\csc x \cot x + \ln |\csc x + \cot x|) + C \quad - ٧٠$$

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx \quad - ٧١$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx \quad - ٧٢$$

$$\int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx \quad - ٧٣$$

$$\int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x dx \quad - ٧٤$$

$$\int \sec^n x dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx \quad - ٧٥$$

$$\int \csc^n x dx = \frac{-1}{n-1} \csc^{n-2} x \cot x + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x dx \quad - ٧٦$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{8}(-2 \sin x \cos^3 x + \sin x \cos x + x) + C \quad - ٧٧$$

$$\int \sin^n x \cos^m x dx = \frac{1}{n+m} \sin^{n+1} x \cos^{m-1} x + \frac{m-1}{n+m} \int \sin^n x \cos^{m-2} x dx, \quad (أ) \quad - ٧٨$$

$n \neq -m^*$

$$\int \sin^n x \cos^m x dx = \frac{-1}{n+m} \sin^{n-1} x \cos^{m+1} x + \frac{n-1}{n+m} \int \sin^{n-2} x \cos^m x dx \quad (ب)$$

$n \neq -m^*$

* إذا كانت $n = -m$ ، استخدم رقم ٧٣ أو ٧٤ .

$$\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x} dx = \frac{-\sin^{n-1} x}{(n-m) \cos^{m-1} x} + \frac{n-1}{n-m} \int \frac{\sin^{n-2} x}{\cos^m x} dx, \quad n \neq m^* \quad - ٧٩$$

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx = \frac{\cos^{m-1} x}{(m-n) \sin^{n-1} x} + \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\cos^{m-2} x}{\sin^n x} dx, \quad m \neq n^* \quad - ٨٠$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln |\tan x| + C \quad - ٨١$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \sec x + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C \quad - ٨٢$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = -\csc x + \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C \quad - ٨٣$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = -2 \cot 2x + C \quad - ٨٤$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^n x} = \frac{1}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\sin x \cos^{n-2} x} \quad - ٨٥$$

$$\int \frac{dx}{\sin^n x \cos x} = \frac{-1}{(n-1) \sin^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x \cos x} \quad - ٨٦$$

$$\int \frac{dx}{\sin^n x \cos^m x} = \frac{-1}{(n-1) \sin^{n-1} x \cos^{m-1} x} + \frac{n+m-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x \cos^m x} \quad (أ) - ٨٧$$

$$\int \frac{dx}{\sin^n x \cos^m x} = \frac{1}{(m-1) \sin^{n-1} x \cos^{m-1} x} + \frac{n+m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^n x \cos^{m-2} x} \quad (ب) - ٨٨$$

$$\int \frac{dx}{1 \pm \sin x} = \frac{\sin x \mp 1}{\cos x} + C \quad - ٨٩$$

$$\int \frac{dx}{1 \pm \cos x} = \frac{-\cos x \pm 1}{\sin x} + C \quad - ٩٠$$

$$\int \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (n-m)x}{n-m} - \frac{\sin (n+m)x}{n+m} \right] + C \quad - ٩١$$

$$\int \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (n-m)x}{n-m} + \frac{\sin (n+m)x}{n+m} \right] + C \quad - ٩٢$$

$$\int \sin nx \cos mx dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos (n-m)x}{n-m} + \frac{\cos (n+m)x}{n+m} \right] + C \quad - ٩٣$$

$$\int x \sin x dx = \sin x - x \cos x + C \quad - ٩٤$$

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x + C \quad - ٩٥$$

$$\int x^2 \sin x dx = 2x \sin x + (2-x^2) \cos x + C \quad - ٩٦$$

$$\int x^2 \cos x dx = 2x \cos x + (x^2-2) \sin x + C \quad - ٩٧$$

$$\int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1) \int x^{n-2} \sin x dx \quad - ٩٨$$

* إذا كانت $n = m$ ، استخدم رقم ٧٣ .

* إذا كانت $m = n$ ، استخدم رقم ٧٤ .

$\int x^n \cos x \, dx = x^n \sin x + nx^{n-1} \cos x - n(n-1) \int x^{n-2} \cos x \, dx$	- 98
$\int \sin^{-1} x \, dx = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$	- 99
$\int \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) + C$	- 100
$\int \sec^{-1} x \, dx = x \sec^{-1} x - \ln x + \sqrt{x^2 - 1} + C$	- 101
$\int x^n \sin^{-1} x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \sin^{-1} x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$	- 102
$\int x^n \tan^{-1} x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \tan^{-1} x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{1+x^2} \, dx$	- 103
$\int e^x \, dx = e^x + C$	- 104
$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	- 105
$\int xe^x \, dx = e^x(x-1) + C$	- 106
$\int x^2e^x \, dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$	- 107
$\int x^ne^x \, dx = x^ne^x - n \int x^{n-1}e^x \, dx$	- 108
$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C$	- 109
$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C$	- 110
$\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C$	- 111
$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C$	- 112
$\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x + C$	- 113
$\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C$	- 114
$\int (\ln x)^n \, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \, dx$	- 115
$\int \frac{(\ln x)^n}{x} \, dx = \frac{1}{n+1} (\ln x)^{n+1} + C$	- 116
$\int x^m (\ln x)^n \, dx = \frac{x^{m+1} (\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln x)^{n-1} \, dx$	- 117
$\int \frac{x^m}{(\ln x)^n} \, dx = \frac{-x^{m+1}}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1} \int \frac{x^m}{(\ln x)^{n-1}} \, dx$	- 118

ملحق ب

الجداول العددية

جدول 1 / زوايا نصف قطرية الى درجات ودقائق وبالعكس

نصف قطرية	درجات ودقائق	درجات ودقائق	نصف قطرية
.001	0° 3.44'	1'	.00029
.002	0° 6.88'	2'	.00058
.003	0° 10.31'	3'	.00087
.004	0° 13.75'	4'	.00116
.005	0° 17.19'	5'	.00145
.006	0° 20.63'	6'	.00175
.007	0° 24.06'	7'	.00204
.008	0° 27.50'	8'	.00233
.009	0° 30.96'	9'	.00262
.01	0° 34.38'	10'	.00291
.02	1° 8.75'	20'	.00582
.03	1° 43.13'	30'	.00873
.04	2° 17.51'	40'	.01164
.05	2° 51.89'	50'	.01454
.06	3° 26.26'	1°	.01745
.07	4° 0.64'	2°	.03491
.08	4° 35.02'	3°	.05236
.09	5° 9.40'	4°	.06981
.1	5° 43.77'	5°	.08727
.2	11° 27.55'	6°	.10472
.3	17° 11.32'	7°	.12217
.4	22° 55.10'	8°	.13963
.5	28° 38.87'	9°	.15708
.6	34° 22.65'	10°	.17453
.7	40° 6.42'	15°	.26180
.8	45° 50.20'	30°	.52360
.9	51° 33.97'	60°	1.04720
1.0	57° 17.75'	90°	1.57080
2.0	114° 35.49'		
3.0	171° 53.24'		
4.0	229° 10.99'		
5.0	286° 28.73'		
6.0	343° 46.48'		
7.0	401° 4.25'		
8.0	458° 21.97'		
9.0	515° 39.72'		

نصف قطرية 1" = 0.0000048

نصف قوس 60" = 1' = 0.0002909

نصف قطرية 3600" = 60' = 1° = 0.01745329

180° = π radians = 3.14159265 radians

جدول II الدوال المثلثية

درجات	جتا	ظنا	ظا	جا نصف قطرية	درجات
90	1.571	1.000	—	.000	0
89	1.553	1.000	57.29	.017	1
88	1.536	.999	28.64	.035	2
87	1.518	.999	19.081	.052	3
86	1.501	.998	14.301	.070	4
85	1.484	.996	11.430	.087	5
84	1.466	.995	9.514	.105	6
83	1.449	.993	8.144	.122	7
82	1.431	.990	7.115	.140	8
81	1.414	.988	6.314	.157	9
80	1.396	.985	5.671	.175	10
79	1.379	.982	5.145	.192	11
78	1.361	.978	4.705	.209	12
77	1.344	.974	4.331	.227	13
76	1.326	.970	4.011	.244	14
75	1.309	.966	3.732	.262	15
74	1.292	.961	3.487	.279	16
73	1.274	.956	3.271	.297	17
72	1.257	.951	3.078	.314	18
71	1.239	.946	2.904	.332	19
70	1.222	.940	2.747	.349	20
69	1.204	.934	2.605	.367	21
68	1.187	.927	2.475	.384	22
67	1.169	.921	2.356	.401	23
66	1.152	.914	2.246	.419	24
65	1.134	.906	2.144	.436	25
64	1.117	.899	2.050	.454	26
63	1.100	.891	1.963	.471	27
62	1.082	.883	1.881	.489	28
61	1.065	.875	1.804	.506	29
60	1.047	.866	1.732	.524	30
59	1.030	.857	1.664	.541	31
58	1.012	.848	1.600	.559	32
57	.995	.839	1.540	.576	33
56	.977	.829	1.483	.593	34
55	.960	.819	1.428	.611	35
54	.942	.809	1.376	.628	36
53	.925	.799	1.327	.646	37
52	.908	.788	1.280	.663	38
51	.890	.777	1.235	.681	39
50	.873	.766	1.192	.698	40
49	.855	.755	1.150	.716	41
48	.838	.743	1.111	.733	42
47	.820	.731	1.072	.750	43
46	.803	.719	1.036	.768	44
45	.785	.707	1.000	.785	45
درجات	نصف قطرة جا	ظا	ظنا	جتا	

جدول III اللوغاريتمات للأساس 10 .

العدد	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396
العدد	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

جدول III. اللوغاريتمات للأساس 10 (تابع)

العدد	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996
العدد	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

جدول IV اللوغاريتمات الطبيعية

n	$\log_e n$	n	$\log_e n$	n	$\log_e n$
.0	—	4.5	1.5041	9.0	2.1972
.1	—2.3026	4.6	1.5261	9.1	2.2083
.2	—1.6094	4.7	1.5476	9.2	2.2192
.3	—1.2040	4.8	1.5686	9.3	2.2300
.4	— .9163	4.9	1.5892	9.4	2.2407
.5	— .6931	5.0	1.6094	9.5	2.2513
.6	— .5108	5.1	1.6292	9.6	2.2618
.7	— .3567	5.2	1.6487	9.7	2.2721
.8	— .2231	5.3	1.6677	9.8	2.2824
.9	— .1054	5.4	1.6864	9.9	2.2925
1.0	.0000	5.5	1.7047	10	2.3026
1.1	.0953	5.6	1.7228	11	2.3979
1.2	.1823	5.7	1.7405	12	2.4849
1.3	.2624	5.8	1.7579	13	2.5649
1.4	.3365	5.9	1.7750	14	2.6391
1.5	.4055	6.0	1.7918	15	2.7081
1.6	.4700	6.1	1.8083	16	2.7726
1.7	.5306	6.2	1.8245	17	2.8332
1.8	.5878	6.3	1.8405	18	2.8904
1.9	.6419	6.4	1.8563	19	2.9444
2.0	.6931	6.5	1.8718	20	2.9957
2.1	.7419	6.6	1.8871	25	3.2189
2.2	.7885	6.7	1.9021	30	3.4012
2.3	.8329	6.8	1.9169	35	3.5553
2.4	.8755	6.9	1.9315	40	3.6889
2.5	.9163	7.0	1.9459	45	3.8067
2.6	.9555	7.1	1.9601	50	3.9120
2.7	.9933	7.2	1.9741	55	4.0073
2.8	1.0296	7.3	1.9879	60	4.0943
2.9	1.0647	7.4	2.0015	65	4.1744
3.0	1.0986	7.5	2.0149	70	4.2485
3.1	1.1314	7.6	2.0281	75	4.3175
3.2	1.1632	7.7	2.0412	80	4.3820
3.3	1.1939	7.8	2.0541	85	4.4427
3.4	1.2238	7.9	2.0669	90	4.4998
3.5	1.2528	8.0	2.0794	95	4.5539
3.6	1.2809	8.1	2.0919	100	4.6052
3.7	1.3083	8.2	2.1041	200	5.2983
3.8	1.3350	8.3	2.1163	300	5.7038
3.9	1.3610	8.4	2.1282	400	5.9915
4.0	1.3863	8.5	2.1401	500	6.2146
4.1	1.4110	8.6	2.1518	600	6.3069
4.2	1.4351	8.7	2.1633	700	6.5511
4.3	1.4586	8.8	2.1748	800	6.6846
4.4	1.4816	8.9	2.1861	900	6.8024

جدول V . الدالة الأسية

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
.00	1.0000	1.0000	3.0	20.086	.0498
.05	1.0513	.9512	3.1	22.198	.0450
.10	1.1052	.9048	3.2	24.533	.0408
.15	1.1618	.8607	3.3	27.113	.0369
.20	1.2214	.8187	3.4	29.964	.0334
.25	1.2840	.7788	3.5	33.115	.0302
.30	1.3499	.7408	3.6	36.598	.0273
.35	1.4191	.7047	3.7	40.447	.0247
.40	1.4918	.6703	3.8	44.701	.0224
.45	1.5683	.6376	3.9	49.402	.0202
.50	1.6487	.6065	4.0	54.598	.0183
.55	1.7333	.5769	4.1	60.340	.0166
.60	1.8221	.5488	4.2	66.686	.0150
.65	1.9155	.5220	4.3	73.700	.0136
.70	2.0138	.4966	4.4	81.451	.0123
.75	2.1170	.4724	4.5	90.017	.0111
.80	2.2255	.4493	4.6	99.484	.0101
.85	2.3396	.4274	4.7	109.95	.0091
.90	2.4596	.4066	4.8	121.51	.0082
.95	2.5857	.3867	4.9	134.29	.0074
1.0	2.7183	.3679	5.0	148.41	.0067
1.1	3.0042	.3329	5.1	164.02	.0061
1.2	3.3201	.3012	5.2	181.27	.0055
1.3	3.6693	.2725	5.3	200.34	.0050
1.4	4.0552	.2466	5.4	221.41	.0045
1.5	4.4817	.2231	5.5	244.69	.0041
1.6	4.9530	.2019	5.6	270.43	.0037
1.7	5.4739	.1827	5.7	298.87	.0033
1.8	6.0496	.1653	5.8	330.30	.0030
1.9	6.6859	.1496	5.9	365.04	.0027
2.0	7.3891	.1353	6.0	403.43	.0025
2.1	8.1662	.1225	6.5	665.14	.0015
2.2	9.0250	.1108	7.0	1096.6	.0009
2.3	9.9742	.1003	7.5	1808.0	.0006
2.4	11.023	.0907	8.0	2981.0	.0003
2.5	12.182	.0821	8.5	4914.8	.0002
2.6	13.464	.0743	9.0	8103.1	.0001
2.7	14.880	.0672	9.5	13,360	.00007
2.8	16.445	.0608	10.0	22,026	.00004
2.9	18.174	.0550			

جدول VI. القوى والجذور والمقلوبات

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$1/n$	n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$1/n$
0	0	0	0.000	0.000	—	50	2 500	125 000	7.071	3.684	.0200
1	1	1	1.000	1.000	1.0000	51	2 601	132 651	7.141	3.708	.0196
2	4	8	1.414	1.260	.5000	52	2 704	140 608	7.211	3.733	.0192
3	9	27	1.732	1.442	.3333	53	2 809	148 877	7.280	3.756	.0189
4	16	64	2.000	1.587	.2500	54	2 916	157 464	7.348	3.780	.0185
5	25	125	2.236	1.710	.2000	55	3 025	166 375	7.416	3.803	.0182
6	36	216	2.449	1.817	.1667	56	3 136	175 616	7.483	3.826	.0179
7	49	343	2.646	1.913	.1429	57	3 249	185 193	7.550	3.849	.0175
8	64	512	2.828	2.000	.1250	58	3 364	195 112	7.616	3.871	.0172
9	81	729	3.000	2.080	.1111	59	3 481	205 379	7.681	3.893	.0169
10	100	1 000	3.162	2.154	.1000	60	3 600	216 000	7.746	3.915	.0167
11	121	1 331	3.317	2.224	.0909	61	3 721	226 981	7.810	3.936	.0164
12	144	1 728	3.464	2.289	.0833	62	3 844	238 328	7.874	3.958	.0161
13	169	2 197	3.606	2.351	.0769	63	3 969	250 047	7.937	3.979	.0159
14	196	2 744	3.742	2.410	.0714	64	4 096	262 144	8.000	4.000	.0156
15	225	3 375	3.873	2.466	.0667	65	4 225	274 625	8.062	4.021	.0154
16	256	4 096	4.000	2.520	.0625	66	4 356	287 496	8.124	4.041	.0152
17	289	4 913	4.123	2.571	.0588	67	4 489	300 763	8.185	4.062	.0149
18	324	5 832	4.243	2.621	.0556	68	4 624	314 432	8.246	4.082	.0147
19	361	6 859	4.359	2.668	.0526	69	4 761	328 509	8.307	4.102	.0145
20	400	8 000	4.472	2.714	.0500	70	4 900	343 000	8.367	4.121	.0143
21	441	9 261	4.583	2.759	.0476	71	5 041	357 911	8.426	4.141	.0141
22	484	10 648	4.690	2.802	.0455	72	5 184	373 248	8.485	4.160	.0139
23	529	12 167	4.796	2.844	.0435	73	5 329	389 017	8.544	4.179	.0137
24	576	13 824	4.899	2.884	.0417	74	5 476	405 224	8.602	4.198	.0135
25	625	15 625	5.000	2.924	.0400	75	5 625	421 875	8.660	4.217	.0133
26	676	17 576	5.099	2.962	.0385	76	5 776	438 976	8.718	4.236	.0132
27	729	19 683	5.196	3.000	.0370	77	5 929	456 533	8.775	4.254	.0130
28	784	21 952	5.292	3.037	.0357	78	6 084	474 552	8.832	4.273	.0128
29	841	24 389	5.385	3.072	.0345	79	6 241	493 039	8.888	4.291	.0127
30	900	27 000	5.477	3.107	.0333	80	6 400	512 000	8.944	4.309	.0125
31	961	29 791	5.586	3.141	.0323	81	6 561	531 441	9.000	4.327	.0123
32	1 024	32 768	5.657	3.175	.0312	82	6 724	551 368	9.055	4.344	.0122
33	1 089	35 937	5.745	3.208	.0303	83	6 889	571 787	9.110	4.362	.0120
34	1 156	39 304	5.831	3.240	.0294	84	7 056	592 704	9.165	4.380	.0119
35	1 225	42 875	5.916	3.271	.0286	85	7 225	614 125	9.220	4.397	.0118
36	1 296	46 656	6.000	3.302	.0278	86	7 396	636 056	9.274	4.414	.0116
37	1 369	50 653	6.083	3.332	.0270	87	7 569	658 503	9.327	4.431	.0115
38	1 444	54 872	6.164	3.362	.0263	88	7 744	681 472	9.381	4.448	.0114
39	1 521	59 319	6.245	3.391	.0256	89	7 921	704 969	9.434	4.465	.0112
40	1 600	64 000	6.325	3.420	.0250	90	8 100	729 000	9.487	4.481	.0111
41	1 681	68 921	6.403	3.448	.0244	91	8 281	753 571	9.539	4.498	.0110
42	1 764	74 088	6.481	3.476	.0238	92	8 464	778 688	9.592	4.514	.0109
43	1 849	79 507	6.557	3.503	.0233	93	8 649	804 357	9.644	4.531	.0108
44	1 936	85 184	6.633	3.530	.0227	94	8 836	830 584	9.695	4.547	.0106
45	2 025	91 125	6.708	3.557	.0222	95	9 025	857 375	9.747	4.563	.0105
46	2 116	97 336	6.782	3.583	.0217	96	9 216	884 736	9.798	4.579	.0104
47	2 209	103 823	6.856	3.609	.0213	97	9 409	912 673	9.849	4.595	.0103
48	2 304	110 592	6.928	3.634	.0208	98	9 604	941 192	9.899	4.610	.0102
49	2 401	117 649	7.000	3.659	.0204	99	9 801	970 299	9.950	4.626	.0101
						100	10 000	1 000 000	10.000	4.642	.0100

أجوبة المسائل الفردية التقييم

الفصل الأول

بند ١ - ١

- ١ - $\{1,2,3,4,5,6\}$. ٣ - $\{3,-3\}$ ٥ - \emptyset .
 ١٥ - $\{x|x > \frac{1}{2}, x \in \mathbb{Z}\}$ ١٧ - $\{x|x = 3n, n \in \mathbb{Z}\}$.
 ١٩ - $\{x|x = 6n, n \in \mathbb{Z}, 1 \leq n \leq 16\}$ ٢٣ - الفئة المتكونة من فريقين يلعبان الكرة
 ٢٧ - $\{-1,0,1,2,3,4\}, \emptyset$ ٢٩ - $\{a,b,c,d,x,z\}, \{b\}, \{a,b,c,d,x,y,z\}, \emptyset$.
 ٣٣ - ٧ ٣٥ - 3

بند ٢ - ١

- ١ - مقفلة تحت كلتا العمليتين ٣ - مقفلة تحت الضرب .
 ٥ - مقفلة تحت كلتا العمليتين ٧ - مقفلة تحت كلتا العمليتين .
 ١٣ - $\{1.7,1.73,1.732,1.7320,1.73205,1.732051\}, \{1.8,1.74,1.733,1.7321,1.73206,1.732052\}$.
 ١٥ - $\frac{1}{2}$ ١٧ - 4 - ١٩ - 5 - ٢١ - لا يوجد حل .
 ٢٣ - 5, 1 - ٢٥ - $-\frac{1}{2}$

بند ٣ - ١

- ٢١ - $(-3,-2)$ ٢٣ - (a,b) ٢٥ - $(0,2], \emptyset$ ٢٧ - $[-4,4], (-4,2)$.
 ٢٩ - $(-5,-1) \cup (-2,5), (0,5), \emptyset$.

بند ٤ - ١

- ١ - متكافئة . ٣ - متكافئة . ٥ - متكافئة .
 ٧ - لا يوجد حل . ٩ - 2 . ١١ - $(-1/a, \infty)$.
 ١٣ - $(-\infty, \frac{30}{7})$ ١٥ - $[-6,4]$ ١٧ - $(d - \epsilon/3, d + \epsilon/3)$.
 ١٩ - $(\frac{1}{2}, \infty)$ ٢١ - $(-\infty, 2 - \sqrt{7}] \cup [2 + \sqrt{7}, \infty)$ ٢٣ - $(-\infty, -3) \cup (4, \infty)$.
 ٢٥ - جميع الاعداد الحقيقية . ٢٧ - $[-2,2]$ ٢٩ - $[1, \infty)$.
 ٣١ - $[\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$ ٣٣ - $[8, \frac{43}{4})$ ٣٥ - لا يوجد حل .
 ٣٧ - جميع الاعداد الحقيقية . ٣٩ - $(-\infty, -1] \cup [2, \infty)$ ٤١ - $(-\infty, -2\sqrt{6}] \cup [2\sqrt{6}, \infty)$.

بند ۱ - ۵

- ۱ - 17 . ۳ - $-\frac{3}{2}$. ۵ - 14 . $\frac{22}{3} - \sqrt{2} - 7$.
 ۹ - $6 - 2\sqrt{6}$. ۱۱ - $1, \frac{5}{3}$. ۱۳ - $\pm 5, \pm \sqrt{15}$. ۱۷ - $(-3, 5)$.
 ۱۹ - $[1, 3]$. ۲۱ - $[-31, 33]$. ۲۳ - $(-\infty, -\frac{5}{7}] \cup [1, \infty)$. ۲۵ - $(\frac{1}{9}, \frac{1}{3})$.
 ۲۷ - $(-2, 3)$. ۲۹ - $[0, 2] \cup \{6\}$. ۳۱ - $c = \pm d$

بند ۱ - ۶

- ۱ - 1 . ۳ - لا يوجد . ۵ - $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$.
 ۷ - $-5, \frac{1}{2}$. ۹ - $-2, 1, 7$. ۱۱ - $\frac{1}{2}, \pm i$.
 ۱۳ - $-\frac{1}{2}, 3$. ۱۵ - $(x+5)(x-1)$. ۱۷ - $(2y+1)(y-1)^2$.
 ۱۹ - $t(t-4)(t+2)(t+4)$. ۲۱ - $(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i)(x+1)(x-2)$.
 ۲۳ - $(x-1)[x+(1+\sqrt{2})][x+(1-\sqrt{2})]$. ۲۵ - $(u-1)\left(u + \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(u + \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$.
 ۲۷ - لا يوجد حل . ۲۹ - $(-\infty, -4]$. ۳۱ - $(-\infty, -1) \cup (-1, 3)$. ۳۷ - $x^2 - 16x + 52$.
 ۳۹ - الاعداد الصحيحة الموجبة الفردية .
 ۴۱ - $2(x-1)^2 + 8(x-1) + 7, 2(x+2)^2 - 4(x+2) + 1$

الفصل الثاني

بند ۲ - ۱

- ۱ - (أ) $\frac{22}{3}$ (ب) $\pm \frac{1}{3}$ (ج) $2.999824; \sqrt{3}$ (د) لا يوجد .
 ۳ - $\frac{2}{3}, 5, 5 + a/2, \text{ لا } \{x|x \geq 0\}, \{x|x \leq 5\}$.
 ۵ - $\{2\}$ وجميع الاعداد الحقيقية ، 2 , 2 , 2 , 2 , 2 .
 ۷ - $\{t|t \text{ حقيقية } t \neq \pm 1\}$ لا $1, -3, \frac{1}{3}, 3/(y^2 + 2y + 3)$.
 ۹ - (أ) $-11, 1, 7, 2$ (ب) جميع الاعداد الحقيقية ، جميع الاعداد الحقيقية ،
 (ج) $F(x) = 2x + 1$.
 ۱۱ - (أ) غير معرفة وغير معرفة و 4 و $\frac{1}{3}$ و $\frac{3}{2}$ و 1 ،
 (ب) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ و -2 ولا حل و $\sqrt{2}$ (ج) $(0, \infty) \cup \{-2\}$

١٣ - $\{x \mid x \text{ وكسرية } -2 \leq x < 2\}$ غير معرّفة وغير معرفة 4 و 1 وغير معرفة ١

١٥ - (أ) $2, -1, 44, 2a^2 - 5a + 2, 43, 65, -14, 54, (2 - 5x + 2x^2)/x^2$ ،

(ج) لا ، (د) لا ، (هـ) 2 و $\frac{1}{2}$ ، (و) $\frac{3}{4}$ و 0 .

١٧ - لا

١٩ - (أ) $2, 8 - \sqrt{2}, 3r^2 - r + 2, (3m^2 - nm + 2n^2)/n^2, 3x^2 - x - 3a^2 +$

$a, 3x^2 - (6a + 1)x + (3a^2 + a + 2)$

(ب) $3h^2 + 11h + 12, 3h^2 - 19h + 32, 3h^2 - h + 2, 3h^2 - (1 - 6a)h + (3a^2 - a + 2)$

(ج) $3h + 11$ ، (د) $6x + 3h - 1$ ، (هـ) $3x + 11$

٢١ - $y = -x + 2$. $y = (-6 - h)x + 16 + 4h - 23$. $y = (2 - a_1 - a_2)x + a_1a_2 - 25$

٢٧ - $\{-\infty, -4\} \cup [4, \infty] \cup \{0\}$ - ٢٩ - جميع الاعداد الحقيقية . ٣١ - $6V^{2.4}(-) 6a^2(+)$

٣٣ - $d(x) = (\frac{1}{16}x^4 - 2x + 5)^{1/2}$

٣٥ - $4x\sqrt{r^2 - x^2}$ ، حيث r نصف قطر الدائرة ، x طول نصف القاعدة .

٣٧ - لا . ٣٩ - نعم . ٤١ - نعم .

بند ٢ - ٢

١٩ - $[-3, 3]$. ٢١ - $300x - x^2$

٢٣ - النطاق هو جميع الاعداد الحقيقية الموجبة ، المدى هو $\{6, 12, 18, 24, \dots\}$

٢٥ - ساكن ، متحرك الى الخلف ، بين 2 . 5, 3 hr ، 50 mph .

بند ٢ - ٣

١٧ - جميع x حيث $x < 7$ $\leq x$ - ٢٥ - $6 [x + 1]$

٢٧ - جميع الاعداد الصحيحة الموجبة .

بند ٢ - ٤

١ - 2, -7, $-\frac{1}{5}$, -5, -6, 4 .

٣ - (أ) $x^2 + \sqrt{x} - 2$ (ب) $-x^2 + \sqrt{x} + 2$ (ج) $\sqrt{x}(x^2 - 2)$ (د) $\frac{\sqrt{x}}{x^2 - 2}$ (هـ) $\frac{\sqrt{x}}{x^2 - 2}$ (و) $x - 2$

٥ - (أ) $\frac{x^4 + 3x + 2}{x^2(3x + 2)}$ (ب) $\frac{x^3 - 3x - 2}{x^2(3x + 2)}$ (ج) $\frac{1}{x(3x + 2)}$ (د) $\frac{x^3}{3x + 2}$ (هـ) $\frac{1}{3 + 2x^2}$ (و) $\frac{9x^2 + 12x + 4}{x^2}$

٧ - لا ٩ - $\frac{3z + 1}{z - 1}$ ، الواحد الصحيح يجب استبعاده ١١ - $f(x) = x^4 + 1/x - 3x^2, g(x) = 5$

١٣ - $f(x) = x - x^2, g(x) = x^2$ - ١٥ - $f(t) = t - 1, g(t) = t$

١٧ - $f(x) = x, g(x) = x^2 + 5x$ - ١٩ - $f(x) = x^2 + 1, g(x) = x$

٢١ - $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = 2x + 8$ - ٢٣ - $f(x) = 2x^2 - 3x + 5, g(x) = x + 1$

بند ۲ - ۵

- $-5 - 9$ $\sqrt{6} - 7$ $- \frac{1}{2}$ $- 8$ $- 3$
 $-\frac{1}{5} - 17$ $0 - 10$ $3c + 1 - 13$ -20 -11
 $\frac{15.1}{8} - 20$ $-7 - 23$ $\sqrt{x^2 + 4x} - 21$ $\frac{b^2 - 3b}{b - 4}, b \neq 4 - 19$
 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3, \text{ yes. } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5, \text{ yes} - 27$
 $\lim_{t \rightarrow 1} g(t) = 1, \lim_{t \rightarrow 1} g(t) = -2. \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0 \text{ نعم} - 29$
 $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \infty - 33$ $\lim_{x \rightarrow 2} F(x) = 8, \lim_{x \rightarrow 2} F(x) = 0 - 31$
 $\lim_{x \rightarrow 2} (x - [x]) = 1, \lim_{x \rightarrow 2} (x - [x]) = 0 - 37$ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} = -1, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} = 1 - 35$
 $1/2\sqrt{c} - 47$ لا توجد نهاية - 45 $\frac{3}{8} - 43$ $-\frac{1}{6} - 41$ $-5 - 39$
 $-1 - 51$ لا توجد نهاية - 53 $-\infty - 49$
 $\frac{1}{2} - 57$ $a < 0$ إذا كانت ∞ ، $a \geq 0$ إذا كانت $-\infty$ - 55
 $2x - 3$ (د) $2x - 3$ (ج) 1 (ب) 1 (أ) - 59
 $1/2\sqrt{a}$ (د) $1/2\sqrt{a}$ (ج) $1/2\sqrt{6}$ (ب) $1/2\sqrt{6}$ (أ) - 61
 $(\sqrt{25 - \epsilon}, \sqrt{25 + \epsilon})$ (ج) ، $(\sqrt{24.9}, \sqrt{25.1})$ (ب) ، $(\sqrt{\frac{49}{2}}, \sqrt{\frac{51}{2}})$ (أ) - 63
 $(3 - 2/\sqrt{N}, 3 + 2/\sqrt{N})$ (ج) ، $(2.98, 3.02)$ (ب) ، $(2.8, 3.2)$ (أ) - 65
 $0, -0.1, -0.02, -0.003, -0.0004, -10^{-9}, \lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0 - 69$

بند ۶-۲

- ١ - متصلة .
٣ - متصلة .
٥ - متصلة من جهة اليسار .
٧ - متصلة .
٩ - متصلة .
١١ - متصلة .
١٣ - متصلة في كل مكان .
١٥ - متصلة من جهة اليسار ولكن ليس من جهة اليمين عند I .
١٧ - غير متصلة من جهة اليمين أو اليسار عند 5 .
١٩ - غير متصلة من جهة اليمين أو اليسار عند $a \pm$.
٢١ - غير متصلة من جهة اليمين أو اليسار عند 5 .
٢٣ - غير متصلة من جهة اليمين أو اليسار عند a .

- ٢٥ - غير متصلة من جهة اليمين أو اليسار عند 0 .
 ٢٧ - متصلة من جهة اليمين وليس من جهة اليسار .
 ٢٩ - غير متصلة من جهة اليمين أو اليسار عند 0 عند كل عدد صحيح .
 ٣١ - 4 - ٣٣ - 0 .
 ٣٥ - f غير متصلة عند أى عدد
 ٣٧ - π متصلة إلا عند كل عدد أولي

بند ٢ - ٧

- ١ - (أ) $(-5, -3)$ مع حذف 4 - ، (ب) $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ مع حذف 4 - ،
 (ج) $(-4 + 2\epsilon, -4 - 2\epsilon)$ مع حذف 4 - .
 ٣ - $(4.4, 5.6)$ مع حذف 5 ، $(4.8, 5.1)$ مع حذف 5 ، الأول هو أكبر جوار منقوص .
 ١٧ - 1, 0 .

بند ٢ - ٨

- ١ - 100 . ٣ - 7 - ٥ . $2\pi/3$. ٧ - $-\frac{3}{2}$. $6\sqrt{7}$.
 ١١ - 1 . ١٣ - 29^{17} . ١٥ - $-\frac{1}{2}$. ١٧ - 4 . ١٩ - $\frac{1}{2}\sqrt[3]{5}$.
 ٢١ - $\frac{(c^3+1)c}{c-1}$ if $c \neq 1$. ٢٣ - $\frac{7}{2}$. ٢٥ - 2 - ٢٧ - 1 .

- ٢٩ - متصلة . ٣١ - متصلة . ٣٣ - غير متصلة من جهة اليمين أو جهة اليسار .

- ٣٥ - متصلة . ٣٧ - متصلة اذا كانت $c \neq 2$
 ٣٩ - متصلة من جهة اليمين ولكن ليس من جهة اليسار .

بند ٢ - ٩

- ١ - جميع z . ٣ - $-2 < x < 2$. ٥ - جميع $y \neq m$
 ٧ - جميع $\pm \sqrt{8}$ و $x \neq 0$. ٩ - جميع $x \neq 1$

الفصل الثالث

بند ٣ - ١

- ١ - (أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $g'(x) = 3$ ، $\frac{1}{2}$ ، 3 ، $\frac{1}{2}$. ٣ - 0 ، $-4a$. ٥ - $-\frac{2}{3}$ ، $-2/(c+1)^2$. ٧ - $\frac{3}{2}$.

$$\begin{array}{llllll}
 2u - 10 & -\frac{1}{t} & -13 & -4, -4x-4 & -11 & -10 \\
 \frac{1}{3}x^{-2/3} - 23 & 3t^2 + 2t & -21 & -10/x^3 & -19 & -1/(x-4)^2 \\
 2x, (0, -4), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (-1, -3) & -27 & 6x+1 & -20
 \end{array}$$

٢٩ - الأجزاء المقطوعة : $(0,0), (1,0), (-1,0)$ الميل هو $3x^2 - 1$

الميل يكون صفرا عند $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}})$

$$3x + y - 5 = 0, x - 3y - 5 = 0 - 31$$

٣٣ - لا ، نعم ، لا . المحور y ، الخط المستقيم $y = 2$.

$$f'_+(0) = 1, f'_-(0) = -1 - 35$$

بند ٣ - ٢

$$4\sqrt{3}x^3 + 10x - 2 - 5 - 3 - 6z^3 - 11$$

$$t - t^3 + t^2 - 1 - 11 - \frac{a}{2}(8x^5 - 1) - 9 - 3(42z^6 + 20z^4) - 7$$

$$4x^3 + 4x - 1 - 17 - -17t^{16} + 16t^7 - 10 - m(2y + b) - 12$$

$$nax^{n-1} + mbx^{m-1} - 23 - 6bz(z^2 - 1)^2 - 21 - 24t + 60t^4 + 24t^7 - 19$$

$$-3024 - 29 - 6, 4, 2t + 4, 6 - 2t^2, -1 - 27$$

$$x + 4y + 1 = 0 - 23 - 4x - 2y + 7 = 0, 2x + 4y + 6 = 0 - 31$$

٣٥ - $2x + y + 7 = 0$ ، مماس أفقي عند $(-1, -4)$ ، الأجزاء المقطوعة ؟ ؟

$$(-3,0), (1,0), (0,-3)$$

$$(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}), (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}) - 37$$

$$x < 1 \searrow dy/dx > 0, x > 1 \searrow dy/dx > 0 - 39$$

$$\frac{1}{2}t^2 + 4t - 40 - 2x^3 - 43 - f'(x) - m - 41$$

$$y + y^2 + \frac{1}{3}y^3 - 49 - \frac{1}{4}z^4 - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{2}z^2 - z - 47$$

٥١ - $f'(x) = 2x - 2$ إذا كانت $x < 3$ ، $f'(x) = 3$ إذا كانت $x > 3$ ، $f'(3)$ لا توجد

$$- 7 - 53 - 55 - عند كل عدد صحيح ، 0$$

بند ٣ - ٣

$$8t^3(t^4 - 1) - 7 - 18y^2 - 12y^3 - 10y^4 - 5 - 18s^2 + 6s - 2 - 3 - 6x - 6 - 1$$

$$(20y^4 - 8y^3 + 6y^2 - 3) - 13 - \frac{\pi br}{a}(2a - 3r) - 11 - 5\sqrt{2}\pi t^4 + 6\sqrt{2}t^2 - 4\pi t - 9$$

$$\frac{20}{(2z+5)^2} - 19 - \frac{1}{x^2} - 17 - 25x^4 + 28x^3 - 15x^2 - 14x - 10 - 10$$

$$\begin{array}{llll}
\frac{2x-3}{(x^2-3x-4)^2} & -20 & \frac{6bu^2-2u^3}{(2b-u)^2} & -23 \quad 15\left(t^2-\frac{1}{t^4}\right) & -21 \\
\frac{2(u^4-1)}{u^3} & -31 & -2-\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s^2} & -24 & 3x^2+6-\frac{9}{x^2} & -27 \\
\frac{-8z^5+12z^3+12z^2+36}{(z^2-3)^2(z^3-6)^2} & -37 & \frac{-9x^4+4x^3+15x^2+4x-4}{(3x+2)^2} & -30 & -\frac{10(x+2)}{(x-3)^3} & -33 \\
0 & -40 \quad \pm 1 & -43 & \frac{1}{2}, 2 & -41 & \frac{6v^2}{(v^3+1)^2} & -39 \\
\frac{dy}{dx} = \frac{x^4+4x^2-1}{(1+x^2)^2} & -53 & \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{3}{x^2} & -51 & \sqrt[3]{\frac{k}{2\pi}} & -49 & \pm a & -47
\end{array}$$

۵۵. $x - ay - a = 0$ مماس افقی عند $(0, -1)$
 ۵۷. قابله للتفاضل عند أى عدد المقام عنده لا يساوى صفرا.

بند ۳ - ۴

$$\begin{array}{llll}
\frac{2x-3}{(x^2-3x-4)^2} & -6 & 102x(3x^2+5)^{16} - \frac{1}{3}x & -3 & 10x(x^2+3)^4 & -1 \\
-(40x^3+148x^2-11x+24)(2+x+4x^2)(3-5x+x^2)^2 & -9 & 3\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^2\left(2x+\frac{1}{x^2}\right) & -7 \\
-2u(u-1)^{-5}(u+1) & -10 & 0 & -13 & \frac{6x}{(x^2-3)^4} & -11 \\
\frac{-8(v+2)}{(v-2)^3} & -21 & \frac{3(2x-1)(1-x)^2}{(2-3x)^2} & -19 & (2x-1)^7(20x^2+88x-5)+17 & -17 \\
(x-2)^2(x+5)^3(x+1)(9x^2+20x-13) & -20 & \frac{-3(a^2-z^2)^2(a^2+z^2)}{z^4} & -23 \\
\frac{H}{3} & -22 & \frac{1}{8} & -31 & -\frac{5b}{9a}, -\frac{b}{a}, 0 & -29 & \pm 1, \frac{1}{2} & -27 \\
(6x-2)\cos(3x^2-2x-2) & -29 & 1 & -37 & 10\left(5x+\frac{1}{25x^2}\right) & -30
\end{array}$$

بند ۳ - ۵

$$\begin{array}{llll}
2\pi r + \sqrt{r} & -6 & 1.33x^{0.33} & -3 & -2x^{-3/2} & -1 \\
\frac{1+0.4x^{0.6}}{(1+x^{0.6})^2} & -11 & \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}} & -9 & \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}} & -7 \\
\frac{80}{3\pi}\left(\frac{80}{\pi}t\right)^{-2/3} & -10 & \frac{1}{3}(2ax+b)(ax^2+bx+c)^{-2/3} & -13
\end{array}$$

$\frac{4x+7x^4}{2\sqrt{1+x^3}}$	- ٢١	$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$	- ١٩	$-\frac{1}{2}x^{-3/2}$	- ١٧
$\frac{7x-1}{2\sqrt{7}x^{3/2}}$	- ٢٧	$(80x+38)(4x+1)^{1/2}$	- ٢٥	$\frac{(3x+2)(3x^2+4x)^{1/2}}{2}$	- ٢٣
$\frac{2}{(1-2x)^{3/2}(1+2x)^{1/2}}$	- ٢٢	$\frac{1}{(t+1)^{3/2}(t-1)^{1/2}}$	- ٢١	$-\frac{2a+bz}{2x^2\sqrt{a+bz}}$	- ٢٩
$\frac{5x^{3/2}(a^2-x^2)}{2(x^2+a^2)^{7/2}}$	- ٢٩	$1 + \frac{3(x+2)}{2(x+1)^{3/2}}$	- ٢٧	$\frac{2x+3}{3(x+1)^{4/3}}$	- ٢٥
		$\frac{7x^2-3c^2}{6\sqrt{x}(x^2-c^2)^{2/3}}$	- ٤٢	$\frac{16x-5}{(x+2)^2\sqrt{8x^2+5}}$	- ٤١
$\therefore 0, t \neq 0$	- ٤٧	$\frac{(x^3+2)(-7x^4+18x^2-2x)}{(4+\sqrt{x})^{3/2}\sqrt{3-x^2}} - \frac{\sqrt{3-x^2}(x^3+2)^2}{2\sqrt{x}(4+\sqrt{x})^2}$			- ٤٥
$z = x.$	- ٥٢	$x - 12y - 16 = 0.$	- ٥١	$\pm \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	- ٤٩
$2; 1$	- ٥٩	$\pm b; \text{none}$	- ٥٧	$5x - 16y + 9 = 0$	- ٥٥
$0, -\frac{15}{7}; -\frac{5}{2}$	- ٦٥	$-3, \frac{1}{2}; -2$	- ٦٢	$0, \pm a\sqrt{\frac{2}{3}}; \pm a.$	- ٦١

بند ٦ - ٣

$-\frac{15}{15}(3u+2)^{-5/5}$	- ٧	$6t - \frac{1}{4}(1-t)^{-3/2}$	- ٥	$\frac{15}{4}\sqrt{x}$	- ٣	$12t^2 - 6t$	- ١
$\frac{36(8-u^2)}{u^3(12-u^2)^{3/2}}$	- ١٥	$\frac{2x^3+6a^2x}{(x^2-a^2)^3}$	- ١٣	$\frac{6(2+x^2)}{(4-x^2)^{5/2}}$	- ١١	$15(4x^3 - \frac{3}{4}x^{-3/2})$	- ٩
0 : لا يوجد	- ٢٣	1 : لا يوجد	- ٢١	$7, -1; 3$	- ١٩	$\frac{4(x+4)}{9x^{5/3}}$	- ١٧
$f^{(5)}(x) = 0$	- ٢١	$\frac{-112}{27(x-1)^{10/3}}$	- ٢٧	$\frac{72}{x^5}$			- ٢٥
$(-1)^n \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n(n+1)}{(t+1)^{n-2}}$	- ٢٥	$n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$					- ٢٣
$xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$	- ٢٩	$(-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n} x^{-(2n-1)/2}, n \geq 2.$					- ٢٧

بند ٧ - ٣

$\frac{\pi r^3}{3} + C.$	- ٧	$\frac{bx^2}{2} - bax + C$	- ٥	$t + C$	- ٣	$\frac{x^2}{2} + 5x + C$	- ١
$z^4 - \frac{1}{5}z^5 + 6z + C$	- ١٥	$x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$	- ١٣	$\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$	- ١١	$a^2x - \frac{1}{3}x^3 + C$	- ٩
$-\frac{3}{x} - \frac{11}{12x^4} + C.$	- ٢١	$\frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3x^3} + C$	- ١٩	$\frac{a^2c}{2}r^2 + \frac{2ac}{3}r^3 + \frac{c}{4}r^4 + C$	- ١٧		

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2} + C. & - ٢٧ \quad . -\frac{5}{z} + \frac{6}{z^2} + \frac{10}{3z^3} + C. & - ٢٥ \quad . \frac{2}{3}w^{3/2} - 2w^{1/2} + C & - ٢٢ \\
. -\frac{1}{72}(3-4x)^{18} + C & - ٢١ \quad . \frac{x^6}{2} - 10x^3 + C. & & - ٢٩ \\
\frac{1}{3}(2z^3 + 5z - 1)^3 + C & - ٢٧ \quad . \frac{-1}{t-1} + C. & - ٢٥ \quad . \frac{1}{4}x^7 + \frac{1}{3}x^5 + 36x^3 + 216x + C & - ٢٢ \\
\frac{3}{32}(4x^2 - 6)^{4/3} + C & - ٤٢ \quad . \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}(1-x)^{3/2} + C & - ٤١ \quad . \sqrt{2x+3} + C & - ٢٩ \\
\frac{1}{3}(x^3 + 5) & - ٤٩ \quad . \frac{1}{3}(x^3 + 8)^{5/3} + C & - ٤٧ \quad . \frac{-1}{12b(by^4 - c)^3} + C. & - ٤٥
\end{aligned}$$

بند ٨ - ٣

$$\begin{aligned}
. s = \frac{t^2}{4} + \frac{1}{2t} + C. & - ١٧ \quad . f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + 10x + C. & - ١٥ \\
. g(t) = \frac{7}{3(1+t^3)} + C & - ٢١ \quad . u = 2x^{1/2} - \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{2}{3}x^{5/2} + C. & - ١٩ \\
. y = c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \dots + c_n, \text{ ثوابت اختيارية } c_1, \dots, c_n & - ٢٣ \\
. y = \frac{a}{3}(x^3 + 2) & - ٢٧ \quad . F(t) = \frac{t^3}{3} - 3t^2 + t + \frac{25}{3} & - ٢٥ \\
. y = \sqrt{10-x^2} + 3 - \sqrt{6}. & - ٢١ \quad . y = \frac{1}{96}(48t^4 + 32t^3 + 48t^2 + 461) & - ٢٩ \\
. y = \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{1}{2}x^2 - 6x + \frac{25}{6} & - ٢٥ \quad . f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 6x + 7) & - ٢٢ \\
. y = -1/x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} & - ٢٩ \quad . y = -\frac{1}{3}x^3 + 6. & - ٢٧ \\
. y = 1/2x + Cx + \frac{1}{2} - C, \text{ أي ثابت } C & - ٤٣ \quad . y = \frac{1}{3}(2x^3 - 21x - 26). & - ٤١
\end{aligned}$$

بند ٩ - ٣

$$\begin{aligned}
. f(x) = \sqrt{-x/3}, x \leq 0 & - ٢ \quad . f(x) = \frac{1}{2}x + 2, \text{ لجميع الأعداد الحقيقية} & - ١ \\
. f_1(x) = \frac{1}{2}(-5 + \sqrt{25-4x}), x \leq \frac{25}{4}; f_2(x) = \frac{1}{2}(-5 - \sqrt{25-4x}), x \leq \frac{25}{4} & - ٥ \\
. f(x) = 0, x = 0. & - ٩ \quad . f_1(x) = x^{3/2}, x \geq 0; f_2(x) = -x^{3/2}, x \geq 0 & - ٧ \\
. \frac{29x-2}{y} \pm \frac{29x-2}{\sqrt{29x^2-4x+1}} & - ١٥ \quad . \frac{1}{3y^2}, \frac{1}{3}x^{-2/3} & - ١٣ \quad . \frac{3x^2+y}{x(1+4x)}, \frac{6x(1+2x)}{(1+4x)^2} & - ١١ \\
. \frac{6x-y}{x} & - ٢٢ \quad . \frac{3x^2}{2y} & - ٢١ \quad . -\frac{2x}{y} & - ١٩ \quad . \frac{1}{2} & - ١٧ \\
. -\frac{y(2x+y)}{x(x+2y)} & - ٢١ \quad . \frac{x(1-y^2)}{y(x^2-1)} & - ٢٩ \quad . -\frac{2x+y}{x+2y} & - ٢٧ \quad . \frac{(x-3)(3x-4)}{y} & - ٢٥
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll}
-\frac{y^2}{x^2} - ٣٩ & -\sqrt[3]{\frac{y}{x}} - ٣٧ & -\sqrt{\frac{y}{x}} - ٣٥ & \frac{4x - y^2 - 3}{y(2x - 3y)} - ٣٣ \\
\frac{1}{2}\sqrt{y}(2 - \sqrt{y})^2 - ٤٥ & \frac{3(xy)^{2/3} - y}{x + 6y(xy)^{2/3}} - ٤٣ & \frac{2x - y - 1}{1 + x} - ٤١ & \\
15x - y - 4 = 0, x + 15y + 60 = 0 - ٤٩ & 2x + y - 4 = 0, 2x - 4y + 1 = 0 - ٤٧ & & \\
5x + 3y + 3 = 0, 3x - 5y - 5 = 0 - ٥٣ & 5x + 11y + 17 = 0, 11x - 5y - 21 = 0 - ٥١ & & \\
& x - 4y = 0, 4x + y - 34 = 0. - ٥٥ & & \\
\frac{x^2 - ay}{ax - y^2}, \frac{2a^3xy}{(ax - y^2)^3} - ٦١ & -\frac{y}{x + 2y}, \frac{4}{(x + 2y)^3} - ٥٩ & \frac{x}{y}, -\frac{a^2}{y^3} - ٥٧ & \\
\frac{1}{3x^2} - ٧٧ & \frac{-6}{13}, \frac{396}{13^3} - ٦٥ & \frac{5}{6}, -\frac{13}{72} - ٦٣ & \\
& g_3(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2}, & -5 \leq x \leq 0, \\ -\sqrt{25 - x^2}, & 0 < x \leq 5. \end{cases} - ٨١ & \frac{1}{6x^2 - 2x + 6} - ٧٩ &
\end{array}$$

الفصل الرابع

بند ٤ - ١

١ - (أ) نهاية عظمى عند 3- ، نهاية صغرى عند 2 ، (ب) نهاية عظمى عند 3- ، نهاية صغرى عند 1 .

٣ - (أ) عظمى عند 5 ، صغرى عند 0 ، (ب) لاعظمى عند 12- ، لاتوجد نهاية

١ - (أ) نهاية عظمى عند 3- ، نهاية صغرى عند 2 ، (ب) نهاية عظمى عند 3- ، نهاية صغرى عند 1 .

٣ - (أ) عظمى عند 5 ، صغرى عند 0 ، (ب) لاعظمى ولاصغرى ، (ج) لاعظمى ولاصغرى .

٥ - عظمى وصغرى عند أى عدد فى $[0, 3]$.

٧ - عظمى عند 1- ، 5- وصغرى عند 3- .

٩ - (أ) عظمى عند 3- ، صغرى عند 5- ، 2 ، (ب) عظمى عند 3- ، لاتوجد نهاية صغرى ، (ج) عظمى عند 3- ، صغرى عند 5- .

١١ - (أ) عظمى عند 2 ، صغرى عند 0 ، (ب) عظمى عند 2 ، 4- وصغرى عند 8- .

١٣ - عظمى عند 4 ، صغرى عند 2 .

١٥ - عظمى عند 2- ، صغرى عند 2 .

١٧ - عظمى عند 3 ، 3- ، صغرى عند 0 .

١٩ - عظمى عند 6/a ، صغرى عند 2/a ، 0 .

٢١ - عظمى عند 4 ، صغرى عند 2- .

- ٢٣ - عظمى عند 2 ، صغرى عند 0 .
 ٢٥ - عظمى عند 3 ، 3 - وصغرى عند 0 .
 ٢٧ - عظمى عند 4 ، صغرى عند 0 .
 ٢٩ - عظمى عند 0 ، صغرى عند 3 - .
 ٣١ - عظمى عند 4 ، صغرى عند 4 و 0 .
 ٣٣ - أكبر ميل عند 3 ، أصغر ميل عند 5 .
 ٣٥ - $2x(25 - x^2)$, $[0,5]$, $500/3\sqrt{3}$

بند ٤ - ٢

- ١ - $\frac{1}{2}$ ٣ - $2, \frac{1}{2}, 3$ ٥ - $-\frac{1}{2}$ ٧ - $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ١٧ - تحقق .
 ١٩ - لا تحقق ، النتيجة صحيحة .
 ٢١ - لا تحقق ، النتيجة غير صحيحة .
 ٢٣ - لا تحقق ، النتيجة صحيحة .
 ٣١ - $-\frac{1}{2}$

بند ٤ - ٣

- ١ - تناقص في $[1, 2]$.
 ٣ - تزايد في $[-1, 1]$ ، غير مطردة الزيادة وغير مطردة النقصان في $[0, 6]$.
 ٥ - تزايد في $(1, 4)$ وفي $[0, 4]$.
 ٧ - تناقص في $[0, 4]$ ، وتزايد في $(6, \infty)$.
 ٩ - تزايد في $(-\infty, \infty)$.
 ١١ - لا تزايد باطراد ولا تناقص باطراد في $(-\infty, \infty)$.
 ١٣ - لا تزايد باطراد ولا تناقص باطراد في $[-3, 3]$.
 ١٥ - تناقص في (∞, ∞) .
 ١٧ - تزايد في $(-\infty, \infty)$.
 ١٩ - تزايد في $(2, \infty)$ و $[-\infty, -3]$ وتناقص في $[-3, 2]$.
 ٢١ - تناقص في $(-\infty, \infty)$.
 ٢٣ - تناقص في $(-\infty, 0]$ ، تزايد في $[0, \infty)$.
 ٢٥ - تناقص عند $[0, 4]$ و $[-\infty, -4]$ ، وتزايد في $(4, \infty)$ و $[-4, 0]$.
 ٢٧ - تناقص في $(0, \infty)$ و $(-\infty, 0)$.
 ٣١ - تزايد في كل فترة .
 ٣٣ - لا .
 ٤١ - نعم .
 ٤٣ - لا .

بند ٤ - ٤

- ٤٣ - أكبر ميل 28 ، أصغر ميل 8 - .
 ٤٥ - أكبر ميل 75 ، أصغر ميل 5 - .
 ٥٣ - بين 3 - و 4 - ، بين 4 و 3 .
 ٥٥ - $b > 3$.
 ٥٧ - بالضبط جذر واحد حقيقى إذا كانت $a < -27$ أو $a > 5$ ، بالضبط جذران حقيقيان مختلفان إذا كانت $a = -27$ أو $a = 5$ ، ثلاثة جذور حقيقية مختلفة إذا كانت $-27 < a < 5$.

بند ٤ - ٥

- ١ - (م) نهاية صغرى محلية ، ونهاية عظمى محلية .
 ٣ - عظمى محلية عند $\frac{1}{2}$.
 ٥ - لا توجد نهاية قصوى محلية .
 ٧ - عظمى محلية عند 2 ، صغرى محلية عند 6 .
 ٩ - صغرى محلية عند 3 .
 ١١ - عظمى محلية عند 4 - .
 ١٣ - صغرى محلية عند 0 إذا كانت n زوجية ، لا توجد نهاية قصوى محلية إذا كانت n فردية .
 ١٥ - صغرى محلية عند 1 ، عظمى محلية عند 1 - .
 ١٧ - صغرى محلية عند $\pm\sqrt{2}$.
 ١٩ - عظمى محلية عند 2 - ، صغرى محلية عند 0 .
 ٢١ - صغرى محلية عند 2 .
 ٢٣ - لا .

بند ٤ - ٦

- ٥ - مقعر لأعلى فى $(-\infty, \infty)$.
 ٧ - مقعر لأسفل فى $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ مقعر لأعلى فى $(-\frac{1}{2}, \infty)$ نقطة انقلاب عند $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.
 ٩ - مقعر لأسفل فى $(-\infty, \frac{3}{2}]$ مقعر لأعلى فى $(\frac{3}{2}, \infty)$ ، نقطة انقلاب عند $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$.
 ١١ - مقعر لأعلى فى $(-\infty, \infty)$.
 ١٣ - مقعر لأعلى فى $(\frac{3}{2}, \infty)$ ، $(-\infty, 0]$ ، مقعر لأسفل فى $[0, \frac{3}{2}]$ ، نقطتا انقلاب عند $(\frac{3}{2}, \frac{25}{9})$ و $(0, 1)$.

- ١٥ - مقعر لأعلى في $(\sqrt{15}/3, \infty)$ و $(-\infty, -\sqrt{15}/3]$ ، مقعر لأسفل في $[-\sqrt{15}/3, \sqrt{15}/3]$ ، نقطتا انقلاب عند $(\pm\sqrt{15}/3, 1/3)$.
- ١٧ - مقعر لأسفل في $(-\infty, \infty)$.
- ١٩ - مقعر لأسفل في $(-\infty, 0]$ ، مقعر لأعلى في $(0, \infty)$ ، نقطة انقلاب عند $(0, -1)$.
- ٢١ - مقعر لأعلى في $(-\infty, 3]$ ، مقعر لأسفل في $(3, \infty)$ ، نقطة انقلاب عند $(3, 1/3)$.
- ٢٣ - مقعر لأعلى في $(-\infty, -a/\sqrt{3}]$ و $[a/\sqrt{3}, \infty)$ ، مقعر لأسفل في $[-a/\sqrt{3}, a/\sqrt{3}]$ ، نقطتا انقلاب عند $(\pm a/\sqrt{3}, 3/4a^2)$.
- ٢٥ - مقعر لأعلى في $(-\infty, 2)$ ، مقعر لأسفل في $(2, \infty)$ ، نقطة انقلاب عند $(2, 0)$.
- ٢٧ - مقعر لأسفل في $(-\infty, 0]$ ، مقعر لأعلى في $(0, \infty)$ ، نقطة انقلاب عند $(0, 0)$.
- ٢٩ - مقعر لأعلى في $(1/6^{3/5}, \infty)$ و $(-\infty, 0)$ ، مقعر لأسفل في $(0, 1/6^{3/5}]$ ، نقطتا انقلاب عند $(0, 0)$ و $(1/6^{3/5}, 10/3 \cdot \sqrt[5]{6})$.
- ٣١ - $3x - y + 4 = 0$ ٣٣ - $(\pm 1, \pm 1)$ ، $\pm 8x - 3y - 6 = 0$ ٣٥ - $\pm 3\sqrt{30}/200$
- ٣٧ - (أ) $f(x) = x^3 + x$ (ب) $f(x) = x^4 + 10x + 2$ (ج) $f(x) = x$

بند ٤ - ٧

- ١ - صفري محلية عند a .
- ٥ - صفري محلية عند $\frac{2}{3}$.
- ٩ - صفري محلية عند A .
- ١١ - عظمي محلية عند 0 ، صفري محلية عند 4 .
- ١٣ - عظمي محلية عند $\sqrt[3]{2}$.
- ١٥ - صفري محلية عند $\frac{1}{2}$ و -2 ، عظمي محلية عند $\frac{1}{3}$.
- ١٧ - عظمي محلية عند $\sqrt{30/5}$ و $\sqrt{6}$ ، صفري محلية عند $-\sqrt{6}$ و $-\sqrt{30/5}$.
- ١٩ - صفري محلية عند $1/\sqrt[3]{2}$.
- ٢١ - صفري محلية عند $-\sqrt{3}$ ، عظمي محلية عند $\sqrt{3}$.
- ٢٣ - صفري محلية عند -4 ، عظمي محلية عند 2 .
- ٢٥ - صفري محلية عند 0 .
- ٢٧ - صفري محلية عند $-\frac{1}{3}$.
- ٢٩ - عظمي محلية عند -1 ، صفري محلية عند 0 .
- ٣١ - صفري محلية عند $0, 4$ ، عظمي محلية عند 1 .
- ٣٣ - الميل ليس له نهاية قصوى محلية .
- ٣٥ - الميل له نهاية عظمي محلية 4 عند -2 ونهاية صفري محلية $\frac{1}{4}$ عند $\frac{1}{2}$.

- ٣٧ - الميل له نهاية عظمى محلية $\sqrt{6}$ عند 0 .
٣٩ - $b = 5$ و $a = -4$ ، نقطة صفري محلية .

بند ٨ - ٤

- ٢٧ - $(\pm 1/\sqrt{3}, 3)$
٢٩ - $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3} + \frac{1}{3}), (-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3} + \frac{1}{3})$
٣١ - $\frac{4}{7}$ من أعلى ، $\frac{4}{7}$ من أسفل
٣٥ - $\sqrt{3}$ من أسفل ، $-\sqrt{3}$ من أسفل .
٤١ - مماس رأسي عند $(8, 0)$.
٤٣ - لا يوجد مماس رأسي .

بند ٩ - ٤

- ١ - 12 amperes
٣ - 40 ft (frontage) by 80 ft
٧ - $10 + 2\sqrt{13}$ by $4 + 2\sqrt{13}$ by $7 - \sqrt{13}$ in., 20 by 14 by 2 in
٩ - $c\sqrt{6}/3$ by $c/\sqrt{3}$ ، حيث c طول الوتر
١١ - $r\sqrt{2}$ by $r/\sqrt{2}$
١٣ - $a\sqrt{2}$ by $b\sqrt{2}$
١٥ - $(2, 0)$
١٧ - 5 by 5 ft
١٩ - 3 by 3 by 1.5 ft
٢١ - $\sqrt[3]{10}$ by $\sqrt[3]{10}$ by $2\sqrt[3]{10}$ ft
٢٣ - $r = R\sqrt{6}/3, h = R/\sqrt{3}$ حيث R نصف قطر الكرة
٢٥ - لا توجد نهاية صفري
٢٧ - (أ) لا توجد نهاية عظمى ، (ب) لا توجد نهاية عظمى ، (ج) $A\left(\frac{a^2 + b^2}{a}, 0\right)$
٢٩ - عند B
٣١ - $\frac{2}{3}$ ft من الموقد الاصغر .
 $B\left(0, \frac{a^2 + b^2}{b}\right)$

- ٣٣ - عند النقطة $(\pi + 4)/40$ من الطرف للمساحة الصفري . لا توجد مساحة عظمى اذا كان يتحتم تكوين مربع . اذا كنا لانتحتاج الى تكوين مربع ، نستخدم السلك بأكمله لعمل الدائرة ذات المساحة العظمى .

- ٣٥ - $\pi/2$
٣٧ - $a + b$
٣٩ - $(2, 4)$
٤١ - $(\frac{2}{3}, -3)$
٤٣ - $\frac{1}{4}$
٤٧ - $[3, \infty)$
٤٩ - $(0, 2]$
٥١ - 70
٥٣ - $a = 30,000, b = -7000, \$1.76$
٥٥ - $x = 5 - \sqrt{3}, y = 2(3 - \sqrt{3})$
٥٧ - اذا كان A' و B' هما مسقطي A و B على الخط المستقيم ، ليكن $|AA'| = a, |BB'| = b, |A'B'| = c$ اذا كانت P نقطة الانعكاس فإن $|A'P| = ac/(a + b)$

بند ٤ - ١٠

- ١ - إلى اليسار ٣ - إلى اليمين ٥ - إلى اليسار، إلى اليمين وإلى اليسار.
- ٧ - تتحرك إلى اليسار في $[-\infty, \frac{1}{2}]$ ، تتحرك إلى اليمين في $(\frac{1}{2}, \infty)$
- ٩ - تتحرك إلى اليمين في $(-\infty, \infty)$.
- ١١ - تتحرك إلى اليسار في $(\sqrt{3}, \infty)$ و $[-\infty, -\sqrt{3}]$ ، تتحرك إلى اليمين في $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.
- ١٣ - تتحرك إلى اليسار في $(4, \infty)$ و $[-\infty, 0]$ ، تتحرك إلى اليمين في $[0, 4]$.
- ١٥ - تتحرك إلى اليسار في $(-\infty, 1]$ ، تتحرك إلى اليمين في $(1, \infty)$.
- ١٧ - تتحرك إلى اليسار في $(1, \infty)$ و $[-\infty, 0]$ ، تتحرك إلى اليمين في $[0, 1]$.
- ١٩ - تتحرك إلى اليمين في $(-\infty, 0]$ ، تتحرك إلى اليسار في $[0, \infty)$.

50m	٢٥	10, $\frac{1}{2}\pi$	٢٣	400 ft, 80 ft, 48 ft	٢١
13, 15	٣١	-4, 0	٢٩	66, -9	٢٧
170 ft	٣٩	$s(t) = 1 + 3t^2 - t^3, s(2) = 5; 2$	٣٧	$s = t^{3/2} + 2$	٣٥
٤٧	5 sec. - ٤٥	225 ft, 15 sec. - ٤٣		48 ft/sec/sec. - ٤١	

بند ٤ - ١١

8 sec, 160 ft/sec	- ٧	$s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t.$	- ٥	99 ft	- ١
18 ft	- ١٥	$32\sqrt{3}$ ft/sec	- ١١	$v_0^2/1960$ cm.	- ٩

بند ٤ - ١٢

$5/72\pi$ in./min, $\frac{1}{2}$ sq in./min	- ٧	$\frac{1}{2}$	- ٥	52	- ١
1.68 lb/sq in./sec	- ١٣	$-\frac{6Gmm'}{r^3} 10^7$	- ١١	-11 units per second	- ٩
$625/8\pi$ cm/min	٢١	$\frac{5}{4}$ ft/min	- ١٩	260 ft/min.	- ١٧
-288π sq cm/min	- ٢٧	16 cu in./sec	تزايد - ٢٥	$-4000/\sqrt{101}$ mph.	- ١٥
$254/\sqrt{307}$ ft/sec	- ٣٥	$\frac{20}{3}$ sec	- ٣١	-2 sq cm/min	تناقص - ٢٣
-1120π cu cm/sec	تناقص - ٤١	$848\pi/5$ sq ft/min	- ٣٩	$-136/\sqrt{53}$ mph, $\frac{20}{3}$ hr	- ٢٩
				$-\sqrt{5}/18$ ft/min	- ٣٧

بند ٤ - ١٣

- ١ - التكلفة $F(x) = 0.07x + 500$ dollars، متوسط التكلفة $= 0.07 + 500/x$ dollars.
- ٢ - نعم
- ٩ - ١١60, \$150 - ١١60, \$62.33 - ١٧113. نعم إذا كانت $R'' < F''$ عند هذا المستوى.

بند ٤ - ١٤

- $\frac{(7x^6 + 5x^4)}{3(x^7 + x^5 + 1)^{2/3}} dx$ - ٥ $\left(\frac{1}{2\sqrt{u}} + 2u\right) du$ - ٣ $(6x - 5) dx$ - ١
 -0.000556 - ١٥ -0.0037 - ١٣ $-0.1, 0.2$ - ١١ $\frac{3}{2}$ - ٩ $\frac{2x-1}{3y^2+1} dx$ - ٧
 $\frac{5}{432} \text{ in}$ - ٢٧ $\pi \text{ cu in}$ - ٢٥ 0.0075 - ٢١ 0.00714 - ١٩ -0.6 - ١٧
 $gt \Delta t \text{ ft}, g \Delta t \text{ ft/sec}$ ، حيث Δt الخطأ في t - ٢٩
 0.0098 - ٤١ 9.87 - ٣٩ 7.143 - ٣٧ $c = 500, ds = -\frac{2c}{t^3} dt$ - ٣٣ 4.8 - ٣٣
 33.77 أصغر - ٤٧ 0.999 - ٤٥ 0.1289 - ٤٣
 $\frac{g}{4\pi^2} \text{ ft}$ ، (أ) - ٥١
(ب) الدورة تزداد بمقدار 0.0000617 sec ، تفقد 5.33 cec/day (ج) تنقص بمقدار 0.0016 sec

بند ٤ - ١٥

- $s = (\frac{4}{3}t^3 + 12t + C)^{1/4}$ - ٣ $y^2 = x^2 - 2x + 2C$ - ١
 $r^2 = 2(\theta - 1/\theta) + C$ - ٧ $y = (x + C)^3$ - ٥
 $(y^2 + 6)^{1/2} = -\frac{1}{2}(2x^2 - 3)^{1/2} + C$ - ١١ $x^2t^2 + 2Cx^2 + 2x + 1 = 0$ - ٩
 $y = -\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 9}$ - ١٥ $y = x^2/2 + C_1$ and $y = -x^2/2 + C_2$ - ١٣
 $k = -\frac{31}{640}, h = (-\frac{31}{256}t + 1)^{2/3}$ - ١٩ $y = \sqrt{24 - 1/(x^2 - 1)}$ - ١٧
 $y = [(x^2 + 1)^3 + 7]^{2/3} + 1$ - ٢٣ $k = -\frac{63}{16}, y = \frac{-4}{\sqrt{63x^2 + 1}}$ - ٢١
 $y = x/(\frac{1}{2}x^3 + 10x + 1)$ - ٢٧ $\frac{1}{4}y^3 + 4y = x^3 + 4/x + C$ - ٢٥
 $s(9) = 20, v(9) = 20$ - ٣١ لا يوجد منحنى هكذا - ٢٩
 $2(3)^{3/2}/(3^{5/2} - 2^{5/2}) \approx 3.14 \text{ min}$ - ٣٥ $72\pi(3 - 2\sqrt{2}) \text{ cu ft}; 15(2 + \sqrt{2}) \text{ sec}$ - ٣٣
 $2\pi(4 + \sqrt{3})^3 \text{ sq ft/min}$ - ٣٧

الفصل الخامس

بند ٥ - ١

- $1 - 1 + 3 + 13 + 29 + 51 + 79$ - ٣ $1 + 2 + 3 + \dots + n$ - ١
 $(i + b)^2 + (2i + b)^2 + (3i + b)^2 + (4i + b)^2 + (5i + b)^2$ - ٥
 $\sum_{n=1}^7 (3n + 1)$ - ١١ $\sum_{n=1}^{10} \frac{z^{n+1}}{n}$ - ٩ $\sum_{n=4}^8 \frac{1}{n^2}$ - ٧
 na - ١٧ $a_n - a_0$ - ١٣

- ١٩ - $[-10, -\frac{29}{3}, -\frac{29}{3}, -9, -\frac{29}{3}, -\frac{29}{3}, -8]$ ٢١ - $[-2, -\frac{17}{3}, \frac{17}{3}, \frac{29}{3}, 7]$
- ٢٣ - $[\sqrt{2}, \frac{5+2\sqrt{2}}{3}, \frac{10+\sqrt{2}}{3}, 5]$ ٢٥ - (أ) 29 (ب) 37.5 (ج) 37
- ٢٧ - (أ) 5.828 (ب) 7.515 (ج) 8.65 ٢٩ - (أ) 3.7944 (ب) 2.8 (ج) 3.6968
- ٣١ - 23, 14 ٣٣ - 45, 20 ٣٥ - 16, -14.25
- ٣٧ - 0.947 و 1.303 ٣٩ - خذ المتوسط ٤١ - 9 (المساحة بالضبط) .
- ٤٣ - 6.167 (المساحة صحيحة الى ثلاثة أرقام عشرية) . ٤٥ - $\frac{32}{3}$ (المساحة بالضبط) .
- ٤٧ - $\frac{4}{3}$ (المساحة بالضبط) 5 و 50 ٥١ - الدوال الثابتة

بند ٣ - ٥

- ١ - $\frac{35}{2}$ ٣ - 12 ٥ - $\frac{17}{6}$ ٧ - $-\frac{3}{4}$ ٩ - $-\frac{1}{2}b^4$
- ١١ - $\frac{27}{2}$ ١٣ - 13 ١٥ - $\frac{44}{3}$ ١٧ - $\frac{11}{4}$ ١٩ - $-\frac{52}{3}$
- ٢١ - $F(2) = 1, F(7) = \frac{49}{4}, F(0) = 0$
- ٢٥ - $\frac{x^2+2}{x^2}$ ٢٧ - $\frac{1}{1+t^4}$ ٢٩ - $\sqrt{a^2-x^2}$ ٣١ - $-\sqrt{1+t^2}$ ٣٣ - $f(b) - f(a)$
- ٤١ - $-\frac{\sqrt{5x^2-1}}{x^3}$ ٤٣ - $-3(3x-2)\sqrt{3x-1}$ ٥٥ - $\sqrt{3}$
- ٥٧ - الدالة المكاملة ليست متصلة في فترة التكامل ، والتكامل لا يوجد .

بند ٤ - ٥

- ١ - 39 ٣ - $\frac{52}{3}$ ٥ - $\frac{16}{3}$ ٧ - $\frac{82}{3}$ ٩ - $\frac{26}{3}$ ١١ - $\frac{1}{2}(17\sqrt{17}-1)$
- ١٣ - $\frac{71}{2}$ ١٥ - $\frac{29}{2}$ ١٧ - 18 ١٩ - $\frac{32}{3}$ ٢١ - $\frac{15}{4}$ ٢٣ - $\frac{125}{6}$
- ٢٥ - $\frac{8}{3}\sqrt{6}$ ٢٧ - $\frac{1}{3}$ ٢٩ - $\frac{16}{3}$ ٣١ - $\frac{237}{12}$ ٣٣ - $\frac{44}{3}$ ٣٥ - $\frac{148}{3}$
- ٣٧ - $\frac{16}{3}$ ٣٩ - $\frac{32}{3}$ ٤١ - $\frac{27}{4}$ ٤٣ - $\frac{1}{12}$ ٤٥ - $ab/3$ ٤٧ - $\frac{1192}{15}$
- ٤٩ - $\frac{75}{4}$ ٥١ - 4 ٥٣ - $24\sqrt{3}/5$

بند ٥ - ٥

- ١ - (أ) 8.750 (ب) 8.687 ٣ - 35.000 ٥ - 0.684 ٧ - 13.319 ٩ - 36.000
- ١١ - 0.668 ١٣ - 13.388 ١٥ - 3.929 ١٧ - 0.399 ١٩ - 1.819
- ٢١ - 2.492 (المساحة صحيحة الى ثلاثة ارقام عشرية) ٢٣ - (أ) 2.996 ، (ب) 3.084

بند ٥ - ٦

$$\begin{array}{llllll} \pi a^3/15 - 11 & 108\pi/5 - 9 & 16\pi - 7 & 729\pi/35 - 5 & 2\pi - 3 & 9\pi - 1 \\ 125\pi/3 - 21 & \frac{1}{3}a^3 - 19 & 88\pi/3 - 17 & 86\pi/15 - 15 & 128\pi - 13 \end{array}$$

(الحجم صحيح الى ثلاثة أرقام عشرية) 6.531 - 23

$$40\pi/3 \text{ (د)} \quad 256\pi/15 \text{ (ج)} \quad 8\pi \text{ (ب)} \quad 128\pi/5 \text{ (أ)} - 25$$

$$12\pi - 22 \quad 13\pi/3 - 31 \quad 1408\pi/15 - 29 \quad 117\pi/8 - 27$$

$$4\pi a^2/3 \text{ (ب)} , 4\pi ab^2/3 \text{ (أ)} - 35$$

32\pi p^3/15 - 37 حيث p هي المسافة من الرأس الى البؤرة .

$$f(x) = \sqrt{(2x+3)/\pi} - 45 \quad 16\pi/15 - 43 \quad 4\pi/3 - 39$$

$$4r^3/\sqrt{3} \text{ (د)} \quad \frac{1}{3}r^3 \text{ (ج)} \quad \frac{8}{3}r^3 \text{ (ب)} \quad \frac{1}{3}r^3 \text{ (أ)} - 47$$

$$\frac{64}{15}\pi - 55 \quad \frac{2}{3}r^3 - 53 \quad \frac{4}{3}b^2a - 51 \quad \frac{1}{2}\pi r^2h - 49$$

$$\frac{4}{3}\pi(b^2 - a^2)^{3/2} - 59 \quad 2\sqrt{3}\pi d^2 - 57$$

61 - 61 حيث r نصف قطر الدائرة .

بند ٥ - ٧

$$\frac{1}{2}\sqrt{1+2t^2} - 5 \quad \frac{2(ax+b)^{3/2}}{3a} - 3 \quad \frac{2}{3}(z-3)^{3/2} - 1$$

$$\frac{-2}{x^2+x+1} - 11 \quad \frac{5}{12}(x^2+2)^{3/2} - 9 \quad \frac{3}{20}(5x^2-10)^{2/3} - 7$$

$$(1+x)^{n+1} \left[\frac{(1+x)^2}{n+3} - \frac{2(1+x)}{n+2} + \frac{1}{n+1} \right] - 15 \quad \frac{-1}{1680} (2-4x)^{20} (1+40x) - 13$$

$$\frac{2}{3}(4x-3)^{1/3} \left[\frac{1}{7}x^2 + \frac{1}{7}x + \frac{1}{14} \right] - 19 \quad \frac{2(2a+by)}{b^2\sqrt{a+by}} - 17$$

$$\frac{-3(1-x^2)^{4/3}}{8x^{5/3}} - 23 \quad -\frac{3}{14}(x^2+15)(20-x^2)^{4/3} - 21$$

$$1 - 31 \quad \frac{111,623}{72} - 29 \quad 13 - 27 \quad \frac{2}{133}(9x-4)(3x+2)^{3/2} - 25$$

$$\frac{11}{10}\pi - 37 \quad \frac{8}{3}(4-\sqrt{2}) - 35 \quad \frac{1}{20}(13-7\sqrt{7}) - 33$$

بند ٥ - ٨

$$\frac{1}{2}, 1 - 7 \quad 8, 3 - 5 \quad -2 - 3 \quad \text{لا يوجد حد أدنى أكبر}$$

$$\frac{2}{3} - 13 \quad \sqrt[3]{4} - 11 \quad 1, 0 - 9 \quad \text{لا يوجد حد أدنى أكبر}$$

بند ٥ - ٩

١ - القيمتان العظمى والصغرى هما 101 في $[-1, 3]$ ، 1 و 5 في $[-1, 2]$ ، 5 و 10 في $[2, 3]$

٣ - $m_p = 21, u_p = 42; m_t = 26.375, u_t = 38.375$.

٥ - $m_p = 4.828, u_p = 9.065; m_t = 6.146, u_t = 8.519$

٧ - 0.005

مسائل متنوعة

١ - 150 .

٣ - $24k$ ، حيث k ثابت التناسب .

٥ - $81\pi k$ ، حيث k ثابت التناسب .

٧ - 2 قوة شمعة .

الفصل السادس

بند ٦ - ١

143°14' - ١١	-630°	-٩	60°	-٧	0.2444	-٥	-5π/3	-٣	2π/3	-١
1.974	-٣٣	2π	الدورة	-٣١	0.2675	-١٩	0.4794	-١٧	-1	-١٥
1	-٤٥	No		-٤٣	2π	-٤١	2π/n	-٣٩	2π/3	-٣٧
									π	-٣٥

٤٧ - المضاعف المشترك البسيط لـ p, q فردية - ٤٩ فردية - ٥١ فردية

٥٣ - لافردية ولازوجية .

بند ٦ - ٢

٥	- لا توجد	٧	0	-٩	1	-١١	0	-١٣	٥
١٥	-∞	-١٧	π/2	-١٩	١	-٢١	١	-٢٣	٢
٢٧	-٣	-٢٩	0	-٣١	-1	-٣٣	cos x	٣٧	١

بند ٦ - ٣

٣ - $\sec \theta \tan \theta - 5 \csc^2 \theta$

١ - $\sec^2 x - \sin x$

٧ - $\frac{1}{2} \csc^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$

٥ - $5 \sec 5\alpha \tan 5\alpha$

١١ - $-6(3x + 7) \sin (3x + 7)^2$

٩ - $-\sin x \cot 3x - 3 \csc^2 3x \cos x$

- $\frac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}}$ - ١٣
 $3 \left(\sin \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cos \frac{1}{z} \right)$ - ١٧
 $\left(\frac{1}{1-u} \sec \frac{u}{1-u} \right)^2$ - ٢٣
 $-\cos^2 y \sec^2 x$ - ٢٥
 $2 \sec^2 u \tan u$ - ٢٩
 0.159 - ٣٣
 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ - ٤٧
 $-\cos \sqrt{k}x$ - ٤١
 $2x - y = 0$ - ٣٩
 $4, 5.774$ - ٣٧
 $(2n\pi, 0)$, n أى عدد صحيح $(2n\pi, 0)$ - ٤٩
 $\left(\frac{2n-1}{2} \pi, 0 \right)$, n - ٥١
 $(\pi/6 + n\pi, 0)$, n أى عدد صحيح - ٥٣
 $\frac{1}{2}(5\pi + 3\sqrt{3})$, $\frac{1}{2}(\pi - 3\sqrt{3})$ - ٥٧
 $2 \cos t$ - ٦٣
 $[-2\pi, -3\pi/2]$, $[-\pi/2, \pi/2]$, and $[3\pi/2, 2\pi]$: تتحرك
 $[-3\pi/2, -\pi/2]$ and $[\pi/2, 3\pi/2]$ الى اليسار فى
 $-\frac{15\sqrt{3}}{4\pi}$ - ٦٩
 $\frac{1}{2} \tan 2y + C$ - ٦٧
 $-\frac{1}{3}(\cos x)^{3/2} + C$ - ٧٥
 $-\frac{2}{3} \cos \frac{4x}{3} + 8 \tan \frac{x}{2} + C$ - ٧٣
 $-\frac{1}{2} \left(\cos 2t - \frac{\cos^5 2t}{5} \right) + C$ - ٨١
 $-\frac{1}{3 \sin 3x} + C$ - ٧٩
 $-\frac{1}{2} \cos x^2 + C$ - ٧٧
 $s^2 + t^2 - 2 \cos s = C$ - ٨٩
 $\sin y = x + C$ - ٨٥
 $\frac{1}{3}(1 + \sin y)^3 + C$ - ٨٣
 $110\sqrt{2} \text{ Watts}$: عظمى عندما $t = (8n + 1)/480 \text{ sec}$, n عدد صحيح موجب ، صغرى :
 $-110\sqrt{2} \text{ volts}$ عندما $t = (8n + 5)/480 \text{ sec}$.
 $\pi(1 - \pi/4)$ - ٩٩
 2 - ٩٧
 $\sqrt{2}$ زاوية نصف قطرية - ٩٥
 $\pi/8 \text{ hr}$, $\frac{1}{24}(6\sqrt{3} + \pi) \text{ hr}$ - ٩٣
 $-\frac{1}{4} \cos 2x = \frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{4}$ - ١٠١

بند ٦ - ٤

- $-5 \cos 3\sqrt{2} \approx 2.2635$ الى يمين نقطة الأصل - ٣
 $g/\pi^2 \text{ ft}$, $g/4\pi^2 \text{ ft}$ - ٩
 $320\pi^2$ - ٧

بند ٥ - ٦

٣- الجذر الوحيد يقع بين 1, 2

بند ٦ - ٦

210°, 7π/6 - ١١	-60°, -π/3 - ٩	0°, 0 - ٧	45°, π/4 - ٥
1/√2 - ١٩	47° - ١٧	68°12', 1.190 - ١٥	78°30', 1.370 - ١٣
1/√(1+4x²) - ٢٧	a/√(1-a²) - ٢٥	0.8 - ٢٣	60° - ٢١
	2x² - 1 - ٣١		0.96 - ٢٩
	٣٣- النطاق هو (-∞, ∞) ، المدى هو (-π/2, π/2)		
	٣٥- (أ) النطاق هو [-1, 1] ، المدى هو [0, π]		
	٣٧- (ب) tan⁻¹(-x) = -tan⁻¹ x ، فردية		

بند ٧ - ٦

$\frac{-4}{\sqrt{2-x^2}}$ - ٥	$\frac{abx}{\sqrt{1-b^2x^2}}$ - ٣	$\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$ - ١
$\tan^{-1} z + \frac{z}{1+z^2}$ - ١١	$\frac{-24x}{x^4+4}$ - ٩	$2\sqrt{1-x^2}$ - ٧
$\frac{5}{2\sqrt{-6+25x-25x^2}}$ - ١٧	$\frac{(a-b)(x^2-ab)}{(x^2+b^2)(x^2+a^2)}$ - ١٥	$\frac{1}{x^2} \tan^{-1} x - \frac{1}{x(1+x^2)}$ - ١٣
$\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ - ٢٣	$\frac{-cx}{(c^2-x^2)\sqrt{c^2-x^2-1}}$ - ٢١	$\frac{1}{3(1+2t+2t^2)}$ - ١٩
$\frac{t^2}{(1-t^2)^{3/2}}$ - ٢٩	$\frac{y^2}{(a^2-y^2)^{3/2}}$ - ٢٧	$27. \frac{4}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}} - 2x$ - ٢٥
$-\frac{2}{3\sqrt{5}}$ - ٣٥	$\frac{\sec^2(z/2)}{1+4\tan^2(z/2)}$ - ٣٣	$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}$ - ٣١
$\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \tan^{-1} 3y$ - ٤٧	$2x - \sqrt{3}y - 1 + \frac{\pi}{6} \sqrt{3} = 0$ - ٤٥	$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y+y(x-y)^2}{1-x-x(x-y)^2}$ - ٣٧
$\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ - ٥٥	$\frac{\pi}{9}$ - ٥٣	$\frac{1}{2\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2x}{\sqrt{3}}$ - ٥١
$\sin^{-1} \frac{1+y}{2}$ - ٦٣	$\tan^{-1}(3+x)$ - ٦١	$-\frac{1}{t} \sqrt{1-t^2}$ - ٥٩
		$\frac{1}{b} \sin^{-1} \frac{bs}{a}$ - ٥٧
$2\pi^2$ - ٧٣	$\frac{3\pi}{4}$ - ٦٩	$b(a+b) \text{ ft}$ - ٦٧
		$\frac{x}{2} \sqrt{4-3x^2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}x}{2}$ - ٦٥
٧٥- (أ) $5 \tan^{-1} \frac{1}{4} \approx 2.94$, (ب) 14.4 ft, (ج) لا ، أكبر مقدار هو $5 \pi/2 \approx 7.85$		

الفصل السابع

بند ۷-۱

$$(4)^3 = 11 - 2 < x < -1 = 92 < x < 3 = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0 - 5 = 21 = 1$$

$$2^5 \quad - 23 (\sqrt{2})^{-1/5} \quad - 21 (2\sqrt{3}-3)^{-1} \quad - 19 \quad 1.2^{-1/4} \quad - 17 \quad 5^{-5} \quad - 10 \quad 5^{3/4} \quad - 13$$

٢٥ - 8.83 (صحيح الى رقمين عشريين) ٢٧ - 0.10 (صحيح الى رقمين عشريين)

$$A/\sqrt{2}; A/8 \quad (f) - 10 \quad 4000, 256,000, 250 - 12$$

بند ۷-۲

• - (أ) 1.946 ، (ب) 0.981 (صحيحة الى ثلاثة أرقام عشرية) .

٩- L دالة متزايدة .

١١ - القاعدة $Dx^r = rx^{r-1}$ قد أثبتت فقط عندما تكون r كسرية .

بند ۷-۳

$$\frac{1}{2}(e^{x/r} + e^{-x/r}) = 0 \quad ae^{ax+b} = 2 \quad -5e^{-5x} = 1$$

$$(2z - az^2)e^{-az} = 11 \qquad (20x - 19)e^{-5x} = 9 \qquad e^{-t}(2t - t^2) = y$$

$$2e^x(2 + e^x) \quad -1x \quad -2e^{-2x+7} \quad -1e \quad -\frac{1}{4}e^{-x/4} \quad -1x$$

$$(e^x - e^{-x})[e^x(2x + 1) + e^{-x}(2x - 1)] = 21 \quad \frac{(2 - 3x)e^{-3x}}{(x - 1)^2} = 19$$

$$\frac{\sqrt{3}(e^x - e^{-x})}{2\sqrt{e^x + e^{-x}}} \quad -27 \quad \frac{4}{(e^t + e^{-t})^2} \quad -28 \quad -\frac{1}{s^2} e^{1/s} \quad -29$$

$$\begin{array}{lll} -2e^{-2x}e^{e^{-2x}} & -22 & \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}} \\ & & -21 \end{array} \quad \frac{-e^{3u} + e^{2u} - 1}{(e^u - 1)^{3/2}} \quad -29$$

$$1.065 \quad -29 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2(x+1)}{e^y y(y+2)} \quad -29 \quad \frac{dy}{dx} = e^{-y} \cos x \quad -30$$

$y = 2e^x + e^{-x}$	-10	5.389	-13	65.912	-11
---------------------	-----	-------	-----	--------	-----

٤٧- $x = e^{-t} \cos t$ - ٤٩ $(1, e)$ - ٥١ لا توجد نقطة انقلاب - ٥٣ $(0, 0)$

٥٥- الأجزاء المقطوعة : $(n\pi, 0)$ حيث n أى عدد صحيح ؛ نهاية عظمى محلية عند $\frac{8n+1}{4}\pi$
 π ؛ نهاية صغرى محلية عند $\frac{8n+5}{4}\pi$ نقط الانقلاب :

$$\left(\frac{2n+1}{2}\pi, (-1)^n e^{-|(2n+1)\pi z|}\pi\right)$$

$$\begin{array}{llll}
\sin e^x + C & -٦٣ & e^{\sin x} + C & -٦١ \\
\frac{1}{2}e^{x^2+6x} + C & -٧١ & \tan^{-1} e^x + C & -٦٩ \\
-0.6 & -٨١ & e^y = e^{-x} + C & -٧٩ \\
& & e^{-1/4} & -٨٥ \\
& & e^4 & -٨٣
\end{array}
\begin{array}{ll}
-2e^{-1/2} + C & -٥٩ \\
\frac{1}{a} e^{ax} + C & -٥٧ \\
-z + 2e^{-z} + C & -٦٥ \\
\frac{1}{2}(1 - 1/e^4) & -٧٥ \\
-2.583 & -٧٣
\end{array}$$

بند ٧ - ٤

$$\begin{array}{lllll}
0.0163 & - ٩ & 100.2 & - ٧ & 7.785 & - ٥ \\
& & 17.6 & - ١٧ & 59.47 & - ١٥ \\
2 \log 2 + 2 \log 3 & - ٢٣ & 9.729 \text{ mg.} & - ٢١ & 6.17 \text{ ft (ب)} & \\
-5 < z < -4 & - ٣٣ & x \geq 100 & - ٣١ & 25.20 & - ٢٩ \\
1, (\log 6)/(\log 2) \approx 2.585 & - ٤١ & 4.117 & - ٣٩ & 2 & - ٣٧ \\
& & & & 3.907 & - ٣٥
\end{array}$$

$$\log 23.7^2 = 2.7495, (\log 23.7)^2 = 1.8898 - ٤٣$$

$$\begin{array}{lllll}
2 & - ٥٣ & \text{صفر} & - ٥١ & -\frac{1}{2} & - ٤٩ \\
& & \frac{1}{4} & - ٥٩ & 1/e^2 & - ٥٧ \\
& & & & 2 & - ٥٥
\end{array}$$

$$1 < \log_{10} 29 < 2 - ٦٣ \quad \log_{1/2} 13 < \log_{10} 13 < \log_7 13 - ٦١$$

$$2 < \log_e 12 < 3 - ٦٧ \quad -2 < \log_2 \frac{1}{4} < -1 - ٦٥$$

$$-1 - ٧٥ \quad \frac{1}{2} - ٧٣ \quad 1.38 - ٧١ \quad 1.976 - ٦٩$$

$$0.6021 \text{ (ج)}, 1.5441 \text{ (ب)}, 0.6335 \text{ (أ)} - ٧٧$$

$$\begin{array}{llll}
-5 < x < -4 & - ٨٥ & x \geq e^2 & - ٨٣ \\
-(2x + 3) & - ٩٣ & y = e^{2x-3} & - ٩١ \\
& & k = -\frac{1}{5} \log_e 2 & - ٨٩ \\
& & x \text{ لجميع } I^x = 1 & - ١٠١ \\
& & te^t & - ٩٧
\end{array}
\begin{array}{ll}
e^{2b+c} & - ٨١ \\
\frac{1}{2}(e^2 - 4) & - ٧٩ \\
C = -2 + \log_e \frac{2}{3} & - ٨٧ \\
\frac{1}{2} & - ٩٥
\end{array}$$

بند ٧ - ٥

$$e^2, e^3, x > e^{100}, x > e^{1,000,000} \text{ (ب)}, 100, 1000, x > 10^{100}, x > 10^{1,000,000} \text{ (أ)} - ٣$$

$$x(2 \ln x + 1) - 11 \quad \frac{14z}{7z-4} - 9 \quad \frac{2at}{at^2+b} - 7 \quad \frac{3}{3x-5} - 6$$

$$\frac{x}{x^2+7} - 19 \quad \frac{2x-2}{x^2-2x+5} - 17 \quad \frac{u(2 \ln u - 1)}{(\ln u)^2} - 16 \quad -\frac{2}{r} - 13$$

$$a \cot ax - 20 \quad (2 + \ln x) \ln x - 23 \quad \frac{1}{2} \left[\ln(x+3) + \frac{x+1}{x+3} \right] - 21$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - 31 \quad \frac{1}{y} + 1 - 29 \quad \sec \theta - 27$$

$$\frac{-3}{(3x+10) \ln 2} - 37 \quad \frac{1}{x^2} \sqrt{x^2 - a^2} - 30 \quad \frac{1}{x \ln 3x} - 22$$

$$\frac{-12a^3x}{(a^2x^2-9)^2} - 43 \quad -\frac{1}{x^2} - 41 \quad \frac{y}{(y^2+c^2) \ln 10} - 39$$

$$2 \ln |3x+5| + C - 69 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} - 47 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y-1} - 40$$

$$\ln |x^3 - x^2| + C - 60 \quad \frac{-1}{2(2x+3)} + C - 63 \quad \frac{1}{2} \ln |u^2 + 2u + 11| + C - 61$$

$$-\frac{3}{x} - \frac{x^3}{3} + C - 69 \quad \ln \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 67$$

$$v + \ln |v-4| + C - 73 \quad \frac{1}{2} \ln(z^2+3) + \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{z}{\sqrt{3}} + C - 71$$

$$\ln(e^u + e^{-u}) + C - 77 \quad \frac{y^4}{4} - \frac{3y^2}{2} + 3 \ln |y| + \frac{1}{2y^2} + C - 70$$

$$6^x \left(-\frac{1}{t^2} + 2 \ln 6 \right) - 80 \quad 2^{3x+3} \ln 2 - 83 \quad 0.9282 - 81 \quad 0.2118 - 79$$

$$2x^{\ln x - 1} \ln x - 93 \quad e^{\sqrt{x}} \frac{\ln u + 2}{2\sqrt{u}} - 91 \quad e^x e^x - 89 \quad (1+e)^x - 87$$

$$\frac{(1+e)^x}{\ln(1+e)} + C - 101 \quad \frac{4^{x^2+6}}{2 \ln 4} + C - 99 \quad \frac{5^x}{3 \ln 5} + C - 97 \quad 1.801 - 90$$

$$\frac{-2}{x^2 \sqrt{x^2+4}} - 111 \quad \pi^x < e^x - 109 \quad e^{-1} - 100 \quad (0,2) - 103$$

$$-\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{(1-x)^n}, n \geq 2 - 110 \quad \frac{x^4 + 12x^2 - 36}{x^2(6-x^2)\sqrt{36-x^4}} - 113$$

$$. a \text{ عند } \ln \sqrt{28} - 119$$

$$. \text{نطاقاً } \ln x, \ln(-x) \text{ مختلفان} - 123$$

بند ٦-٧

$$u = Ct - 6 \quad y = -2/(x^2 + 2C) - 3 \quad y = -3e^{2(x-2)} - 1$$

$$y^2 = -\frac{1}{3}x^3 + 2 \ln |x| + C \quad - ١١ \quad y = a \ln |x-3| + C \quad - ٩ \quad y = Ae^{2x} - b \quad - ٧$$

$$y = e^{2x} \quad - ١٧ \quad y + \ln |y| = -\cos x + C \quad - ١٥ \quad z^{3/2} = (3/\sqrt{2})\sqrt{r} + C \quad - ١٣$$

$$f(x) = e^{x \ln 6} = 6^x \quad - ٢٣ \quad y = -3e^{x^2/6} \quad - ٢١ \quad y = -e^{x/3} \quad - ١٩$$

$$f(x) = 4e^{k(x-1) \ln 3/2} = (4)3^{(x-1)/2} \quad - ٢٥$$

$$\text{سنة } 3200 \text{ (ب) } , \quad 80.68 \text{ mg; } 12.5 \text{ mg; } 200 \text{ mg; } 124.17 \text{ mg (أ) } \quad - ٢٧$$

$$8.312 \text{ hr} \quad - ٢٩ \quad 10.29 \text{ in} \quad - ٣٧ \quad \text{بعد الإبتداء} \quad 40,500; 28.9 \quad - ٢٣ \quad 131.9 \text{ mg.} \quad - ٣١$$

$$c \text{ (ج) } - ٤٥ \quad 4.628 \quad - ٤٣ \quad 2.5 \text{ hr} \quad - ٤١$$

$$f(x) = 10^x \left(\frac{x}{2000} \right)^{-(\ln 5)/\ln 2} \quad 9,460,000. \quad 6,030,000 \quad - ٤٧$$

الفصل الثامن

بند ٨-١

$$(-\frac{1}{3}, 413^\circ), (\frac{1}{3}, 233^\circ) \quad - ١٩ \quad (1, -5\pi/3), (-1, -2\pi/3) \quad - ١٧ \quad (-2, -135^\circ), (2, 45^\circ) \quad - ١٥$$

$$(0, -2) \quad - ٢٧ \quad (0, 0) \quad - ٢٥ \quad (0, 1) \quad - ٢٣ \quad (0, \pi/6), (0, -13^\circ) \quad - ٢١$$

$$(0, 0^\circ) \quad - ٣٥ \quad (-\sqrt{3}/2, -\frac{1}{2}) \quad - ٣٣ \quad (-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}) \quad - ٣١ \quad (-\frac{1}{2}, 3\sqrt{3}/2) \quad - ٢٩$$

$$(2, 120^\circ) \quad - ٤٣ \quad (4\sqrt{2}, -45^\circ) \quad - ٤١ \quad (2, \pi) \quad - ٣٩ \quad (1, 90^\circ) \quad - ٣٧$$

$$(\sqrt{73}, -20^\circ 33') \quad - ٤٧ \quad (8, 5\pi/6) \quad - ٤٥$$

بند ٨-٢

$$(2, \pi/6), (2, 5\pi/6) \quad - ٢٧$$

$$(0, 0), (2\sqrt{3}, 60^\circ), (2\sqrt{3}, 300^\circ) \quad - ٣١ \quad (0, 0), \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2} a, \frac{3\pi}{4} \right), \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} a, \frac{7\pi}{4} \right) \quad - ٢٩$$

$$\text{المركز عند } (a/2, 0) , \text{ القطر } a \quad - ٣٧ \quad \text{الشكل البياني يدور بزاوية } 45^\circ \text{ ضد عقرب الساعة}$$

$$r^2 \sin 2\theta = 4 \quad - ٤٣ \quad r = 4 \quad - ٤١ \quad \tan \theta = 4 \quad - ٣٩$$

$$x^2 + y^2 = 25 \quad - ٤٧ \quad x^2 + y^2 - 5x = 0 \quad - ٤٥$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 6x^3 + 6xy^2 - 7x^2 - 16y^2 = 0 \quad - ٤٩$$

$$r = Ae^{k\theta}, A \quad - ٥٥ \quad \text{حيث } k, A \text{ ثابتان} \quad x^2 - y^2 = 9 \quad - ٥٣$$

٥٧ - 90° عند $(0, 0)$ وعند $(\sqrt{1/\sqrt{2}}, 45)$ عند 90° - ٥٩ عند $(a, 90^\circ)$ وعند $(a, 270^\circ)$

٦١ - (أ) $\frac{1}{2}$ ، (ب) $(0, 0)$ ، $(\frac{3}{2}, 240^\circ)$ ، $(\frac{3}{2}, 120^\circ)$ ، (ج) 45° .

بند ٨ - ٣

١ - $\frac{1}{6}\pi^3$. ٢ - $\frac{3}{2}$. ٥ - $\frac{1}{2}(1 - 1/\sqrt{3} - \pi/12)$. ٧ - $(\pi + 1)/4$.

٩ - πa^2 . ١١ - $3\pi/2$. ١٣ - 27π . ١٥ - $\pi a^2/2$.

١٧ - $\pi a^2/2$ اذا كانت n زوجية ، $\pi a^2/4$ اذا كانت n فردية .

١٩ - $(e^{5a\pi} + 1 - e^{4a\pi} - e^{a\pi})/4a$.

٢١ - ٤ r ; تخيلية لـ $\pi/4 < \theta < 3\pi/4$ و $5\pi/4 < \theta < 7\pi/4$

٢٣ - $3\pi + 9\sqrt{3}/2$. ٢٥ - $\frac{1}{2}(\pi - 2)$. ٢٧ - $4(\sqrt{3} - \pi/3)$.

٢٩ - (أ) π ، (ب) π ، ٥ (ج) π

بند ٨ - ٤

١ - $r = \frac{4}{1 + \cos \theta}$. ٢ - $r = \frac{6}{2 - \cos \theta}$. ٥ - $r = \frac{9}{1 - 3 \cos \theta}$.

٧ - قطع مكافئ ، الرأس عند $(1, 0)$ ، البؤرة عند $(0, 0)$.

٩ - قطع ناقص ، رأساه عند $(1, \pi)$ و (50) ، المركز عند $(2, 0)$.

١١ - قطع زائد ، رأساه عند $(2, 3\pi/2)$ و $(4, \pi/2)$ ، المركز عند $(1, \pi/2)$.

١٣ - $a = 3, b = \sqrt{5}, c = 2$ ، البؤرتان عند $(4, \pi)$ و $(0, 0)$ ، المركز عند $(2, \pi)$.

١٥ - $a = 2, b = 2\sqrt{3}, c = 4$ ، البؤرتان عند $(8, 3\pi/2)$ و $(0, 0)$ ، المركز عند $(4, 3\pi/2)$.

١٧ - $16x^2 + 25y^2 + 96x - 256 = 0$. ١٩ - $y^2 = 4p(x + p)$.

٢١ - $\pm\sqrt{e^2 - 1}$. ٢٣ - 600 miles, 200 miles .

الفصل التاسع

بند ٩ - ١

١ - مستقيم ، من اليسار الى اليمين . ٣ - جزء من قطع مكافئ ، الى أعلى .

٥ - النصف الأعلى من دائرة ، من اليمين الى اليسار . ٧ - دائرة ، مرتين ضد عقرب الساعة .

٩ - قطع مكافئ ما عدا الرأس ، من اليسار الى اليمين على النصف الأسفل ، ثم من اليمين الى اليسار على النصف العلوى .

١١ - قطع ناقص ؛ مع عقرب الساعة . ١٣ - قطع ناقص ؛ مع عقرب الساعة .

١٥ - جزء من قطع مكافئ ؛ يتذبذب .

١٧ - دائرة ما عدا النقطة $(-1, 0)$ ؛ مرة حولها ضد عقرب الساعة .

١٩ - النقطة تتحرك على خط مستقيم من $(4, -3)$ الى $(0, 1)$ والعودة مرة أخرى .

٢١ - النقطة تتحرك مع عقرب الساعة على الدائرة $x^2 + y^2 = 3$ من $(0, \sqrt{3})$ الى $(\sqrt{3}, 0)$.

٢٣ - النقطة تتحرك على القطع المكافئ $y = 1 - x^2$ من $(0, 1)$ الى $(1, 0)$ الى $(0, 1)$ الى $(-1, 0)$ الى $(0, 1)$.

٢٥ - $\frac{3}{2}$. ٢٩ - $y = 2x$ ٣١ - $x = -2t, y = t^2$.

٣٣ - $x = h + r \cos t, y = k + r \sin t$. ٣٥ - $x = -t^2$ و $y = t$.

٣٧ - $x = a \cos \theta (1 - \cos \theta), y = a \sin \theta (1 - \cos \theta)$.

بند ٩-٢

١ - $2x - y - 5 = 0$. ٣ - $2x + y + 4 = 0$. ٥ - $2x + 4\sqrt{3}y - 5 = 0$.

٧ - لا توجد مماسات أفقية أو رأسية .

٩ - مماس أفقى عند $(0, \pm b)$ ؛ مماس رأسى عند $(\pm b, 0)$.

١١ - مماس أفقى عند $(0, 1)$ ؛ لا يوجد مماس رأسى .

١٣ - لا يوجد مماس أفقى ؛ مماس رأسى عند $(\pm a, b)$.

١٧ - مماس أفقى عند $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ و $(0, 0)$ ؛ مماس رأسى عند $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$.

١٩ - $2t$ ٢١ - $-2/9z^4$ ٢٣ - $[-2 \sin t (1 + 2 \cos^2 t)]/\cos^3 t$.

بند ٩-٣

١ - $2\pi a$ ٣ - $\sqrt{2}(e^{\pi} - 1)$ ٥ - $\sqrt{2}$ ٧ - $\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 z + b^2 \cos^2 z} dz$.

٩ - $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+w^2} dw$ ١٥ - $2 \int_1^4 \sqrt{1+t^2} dt$ ١٧ - $6 + \frac{1}{2} \ln 5$.

$$\int_{-3}^3 \frac{\sqrt{81-5x^2}}{3\sqrt{9-x^2}} dx - ٢٣ \quad \cdot \int_0^{1/2} \frac{1+x^2}{1-x^2} dx - ٢١ \quad \cdot \int_0^a \sqrt{1+4x^2} dx - ١٩$$

$$\cdot \frac{4}{a} \int_0^a \sqrt{\frac{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}{a^2 - x^2}} dx - ٢٥$$

٢٩ - 3.28 (بقاعدة شبه المنحرف لأربعة أقسام جزئية)

٣١ - 3.82 (بقاعدة شبه المنحرف لأربعة أقسام جزئية)

$$\cdot \frac{1}{3}(4\pi - 3\sqrt{3}) - ٣٩ \quad \cdot (a/3)[(4 + \pi^2)^{3/2} - 8] - ٣٧ \quad \pi/2 - ٣٥ \quad \cdot \frac{1}{3} - ٣٣$$

$$\cdot L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(r \frac{d\theta}{dr}\right)^2} dr - ٤٥\sqrt{2} \text{ من } ٤٣ \quad 8a - ٤١$$

٤٧ - الزورق يجب أن يبحر 6 min في اتجاه الموضوع حيث رثى المهرب إذا كان المهرب يبحر في اتجاهه ، فسيقبض عليه هناك إذا لم يقبض على المهرب هناك ، فالكابتن عندئذ يغير مسيره ويتبع المسير الحلزوني $r = 2e^{2\theta/\sqrt{3}}$ ، حيث نقطة الأصل هي الموضع الأصلي للمهرب والمحور القطبي هو المستقيم الواصل بين هذه النقطة والزورق .

٤٩ - الاتصال يؤكد وجود التكامل في (٤)

بند ٩ - ٤

$$١ - 3, 2\sqrt{10} \text{ لأعلى} \quad \cdot ٣ - 4\sqrt{10}, \frac{1}{3} \text{ لأعلى} \quad ٥ - 4, \text{ رأسياً لأعلى}$$

$$\sqrt{17}, 1 - ٧ \quad \cdot 156.25 \text{ ft}, 6.25 \text{ sec} - ١١$$

١٣ - مقدار السرعة يساوى مقدار السرعة يساوى مقدار السرعة الابتدائية

٢١ - سيصلان الى الأرض في نفس الوقت .

$$\cdot x = -\frac{1}{2}ct^2 + v_0 \cos \alpha t, y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t - ٢٥ \quad \cdot 54 \text{ ft} - ٢٧$$

$$\cdot x(t) = 2e^t, y(t) = 2e^{2t} + 1 - ٣١ \quad \cdot x(t) = 1 + t^2/2, y(t) = t - ٢٩$$

$$\cdot x(t) = t^3/3 - 4t, y(t) = 2t^2, a^3/3 + 4a - ٢٣$$

الفصل العاشر

بند ١٠ - ١

$$\cdot t - 2e^{-t} + C - ٥ \quad \sin \theta + C - ٣ \quad \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \ln |x| + C - ١$$

$$\cdot \frac{1}{4}(x - \frac{5}{4} \ln |4x + 5|) + C - ٩ \quad \cdot 2(y - \ln |y + 1|) + C - ٧$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{1}{4}(2y+5)^{3/2}(y-1) + C & - 13 & \cdot \frac{-6u+1}{18(3u-1)^2} + C & - 11 \\
& \cdot \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C & - 17 & \cdot \ln |2+v| - \frac{1+v}{2+v} + C & - 10 \\
& \cdot \frac{a}{2bc} \ln \left| \frac{bx-c}{bx+c} \right| + C & - 21 & \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{5}} + C & - 19 \\
& \cdot e^{\sin z} + C & - 20 & \cdot -\frac{3}{2} \ln |9-\theta^2| - \frac{1}{6} \ln \left| \frac{3+\theta}{3-\theta} \right| + C & - 23 \\
& \cdot \frac{-1}{1+\tan u} + C & - 29 & \cdot -\frac{1}{2} \cos e^{2x} + C & - 27 \\
& \cdot \frac{5}{2} \tan^{-1} \frac{v+1}{2} + C & - 33 & \cdot \frac{1}{2c^2} \tan^{-1} \frac{y^2}{c^2} + C & - 31 \\
& \cdot \frac{1}{2} \tan^{-1} (2y+1) + C & - 37 & \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} \tan^{-1} \frac{x-1}{\sqrt{7}} + C & - 30 \\
& \cdot \frac{1}{2}(5 \ln |2x-5| - \ln |2x-1|) + C & - 41 & \cdot \ln \left| \frac{5+z}{1-z} \right| + C & - 39 \\
& \cdot \frac{1}{12}[(3\sqrt{2}-2) \ln |3u+1-\sqrt{2}| - (3\sqrt{2}+2) \ln |3u+1+\sqrt{2}|] + C & - 43 \\
& \cdot -\frac{1}{3}[\ln |3y^2-y+\frac{1}{3}| + 20 \tan^{-1} (6y-1)] + C. & - 40
\end{aligned}$$

بند ۱۰-۲

$$\begin{aligned}
& \cdot y \sin^{-1} 3y + \frac{1}{3} \sqrt{1-9y^2} + C & - 3 & \cdot -(x/a) \cos ax + (1/a^2) \sin ax + C & - 1 \\
& e^{-11} & \cdot \frac{1}{2}[1-(\ln 2)^2] & - 9 & \cdot 2 \ln 2 - \frac{3}{4} & - 7 \\
& \cdot w \cos^{-1} w - \sqrt{1-w^2} + C & - 10 & \cdot \frac{1}{12}(2x-1) \sqrt{4x+1} + C & - 6 \\
& \cdot 2 \left(\frac{9}{e} - e \right) & - 19 & \cdot z \left[\left(1 - \frac{z}{2} \right) \ln z + \frac{z}{4} - 1 \right] + C & - 13 \\
& \cdot x(\sin^{-1} x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x - 2x + C & - 23 & \cdot \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + 4 \ln \frac{\sqrt{3}}{2} & - 21 \\
& \cdot x \tan^{-1} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln (x^2 + a^2) + C & - 27 & \cdot \frac{t}{2} [\sin (\ln t) - \cos (\ln t)] + C & - 20 \\
& \cdot \frac{1}{1+b^2} (1 + be^{-\pi/2b}) & - 31 & \cdot \frac{\pi}{2} - 1 & - 29
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int x^n \sin x \, dx = x^{n-1}(-x \cos x + n \sin x) - n(n-1) \int x^{n-2} \sin x \, dx. \quad \int x^6 \sin x \, dx = -x^6 \cos x + \\
& 6x^5 \sin x + 30x^4 \cos x - 120x^3 \sin x - 360x^2 \cos x + 720x \sin x + 720 \cos x + C, \quad \int x^5 \sin x \\
& dx = -x^5 \cos x + 5x^4 \sin x + 20x^3 \cos x - 60x^2 \sin x - 120x \cos x + 120 \sin x + C.
\end{aligned}$$

$$\cdot \frac{1}{2}[(x^2+1) \tan^{-1} x - x] + C - 37$$

$$(b) a) \tan at + C = \sqrt{\quad} \quad -\frac{1}{2} \cot^2 z + C = \bullet \quad -\frac{1}{2} \cos^6 u + C = \sqrt{\quad} \quad 2 = 1$$

$$2 \cos(x/2) + 2 \cos^3(x/2) - \frac{6}{5} \cos^5(x/2) + \frac{2}{7} \cos^7(x/2) + C = 11 - 2 \cos \sqrt{y} + C = 9$$

$$\cdot \ln |\tan u| + C = 10 \quad \cdot \ln |\alpha - \cos \alpha| + C = 13$$

$$+ \tan x - 2 \ln |\sec x + \tan x| + C = 19 \quad \cdot \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{20} \sin 10x + C = 17$$

$$\cdot -\frac{1}{2} \sqrt{2 \cot 2\phi + 4} + C = 22 \quad \cdot \frac{1}{2} \sec^2 x + C = 21$$

$$\cdot \frac{1}{2} \tan^4(\theta/2) + \frac{1}{3} \tan^6(\theta/2) + C = 27 \quad \cdot -\frac{1}{3} \cot^3 3x + \frac{1}{3} \cot 3x + x + C = 20$$

$$\cdot \ln |\tan x| + C = 33 \cdot (\sin x - 1)/\cos x + C = 31 \quad \cdot \sqrt{2} - 1 = 29$$

$$\cdot \frac{2}{3} \sec^{5/2} \theta - \frac{2}{3} \sec^{3/2} \theta + C = 37 \quad \cdot \frac{1}{2} (\sec y \tan y + \ln |\sec y + \tan y|) + C = 30$$

$$\cdot \frac{1}{8} \sin^7 x \cos x - \frac{1}{48} \sin^5 x \cos x - \frac{5}{192} \sin^3 x \cos x - \frac{15}{384} \sin x \cos x + \frac{15}{384} x + C = 39$$

$$\cdot \frac{1}{3} \tan^3 t + C \quad \cdot \ln |x + 3 + \sqrt{x^2 + 6x + 8}| + C = 43 \quad \cdot \sqrt{a^2 + x^2} + C = 41$$

$$\cdot x/2 - \frac{1}{4} \sin 2x + C = 01 \quad \cdot \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1) = 49 \quad \cdot \ln(2 + \sqrt{3}) = 47$$

$$\cdot \frac{5}{16} z - \frac{1}{2} \sin z + \frac{3}{32} \sin 2z + \frac{1}{24} \sin 3z + C = 03$$

$$\cdot \frac{1}{16} (\alpha + \frac{1}{4} \sin 4\alpha - \frac{1}{4} \cos 4\alpha + \frac{1}{8} \sin^2 4\alpha) + C = 00$$

$$\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C, m^2 \neq n^2. \quad \int \sin^2 mx \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4m} \sin 2mx + C = 60$$

$$\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} + C, m^2 \neq n^2. \quad \int \sin mx \cos mx \, dx = \frac{1}{2m} \sin^2 mx + C = 67$$

$$\sqrt{x+6} + \frac{\sqrt{6}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{6}}{\sqrt{x+6} + \sqrt{6}} \right| + C = 71 \quad \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{2x}{3} + C. \quad | = 69$$

$$\frac{x}{1-4x^2} + C = 70 \quad -\frac{2\sqrt{6}}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2-3x^2}}{\sqrt{3}x} \right| + C = 73$$

$$u(y^2 + 2y + 3) - \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{y+1}{\sqrt{2}} + C = 79 \quad 9 \sin \frac{\alpha}{3} - 3\alpha \cos \frac{\alpha}{3} + C. = 77$$

$$\cdot \frac{1}{2} (x+1) \sqrt{2x^2+x+1} + \frac{7}{16\sqrt{2}} \ln \left| x + \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2x^2+x+1} \right| + C = 81$$

$$(\cos^4 3y + \frac{4}{3} \cos^2 3y + \frac{8}{3}) \sin 3y + C = 80 \quad \cdot -\frac{2}{3} \cot^3 \frac{x}{2} + 2 \cot \frac{x}{2} + x + C = 83$$

$$\cdot -\frac{1}{4} \cot^4 x + \frac{1}{2} \cot^2 x + \ln |\sin x| + C = 87$$

$$= (5 \ln 6x - 1) = 91 \quad z[(\ln 3z)^4 - 4(\ln 3z)^3 + 12(\ln 3z)^2 - 24 \ln 3z + 24] + C = 89$$

بند ۱۰-۴

$$\begin{aligned}
 & \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} \sin^{-1} \frac{\sqrt{7}z}{\sqrt{3}} + C - ۳ \quad \cdot \frac{1}{3} \sin^{-1} 3t + C - ۵ \quad \cdot -\sqrt{10-x^2} + C - ۱ \\
 & \cdot \frac{1}{2} \left(x \sqrt{c^2 - x^2} + c^2 \sin^{-1} \frac{x}{c} \right) + C - ۹ \quad \cdot -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C - ۷ \\
 & \cdot \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 + a^2}| + C - ۱۳ \quad \cdot -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x} \right| + C - ۱۱ \\
 & \cdot \frac{c^2}{2} [\sqrt{2} + \ln (1 + \sqrt{2})] + C - ۱۹ \quad \cdot \frac{1}{2} \sec^{-1} \frac{3x}{2} + C - ۱۷ \quad \cdot \frac{1}{2} \sqrt{9x^2 - 4} + C - ۱۵ \\
 & \cdot \frac{1}{3} \ln \left| \frac{4x-1}{4x+1} \right| + C - ۲۵ \quad \cdot \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x+b}{a} + C - ۲۳ \quad \cdot \frac{1}{2} \ln (6+x^2) + C - ۲۱ \\
 & \cdot -\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} + \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C - ۲۹ \quad \cdot 2\sqrt{55} - \sqrt{7} - \frac{3}{4} \ln \frac{8 + \sqrt{55}}{4 + \sqrt{7}} - ۲۷ \\
 & \cdot \frac{y}{4} (y^2 + a^2)^{3/2} - \frac{a^2 y}{8} \sqrt{y^2 + a^2} - \frac{a^4}{8} \ln |y + \sqrt{y^2 + a^2}| + C - ۳۳ \quad \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 - ۳۱ \\
 & \cdot 3 \sin^{-1} e^u + C \quad \cdot -\frac{1}{36} \left(\frac{2t}{t^2-9} + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{t-3}{t+3} \right| \right) + C - ۳۷ \quad \cdot \frac{6}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} + C - ۳۵ \\
 & \cdot \sin^{-1} \frac{x-1}{2} + C - ۴۵ \quad \cdot \ln |x+3 + \sqrt{x^2 + 6x+8}| + C - ۴۳ \quad \cdot \sqrt{a^2 + x^2} + C - ۴۱ \\
 & \cdot \frac{1}{2} [(z-1) \sqrt{2z-z^2} + \sin^{-1} (z-1)] + C - ۴۹ \quad \cdot \sin^{-1} \frac{2x-5}{7} + C - ۴۷ \\
 & \cdot \sqrt{x^2 + 4} + 5 \ln |x + \sqrt{x^2 + 4}| + C - ۵۳ \quad \cdot \frac{1}{2} (y+1) \sqrt{3-2y-y^2} + 2 \sin^{-1} \frac{y+1}{2} + C - ۵۱ \\
 & \cdot \sqrt{y^2 + 4y+5} - 2 \ln |y+2 + \sqrt{y^2 + 4y+5}| + C - ۵۵ \\
 & \cdot \frac{1}{4} (3\sqrt{4u^2 - 4u+5} + \ln |2u-1 + \sqrt{4u^2 - 4u+5}|) + C - ۵۷ \\
 & \cdot \frac{1}{16} \left(\tan^{-1} \frac{x+1}{2} + \frac{2x+2}{x^2+2x+5} \right) + C - ۶۱ \quad \cdot 6 \sin^{-1} \frac{x-2}{2} - \sqrt{4x-x^2} + C - ۵۹ \\
 & \cdot \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} \right| - \frac{\sin^{-1} x}{x} + C - ۶۵ \quad \cdot \frac{1}{4} [x\sqrt{1-x^2} + (2x^2-1) \sin^{-1} x] + C - ۶۳ \\
 & \cdot \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{2(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{5}} - ۶۹ \quad \cdot \frac{\pi}{4} \sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}} \right) - ۶۷ \\
 & \cdot \frac{\sqrt{4+\pi^2} - \sqrt{1+\pi^2}}{\pi} + \ln \frac{2(\pi + \sqrt{1+\pi^2})}{\pi + \sqrt{4+\pi^2}} - ۷۱
 \end{aligned}$$

بند ۱۰-۵

$$\cdot \frac{1}{2} \ln |x^2 - 9| + C - ۵ \quad \cdot x - \ln |x+1| + C - ۳ \quad \cdot \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C - ۱$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{x-b}{x-a} \right| + C - 17 \cdot \ln \frac{(x-3)^{14}}{|x-1|} + 4x + \frac{x^2}{2} + C - 9 \cdot \ln \frac{(t-1)^2}{|t|} + C - 7 \\
& \cdot z - \tan^{-1} z + C - 11 \cdot 5 \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + \frac{4}{x} + C - 10 \cdot \ln \left| \frac{(y+2)(y-1)}{y} \right| + C - 13 \\
& \cdot \frac{1}{2} \ln |x| - \frac{1}{4} \ln |x^2 + x + 2| - \frac{2}{\sqrt{7}} \tan^{-1} \frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C - 19 \\
& \cdot 7 - \frac{7}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} - 22 \cdot \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{x+2-\sqrt{7}}{x+2+\sqrt{7}} \right| + C - 21 \\
& \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - 27 \cdot -\ln |1-x| + \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C - 20 \\
& \cdot t - \frac{3}{2} \tan^{-1} t + \frac{t}{2(1+t^2)} + C - 31 \cdot 4 \ln |x+1| - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{3(x+1)^3} + C - 29 \\
& \cdot \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + C - 30 \cdot \frac{1}{32} \ln |4z^2+1| + \frac{1}{4} \tan^{-1} 2z + \frac{16z+1}{32(1+4z^2)} + C - 32 \\
& \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\tan^{-1} \frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \tan^{-1} \frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) + C - 39 \cdot 2 \ln 2 + \frac{\pi}{4} - 37 \\
& \cdot \frac{2}{(a-b)^3} \ln \left| \frac{x-b}{x-a} \right| - \frac{1}{(a-b)^2} \left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} \right) + C - 41 \\
& \cdot \frac{ab(e^{akt} - e^{abt})}{ae^{akt} - be^{abt}} \text{ if } a \neq b, \frac{a^2 kt}{akt+1} \text{ if } a = b - 40 \\
& \cdot -\frac{\tan^{-1} x}{x} + \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C - 49 \cdot \frac{1}{3} \left[x^3 \tan^{-1} \frac{x}{2} - x^2 + 4 \ln (x^2 + 4) \right] + C - 47
\end{aligned}$$

بند ۱۰-۶

$$\begin{aligned}
& \cdot (z+1) + 8\sqrt{z+1} + 16 \ln |\sqrt{z+1} - 2| + C - 3 \cdot 6 - \ln 16 - 1 \\
& \cdot -\left(\sec^{-1} \frac{1}{x} + \sqrt{1-x^2} \right) + C - 5 \cdot \frac{y-2}{y} \sqrt{3y+2} + C - 0 \\
& \cdot 2\sqrt{t+2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{t+2} - \sqrt{2}}{\sqrt{t+2} + \sqrt{2}} \right| + C - 11 \cdot \frac{1}{27}(17\sqrt{5} - 5\sqrt{2}) - 9 \\
& \cdot (2\sqrt{x} - 2)e^{\sqrt{x}} + C - 10 \cdot \frac{2}{3}x^{9/4} + \frac{6}{13}x^{13/12} + C - 13 \\
& \cdot \ln |w + 2\sqrt{w} + 2| - 2 \tan^{-1} (\sqrt{w} + 1) + C - 19 \cdot \frac{1}{9}(9x^{2/3} + 4)^{3/2} + C - 17 \\
& \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \sin^{-1} \frac{5z-12}{z} + C - 23 \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2+x+x^2}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) + C - 21 \\
& \cdot 108 + 14\sqrt{21} - 27 \cdot \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} \right) + C - 20 \\
& \cdot \sqrt{e^4+1} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \left[\ln \frac{\sqrt{e^4+1}-1}{\sqrt{e^4+1}+1} - \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right] - 29
\end{aligned}$$

مسائل متنوعة

- $\frac{1}{2} \sec 2\theta + C$ - ١
 $\frac{1}{11} \ln |8 + 11 \sin x| + C$ - ٢
 $-\frac{1}{b} \cos (a + bx) + C$ - ٣
 $\ln \left| \frac{u-1}{u} \right| + C$ - ١١
 $-5 \ln \left| \cos \frac{t}{5} \right| + C$ - ٩
 $\frac{1}{2} (3\sqrt{3}\pi - 9)$ - ٧
 $-\frac{1}{x} (1 + \ln x) + C$ - ١٥
 $-\frac{v^2}{2} - v \cot v + \ln |\sin v| + C$ - ١٣
 $2 \ln \left| \csc \frac{w}{2} - \cot \frac{w}{2} \right| + C$ - ١٧
 $\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{2x}+1} \right| - \sqrt{1-x} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2(1+x)}}{1-\sqrt{2(1-x)}} \right| + C$ - ١٩
 $\frac{1}{6} (6 + 4 \tan x)^{3/2} + C$ - ٢٥
 $\ln (2 + \sqrt{3})$ - ٢٣
 $\frac{1}{2} (3 \ln |b+x| + \ln |b-x|) + C$ - ٢١
 $\frac{1 - \cos x}{\sin x} + C$ - ٣٧
 $\sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + C$ - ٢٧
 $\frac{1}{2} \ln |u^2 + 1| - \frac{1}{u^2 + 1} + C$ - ٤١
 $\tan^{-1} e^x + C$ - ٣١
 $-\ln |e^{-u} - 4| + C$ - ٤٥
 $\frac{1}{3} \ln |\sqrt{2+9z+9z^2} + 3z + \frac{3}{2}| + C$ - ٣٥
 $\frac{2}{3} (x^3 - 1) \sqrt{x^3 + 1} + C$ - ٢٩
 $e^{-\cos t} + C$ - ٣٩
 $-\frac{1}{6} \ln |b^6 - x^6| + C$ - ٣٣
 $-\frac{(a^2 - y^2)^{3/2}}{3a^2 y^3} + C$ - ٤٣
 $\ln |\sqrt{x^2 + x - 1} + x + \frac{1}{2}| + C$ - ٤٩
 $\frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + 3x} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln (\sqrt{2x} + \sqrt{3+2x}) + C$ - ٤٧
 $-\ln |1 + \sin t + \cos t| + C$ - ٥٣
 $e^u + 2e^{-u} - \frac{1}{3} e^{-3u} + C$ - ٥١
 $\ln |1 + \ln x| + C$ - ٥٧
 $\frac{1}{2} [\sqrt{(2+t^2)(3+t^2)} + \ln (\sqrt{3+t^2} - \sqrt{2+t^2})] + C$ - ٥٥

الفصل الحادى عشر

بند ١ - ١١

k ثابت التناسب .

$$4608\pi/5 - \frac{16}{15} p^3 \text{ (ب) } 2p^3 \text{ (أ) } - ٣ \quad 144 - ١$$

$$4r^2 - ٩ \quad \frac{8}{7} \pi k a^{7/2} - \text{حيث } a \text{ نصف قطر الكرة} - ٧$$

بند ۱۱-۲

$$2 \text{ lb} \quad \bullet \quad \frac{8}{3} \quad \text{على يمين الثقل} \quad M_0 = -13, \bar{x} = -\frac{13}{3} \quad \text{۳} \quad M_2 = -36, \bar{x} = -\frac{36}{17} \quad ۱$$

$$۷ \quad - \quad (أ) \quad 4 \text{ ft} \quad \text{من نقطة الارتكاز، (ب) } \frac{36}{5} \text{ ft} \quad \text{من المركز نحو الطفل الأثقل}$$

$$۹ \quad - \quad (\frac{5}{17}, \frac{1}{17}) \quad ۱۱ \quad - \quad (\frac{11}{5}, \frac{7}{10})$$

بند ۱۱-۳

$$۱ \quad - \quad (\frac{8}{3}, \frac{2}{3}) \quad ۳ \quad - \quad (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$$

$$۵ \quad - \quad \left(\frac{(\ln 2)^2 - \ln 4 + 1}{\ln 4 - 1}, \frac{\ln 4 - \frac{1}{2}}{\ln 4 - 1} \right) \quad ۷ \quad - \quad \left(\frac{2(15^{3/2})}{3[4\sqrt{15} - \ln(4 + \sqrt{15})]}, 0 \right)$$

$$۹ \quad - \quad \left(\frac{9}{15 - 8 \ln 4}, \frac{9}{15 - 8 \ln 4} \right) \quad ۱۱ \quad - \quad (1, \frac{12}{5})$$

$$۱۳ \quad - \quad \left(\frac{4r}{3\pi}, \frac{4r}{3\pi} \right) \quad ۱۵ \quad - \quad \left(1, \frac{\pi}{8} \right) \quad ۱۷ \quad - \quad (\frac{50}{31}, 5)$$

بند ۱۱-۴

$$۱ \quad - \quad (3, \frac{18}{5}) \quad ۳ \quad - \quad (\frac{3}{18}, \frac{1}{4}) \quad ۵ \quad - \quad \left(0, \frac{e^2 + 1}{4e} \right) \quad ۷ \quad - \quad (\frac{3}{2}, \frac{12}{5})$$

$$۹ \quad - \quad \left(0, \frac{2(10\sqrt{10} - 1)}{3[3\sqrt{10} + \ln(3 + \sqrt{10})]} \right) \quad ۱۱ \quad - \quad \left(0, \frac{\pi}{8} \right) \quad ۱۳ \quad - \quad (0, \frac{1}{4})$$

$$۱۷ \quad - \quad \bar{x} = 2 - \frac{48}{\pi^2} + \frac{96}{\pi^3}, \bar{y} = \frac{12}{\pi} - \frac{96}{\pi^3} \quad ۱۹ \quad - \quad \bar{x} = \frac{1}{4}, \bar{y} = \frac{1}{4}$$

$$۲۳ \quad - \quad 4\sqrt{2}\pi \quad ۲۵ \quad - \quad \frac{32\pi p^3}{15} \quad ۲۷ \quad - \quad \left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi} \right)$$

$$۲۹ \quad - \quad \frac{17}{2} \quad \text{من القمة على خط التماثل}$$

$$۳۱ \quad - \quad \frac{69}{11} \quad \text{من الحافة اليسرى على الخط الأفقى للتماثل}$$

$$۳۳ \quad - \quad \frac{15}{91} \quad \text{يسار المركز على الخط الأفقى للتماثل}$$

$$۳۵ \quad - \quad 3\pi r/16 \quad \text{من المركز على خط التماثل}$$

$$۳۷ \quad - \quad (2, 0)$$

بند ۱۱-۵

$$۱ \quad - \quad (4 \ln 2, 0) \quad ۳ \quad - \quad \left(\frac{e^{2b}(2b-1)+1}{2(e^{2b}-1)}, 0 \right) \quad ۵ \quad - \quad \left(\frac{e^2-1}{4(e-2)}, 0 \right)$$

$$۹ \quad - \quad (0, 7) \quad ۱۱ \quad - \quad \left(0, \frac{5c}{6} \right) \quad ۱۳ \quad - \quad (\frac{5}{8}, 0)$$

$$17 - h/4 \text{ من القاعدة على المخروط} \quad 13 - \left(0, \frac{e^2 - 3}{8e(e-2)}\right) \quad 15 - (0, \frac{11}{11})$$

$$19 - \left(\frac{\pi^2 - 4}{4\pi}, 0\right) \quad 21 - \left(2, \frac{3 + 2 \ln 2}{15 - 16 \ln 2}\right) \quad 23 - \text{أكبر من } \frac{4}{3}$$

$$25 - 8r/15 \text{ من المركز على محور التماثل}$$

بند ١١ - ٦

σ وزن وحدة الحجم من السائل .

$$1 - 14 \text{ lb; } 33 \text{ in.-lb} \quad 3 - 1440 \text{ ft.-lb} \quad 5 - ch + \frac{1}{2}bh^2 \text{ ft.-lb}$$

$$7 - (أ) \frac{5k}{72}, \text{ حيث } k > 0 \text{ ثابت التناسب, (ب) } 159k/208$$

$$9 - c \ln [(h - x_1)/(h - x_2)] \quad 11 - 450\sigma \text{ ft.-lb}$$

$$13 - (أ) \pi r^2 h^2 \sigma / 2 \text{ ft.-lb, (ب) } \pi r^2 h^2 \sigma / 8 \text{ ft.-lb, (ج) } 3\pi r^2 h^2 \sigma / 8 \text{ ft.-lb}$$

$$15 - \pi r^4 \sigma / 4 \text{ ft.-lb} \quad 17 - 2400(1 + 3\pi) \text{ ft.-lb}$$

بند ١١ - ٧

σ وزن وحدة الحجم من السائل .

$$1 - (أ) \frac{165}{2}\sigma \quad (ب) \frac{45}{2}\sigma \quad (ج) 10\sigma$$

$$3 - \frac{1}{3}\sqrt{2}\sigma \quad 5 - \frac{26\pi}{5}\sigma$$

$$7 - \frac{43}{4}\sqrt{2}\sigma \quad 9 - 48\sigma \quad 11 - 32\pi\sigma$$

$$13 - F = \frac{1}{6}bc(3d + 2c)\sigma \quad 15 - 28\sigma, 6\sigma \text{ lb/day} \quad 17 - 180\sigma$$

الفصل الثاني عشر

بند ١٢ - ١

1 - 3	3 - 0	5 - 1	7 - 0	9 - 0
11 - ∞	13 - 1	15 - ∞	17 - 0	19 - 1/3
21 - 2	23 - 1/2	25 - 2/3	27 - ln 2 - 1	29 - 1/6
31 - -1	33 - 3	35 - 1/√2	37 - 1/12	39 - لا توجد نهاية
41 - 1	43 - -1/2	45 - 1/[(n+1)!]	47 - 0	49 - -1/3
51 - 0	53 - 3/2	55 - 0	57 - 1	59 - 0

$$. \infty \text{ if } b < e, 1 \text{ if } b = e, 0 \text{ if } b > e - ٦٣ \quad . -1 - ٦١$$

$$. v(t) = \begin{cases} \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-k/m}, & k \neq 0. \\ gt + v_0, & k = 0 \end{cases} - ٧٣$$

٧٥ - z قد تختلف في المعادلتين .

٧٧ - إذا كانت $g(b) = g(a)$ ، سوف توجد z في (a, b) بحيث أن $g'(z) = 0$ بنظرية رول .

بند ١٢ - ٢

$$. 1 - ٩ \quad . 1 - ٧ \quad . 0 - ٥ \quad . 0 - ٣ \quad . \frac{1}{4} - ١$$

$$. 1 - ١٩ \quad . 1/\sqrt{e} - ١٧ \quad . 1 - ١٥ \quad . e^n - ١٣ \quad . e^n - ١١$$

$$. 0 - ٢٩ \quad . 0 - ٢٧ \quad . e^n - ٢٥ \quad . 1 - ٢٣ \quad . 1 - ٢١$$

$$. \lim_{x \rightarrow 0} x^p \ln x = \begin{cases} -\infty, & p \leq 0, \\ 0, & p > 0. \end{cases} - ٣١$$

$$. \frac{1}{2} - ٤٥ \quad . -1 - ٤٣ \quad . \frac{1}{2} - ٤١ \quad . \text{صفر} - ٣٩ \quad . \infty - ٣٧ \quad . \text{صفر} - ٣٥$$

$$. \frac{1}{2} - ٥١ \quad . \frac{1}{2} - ٤٩ \quad -\infty \text{ if } n < 1, 0 \text{ if } n = 1, \infty \text{ if } n > 1 - ٤٧$$

الفصل الثالث عشر

بند ١٣ - ١

$$. \infty - ٩ \quad . ٧ - \text{يتباعد} \quad . \frac{1}{4} - ٥ \quad . \sqrt{2} - ٣ \quad . 2 - ١$$

$$. \pi - ١٩ \quad . 1 - ١٧ \quad . \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} - ١٥ \quad . \frac{1}{2} \ln 2 - ١٣ \quad . \frac{1}{2} - ١١$$

$$. \sqrt{2} - ٢٣ \quad . 5\pi/(6\sqrt{3}) - ٢١$$

٢٥ - طبقة الدهان ستكون أرفع فأرفع عندما تصبح x كبيرة ، بعكس عملية الدهان العادية .

$$n > 1 - ٢٩ \quad . (1,4) - ٢٧$$

بند ١٣ - ٢

$$\infty - ٩ \quad . -\frac{1}{4} - ٧ \quad . \pi/2 - ٥ \quad . 100 - ٣ \quad . 3 - ١$$

$$. \infty - ١١ \quad . 3(1 + \sqrt[3]{4}) - ١٣ \quad . \infty - ١٥ \quad . ١٧ - \text{يتباعد} \quad . ١٩ - \text{يتباعد}$$

$$\infty - ٢١ \quad . 0 - ٢٣ \quad . \text{يتباعد} - ٢٥ \quad . \infty - ٢٧ \quad . \infty - ٢٩$$

$$. \infty - ٣١ \quad . \text{يتباعد} - ٣٣ \quad . p < 1 - ٣٥ \quad . \frac{1}{4} - ٣٧$$

الفصل الرابع عشر

بند ۱۴-۱

- ۱ - $(3,6), (1,-4)$ - ۳ - $(-\frac{1}{2},0), (-\frac{32}{2},-8)$ - ۵ - $2\epsilon_1 + 6\epsilon_2, 4\epsilon_1 + 4\epsilon_2$
- ۷ - $(-1,-18)$ - ۹ - $(0,0)$ - ۱۱ - $(-3\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (-3,\frac{1}{2}), (\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$
- ۱۳ - لا معنى له - ۱۵ - لا معنى له - ۱۷ - لا معنى له - ۱۹ - لا معنى له
- ۲۱ - متجه - ۲۳ - متجه - ۲۵ - لا معنى له - ۲۷ - $(-3,-\frac{4}{3})$
- ۲۹ - $3\delta - \frac{3}{2}\beta$ - ۳۱ - 9 - ۳۳ - $\sqrt{a^2 + b^2 + 2b + 1}$ - ۳۹ - ۷
- ۴۳ - 6 - ۴۵ - $\frac{10}{7}$ - ۴۷ - $\frac{2}{3}$ - ۵۱ - $(-1,7)$
- ۵۳ - $(4,-\frac{13}{2})$ - ۵۵ - $(c-a, d-b)$ - ۵۹ - $(-\frac{2}{3},-\frac{4}{3})$ - ۶۱ - $(\frac{5}{2}, \frac{-2+3\sqrt{3}}{2})$
- ۶۳ - $83^\circ 6', 249.84 \text{ mph}$

بند ۱۴-۲

- ۷ - 90° - ۱۱ - 180° - ۱۳ - $\frac{30 \pm 39\sqrt{3}}{37}$ - ۱۷ - $(-bc, ac)$ ، c أى عدد، (ب) $(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}), (\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$
- ۲۷ - أقصر متجه هو $\frac{\alpha \cdot \beta}{|\beta|^2} \beta$ - ۲۹ - $-6\epsilon_1 + 2\epsilon_2$ - ۳۱ - $-\alpha - 2\beta$

بند ۱۴-۳

- ۹ - (ب) $(1,1), (3,2), \sqrt{13}$ - $t=1$; $(0,0), (0,0), 0$; $t=0$; $(-8,4), (12,-4), 4\sqrt{10}$; $t=-2$
- (ج) $t=1$; $(6,2)$; $t=0$; $(0,2)$; $t=-2$; $(-12,2)$
- ۱۱ - $\sqrt{8t^2 + 4t + 5}$ - $2\epsilon_1 + 2\epsilon_2$ - $(2t-1)\epsilon_1 + (2t+2)\epsilon_2$
- ۱۳ - $2\sqrt{4\sin^2 2t + 9\cos^2 2t}$ - $(-8\cos 2t, -12\sin 2t), (-4\sin 2t, 6\cos 2t)$
- ۱۵ - $-e^{-t}(\sin t + \cos t)\epsilon_1 + e^{-t}(\cos t - \sin t)\epsilon_2$ - $(2e^{-t}\sin t)\epsilon_1 - (2e^{-t}\cos t)\epsilon_2, \sqrt{2}e^{-t}$
- ۱۷ - $(0,4), (0,0), 4$ - ۱۹ - $-3\epsilon_2, -4\epsilon_1, 3$ - ۲۳ - $\frac{\sqrt{5}t(2+4t^2)}{\sqrt{1+2t^2+2t^4}}$
- ۲۵ - $\frac{2\sin 2t \cos 2t - 3\cos 3t \sin 3t}{\sqrt{\cos^2 3t + \sin^2 2t}}$

$$29 - (أ) 1, \sqrt{101}, x = (2-y)^2, (ب) \frac{1}{4} \left[10\sqrt{101} + 4\sqrt{17} + \ln \frac{10 + \sqrt{101}}{\sqrt{17} - 4} \right]$$

$$31 - \alpha(t) = (a \cos kt, b \sin kt), \alpha''(t) = -k^2 \alpha(t)$$

$$32 - 4 + 40/t^6 \quad 39 - \text{عند أعلى نقطة} \quad 47 - f(t)/\alpha(t) \text{ لا معنى لها}$$

الفصل الخامس عشر

بند ١٥ - ١

$$1 - n^2; 36, 49, 64$$

$$3 - \frac{1}{8(9)}, \frac{1}{9(10)}, \frac{1}{10(11)}, \frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

$$5 - s_n = \begin{cases} \sqrt{n}, & n \text{ فردية} \\ 0, & n \text{ زوجية} \end{cases} \quad \text{أو} \quad \sqrt{9}, 0, \sqrt{11}; s_n = \frac{1}{2}[1 - (-1)^n]\sqrt{n}$$

$$7 - 1 - \frac{6}{64}, 1 - \frac{7}{128}, 1 - \frac{8}{256}, 1 - \frac{n}{2^n}$$

$$9 - s_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & n \text{ فردية} \\ 0, & n \text{ زوجية} \end{cases} \quad \text{أو} \quad 5, 0, 6; s_n = \frac{1}{2}[1 - (-1)^n] \frac{n+1}{2}$$

$$15 - 2 - 17 - \text{لا توجد نهاية} \quad 19 - \infty \quad 21 - 1/\sqrt{2} \quad 23 - -\frac{3}{2}, -1, -\frac{7}{8}, -\frac{9}{11}, -\frac{2}{3}$$

$$25 - 0; \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{10}, \frac{11}{17}; -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{18}, \frac{1}{32}; 0 \quad 27 - 0 \quad 29 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$31 - 0; \frac{\ln 2}{4}, \frac{\ln 3}{6}, \frac{\ln 4}{8}; 0 \quad 33 - \frac{13}{6}, \frac{77}{18}, \frac{13}{1}, \frac{209}{60}, \frac{8}{3} \quad 35 - e, e^{1/2}, e^{1/3}, e^{1/4}; 1$$

$$37 - 1, c, c^2, c^3; \infty \text{ if } c > 1, 1 \text{ if } c = 1, 0 \text{ if } -1 < c < 1, c \leq -1. \quad \text{لا توجد نهاية إذا كانت}$$

$$39 - \text{لا توجد نهاية} \quad 41 - \sin 1, \sin 2, \sin 3, \sin 4; 1 - \sin 1, 2 \sin \frac{1}{2}, 3 \sin \frac{1}{3}, 4 \sin \frac{1}{4}$$

$$43 - 2, 2, 2, 2; 2 \quad 45 - 1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}; 1 \quad 47 - \text{تتباع لكن ليس الى مالا نهاية}$$

$$49 - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 3 \quad 51 - \text{تتباع لكن ليس الى مالا نهاية} \quad 53 - \text{تتباع الى مالا نهاية}$$

$$55 - 3 \quad 57 - \text{لا توجد نهاية} \quad 59 - \infty \quad 71 - \text{لا}$$

$$81 - x \text{ عدد صحيح} \quad s_n = 1/n, g(x) = \begin{cases} 1/x, & x \text{ عدد صحيح} \\ 1, & x \text{ ليست عددا صحيحا} \end{cases}$$

بند ۱۵-۲

$$1 - \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} - \frac{4}{4^3} + \frac{5}{4^4} + \dots; 0 - ۳ \quad -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \dots; 1 - ۱$$

$$\frac{3}{2} + \frac{10}{3} + \frac{22}{4} + \frac{66}{5} + \frac{127}{6} + \dots; x - ۵$$

$$-1 + \frac{\cos^2 1}{2} - \frac{\cos^2 2}{2^2} + \frac{\cos^2 3}{2^3} - \frac{\cos^2 4}{2^4} + \dots; 0 - ۷$$

$$\frac{t^4}{\sqrt{3}} + \frac{t^5}{\sqrt{4}} + \frac{t^6}{\sqrt{5}} + \frac{t^7}{\sqrt{6}} + \frac{t^8}{\sqrt{7}} + \dots; \infty \text{ if } t > 1, 0 \text{ if } -1 \leq t \leq 1, - ۹$$

no limit if $t < -1$

$$32 + 64 + 128; 2^n - ۱۳ \quad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots - ۱۱$$

$$-\frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9}; (-1)^{n+1} \frac{2n+3}{n+1} - ۱۷ \quad \frac{x^6}{4!} + \frac{x^7}{5!} + \frac{x^8}{6!} + \frac{x^{n+2}}{n!} - ۱۵$$

$$۲۷ - \text{تباع} \quad ۲۵ - \text{تباع} \quad ۲۳ - \text{تباع} \quad ۲۱ - \text{تباع}$$

$$b - ۳۷ \quad \frac{713}{999} - ۳۵ \quad \frac{3}{5} - ۳۳ \quad \frac{1}{4} - ۳۱ \quad \frac{31}{8} - ۲۹$$

$$\frac{1}{4} - ۵۱ \quad \frac{1}{2} - ۴۹ \quad (\frac{3}{5})^n - ۴۵ \quad \frac{1}{n+1} - ۴۳ \quad \frac{r(1+r)}{(1-r)^3} - ۳۹$$

$$20, 28, 28, 1, 1(1) - ۵۳$$

بند ۱۵-۳

$$۳ - \text{تباع} \quad ۵ - \text{تقارب} \quad ۷ - \text{تقارب} \quad ۹ - \text{تباع} \quad ۱۱ - \text{تقارب}$$

۱۳ - الباقي هو $x^n/(1-x)$ ۱۵ - نعم ؛ لا

بند ۱۵-۴

$$۱ - \text{تباع} \quad ۳ - \text{تقارب} \quad ۵ - \text{تباع} \quad ۷ - \text{تقارب} \quad ۹ - \text{تباع} \quad ۱۱ - \text{تباع} \quad ۱۳ - \text{تباع} \quad ۱۵ - \text{تباع} \quad ۱۷ - \text{تقارب}$$

بند ۱۵-۵

$$۱ - \text{تقارب} \quad ۳ - \text{تباع} \quad ۵ - \text{تباع} \quad ۷ - \text{تقارب} \quad ۹ - \text{تقارب} \quad ۱۱ - \text{تقارب} \quad ۱۳ - \text{تقارب} \quad ۱۵ - \text{تباع}$$

- ١٧ - تباعد . ١٩ - تباعد . ٢١ - تباعد . ٢٣ - تقارب .
 ٢٥ - تقارب . ٢٧ - تقارب . ٢٩ - تقارب . ٣١ - تباعد .
 ٣٣ - تباعد . ٣٥ - تباعد اذا كانت $x \leq \frac{1}{2}$ ، تقارب اذا كانت $x > \frac{1}{2}$.
 ٣٧ - تباعد . ٣٩ - تباعد اذا كانت $0 \leq a \leq 1$ ، تقارب اذا كانت $a > 1$.
 ٤١ - تقارب . ٤٣ - تباعد . ٤٥ - تباعد . ٤٧ - تباعد .
 ٤٩ - $\alpha > 1$. ٥٣ - $\ln 100 + \gamma \approx 5.182$. ٥٥ - $\ln \ln n + 0.367$.
 ٥٧ - فى الجملة بعد المتساوية (٣) ويعدها .

بند ١٥ - ٦

- ١ - تقارب . ٣ - تباعد . ٥ - تباعد . ٧ - تقارب .
 ٩ - تقارب . ١١ - تقارب . ١٣ - تباعد . ١٥ - تباعد .
 ١٧ - تباعد . ١٩ - تباعد . ٢١ - تقارب . ٢٣ - تباعد .
 ٢٥ - تباعد . ٢٧ - تباعد . ٢٩ - $5, 1/(8!)$.
 ٣١ - (أ) 10 ، (ب) $0.37 - ٣٣$ $0.97 - ٣٥$ $p < 0 - ٣٧$

بند ١٥ - ٧

- ١ - مقيدة التقارب . ٣ - مقيدة التقارب .
 ٥ - تباعدية . ٧ - مطلقة التقارب .
 ٩ - تباعدية . ١١ - مطلقة التقارب .
 ١٣ - مقيدة التقارب . ١٥ - تباعدية .
 ١٧ - مقيدة التقارب

بند ١٥ - ٨

- ١ - تقارب . ٣ - تقارب . ٥ - تقارب . ٧ - تباعد .
 ٩ - تقارب . ١١ - تقارب . ١٣ - تقارب . ١٥ - تباعد .
 ١٧ - تباعد . ١٩ - تقارب . ٢١ - تباعد . ٢٣ - تقارب .

- ٢٥ - تقارب . ٢٧ - تقارب . ٢٩ - تقارب . ٣١ - تقارب .
 ٣٣ - تقاربة . ٣٥ - تقاربة . ٣٧ - تقاربة . ٣٩ - تباعدية .
 ٤١ - تباعدية . ٤٩ - تقاربة . ٥١ - تقاربة .

مسائل متنوعة

- ١ - تقاربة اذا كانت $|r| < 1$ ، تباعدية اذا كانت $|r| \geq 1$ - تقاربة ٥ - تقاربة .
 ٧ - تقاربة . ٩ - تقاربة . ١١ - تباعدية . ١٣ - تقاربة .
 ١٥ - تباعدية . ١٧ - تقاربة . ١٩ - تباعدية . ٢١ - تقاربة .
 ٢٣ - تباعدية . ٢٥ - تقاربة . ٢٧ - تقاربة . ٢٩ - تباعدية .
 ٣١ - تقاربة . ٣٣ - تباعدية . ٣٥ - تباعدية . ٣٧ - تباعدية .
 ٣٩ - تقاربة . ٤١ - تباعدية . ٤٣ - تباعدية . ٤٥ - تباعدية .
 ٤٧ - تقاربة . ٤٩ - تقاربة اذا كان $|a| < 1$ ، تباعدية اذا كان $-1 < a \leq 1$.
 ٥١ - تباعدية اذا كانت $a \leq 1$ ٥٣ - تباعدية .

الفصل السادس عشر

بند ١٦ - ١

- ١ - $(-1, 1)$. ٣ - $[-1, 1]$. ٥ - $[0, 2)$. ٧ - $[-1, 1]$. ٩ - $(-2, 2]$.
 ١١ - $(-\infty, \infty)$. ١٣ - $(-2, 2)$. ١٥ - $(-2, 2)$. ١٧ - $(-\infty, \infty)$. ١٩ - $(-1, 1)$.
 ٢١ - $(-2, 0]$. ٢٣ - $(-\infty, \infty)$. ٢٥ - $(-3, 3)$. ٢٧ - $(-\infty, \infty)$. ٢٩ - $(-\infty, \infty)$.
 ٣١ - $(-2, 1)$. ٣٣ - $(-\infty, \infty)$. ٣٥ - $[4 - 1/\sqrt{3}, 4 + 1/\sqrt{3}]$.
 ٣٧ - $(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$. ٣٩ - $[1, 5)$. ٤١ - $(-1, 1)$. ٤٣ - $[-4, 0]$.
 ٤٥ - $(-1, 1)$. ٤٧ - جميع x . ٤٩ - $x > 1$ أو $x < -1$.
 ٥١ - $x \leq -1$ أو $x \geq 1$ ٥٣ - جميع $x \neq 0$ ٥٥ - تباعدية لجميع x .
 ٥٧ - المتسلسلة ليست متسلسلة قوى في $x = a$.

بند ١٦ - ٢

$$- 0.223 - ١$$

$$0.464. (ب) \quad -1 < x \leq 1. (أ) \quad 1/(1+x^2) - ٣$$

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} (1/x) = \pi/2, 1.107 (ج)$$

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} (1/x) = \pi/2, 1.107 (ج) \quad ٧ - \text{الواحد الصحيح هو النقطة الطرفية لفترة التقارب} \quad [-1,1]; 0.0976 - ٥$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} - ٩$$

$$f(x) = \sin x, g(x) = \cos x (د) \quad (أ) (-\infty, \infty), (-\infty, \infty) (ا) - ١١$$

بند ١٦ - ٣

$$\ln(1-y) = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \dots, [-1,1) - ٣$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, (-\infty, \infty) - ٥$$

$$2^x = 1 + x \ln 2 + \frac{(x \ln 2)^2}{2!} + \frac{(x \ln 2)^3}{3!} + \dots, (-\infty, \infty) - ٧$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots, (-1,1) - ٩$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2!2^2} + \frac{x^3}{3!2^3} - \dots, [-1,1] - ١١$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x}} = 1 + x + \frac{1 \cdot 3}{2!} x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} x^3 + \dots, (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] - ١٣$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots - ١٧ \quad \ln \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \dots - ١٥$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{8x^5}{5!} - \dots - ١٩$$

$$e^x = e^a \left[1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots \right], \text{ all } x - ٢١$$

$$\ln |x| = -(x+1) - \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(x+1)^3}{3} - \dots, -2 \leq x < 0 - ٢٣$$

$$\sin x = \sin c + (\cos c)(x-c) - \frac{\sin c}{2!} (x-c)^2 - \frac{\cos c}{3!} (x-c)^3 + \frac{\sin c}{4!} (x-c)^4 + \dots - ٢٥$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!} \left(x + \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(x + \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{4!} \left(x + \frac{\pi}{4}\right)^4 + \dots \right], \text{ all } x. - ٢٧$$

$$\sqrt{x} = 2 + \frac{1}{2} (x-4) - \frac{1}{2!2^3} (x-4)^2 + \frac{1 \cdot 3}{3!2^3} (x-4)^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4!2^4} (x-4)^4 + \dots, 0 \leq x \leq 8. - ٢٩$$

$$\cos 2x = 1 - \frac{x^2}{2!2^2} + \frac{x^4}{4!2^4} - \frac{x^6}{6!2^6} + \dots - ٣٥ \quad e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots - ٣٣$$

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = -1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} - \dots - ٣٩ \quad \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots - ٣٧$$

$$\ln x - \{٧ \text{ ليس لها مشتقة عند } 0\} \quad \cos^2 x = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3x^4}{4!} - \frac{2^5x^6}{6!} + \dots - ٤١$$

$$- ٤٩ \text{ ضع } x - a = h \text{ واستبدل } a \text{ بـ } x$$

$$\cos(x+h) = \cos x - (\sin x)h - (\cos x) \frac{h^2}{2!} + (\sin x) \frac{h^3}{3!} + \dots$$

$$x^3 - 3x^2 + 8x - 5 = 1 + 5(x-1) + (x-1)^3 - ٥٣$$

$$x^{10} = 1 - 10(x+1) + 45(x+1)^2 - 120(x+1)^3 + 210(x+1)^4 - 252(x+1)^5 + \dots - ٥٥$$

$$210(x+1)^6 - 120(x+1)^7 + 45(x+1)^8 - 10(x+1)^9 + (x+1)^{10}$$

بند ١٦ - ٤

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, (-1, 1]. \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, (-\infty, \infty) - ١$$

$$e^x = \frac{1}{e} \left[1 + (x+1) + \frac{(x+1)^2}{2!} + \frac{(x+1)^3}{3!} + \dots \right], (-\infty, \infty) - ٥$$

$$\sin x = \sin c + (\cos c)(x-c) - \frac{\sin c}{2!}(x-c)^2 - \frac{\cos c}{3!}(x-c)^3 + \frac{\sin c}{4!}(x-c)^4 - \dots + \dots (x, \infty). - ٧$$

$$- ١١ \text{ ضع } n = 0 \text{ في (٤).}$$

بند ١٦ - ٥

$$T_0(x) = T_1(x) = 1, T_2(x) = T_3(x) = 1 - x^2/2, T_4(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24 - ١$$

$$T_0(x) = 0, T_1(x) = x - 1, T_2(x) = (x-1) - (x-1)^2/2, T_3(x) = (x-1) - (x-1)^2/2 + (x-1)^3/3 - ٣$$

$$T_1(x) = 11 + 6(x-2), T_2(x) = T_3(x) = T_{10}(x) = 11 + 6(x-2) + (x-2)^2 - ٥$$

$$T_1(x) = -7 + 12(x+2), T_2(x) = -7 + 12(x+2) - 6(x+2)^2, T_3(x) = T_4(x) = -7 + 12(x+2) - 6(x+2)^2 + (x+2)^3 - ٧$$

$$T_1(x) = 3 - 15(x+1), T_2(x) = 3 - 15(x+1) + 16(x+1)^2, T_4(x) = T_6(x) = 3 - 15(x+1) + 16(x+1)^2 - 7(x+1)^3 + (x+1)^4 - ٩$$

$$T_0(x) = T_1(x) = -1, T_2(x) = -1 - x^2 - ١١$$

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = 1 + x/2, T_2(x) = 1 + x/2 - x^2/8 - ١٣$$

$$0 \leq x \leq 25^\circ 36', 0 \leq x \leq 71^\circ 19' - ٢١ \quad 0.005 - ١٩ \quad 0.08 - ١٧ \quad \pi \approx 2.83, \pi \approx 3.18 - ١٥$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{4!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 \right] - ٢٣$$

0.7432 - ٢٢	0.1974 - ٢١	1.6484 - ٢٩	٢٧ - أربعة	٢٥ - أربعة ، ستة
0.0487; error < 0.0000 - ٣٩	0.9801 - ٣٧	خطأ < 0.0000 - ٣٧	3.3192 - ٣٥	خطأ < 0.0028 - ٣٥
0.2915 - ٤٧	0.9986 - ٤٥	0.3679 - ٤٣	0.8192 - ٤١	خطأ < 0.0000 - ٤١
. $\ln x + a(x-1) + \frac{a^2}{2!2} (x^2-1) + \frac{a^3}{3!3} (x^3-1) + \dots$ - ٤٩				
1 - ٦١	0.4514 - ٥٩	0.31028 - ٥٧	0.0996677 - ٥٥	1.12 - ٥٣
-1 - ٧٣	0 - ٧١	2 - ٦٩	١ - ٦٧	0 - ٦٥
				- ٦٣

بند ١٦ - ٦

$$(a-b)^3 = a^3 - 5a^2b + 10ab^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5 - ٣ \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - ١$$

$$(2-c)^9 = 512 - 2304c + 4608c^2 - 5376c^3 + 4032c^4 - 2016c^5 + 672c^6 - 144c^7 + 18c^8 - c^9 - ٥$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots, (-1,1) \quad - ١١ \quad \frac{77 \cdot 76 \cdot 75 \dots 55}{23!} - ٧$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots, (-1,1) \quad - ١٣$$

$$\left(1 + \frac{y}{3}\right)^{3/2} = 1 + \frac{y}{2} + \frac{1}{2!2^2} \frac{y^2}{3} - \frac{1}{3!2^3} \frac{y^3}{3^2} - \frac{1 \cdot 3}{4!2^4} \frac{y^4}{3^3} + \dots, [-3,3] \quad - ١٥$$

$$\sqrt{1+x^3} = 1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2!2^2} x^6 + \frac{1}{3!2^3} x^9 - \dots, [-1,1] \quad - ١٧$$

$$(1+u)^{-3/5} = 1 - \frac{3}{5}u + \frac{3 \cdot 8}{2!5^2} u^2 - \frac{3 \cdot 8 \cdot 11}{3!5^3} u^3 + \dots, (-1,1] \quad - ١٩$$

$$\frac{1}{(1+3t)^3} = 1 - 3 \cdot 3t + \frac{3 \cdot 4 \cdot 3^2}{2!} t^2 - \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3^3}{3!} t^3 + \dots, (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \quad - ٢١$$

$$\frac{(1-w^2)^{4/3}}{w} = \frac{1}{w} - \frac{4}{3}w + \frac{4}{2!3^2} w^3 + \frac{4 \cdot 2}{3!3^3} w^5 + \dots, [-1,1]. \quad - ٢٣$$

$$\sqrt[3]{y+2} = \sqrt[3]{2} \left(1 + \frac{1}{6}y - \frac{2}{2!6^2} y^2 + \frac{2 \cdot 5}{3!6^3} y^3 - \dots\right), [-2,2] \quad - ٢٥$$

$$u^2 \sqrt{2+5u} = \sqrt{2} \left(u^2 + \frac{5}{2^2} u^3 - \frac{5^2}{2!2^4} u^4 + \frac{3 \cdot 5^3}{3!2^6} u^5 - \dots\right), [-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}] \quad - ٢٧$$

$$\frac{u+2}{u-1} = -2 - 3u - 3u^2 - 3u^3 - \dots, (-1,1) \quad - ٢٩$$

$$\sqrt{3+\sin^2 x} = \sqrt{3} \left(1 + \frac{1}{6} \sin^2 x - \frac{1}{2!6^2} \sin^4 x + \frac{1 \cdot 3}{3!6^3} \sin^6 x - \dots\right), \text{ all } x - ٣١$$

$$(x-3)^{1/2} = x^{1/2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{3}{x} - \frac{1}{2!2^2} \left(\frac{3}{x}\right)^2 - \frac{3}{3!2^3} \left(\frac{3}{x}\right)^3 - \frac{3 \cdot 5}{4!2^4} \left(\frac{3}{x}\right)^4 - \dots \right], x \geq 3 \quad - ٢٢$$

$$1.00. - ٤١ \quad 0.61 - ٣٩(١) \text{ في } x=1 \text{ ضع} - ٢٧ \quad 2.7071 - ٢٥$$

$$\frac{1}{2} - ٤٩ \quad \frac{1}{2} - ٤٧ \quad 330.87 - ٤٥ \quad 0.18 - ٤٣$$

$$0.481 - ٥٧ \quad 0.508 - ٥٥ \quad 5.066 - ٥٣ \quad 9.899 - ٥١$$

$$4.990 - ٦٣ \quad 0.494 - ٦١ \quad 0.049 - ٥٩$$

تذليل

بند ت - ١

$$(-2, -3), (-1, 5), (0, 3) \text{ (ج)} \quad (-2, 3), (-1, -5), (0, -3) \text{ (ب)} \quad (2, -3), (1, 5), (0, 3) \text{ (أ)} - ٣$$

$$15 - ٩ \quad ٧ - ٧ \quad 3, -3, 6, 9, -3. \text{ (ب)} \quad 2, 6, -6, -6, 3 \text{ (أ)} - ٥$$

$$\sqrt{305}/2 - ١٧ \quad 5 - ١٥ \quad (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) - ١٣ \quad (3, 6) - ١١$$

$$\frac{39}{2} - ٢٥ \quad ٧ - ٢٣ \quad ٧ - ٢١ \quad 5 - ١٩$$

$$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) - ٣٩ \quad 5x + 3y = 1 - ٣٧ \quad (0, \pm a) - ٣٥ \quad 4 \text{ or } -3 - ٢٣$$

$$(4, 13), (4, -3) - ٤٣ \quad (4, -1), (1, 2) - ٤١$$

بند ت - ٢

$$a < 0, x^4 + y^2 = -3 - ٣٩ \quad \text{متكافئتان} - ٥٣ \quad \text{غير متكافئتين} - ٥٥ \quad \text{متكافئتان} - ٥٧$$

بند ت - ٣

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \quad - \quad (x+6)^2 + (y+1)^2 = 1 - ٣ \quad x^2 + y^2 = 49 \quad - ١$$

$$(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9 - ١١ \quad (x-2)^2 + (y-4)^2 = 17 - ٩ \quad x^2 + y^2 = 80 \quad - ٧$$

$$(0, 5), 5 - ١٧ \quad \text{لا يوجد شكل بياني} - ١٥ \quad x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 - ١٣$$

$$10 - 5\sqrt{2} - ٣١ \quad (4, 0) - ٢٧ \quad (0, -\frac{1}{2}), \sqrt{6} - ١٩$$

$$\sqrt{22} - ٣٥ \quad x^2 + y^2 - 4x + 4y = 49 \pm 12\sqrt{13} - ٣٣$$

$$\text{دائرة، المركز عند } (\frac{1}{2}, -1) \text{، نصف القطر } \frac{1}{2} - ٣٧$$

$$\text{دائرة، المركز عند } (r, 0) \text{، نصف القطر } 2r - ٣٩$$

$$2x^2 + y^2 - 16x \pm \sqrt{7}x + 14 = 0 - ٤٣$$

$$k \geq 4\sqrt{2} - ٤١$$

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25, (x-29)^2 + (y-29)^2 = 29^2 - ٤٥$$

٤٧ - دائرة ، المركز عند $(-2, 4)$ ، نصف القطر $\sqrt{17}$ ، فيما عدا الجزء داخل الدائرتين المعطيتين .

$$2x^2 + 2y^2 - x + 4y - 6 = 0 - ٥١$$

$$x^2 + y^2 + 3x + 3y = 0 - ٤٩$$

بند ت - ٤

$$\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} - ٧ \quad 1/\sqrt{3}, \pi/6 - ٥ \quad -1, 3\pi/4 - ٣ \quad 1, \pi/4 - ١$$

$$\text{Yes.} - ٢٣ \quad \text{Yes.} - ٢١٠ \quad \text{لا يوجد ميل} - ١١ \quad -c/b, b/c - ٩$$

$$\frac{1}{2} - ٣٧ \quad \text{Yes} - ٢٩ \quad \text{نعم} - ٢٧ \quad \text{لا} - ٢٥$$

$$(7, -2), (1, -6) - ٤٣ \quad (-6, -3) - ٤١ \quad 2 - ٣٩$$

بند ت - ٥

$$mx - y - ma = 0 - ٥ \quad 7x - 4y + 8 = 0 - ٣ \quad 2x - y + 4 = 0 - ١$$

$$hx + ry - hr = 0 - ١١ \quad x = 2 - ٩ \quad x = -6 - ٧$$

$$2x - 5y - 6 = 0, 5x + 2y - 15 = 0 - ١٥ \quad 2x + 2y - 9 = 0 - ١٣$$

$$ax + by - 5b = 0, bx - ay + 5a = 0 - ١٩ \quad x = 0, y = 0 - ١٧$$

$$\frac{1}{3}; x = -11, y = \frac{1}{3} - ٢٣ \quad \frac{2}{3}; x = 4, y = -3 - ٢١$$

$$-a/b; x = -c/a, y = -c/b - ٢٧ \quad y = \frac{2}{3}, x \text{ لا يوجد جزء مقطوع من المحور } x - ٢٥$$

$$(2, 2) - ٣٣ \quad (10, -\frac{1}{3}) - ٣١ \quad 1/m, x = b, y = -b/m - ٢٩$$

$$2x - y + 3 = 0 (د) \quad x = 1 (ج) \quad 2x + 5y - \frac{25}{2} = 0 (ب) \quad 5x - 2y + 5 = 0 (أ) - ٣٩$$

$$-٤٥ \quad \text{الخطان ينطبقان} - ٤٣ \quad \text{لا يوجد} - ٤١ \quad (-3, 4)$$

$$A'B = B'A - ٤٩ \quad x + 2y + 9 = 0 (ب) \quad 2x - y + 8 = 0 (أ) - ٤٧$$

$$x + 3y = 0 - ٥٥ \quad \text{لا يوجد} - ٥٣ \quad (0, -8), (10, 2) - ٥١$$

$$Ax + By - Ax_1 - By_1 = 0 - ٦١ \quad x + y \pm 10\sqrt{2} = 0 - ٥٩ \quad 2x - 3y + 2 = 0 - ٥٧$$

$$76 - ٦٩ \quad 6/\sqrt{5} - ٦٧ \quad \frac{8}{3} - ٦٥ \quad 1 - ٦٣$$

$$. (5x - 4)^2 + 25y^2 = 221 - ٧٣ \quad . x^2 + y^2 - 4x + 2y - 21 = 0 - ٧١$$

$$. x + y - 8 = 0 - ٧٧ \quad . 4x^2 + 4y^2 - 48x + 4y = 0 - ٧٥$$

٧٩ - خط عمودى على الخط الواصل بين النقطتين الثابتين .

$$. 4x - y - 18 = 0 - ٨١$$

بند ٦ -

$$. x - 2y = 0, x - 2y = 0 - ١ \quad , \text{متماثل فى نقطة الأصل .}$$

$$. x = 3, x = -3 - ٣ \quad \text{متماثل فى المحور } x .$$

$$y = -x^4, y = x^4 - ٥ \quad \text{متماثل فى المحور } y .$$

$$y = -x^3, y = -x^3 - ٧ \quad \text{متماثل فى نقطة الأصل .}$$

$$y = -x/(x^2 + 1), y = -x/(x^2 + 1) - ٩ \quad , \text{متماثل فى نقطة الأصل .}$$

$$y = -(1 + x^2 + \dots + x^{2n}), y = 1 + x^2 + \dots + x^{2n} - ١١ \quad , \text{متماثل فى المحور } y .$$

$$y = -\cos x, y = \cos x - ١٣ \quad , \text{متماثل فى المحور } y .$$

$$x = 0 - ٢٣ \quad . x = \frac{1}{2}y - ٢١ \quad . x - y + 4 = 0 - ١٩ \quad \text{نعم} - ١٥$$

$$. -m, -m - ٢٩ \quad . xy = 1 - ٢٧ \quad . x = \frac{3}{2}y - 5 - ٢٥$$

بند ٧ -

$$y^2 = 4ax - ٥ \quad . y^2 = -10x - ٣ \quad . y^2 = 24x - ١$$

$$(0,0), (0, 1/4c), y = -1/4c - ٩ \quad . (0,0), (0, -\frac{1}{2}), y = \frac{1}{2} - ٧$$

$$|a + k| 4 - ٢٣ \quad y^2 + 8y + 16x + 80 = 0 - ١٣ \quad . y^2 = 12x - 24 - ١١$$

$$x = \frac{7}{6}y^2 - \frac{3}{2}y - \frac{3}{2} \quad (ب) \quad , y = -\frac{7}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad (أ) - ٣٥$$

$$y^2 = 2px \quad \text{القطع المكافئ} - ٤٣ \quad x^2 = 32y - ٤١$$

$$: (10 - \sqrt{34}, -2 + \sqrt{34}), (10 + \sqrt{34}, -2 - \sqrt{34}) - ٤٥$$

$$. 2ax - y - a^2 = 0 - ٥٣ \quad . (\pm 3, 4), (\pm 2\sqrt{6}, -1) - ٤٩ \quad (0,0), (4p, 4p) - ٤٧$$

بند ت - ٨

- ١ - $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ - ٢ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{29} = 1$ - ٣ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ - ٤ $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$ - ٥
- ٩ - $(0, \pm 3), (0, \pm 2\sqrt{2}), (\pm 1, 0)$ - ١١ $(\pm 5, 0), (\pm 4, 0), (0, \pm 3)$ - ١٢
- ١٣ - دائرة $(0, \pm 1), (0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}), (\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ - ١٥ $y = \pm \frac{4}{3}x$ - ١٧
- ١٩ - $1/\sqrt{5}, x = \pm 5$ - ٢١ 0 ، لا توجد أدلة اذ أن المنحنى دائرة
- ٢٣ - $2x^2 + y^2 - 8x = 0$ - ٢٩ $x^2/12 + y^2/6 = 1$ - ٣١ $x^2 + 4y^2 = 64$ - ٣١

بند ت - ٩

- ١ - $x^2/16 - y^2/20 = 1$ - ٢ $y^2/36 - x^2/64 = 1$ - ٣ $y^2 - x^2 = 8$ - ٤
- ٧ - $x^2 - y^2 = a^2$ - ٩ $(\pm 3, 0), (\pm \sqrt{13}, 0), y = \pm 2x/3$ - ١١
- ١١ - $(0, \pm \sqrt{12}), (0, \pm \sqrt{14}), y = \pm \sqrt{6}x$ - ١٣ $(\pm \sqrt{5}, 0), (\pm \sqrt{7}, 0), y = \pm \sqrt{3}x$ - ١٥
- ١٥ - $(0, \pm \frac{4}{3}), (0, \pm 2\sqrt{2}/3), y = \pm x$ - ١٧ $(\pm a, 0), (\pm \sqrt{2}a, 0), y = \pm x$ - ١٩
- ١٩ - $\sqrt{41}/4, x = \pm 16/\sqrt{41}$ - ٢١ $\sqrt{13}/3, y = \pm 9/\sqrt{13}$ - ٢٣
- ٢٣ - $\sqrt{3}, x = \pm 3\sqrt{3}$ - ٢٥ $3x^2 - y^2 - 18x + 24 = 0$ - ٢٧
- ٢٩ - $y^2/5 - x^2/2 = 1$ - ٣٣ - طويل وضيق . عندما تزداد e ، القطع الزائد يتسع أكثر .

بند ت - ١٠

- ١ - $x^2 = 6(y - 1)$ - ٢ $(x - 5)^2 = -8(y - 3)$ - ٣ $(y - b)^2 = -4ax$ - ٤
- ٧ - $\frac{(x + 3)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ - ٩ $\frac{4(x - 3)^2}{225} + \frac{(y + 1)^2}{9} = 1$ - ١١
- ١١ - $\frac{(y + 2)^2}{4} - \frac{(x + 3)^2}{5} = 1$ - ١٣ $\frac{(y - 2)^2}{4} - \frac{(x + 2)^2}{9} = 1$ - ١٥
- ١٥ - $\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$ - ١٧ - (أ) قطع مكافئ ، (ب) $(6, 0)$ ، (ج) $(6, 1/32)$ - ١٩
- ١٩ - (أ) قطع زائد ، (ب) $(-5, 3 + \sqrt{2}), (-5, 3 - \sqrt{2})$ ، (ج) $(-5, 3 + 3\sqrt{3}), (-5, 3 - 3\sqrt{3})$ ، (د) $y - 3 = \pm(\sqrt{2}/5)(x + 5)$ - ٢١
- ٢١ - (أ) قطع ناقص ، (ب) $(4, 3), (-2, 3)$ ، (ج) $(1 + \sqrt{5}, 3), (1 - \sqrt{5}, 3)$

۲۳ - (أ) قطع مكافئ ، (ب) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ، (ج) $(0, -\frac{1}{2})$

۲۵ - (أ) دائرة ، (ج) $(0, -\frac{1}{2})$

۲۷ - (أ) قطع زائد ، (ب) $(-1, -4)$ ، $(-1, -2)$

(ج) $(-1, -3 + \sqrt{2})$ ، $(-1, -3 - \sqrt{2})$ ، (د) $y + 3 = \pm(x + 1)$

۲۹ - (أ) قطع زائد ، (ب) $(1, \sqrt{3})$ ، $(1, -\sqrt{3})$ ، (ج) $(1, \sqrt{\frac{11}{2}})$ ، $(1, -\sqrt{\frac{11}{2}})$

(د) $y = \pm\sqrt{\frac{6}{5}}(x - 1)$

۳۳ - (أ) خطان متوازيان .

۳۱ - (أ) خطان متقاطعان .

۳۷ - $y - y_1 = m(x - x_1)$.

۳۵ - (أ) لا يوجد شكل بياني .

۴۳ - $x'^2 + y'^2 = 6$.

۴۱ - $5x^2 + 9y^2 + 6x - 72y + 117 = 0$.

۴۹ - $(-4, 1)$.

۴۵ - $y' = x'^3$.

بند ت - ۱۱

۱ - $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. ۳ - $(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$. ۵ - $y' = (8 - 5\sqrt{3})x'$.

۷ - $y' = -x'/m$. ۹ - $5x^2 + 26xy + 5y^2 - 288 = 0$.

۱۱ - $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 + (28 - 6\sqrt{3})x + (26 - 12\sqrt{3})y - (23 - 12\sqrt{3}) = 0$.

۱۵ - خطان مستقيمان ؛ $x' = \pm 3/\sqrt{10}$

۱۳ - قطع ناقص ، $3x'^2 + y'^2 = 2$

۱۹ - قطع ناقص ؛ $x''^2 + 3y''^2 = 8$

۱۷ - قطع زائد ؛ $2y'^2 - 2x'^2 = 1$

۲۳ - قطع ناقص ؛ $x'^2 + 6y'^2 = 6$

۲۱ - قطع زائد ؛ $3x''^2 - 2y''^2 = \frac{5}{12}$

۲۷ - خطان مستقيمان ، $x' = 0$ ، $y' = 0$

۲۵ - خطان مستقيمان ؛ $x' = \pm 3/\sqrt{2}$

۳۱ - $(9, 3)$ ، $(1, -3)$.

۲۹ - $(\frac{1}{2}, -1)$ ، $(\frac{1}{2}, 1)$.

۳۷ - $y = \left(-1 \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)x$. ۳۵ - $\sqrt{2}$.

۳۳ - $x = 0$ ، $y = 0$.

قائمة المصطلحات العلمية

(أ)

Union	اتحاد
Continuity	اتصال
Intercepts	اجزاء مقطوعة
Probability	احتمال
Abscissa	احداثى سيني
Ordinate	احداثى صادي
Polar coordinate	احداثيات قطبية
Cartesian coordinate	احداثيات كارتيزية
Rectangular coordinate	احداثيات متعامدة
Statistics	احصاء
Asymptotic test	اختبار التقرب
Integral test	اختبار التكامل
Cauchy's root test	اختبار كوشي للجذر النوني
Ratio test	اختبار النسبة
Eccentricity	اختلاف مركزي
Adiabatic	ادياباتي - لا تبادل
Quadrants	أرباع
Decimals	أرقام عشرية
Mathematical induction	استنتاج رياضي
Real numbers	أعداد حقيقية
Natural numbers	أعداد طبيعية
Rational number	أعداد كسرية
Complex numbers	أعداد مركبة
Steepness	انحدار
Reflection	انعكاس
Refraction	انكسار

Latera recta

Preliminaries

Epicycloid

أوتار بؤرية عمودية

أوليات

ايسيكلويد

(ب)

Replica

Numerator

Bacteria

Simple pendulum

Focus

Polonium

بديل

بسط

بكتيريا

بثلول بسيط

بؤرة

بولونيوم

(ت)

Heat exchange

Divergent

Imaginary

Overlap

Supplement

Frequency

Linear combination

Trillion

Trochoid

Implicit differentiation

Logarithmic differentiation

Convergent

Absolutely convergent

Conditionally convergent

Intersection

Radian measure

Concavity

Integration

Improper integrals

Integration by parts

تبادل حرارى

تباعدية

تخيلى

تداخل

تذييل

تردد

تركيبة خطية

ترليون (١٨١٠ فى انجلترا ، ١٢١٠ فى أمريكا)

تروشويد

تفاضل ضمنى

تفاضل لوغارىتمى

تقاربية

تقاربية تقاربا مطلقا

تقاربية تقاربا مقيدا

تقاطع

تقدير دائرى

تقعر

تكامل

تكاملات معتلة

تكامل بالتجزىء

Indefinite integral

Definite integral

Lemma

تكامل غير محدود

تكامل محدد (تكامل معين)

تمهيدية

(ث)

Euler's constant

Thorium

ثابت أولر

ثوريوم

(ج)

Gravity

Radical

Solid

Solid of revolution

Neighborhood

Deleted neighborhood

جاذبية أرضية

جلر

جسم

جسم دوراني

جوار

جوار منقوص

(ح)

Riemann sum

Inner product

Scalar product

Greatest lower bound

Least upper bound

Simple harmonic motion

Calculus

Trigonometry

Spiral

Spiral of Archimedes

Partial sums

حاصل جمع ريمان

حاصل ضرب داخلي

حاصل ضرب عددي

حد أدنى أكبر

حد أعلى أصغر

حركة توافقية بسيطة

حساب التفاضل والتكامل

حساب المثلثات

حلزون

حلزون ارشميدس

حواصل جمع جزئية

(خ)

Rounding off error

Asymptote

خطا تقريب الأرقام

خط تقاربي

(د)

Function	دالة
Exponential function	دالة أسية
Signum function	دالة الاشارة
Bessel function	دالة بسل
Vector-valued function	دالة بقيم متجهة
Composite function	دالة تركيبية
Total cost function	دالة التكلفة الكلية
Total revenue function	دالة الدخل الكلى
Marginal revenue function	دالة الدخل الهامشى
Even function	دالة زوجية
Explicit function	دالة صريحة
Odd function	دالة فردية
Rational function	دالة كسرية
Logarithmic function	دالة لوغاريتمية
Increasing function	دالة متزايدة
Decreasing function	دالة متناقصة
Trigonometric function	دالة مثلثية
Inverse trigonometric function	دالة مثلثية عكسية
Transcendental function	دالة مسترسلة
Monotonic function	دالة مطردة
Integrand	دالة مكاملة
Degree	درجة
Directrix	دليل
Rotation of axes	دوران المحاور

(ر)

Radium	راديوم
Vertex	رأس

(ز)

Angle of elevation	زاوية الارتفاع
--------------------	----------------

Phase angle

زاوية الطور

Inclination angle

زاوية الميل

(س)

Velocity

سرعة

Instantaneous velocity

سرعة لحظية

Average velocity

سرعة متوسطة

Conoid

سطح شبه مخروطي

Ellipsoid

سطح ناقص

Amplitude

سعة

(ش)

Trapezoid

شبه منحرف

Boundary condition

شرط حدى

Work

شغل

Rhombus

شكل معين

(ص)

Stiffness

صلابة

Image

صورة

Indeterminate forms

صور غير محددة

Point-slope form

صور ميل ونقطة

Formula

صيغة

Reduction formula

صيغة الاختزال

(ط)

Kinetic energy

طاقة الحركة

(ع)

Factor

عامل

Acceleration

عجلة

Deceleration

عجلة تقصيرية

Scalar	عدد (مقدار عددي)
Prime number	عدد أولي
Cluster number	عدد تجمع
Multiplicity	عدد مرات التكرار
Moment	عزم
Torque	عزم دوران
Astronomy	علم الفلك
Collinear	على استقامة واحدة
Half-life	عمر النصف
Normal, Perpendicular, Orthogonal	عمودي
Elements	عناصر
Differentials	عناصر تفاضلية

(غ)

Not continuous	غير متصل
----------------	----------

(ف)

Sets	فئات
Subset	فئة جزئية
Empty set	فئة خاوية
Closed set	فئة مغلقة
Interval	فترة
Interval of convergence	فترة التقارب
Hypothesis	فرض
Vector space	فضاء متجه

(ق)

Differentiable	قابلة للتفاضل
Strict	قاطع
Chain rule	قاعدة سلسلة
Simpson's rule	قاعدة سمسون
Trapezoidal rule	قاعدة شبه المنحرف

L'Hospitals rule	قاعدة لوبيتال
Projectile	قذيفة
Pole	قطب
Hyperbola	قطع زائد
Conic section	قطع مخروطي
Parabola	قطع مكافئ
Semicubical parabola	قطع مكافئ نصف تكعيبي
Ellipse	قطع ناقص
Turning force	قوة دوران
Resultant force	قوة محصلة
Absolute value	قيمة مطلقة

(ك)

Catenary	كتينة
Density	كثافة
Polynomials	كثيرات حدود
Partial fraction	كسر جزئي

(ل)

Irreducible	لا تقبل التحليل
Natural logarithms	لوغاريتمات طبيعية
Common logarithms	لوغاريتمات عادية
Limacon	ليماسون

(م)

Fluid	مائع
Inequality	متباينة
Couchy-Schwars inequality	متباينة كوشي شفاتز
Sequences	متابعات
Oscillating sequences	متابعة تذبذبية
Homogeneous	متجانس
Vector	متجه
Position vector	متجه الموضع
Plane vectors	متجهات مستوية

Taylor's series	متسلسلة تايلور
Telescopic series	متسلسلة تلسكوبية
Harmonic series	متسلسلة توافقية
Alternating series	متسلسلة متبدلة الاشارة
Maclourin's series	متسلسلة مكلاورين
Geometrical series	متسلسلة هندسية
Power series	متسلسلات القوى
Continuous	متصل
Independent variable	متغير مستقل
Geometrical progression	متوالية هندسية
Arithmetic mean	متوسط حسابي
Isosceles triangle	مثلث متساوي الساقين
Locus	محل هندسي
Axis	محور
Main axis	محور أساسي
Minor axis	محور أصغر
Major axis	محور أكبر
Transverse axis	محور قاطع
Range	مدى
Least squares	مربعات صغرى
Centre of gravity	مركز الثقل
Centre of mass	مركز الكتلة
Centroid	مركز متوسط
Projection	مسقط
Derivatives	مشتقات
n-factorial	مضروب n
Polygon	مضلع
Parametric equations	معادلات بارامترية
Differential equations	معادلات تفاضلية
Separable differential equation	معادلات تفاضلية قابلة للفصل
Non-parametric equations	معادلات غير بارامترية
Quadratic equation	معادلة من الدرجة الثانية

Coefficient	معامل
Coefficient of friction	معامل الاحتكاك
Related rates	معدلات مرتبطة ببعضها
Antiderivatives	معكوس تفاضلي
Norm	معيار
Denominator	مقام
Magnitude	مقدار
Speed	مقدار السرعة
Cross-section	مقطع
Reciprocal	مقلوب
Restricted	مقيد
Tangent	مماس
Cardoid	منحنى قلبي (كاردويد)
Lemniscate	منحنى الليمنسكيت
Equiangular curve	منحنى متساوي الزوايا
Smooth curve	منحنى منسق (منحنى سلس)
Involute	منشأ
Region	منطقة
Discontinuous	متفصل

(ن)

Corollary	نتيجة
Radius of convergence	نصف القطر التقارب
Radius vector	نصف القطر المتجه
Domain	نطاق
Cartisian corrdinate system	نظام احداثيات كرتيزي
Rectangular system	نظام قائم
Probability theory	نظرية الاحتمالات
Binomial theorem	نظرية ذات الحدين
Mean value therorem	نظرية القيمة المتوسطة
Intermediate value theorem	نظرية القيمة الوسط
Fulcrum	نقطة ارتكاز

Origin	نقطة أصل
Point of inflection	نقطة انقلاب
Interior point	نقطة داخلية
End point	نقطة طرفية
Translation of axes	نقل المحاور
Limit	نهاية
Lower limit of integration	نهاية أدنى للتكامل
Minima	نهاية صغرى
Maxima	نهاية عظمى
Local maxima and minima	نهاية عظمى وصغرى محلية (موضعية)
Relative maximum and minimum	نهاية عظمى وصغرى نسبية
Upper limit of intergration	نهاية عليا للتكامل

(هـ)

Analytical geometry	هندسية تحليلية
Hypocycloid	هيبوسيكلويد
Four-cusped hypocycloid	هيبوسيكلويد ذات أربعة أنياب

(و)

Chord	وتر
Latus Rectum	وتر بؤرى عمودى
Four-leaved rose	وردة بأربع ورقات
Three-leaved rose	وردة ذات ثلاث ورقات

(ى)

refine	ينفح
--------	------

المصطلحات العلمية

Glossary

(A)

Abscissa	احداثى سيني
Absolutely convergent	تقاربية تقارباً مطلقاً
Absolute value	قيمة مطلقة
Acceleration	عجلة
Adiabatic	ادياباتى - لا تبادل
Alternating series	متسلسلات متبدلة الاشارة
Amplitude	سعة
Analytic geometry	هندسة تحليلية
Angle of elevation	زاوية الارتفاع
Angular velocity	السرعة الزاوية
Antiderivative	معكوس تفاضلى
Astronomy	فلك
Asympote	خط تقاربى
Asymtotic test	اختبار التقارب
Average velocity	سرعة متوسطة
Axis	محور

(B)

Bacteria	بكتيريا
Bessel function	دالة بسل
Binomial theorem	نظرية ذات الحدين
Boundary condition	شرط حدى

(C)

Calculus	حساب التفاضل والتكامل
Cardoid	المنحنى القلبي (كاردويد)

Cartesian coordinates
 Catenary
 Cauchy-Schwarz inequality
 Cauchy's root test
 Centre of gravity
 Centre of mass
 Centroid
 Chain rule
 Chord
 Coefficient
 Coefficient of friction
 Common logarithms
 Comparison test
 Complex numbers
 Concavity
 Conditionally convergent
 Conoid
 Continuity
 Convergent
 Corollary
 Cross-section

الاحداثيات الكارتيزية
 منحنى الكتينة
 متباينة كوشي - شفارتز
 اختبار كوشي للجذر
 مركز الثقل
 مركز الكتلة
 مركز متوسط
 قاعدة السلسلة
 وتر
 معامل
 معامل الاحتكاك
 لوغاريتمات عادية
 اختبار مقارنة
 اعداد مركبة
 تقعر
 تقاربية تقاربا مقيدا
 سطح شبه مخروطي
 اتصال
 تقاربية
 نتيجة
 مقطع

(D)

Deceleration
 Decimals
 Decreasing function
 Definite integral
 Degree
 Deleted neighborhood
 Denominator
 Density
 Derivatives

عجلة تقصيرية
 ارقام عشرية
 دالة متناقصة
 تكامل محدد (التكامل المعين)
 درجة
 جوار ناقص
 مقام
 كثافة
 مشتقات

Differentiable

قابلة للتفاضل

Differential equations

معادلات تفاضلية

Differentials

عناصر تفاضلية

Directrix

دليل

Divergent

تباعدية

Divisor

قاسم

Domain

نطاق

(E)

Eccentricity

اختلاف مركزي

Ellipse

قطع ناقص

Ellipsoid

سطح ناقص

Empty set

فئة خاوية

End point

نقطة طرفية

Euler's constant

ثابت اويلر

Even function

دالة زوجية

Explicit function

دالة صريحة

Exponents

اسس

Exponential function

دالة أسية

(F)

Factor

عامل

Fluid

مائع

Focus

بؤرة

Formula

صيغة

Four-cusped hypocycloid

هيبوسيكلويد - ذات أربعة أنياب

Four-leaved rose

وردة أربع ورقات

Fulcrum

نقطة ارتكاز

Function

دالة

(G)

Geometrical progression

متوالية هندسية

Geometrical series

متسلسلة هندسية

Gravity
Greatest lower bound (G.L.B.)

جاذبية أرضية
حد أدنى أكبر

(H)

Half life
Harmonic series
Heat-exchange
Homogeneous
Hypocycloid
Hyperbola
Hypothesis

عمر النصف
متسلسلة توافقية
تبادل حرارى
متجانس
هيبوسيكلويد
قطع زائد
فرض

(I)

Image
Imaginary
Implicit differentiation
Improper integrals
Inclination angle
Increasing function
Indefinite integral
Independent variable
Inequality
Infinite series
Integral test
Integration
Integration by parts
Intercepts
Interior point
Intersection
Interval of convergence
Involute
Isolated point
Isosceles triangle

صورة
تخيلى
تفاضل ضمنى
تكاملات معتلة
زاوية الميل
دالة متزايدة
تكامل غير محدد
متغير مستقل
متباينة
متسلسل لانهاية
اختبار تكامل
تكامل
تكامل بالتجزىء
اجزاء مقطوعة
نقطة داخلية
تقاطع
فترة تقارب
منشأ
نقطة منعزلة
مثلث متساوى الساقين

(K)

Kinetic energy

طاقة الحركة

(L)

Laterra recta

أوتار بؤرية عمودية

Latus rectum

وتر بؤري عمودي

Least squares

مربعات صغرى

Least upper bound (L.U.B)

حد أعلى أصغر

Lemma

تمهيدية

Lemniscate

ليمنسكيت

L'Hospitals' rule

قاعدة لوبيتال

Limacon

ليماسون

Limit

نهاية

Linear combination

تركيبة خطية

Local maxima and minima

نهايات عظمى وصغرى محلية

Locus

محل هندسى

Logarithmic differentiation

تفاضل لوغاريتمى

Logarithmic function

دالة لوغاريتمية

Lower limit of integration

الحد الأدنى للتكامل

(M)

Maclaurin series

متسلسلة مكلاورين

Magnitude

مقدار

Main axis

محور أساسى

Major axis

محور أكبر

Marginal revenue function

دالة الدخل الهامشى

Mathematical induction

الاستنتاج الرياضى

Maxima

نهايات عظمى

Mean value theorem

نظرية القيمة المتوسطة

Minima

نهاية صغرى

Minor axis

محور أصغر

Moment

عزم

Monotonic function

دالة مطردة

Multiplicity

عدد مرات التكرار

(N)

Natural logarithms

لوغاريتمات طبيعية

Natural numbers

أعداد طبيعية

Neighborhood

جوار

n-factorial

مضروب n

Non-parametric equation

معادلة غير بارامترية

Norm

معيار

Normal

عمودي

Not continuous

غير متصل

Numerator

بسط

(O)

Odd function

دالة فردية

Point-slope form

صورة الميل ونقطة

Ordinate

احداثى صاى

Origin

نقطة الاصل

Orthogonal

عمودي

Oscillating sequence

متابعة تذبذبية

Overlap

تداخل

(P)

Parabola

قطع مكافئ

Parametric function

دالة بارامترية

Partial fraction

كسور جزئية

Partial sums

حواصل جمع جزئية

Perpendicular

عمودي

Phase angle

زاوية السطور

Plane vectors

متجهات مستوية

Point of inflection	نقطة الانقلاب
Polar coordinates	احداثيات قطبية
Pole	قطب
Polonium	بولونيوم
Polygon	مضلع
Polynomials	كثيرات حدود
Position vector	متجه الموضع
Power function	دالة قوى
Power series	متسلسلة قوى
Preliminaries	أوليات
Probability theory	نظرية احتمالات
Projectile	قذيفة
Projection	مسطط

(Q)

Quadratic equation	معادلة من الدرجة الثانية
Quadrants	أرباع

(R)

Radian measure	تقدير دائري
Radical	جذر
Radium	راديوم
Radius of convergence	نصف قطر التقارب
Radius vector	نصف القطر المتجه
Range	مدى
Rational fraction	كسور جزئية
Rational numbers	أعداد كسرية
Real numbers	أعداد حقيقية
Reciprocal	مقلوب - معكوس
Rectangular coordinates	احداثيات متعامدة
Reduction formula	صيغة اختزال
Reflection	انعكاس
Refraction	انكسار

Region	منطقة
Related rates	معدلات مرتبطة ببعضها
Relative maximum and minimum	نهاية عظمى وصغرى نسبية
Remainder term	الحد الباقي
Replica	بديل
Restricted	مقيد
Resultant force	قوة محصلة
Riemann sum	حاصل جمع ريمان
Rhombus	شكل معين
Rotation of axes	دوران المحاور
Rounding off error	خطأ تقريب الأعداد
(S)	
Scalar	عدد (مقدار عددي)
Scalar product	حاصل ضرب عددي
Semicubical parabola	قطع نصف تكعيبي
Sequence	متابعة
Separable differential equations	معادلات تفاضلية قابلة للفصل
Sets	فئات
Signum function	دالة الإشارة
Simple harmonic motion	حركة توافقية بسيطة
Simple pendulum	بندول بسيط
Simpson's rule	قاعدة سمسون
Slope	ميل
Smooth curve	منحنى منسق (منحنى سلس)
Solid	جسم
Solid of revolution	جسم دوراني
Speed	مقدار السرعة
Spiral	حلزون
Spiral of Archimedes	حلزون أرشميدس
Squeeze theorem	نظرية الحصر
Statistics	احصاء
Steepness	انحدار
Stiffness	صلابة
Strict	قاطع

(T)

Tangent	مماس
Taylor's series	متسلسلة تايلور
Telescopic series	متسلسلة تلسكوبية
Thorium	ثوريوم
Torque	عزم دوران
Total cost function	دالة التكلفة الكلية
Total revenue function	دالة دخل كلي
Transcendental function	دالة مسترسلة
Translation of axes	نقل المحاور
Transverse axis	محور قاطع
Trapezoid	شبه منحرف
Trapezoidal rule	قاعدة شبه المنحرف
Trigonometric function	دالة مثلثية
Trigonometry	حساب مثلثات
Trillion	ترليون (١٨١٠ في انجلترا ، ١٢١٠ في أمريكا)
Trochoid	تروشويد
Turning force	قوة دوران

(U)

Union	اتحاد
Upper limit of integration	النهاية العليا للتكامل

(V)

Vector	متجه
Vector space	فضاء متجه
Vector-valued function	دالة بقيم متجهة
Velocity	سرعة
Vertex	رأس

Work	(W)	شغل
X-axis	(X)	المحور السيني
Y-axis	(Y)	المحور الصادي

الفهرس الأبجدي

(أ)

- اتجاه موجب لمنحنى ٦٠٠
اتحاد فتين ١٧
اتصال دالة متجهة ٥٩٩
اتصال فى فترة دالة ٧٥
اتصال متجه ٦٠٠
اتصال منتظم ٣٦٦ ، ٣٤٠
أجزاء مقطوعة ٧٧٠
احداثى سبنى ٧٠١
احداثيات ٢٢ ، ٧٠١
احداثيات مستقيم ٢١
اختبار تقرب ٦٣٤
اختبار تكامل ٦٣٥
اختبار جذر ٦٥٥
اختبار متسلسلة متبدلة الاشارة ٦٤١
اختبار مشتقة أولى ١٩٩
اختبار مشتقة ثانية ١٣٧
اختبار مقارنة ٦٣٠
اختبار نسبة متسلسلة ٦٥٠
اختزال الى صورة قياسية مخروطية ٧٧٣ ، ٦٧٥
اختلاف مركزى للقطع الزائد ٤٥٨ ، ٧٦٠
اختلاف مركزى للقطع الناقص ٤٥٨ ، ٧٥٤
أدنى وأعلى حاصل جمع ٢٨٢
ارتفاع اسطوانة ٣١٩
ارشميدس ٣١٠ (مسألة ٥٥)
اس غير كسرى ٣٩١ - ٣٩٢
أساس اللوغاريتم ٤٠٨ ، ٤١١ ، ٤١٤
استنتاج رياضى ١٢٩ ، ١٣٢ ، ١٣٣
- أسطوانة ٢١٩
اشارة عكسية ٢٥
انعكاس فى مستقيم ٧٠٤ ، ٧٤٠
انعكاس فى نقطة ٧٠٤ ، ٧٤٠
ايسيكلويد ٤٧٠
- (ب)
- بارامتر ٤٦٤
بؤرة قطع زائد ٧٥٦
بؤرة قطع مكافئ ٧٥٦
بؤرة قطع ناقص ٧٥٠
- (ت)
- تايلور ، كثيرات الحدود ٦٧٥
تباعد تكامل ٥٧٦ - ٥٧٩
تباعد متتابعة ٦١٠
تباعد متسلسلة ٦١٩
تباعد مقسوم عليه ٥٨ (مسألة ٢٧)
تجزئء فترة ٢٧٩
تجزئء منتظم ٣١١
تردد ٣٧١
تروشويد ٤٧٢
تساوى دالة ٤٨
تفاضل ٢٦٠
تفاضل ضمنى ١٦٢
تفاضل لوغاريتمى ٤٢٨
تقارب تكامل ٥٧٦ ، ٥٧٩
تقارب شرطى ٦٤٧
تقارب متتابعة ٦١٠

تقارب متسلسلة ٦١٩	حاصل جمع متتابعة ٦١١
تقاطع فتيين ١٧	حاصل جمع متجه ٥٨٤
تقريب بكثيرة حدود تايلور ٦٨٠ ، ٦٨٦	حاصل جمع متسلسلات ٦١٩
تقعر ٢٠٢	حاصل جمع متسلسلتين ٦٢٨
تكامل بالتجزىء	حاصل ضرب داخلى (عددى) ٥٩١
تكامل بدوال كسرية ٥١٤ - ٥٢١	حاصل ضرب داخلى لمتجهات ٥٩١
تكامل بدوال مثلثية ٥٠٢ - ٥٠٥	حاصل ضرب عددى ٥٨٦
تكامل بمتسلسلات ٦٨٦	حاصل ضرب متتابعة ٦١١
تكامل غير معين ١٤٩	حجم جسم ٣٢٠
تكامل متسلسلة ٦٦٦ ، ٦٦٧	حد أدنى ٣٣٦
تكامل معتل ٥٧٥ ، ٥٧٩	حد أدنى أكبر ٣٣٦
تناسب ٢٢٦	حد أعلى ٢٣٥
ثابت تناسب ٢٢٦	حد أعلى أصغر ١٥
تناسب عكسى ٢٢٦	حد باق لمتسلسلة ٦٧٥
(ث)	حد عام لمتتابعة ٦٠٨
ثابت ٤٦	حد عام لمتسلسلة ٦١٨
ثابت أويلر ٦٤٨	حركة توافقية بسيطة ٣٧١
(جـ)	حساب صورة غير محددة بالمتسلسلات ٦٨٦
جنر دالة ١٦٦	فئة حل ٢٩ ، ٧٠٧
جنر كثيرة الحدود ٣٩	حل متباينة ٢٩ ، ٧٠٧
جنر مزدوج ٤٠	حل معادلات ٢٩ ، ٧٠٧
جنر معادلة ٢٩	حل معادلة تفاضلية ١٥٦
جمع خطى لمتجه ٥٩٣	(خـ)
جوار ٧٩	خارج قسمة دالة ٥٩
جوار منقوص ٧٩	خارج قسمة متتابعة ٦١١
جوتفريد ليبنز ٢٦ (اسم عالم)	خاصية الجمع للتكامل ٢٨٩
(حـ)	خاصية بؤرة للقطع المتكافىء ٧٤٨
حاصل جمع جزئى بمتسلسلة ٦١٨	خاصية حد أدنى أكبر ٣٣٦
حاصل جمع دالتين ٥٩	خط احداثيات ٢١
حاصل جمع ريمان ٢٧٩	خط تقريبي ٧٠٩
	خطا فى تقريب بمتسلسلة ٦٤٣ ، ٦٨٢ -
	٦٨٦

خطوط تقاربية ٧٥٨

(د)

داخل فترة ٢٦

دالة أسية ٣٩٣ ، ٣٩٩

دالة اطرادية ١٨٦

دالة اكبر عدد صحيح ٥٦

دالة تركيبيه ٥٩

دالة تزايدية اطرادية ١٨٦

دالة تكاليف كلية ٢٥٥

دالة تكاليف هامشية ٢٥٥

دالة تناقصية ١٨٦

دالة ثابتة ٢١

دالة حقيقية ٥٩٧

دالة دخل كلي ٢٥٥

دالة دخل هامشية ٢٥٥

دالة دورية ٣٥٠

دالة زوجية ٣٥١

دالة ضمنية ١٦٠

دالة عدد خرج ١٧٢

دالة فردية ٣٥٠

دالة في فترة ١١٤ - ١١٧

دالة قابلة للتفاضل ١٠٩

دالة كثيرة الحدود ٥٥

دالة كسرية ٥٦

دالة لوغاريتمية ٤١٨

دالة منتج ٥٩٧

دالة متصلة ٧٤

دالة مثلثية عكسية ٣٧٦ ، ٣٧٩

دالة مسترسلة ٥٦ ، ٤١٨

دالة مكاملة ١٤٩

درجة كثيرة الحدود ٣٩

دليل قطع زائد ٦٧٠

دليل قطع مكافئ ٧٤٣

دوران محاور ٧٧١

(ر)

رأس قاطع زائد ٧٥٦

رأس قطع مكافئ ٧٤٣

رأس قطع ناقص ٧٥١

روبرت هوك ٢٨٣

ريمان ٢٧٩

رينيه ديكارت ٧٠٠

(ز)

زاوية ٦٢١

زاوية ارتفاع ٤٨٩

زاوية بين متجهين ٥٩٣

زاوية سالبة ٣٤٨

زاوية موجبة ٣٤٨

زاوية ميل ٦٢٢

زوج مركب من أعداد ٧٠١

(س)

سرعة زاوية ٣٧٢

سرعة منتج ٦٠٢

سرعة نهائية ٤٣٨

سطح شبه مخروطي ٣٢٨ (مسألة ٤٩)

سطح مكافئ ناقص ٣٢٩ (مسألة ٥٧)

سعة دالة الجيب ٣٧١

(ش)

شرط مدى لمعادلة تفاضلية ١٥٦

شرط لمستقيمين متعامدين ٧٢٥

شرط لمستقيمين متوازيين ٧٢٥

شغل ٥٥١ ، ٥٥٢ ، ٥٥٣

شكل بياني لدالة ٥١

شكل بياني لمعادلة ٧٠٨

(ص)

صفر كثيرات الحدود ٣٩

صفر لدالة ٤٨

صفر لمتجه ٥٩٨

صورة احداثيات قطبية مخروطية ٤٥٩ - ٤٦٠

صورة غير محدودة ٥٦٣ ، ٥٦٤ ، ٥٧١ ، ٥٧٢

صورة قياسية لمعادلة قطع زائد ٧٥٧

صورة قياسية لمعادلة قطع ناقص ٧٥٤

صيغة النقطة المنصفة ٧٠٣

(ض)

ضبط سائل ٥٥٦

(ط)

طارة ٣٨٩

طاقة حركة ٢٤١ مسألة (٢٥)

طلب سلعة ٢٥٤

طول منحنى ٤٧٧

(ع)

عجلة ٢٣٦

عجلة تبعاً للجاذبية ٢٤٣

عجلة متجهة ٦٠٢

عدد أولى ٥٩

عدد تخيلي ٢٠

عدد خرج ١٧٢

عدد زوجي ٢٥

عدد سالب ٢٥

عدد صحيح ١٩

عدد صحيح زوجي ٢٣

عدد صحيح فردي ٢٤

عدد طبيعي ١٩

عدد غير سالب ٢٥

عدد غير كسري ٢٠

عدد غير موجب ٢٥

عدد مركب ٢٠

عدد نفس الاشارة ٢٥

عزم جسم ناتج عن دوران ٥٤٨

عزم مجموعة محدودة ٥٣٠ - ٥٣٣

عزم منطقة مستوية ٥٣٦ ، ٥٣٧

عمر النصف لمادة مشعة ٤٣٣

عمود على منحنى ١١٦

عنصرية فئة ١٦

(ف)

فئة ١٦

فئة جزئية ١٧

فئة حل معادلات ٢٩

فئة خالية ١٧

فئة غير محدودة ١٧

فئة محدودة ١٧ ، ٣٣٦

فترة تقارب متسلسلة ٦٥٨

فترة ذالة ٣٥٠

فترة مفتوحة ٢٦

فترة مغلقة ٢٦

فترة مغلقة تحت حاصل جمع ٢٣

فترة مغلقة تحت حاصل ضرب ٢٣

فترة نصف مفتوحة ٢٦

فترة نصف مغلقة ٢٦

(ق)

قاعدة اسطوانة ٣١٩

قاعدة السلسلة ١٣٧

قاعدة تغيير اساس اللوغاريتم ٤١٣

قاعدة سمسون ٣١٣

قاعدة شبه المنحرف ٣١٢	لوغاريتمات ٤٠٨ - ٤١٠ ، ٤١١
قاعدة قوى ١٢١ ، ١٤٤	لوغاريتمات طبيعية ٤١٤
قاعدة لوبيتال ٥٦٣	لوغاريتمات عادية ٤١٤
قاعدة متوازي أضلاع متجه ٥٨٤	ليماسون ٤٤٥ ، ٤٤٩ (مسألة ٣٣)
قانون اسحق ١٥	ليمنسكيت ٤٤٩ (مسألة ١٤)
قانون نيوتن الثاني للحركة ٢٤٣ ، ٦٠٢	ليونارد أويلر ٦٣٨
قانون هوك ٢٨٤	(م)
قطب ٤٣٩	مادة متجانسة ٥٢٧
قطع زائد ٤٥٩ ، ٧٥٦ ، ٧٦٦ ، ٧٦٨ ، ٧٧٥	متباينة كوشي - شفارتز ٥٩٥ (مسألة ٣)
قطع مخروطي ٧٤٣ ، ٧٧٤ ، ٧٧٦	متباينة مثلث لمتجهات ٥٩٥
قطع مكافئ ٤٥٨ ، ٧٤٣ ، ٧٦٥ ، ٧٦٨ ، ٧٧٥	متابعة ٦٠٨
قطع مكافئ نصف تكعيبي ٤٨٠	متابعة الى مالا نهاية ٦١١
قطع ناقص ٤٥٨ ، ٧٥٠ ، ٧٦٥ ، ٧٦٨ ، ٧٧٥	متابعة تباعدية ٦١٠
قوانين الأسس ٣٩٣	متابعة تذبذبية ٦١١
قوانين اللوغاريتمات ٤١١	متابعة محدودة ٦١٣
قوى محصلة ٥٨٨	متجه ٥٨٣
قيمة أساسية لدوال مثلثية عكسية ٣٧٨ ، ٣٧٩	متجه عمودي ٥٩٣
قيمة دالة ٤٥	متسلسلة ٦١٧
قيمة صغرى لدالة ١٦٩	متسلسلة P ٦٣٦
قيمة عظمى لدالة ١٦٩	متسلسلة إلى مالا نهاية ٦٢٢
قيمة مطلقة ٣٤	متسلسلة تايلور ٦٧٦
(ك)	متسلسلة تقارب مشروط ٦٤٧
كتبة ٤٠٧ (مسألة ٧٦)	متسلسلة تقاربية ٦١٩
كثافة مادة ٥٢٧	متسلسلة تقاربية مطلقة ٦٤٧
كثير الحدود ٣٨	متسلسلة تذبذبية ٦٢٣
كسور جزئية ٥١٦	متسلسلة توافقية متبدلة الإشارة ٦٤١
(ل)	متسلسلة جتا س ٦٧٠
لا نهائية ٢٦	متسلسلة حدود غير سالبة ٦٣٠
لوبيتال ٥٦٣	متسلسلة ديرشلت ٦٦٣
	متسلسلة ذات الحدين ٦٩١ ، ٦٩٣ - ٦٩٧
	متسلسلة قوى ٦٥٧ ، ٦٦٠
	متسلسلة مكثورين ٦٠٨ ، ٦٦٩

متسلسلة هندسية ٦٢٠	مستقيم متوسط في مثلث ٧١٨
متسلسلة $\ln (1+x)$ ٦٧١	مستقيم هابط ٧٢٤
متسلسلة $\sin^{-1}x$ ٦٧١	مسقط متجه ٥٩٦
متسلسلة $\tan^{-1}x$ ٦٧١	مسقط نقطة على مستقيم ٧٠٠
متعامد ١٦٨	مشتقة ١٠٩ - ١١٧ ، ١٣٧
متغير مستقل ٤٦	مشتقة أعلى ١٤٧ - ١٤٨
متوسط سرعة ٢٣٣	مشتقة تركيبيية ١٣٧
مجسم قطع ناقص ٢٨٠ (مسألة ٥٨) ، ٧٥١	مشتقة حاصل جمع ١٢١
مجسم قطع ناقص ناشئ عن الدوران ٣٢٧	مشتقة حاصل ضرب ١٢٧
(مسألة ٣٥)	مشتقة خارج قسمة ١٣٠
محور احداثيات ٧٠٠	مشتقة دالة أسية ٤٠٢ ، ٤٢٤
محور اساسي مخروطي ٤٥٨	مشتقة دالة لوغاريتمية ٤١٨ ، ٤٢٠ ، ٤٢٣
محور مرافق لقطع زائد ٧٥٩	مشتقة دالة متجه ٥٩٩
محور قطع مكافئ ٧٤٣	مشتقة دوال مثلثية ٣٦٠ ، ٣٦١
محور قطع ناقص ٧٥١	مشتقة دوال مثلثية عكسية ٣٨٣ - ٣٨٤
محور مستعرض لقطع زائد ٧٥٦	مشتقة قوة ١٢١ ، ١٤٢ - ١٤٤ ، ٤٢٤
مدى دالة ٤٦	مشتقة متجه ٦٠٠
مدى قذيفة ٤٨٩	مشتقة متسلسلة ٦٦٥
مركبات ٥٨٣	مشتقة يسرى ١١٥
مركز قطع زائد ٧٥٦	مشتقة يمنى ١١٥
مركز قطع ناقص ٧٥٠	مضروب n ($n!$) ٦٢٣
مركز متوسط (أو مركز ثقل) مجموعة محدودة	مضلع محاط بمنحنى ٤٧٧
٥٣٣ - ٥٣٠	معادلة الدائرة ٧١٤ ، ٧١٦
مركز متوسط (أو مركز ثقل) منطقة مستوية	معادلة بارامترية ٤٦٤
٥٣٨	معادلة خطية ٧٣٤
مرونة التكلفة الكلية ٢٥٧ (مسألة ٧)	معادلة درجة أولى ٧٣٤
مرونة الطلب ٢٥٩ (مسألة ٢٠)	معادلة درجة ثانية ٧٦٦ - ٧٧٣
مساحة منطقة باحداثيات قطبية ٤٥٢	معادلة دوران ٧٧١ - ٧٧٢
مساحة منطقة باحداثيات كارتيزية ٣٠٢	معادلة دوران المحورين ٧٧١ - ٧٧٣
مسافة بين نقطتين ٣٦ ، ٧٠١ ، ٧٠٣	معادلة الطلب ٢٥٤
مسافة مباشرة ٧٠٢	معادلة عامة من الدرجة الثانية ٣٠٢
مسافة من مستقيم لنقطة ٧٠٣	معادلة مسار قذيفة ٤٨٩
مستقيم حقيقي ٢٢	معادلة مستقيم ٧٣١ - ٧٣٤

نظرية قيمة متوسطة ٣٧٤
 نظرية كوشي شغارتز ٥٩٥ (مسألة ٣)
 نقطة أصل ٢١
 نقطة انقلاب ٢٠٤
 نقطة داخلية لفترة ٢٦
 نقطة صفري لمنحنى ١٦٩
 نقطة طرفية لفترة ٢٦
 نقطة عظمى لمنحنى ١٦٩
 نقل المحاور ٧٦٣
 نهاية تكامل ٢٨٢
 نهاية دالة ٦٢ - ٧٠ ، ٨٤
 نهاية دالة متجهة ٥٩٨
 نهاية صفري محلية ١٩٨
 نهاية عظمى محلية ١٩٨
 نهاية عظمى نسبية ٢٢٣
 نهاية علوية وسفلية للتكامل ٢٨٢
 نهاية قصوى لدالة ١٦٨
 نهاية قصوى محلية ١٩٠
 نهاية متتابعة ٦١٠
 نهاية متجه ٥٩٨
 نهاية متسلسلة ٦١٩
 نهاية يسارية ٦٦ ، ٨٧
 نهاية يمنية ٦٦ ، ٣٢٤
 نيوتن اسحق ١٥
 (هـ)
 هيبوسكلويد ٤٦٩ ، ٤٧٠
 (و)
 وتر بؤري عمودى لقطع مكافئ ٧٤٦
 وترى بؤري عمودى لقطع ناقص ٧٥٣
 وحدة دائرة ٣٥٥
 وردة ٤٤٥ ، ٤٤٩
 (ى)
 يوحنا برنوللى ٥٦٣

معادلة نقل محاور ٧٦٣ - ٧٦٥
 معاملات ذات الحدين ٦٩١ - ٦٩٤
 معاملات كثيرة الحدود ٣٩
 معكوس تفاضلى ١٤٩
 معكوس جيب الزاوية ٣٧٧ - ٣٨٠
 معكوس ظل الزاوية ٣٧٩ ، ٣٨١
 معكوس قاطع الزاوية ٣٧٩ - ٣٨٠
 مقدار سرعة ٢٣٦ ، ٤٨٧ ، ٦٠١
 مقدار متجه ٥٨٥
 مقياس التقسيم ٢٨٠
 مقياس نصف قطرى للزاوية ٣٤٨
 مكلورين كولن ٦١٠
 مماس رأسى ٢١٦
 مماس لمنحنى ١١٤
 مماس يساوى ١١٥
 مماس يمينى ١١٥
 مميز مخروطى ٦٤٥
 منحنى قلبى ٤٤٨ ، ٤٤٩ (مسألة ٦)
 منحنى متساوى الزوايا ٤٥٠ (مسألة ٥٥)
 منشأ دائرة ٤٧٣ (مسألة ٤١)
 متجه موضع ٦٠١
 ميل مستقيم ٧٢٣
 ميل منحنى ١١٣
 (ن)
 ناير ٤١١
 نصف قطر التقارب ٦٥٨
 نطاق دالة ٤٦
 نظرية أساسية فى الجبر ٣٩
 نظرية أساسية للتفاضل والتكامل ٢٩١
 نظرية العامل ٤٠
 نظرية بابس ٥٤٤
 نظرية ذات الحدين ٥٩٢
 نظرية رول ١٨١

رقم الايداع بدار الكتب

١٦٨٣ / ٢٦٥٣

مطابع الدار الهندسية

